

Náhodné vektory

1. Házíme třikrát mincí. Označme X počet líců v prvních dvou hodech a Y počet rubů v posledních dvou hodech.
 - (a) Určete sdružené rozdělení vektoru (X, Y) .
 - (b) Určete marginální rozdělení veličin X a Y . Jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé?
 - (c) Spočítejte kovarianci $\text{cov}(X, Y)$ a korelační koeficient ρ_{XY} . Jaký je vztah mezi nezávislostí dvou veličin a jejich kovariancí/korelací?
2. Chystáte oslavu narozenin ve své oblíbené restauraci a zvete všechny své příbuzné (budete za ně platit). Množství peněz, které všichni Vaši hosté dohromady projí a propijí (v tisíci EUR), jsou náhodné veličiny X a Y . Ze zkušenosti víte, že vektor $(X, Y)'$ má spojitě rozdělení charakterizované sdruženou hustotou

$$f(x, y) = \begin{cases} c(x + y) & \text{pro } 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- (a) Určete konstantu $c > 0$.
 - (b) Jaké je rozdělení částky, kterou zaplatíte jen za nápoje? Jaké je rozdělení obnosu, který padne jen na jídlo? Jsou tyto dvě veličiny nezávislé?
 - (c) Spočítejte kovarianci $\text{cov}(X, Y)$ a korelační koeficient ρ_{XY} . Interpretujte.
 - (d) Jaká je pravděpodobnost, že za pití zaplatíte více než dvojnásobek toho, co za jídlo?
 - (e) Spočítejte $E\left(\frac{1}{X+Y}\right)$.

(Na rozmyšlení: Jak vypadá distribuční funkce $F(x, y)$?)
3. Dvojice součástek má dobu životnosti popsanou sdruženou hustotou
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-x-y/2} & \text{pro } x > 0, y > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$
 - (a) Jaké je rozdělení dob životnosti jednotlivých součástek? Jsou tyto doby nezávislé?
 - (b) S jakou pravděpodobností první součástka přežije druhou?
4. Krajta naklade N vajíček, kde N je náhodná veličina s Poissonovým rozdělením $\text{Po}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Pravděpodobnost, že se z daného vajíčka vylíhne živá krajička, je $p \in (0, 1)$, přičemž procesy „líhnutí“ jsou pro různá vajíčka nezávislé.
 - (a) Jaká je pravděpodobnost, že se vylíhne právě k krajiček? Jaký je očekávaný počet vylíhnutých krajiček?
 - (b) Jaké je rozdělení N , jestliže víme, že se vylíhlo k krajiček?
 - (c) Jsou veličiny udávající počet nakladených vajíček N a počet vylíhnutých krajiček nezávislé?
5. Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(-1, 1)$. Označme $Y = X^2$. Spočítejte kovarianci veličin X a Y a jejich korelační koeficient ρ_{XY} . Jsou X a Y nezávislé?
6. Náhodný vektor $(X, Y)'$ má rovnoměrné rozdělení na množině M , kde $M = \{(x, y) : x \in [0, 1], y \in [0, 1], y \geq x\}$.
 - (a) Rozhodněte, zda jsou X a Y nezávislé.
 - (b) Spočítejte $\text{cov}(X, Y)$.
7. Nechť $X_1, \dots, X_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s distribuční funkcí F a hustotou f . Označme $U = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ a $V = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$.
 - (a) Spočítejte distribuční funkci a hustotu veličiny U .
 - (b) Spočítejte distribuční funkci a hustotu veličiny V .
 - (c) Nechť F a f odpovídají rovnoměrnému rozdělení na intervalu $[0, 1]$. Spočítejte v tomto případě EU , $\text{var}(U)$, EV a $\text{var}(V)$.

Opakování z přednášky

Kovariance a korelace: Nechť $E X^2 < \infty$, $E Y^2 < \infty$. Kovariance $\text{cov}(X, Y)$ náhodných veličin X, Y je definována jako

$$\text{cov}(X, Y) = E(X - E X)(Y - E Y) = E(XY) - (E X)(E Y).$$

Koeficient korelace $\text{corr}(X, Y) = \rho_{XY}$ je definován jako

$$\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var } X} \sqrt{\text{var } Y}},$$

je-li $\text{var } X, \text{var } Y > 0$. Platí vždy $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$.

