

Opravná písemná práce z NSTP202

Čtvrtek, 02.06.2016

1. Předpokládejme, že platný lístek na tramvaj má v Praze 95 % Čechů a jen 60 % zahraničních turistů. V tramvaji jede 85 Čechů, 15 zahraničních turistů a revizor. Ten si náhodně vybere jednoho cestujícího ke kontrole jízdenky a zjistí, že jízdenka je neplatná. Jaká je pravděpodobnost, že vybraný cestující s neplatnou jízdenkou je Čech?

[5 bodů]

2. Uvažujte náhodný vektor (X, Y) s hustotou danou předpisem

$$f(x, y) = \begin{cases} c(x + y) & \text{pokud } x \in (0, 2) \text{ a } y \in (0, 2) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

- (a) Určete konstantu c .
(b) Spočítejte $E\frac{X}{X+Y}$.
(c) Určete $P[X + Y > 1]$.

[7 bodů]

3. Uvažujte posloupnost nezávislých náhodných veličin $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ takových, že X_n má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(n, n + 3)$.

- (a) Platí pro posloupnost $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ silný zákon velkých čísel? Zapište jeho znění a upravte jej do co nejjednoduššího tvaru.
(b) Určete pravděpodobnost toho, že pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$ nastane jev $[X_n > n + 1]$.

[6 bodů]

4. Doba životnosti jedné žárovky je náhodná veličina s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou 5 týdnů, tj. hustota tohoto rozdělení je

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} e^{-x/5} & x > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pomocí centrální limitní věty přibližně spočítejte pravděpodobnost, že když jsme koupili 35 žárovek a zakaždým když jedna vyhoří tak ji hned nahradíme další, tak nam vydrží svítit alespoň tři roky.

[6 bodů]

5. Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z diskrétního rozdělení, pro které platí

$$P(X_i = k) = p(1 - p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

a $p \in [0, 1]$ je neznámý parametr.

- (a) Odhadněte parametr p metodou maximální věrohodnosti.
(b) Uvažujte odhad $T_n = \frac{n}{1 + \sum_{i=1}^n X_i}$. Je T_n konzistentní odhad parametru p ?

[6 bodů]

Celkem 30 bodů. K úspěšnému složení zápočtu je třeba získat alespoň **18 bodů** (60 %).