7. cvičení z NMSA202
11. 4. 2015 & 12. 4. 2016

Borelova a Cantelliho věta

1. Nekonečně krát hodíme symetrickou šestistěnnou kostkou. Zjistěte, s jakou pravděpodobností
   (a) padne šestka v nekonečně mnoha hodech,
   (b) padne šestka ve všech až na konečně mnoho hodů,
   (c) padne nekonečně krát 100 šestek za sebou.

2. Nechť $X_1, X_2, \ldots$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s exponenciálním rozdělením s parametrem $\lambda = 1$. Určete pravděpodobnost, že
   (a) pro nekonečně mnoho $i \in \mathbb{N}$ nastane jev $A_i = \big[X_i > \ln i^2\big]$,
   (b) pro nekonečně mnoho $i \in \mathbb{N}$ nastane jev $A_i = \big[X_1 > \ln i^2\big]$,
   (c) pro nekonečně mnoho $i \in \mathbb{N}$ nastane jev $A_i = \big[X_i > \ln i\big]$,
   (d) pro nekonečně mnoho $i \in \mathbb{N}$ nastane jev $A_i = \big[X_1 > \ln i\big]$.

3. Nechť $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin, pro které $\mathsf{P}(X_n = 0) = 1 - 1/n$ a $\mathsf{P}(X_n = 1) = 1/n$.
   (a) Zjistěte, zda X_n konverguje k 0 v pravděpodobnosti.
   (b) Ukažte, že X_n nekonverguje k 0 skoro jistě.

4. Nechť má veličina X hustotu $f(x) = \dfrac{x^m}{m!}\, e^{-x}$ pro $x \geq 0$ a $f(x) = 0$ jinak, kde $m \in \mathbb{N}$.
   (a) Spočítejte $\mathsf{E}\, X$ a $\mathsf{var}\, X$.
   (b) Pomocí Čebyševovy nerovnosti ukažte, že platí

$$\mathsf{P}\big(0 < X < 2(m+1)\big) \geq \frac{m}{m+1}.$$

5. Nechť X_n jsou nezávislé a stejně rozdělené náhodné veličiny. Ukažte, že
   (a) je-li $\mathsf{E}\,|X_1| = \infty$, pak s pravděpodobností jedna nastane pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$ jev $\big[|X_n| \geq n\big]$.
   (b) je-li $\mathsf{E}\,|X_1| < \infty$, pak s pravděpodobností jedna nastane nejvýše pro konečně mnoho $n \in \mathbb{N}$ jev $\big[|X_n| \geq n\big]$.
   (c) Položte $Y_n = \frac{X_n}{n}$. Využijte předchozích výsledků a dokažte, že pokud $\mathsf{E}\,|X_1| = \infty$, pak Y_n nekonverguje skoro jistě k nule.
   (d) Dokažte, že Y_n konverguje v pravděpodobnosti k nule.

Opakování z přednášky

Definice. Nechť $A_1, A_2, \ldots$ je posloupnost náhodných jevů. Označme

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \qquad \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k. \tag{7.1}$$

Jev $\limsup_{n\to\infty} A_n$ znamená, že nastalo nekonečně mnoho jevů A_n, jev $\liminf_{n\to\infty} A_n$ znamená, že nastanou všechny A_n až na konečně mnoho.

Platí

$$\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right)^c = \liminf_{n\to\infty} A_n^c. \tag{7.2}$$

Příklad: Nechť $\Omega = \{0,1\}$ a uvažujme posloupnost jevů $\{0\},\{1\},\{0\},\{1\},\{0\},\{1\},\ldots$, pak jejich $\limsup$ je $\{0,1\}$ a jejich $\liminf$ je $\emptyset$.

Borel-Cantelliho 0-1 zákony:

- (Cantelli) Je-li $\{A_n\}$ posloupnost jevů takových, že $\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n) < \infty$, pak

$$\mathsf{P}\Big(\limsup_{n\to\infty} A_n\Big) = 0. \tag{7.3}$$

- (Borel) Nechť je $\{A_n\}$ posloupnost **nezávislých** jevů. Pak

$$\mathsf{P}\Big(\limsup_{n\to\infty} A_n\Big) = 0, \text{ je-li } \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n) < \infty, \tag{7.4}$$

$$\mathsf{P}\Big(\limsup_{n\to\infty} A_n\Big) = 1, \text{ je-li } \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n) = \infty. \tag{7.5}$$

Konvergence v pravděpodobnosti a konvergence s.j. Nechť $X_1, X_2, \ldots$ a X jsou náhodné veličiny definované na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$. Řekneme, že X_n konverguje k X **skoro jistě** (s.j.), jestliže

$$\mathsf{P}\Big(\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\Big) = 1. \tag{7.6}$$

Tj. pro skoro všechna $\omega \in \Omega$ platí, že $X_n(\omega) \to X(\omega)$. Jedná se tedy o konvergenci skoro všude vzhledem k míře P.

Řekneme, že X_n konverguje k X v **pravděpodobnosti**, jestliže

$$\forall_{\varepsilon>0} \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\Big(\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\Big) = 0. \tag{7.7}$$

Tj. míra množiny těch $\omega \in \Omega$, pro které $|X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon$, konverguje k nule. Jedná se tedy o konvergenci v míře P .

Čebyševova nerovnost: Je-li $X \in L_2$, pak

$$\mathsf{P}\big(|X - \mathsf{E}\,X| \geq \varepsilon\big) \leq \frac{\mathsf{var}\,(X)}{\varepsilon^2} \quad \text{pro všechna } \varepsilon > 0. \tag{7.8}$$