Marginální rozdělení:

- (a) Jestliže má $\mathbf{X} = (X, Y)^T$ spojité rozdělení s hustotou $f(x, y)$, pak marginální hustotu veličiny X spočteme jako

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy.$$

Podobně pro marginální hustotu f_Y veličiny Y .

- (b) Jestliže má $\mathbf{X} = (X, Y)^T$ diskrétní rozdělení a nabývá pouze hodnot (x_i, y_j) , pak marginální rozdělení veličiny X spočteme jako

$$P(X = x_i) = \sum_j P(X = x_i, Y = y_j).$$

Nezávislost:

- (a) Jestliže má $\mathbf{X} = (X, Y)^T$ spojité rozdělení s hustotou f , X má marginální hustotu f_X a Y má hustotu f_Y , pak jsou veličiny X, Y nezávislé právě tehdy, když

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \text{ pro s.v. } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- (b) Jestliže má $\mathbf{X} = (X, Y)^T$ diskrétní rozdělení a nabývá pouze hodnot (x_i, y_j) , pak jsou veličiny X, Y nezávislé právě tehdy, když

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j) \text{ pro všechna } x_i, y_j.$$

Beta funkce: Při výpočtech se někdy hodí používat tzv. **beta funkci**, která je pro $a, b > 0$ definována jako

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx.$$

Souvislost s gama funkcí (viz předchozí cvičení):

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Výsledky

1. (a) sdružené rozdělení:

		Y		
		0	1	2
X	0	0	1/8	1/8
	1	1/8	1/4	1/8
	2	1/8	1/8	0

- (b) marginální rozdělení: $P(X = 0) = 1/4$, $P(X = 1) = 1/2$, $P(X = 2) = 1/4$, totéž pro Y . Veličiny X a Y jsou závislé.
- (c) $\text{cov}(X, Y) = -1/4$, $\rho_{XY} = -1/2$. Platí: X, Y nezávislé (a ex. $E X^2, E Y^2$) $\Rightarrow \text{cov}(X, Y) = 0$. Opačné tvrzení obecně neplatí.
2. (a) $c = 1$,
 (b) $f_X(x) = x + 1/2$ pro $x \in (0, 1)$ a $f_X(x) = 0$ jinak; $f_Y(y) = y + 1/2$ pro $y \in (0, 1)$ a $f_Y(y) = 0$ jinak; veličiny X a Y jsou závislé,
 (c) $\text{cov}(X, Y) = -1/144$, $\rho_{XY} = -1/11$,
 (d) $P(Y > 2X) = 5/24$,
 (e) $E\left(\frac{1}{X+Y}\right) = 1$.
3. (a) obě součástky mají exponenciální rozdělení: $f_X(x) = e^{-x}$ pro $x > 0$ a $f_X(x) = 0$ jinak, $f_Y(y) = \frac{1}{2}e^{-y/2}$ pro $y > 0$ a $f_Y(y) = 0$ jinak; doby životnosti jsou nezávislé,
 (b) $P(X > Y) = 1/3$.
4. (a) $P(X = k) = (\lambda p)^k e^{-\lambda p} / k!$, $k = 0, 1, \dots$ tj. počet narozených krajiček má Poissonovo rozdělení $\text{Po}(\lambda p)$ a tedy $E X = \lambda p$,
 (b) $P(N = n | X = k) = \frac{\lambda^{n-k} (1-p)^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda(1-p)}$ pro $n = k, k+1, \dots$,
 (c) veličiny jsou závislé.
5. $\rho_{XY} = 0$, veličiny jsou závislé.
6. (a) Veličiny X a Y jsou závislé, (b) $\text{cov}(X, Y) = 1/36$.
7. (a) $F_U(u) = [F(u)]^n$, $f_U(u) = n[F(u)]^{n-1} f(u)$,
 (b) $F_V(v) = 1 - [1 - F(v)]^n$, $f_V(v) = n[1 - F(v)]^{n-1} f(v)$,
 (c) $E U = n/(n+1)$, $\text{var}(U) = n/[(n+1)^2(n+2)]$,
 $E V = 1/(n+1)$, $\text{var}(V) = n/[(n+1)^2(n+2)]$.