4. cvičení z NMSA202
14. 3. 2015 & 22. 4. 2015

Náhodná veličina — spojité rozdělení

1. Doba mezi příjezdy autobusů (v minutách) má rozdělení s hustotou
$$f(x) = \begin{cases} c\,e^{-x/5}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$
   (a) Určete konstantu $c > 0$, tak aby f byla hustota. Jak se toto rozdělení nazývá?
   (b) Určete distribuční funkci F a načrtněte ji. Připomeňte základní vlastnosti distribuční funkce.
   (c) Jaká je střední doba mezi příjezdy autobusů?
   (d) Spočtěte rozptyl doby mezi příjezdy autobusů.
   (e) Jaká je pravděpodobnost, že interval mezi dvěma autobusy bude přesně 15 minut?
   Jaká je pravděpodobnost, že interval mezi dvěma autobusy bude delší než 15 minut?
   Jaká je pravděpodobnost, že doba mezi příjezdy dvou autobusů bude v intervalu $[5, 20]$ min?
   (f) Vyjádřete kvantilovou funkci F^{-1} a načrtněte ji. Určete medián X.
2. Poloměr koule má náhodnou délku R s rovnoměrným rozdělením na $[0, a]$, $a > 0$.
   (a) Připomeňte základní charakteristiky veličiny R (znáte z přednášky).
   (b) Určete střední hodnotu a rozptyl objemu koule.
3. Nechť X je veličina z příkladu 1. Definujme veličinu Y jako $Y = \exp(X)$. Určete rozdělení (distribuční funkci a hustotu) veličiny Y.
4. Nechť má náhodná veličina X rovnoměrné rozdělení na intervalu $[-1, 1]$.
   (a) Jsou jevy $\left[X^2 > \frac{1}{4}\right]$ a $\left[X > 0\right]$ nezávislé? Určete jejich pravděpodobnosti a $\mathsf{P}\left(X^2 > \frac{1}{4} \,|\, X > 0\right)$.
   (b) Určete rozdělení (distribuční funkci a hustotu) veličiny $Y = X^2$.
   (c) Spočítejte střední hodnotu a rozptyl veličiny Y.
5. Ověřte, že rozdělení z příkladu 1 je „bez paměti“, tj. platí
$$\mathsf{P}\big(X > x + y \,|\, X > y\big) = \mathsf{P}\big(X > x\big), \quad \text{pro všechna } x, y > 0.$$
6. Nechť má X rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0, 2\pi]$. Určete rozdělení a střední hodnotu veličiny $Y = \sin X$.
7. Pro veličinu X s normovaným normálním rozdělením $\mathsf{N}(0, 1)$ určete $\mathsf{E}\,X$, $\mathsf{var}\,X$ a $\mathsf{E}\,e^{X^2/4}$.
8. Uvažujme funkce
   (a) $f(x) = c\,x^{-a}$ pro $x > 1$ a $f(x) = 0$ jinak,
   (b) $g(x) = \dfrac{c}{1 + (x - a)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

   Pro které konstanty a, c je f (resp. g) hustota? Určete střední hodnotu odpovídající rozdělení s touto hustotou.
9. Mějme pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$, kde $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ a $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \Omega\}$ a $\mathsf{P}(\{1, 2\}) = \mathsf{P}(\{3, 4\}) = \frac{1}{2}$. Na tomto prostoru uvažujme reálné funkce X a Y definované následovně: $X(1) = X(2) = 1$, $X(3) = X(4) = 2$, $Y(1) = Y(2) = Y(3) = 1$, $Y(4) = 2$. Rozhodněte, zda jsou tyto funkce náhodnými veličinami.

Opakování z přednášky

Nechť pro náhodnou veličinu X s distribuční funkcí F existuje funkce $f \geq 0$ taková, že $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ (distribuční funkce F je absolutně spojitá). Pak říkáme, že X má **spojité rozdělení**. Funkce f se nazývá **hustota**.

Vlastnosti.

- Spojitá náhodná veličina nabývá **nespočetně mnoha** hodnot z nějakého podintervalu $\mathbb{R}$. (Rozdělení P_X je absolutně spojité vzhledem k Lebesgueově míře.)
- **Rozdělení** veličiny X je charakterizováno hustotou $f \geq 0$. Pro každou $B \in \mathcal{B}$ je pak

$$\mathsf{P}(X \in B) = \int_B f(x)\,\mathrm{d}x.$$

  Speciálně:

  (a) $1 = \mathsf{P}(X \in \mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$,
  (b) distribuční funkce F je spojitá na $\mathbb{R}$ a lze ji spočítat jako

$$F(x) = \mathsf{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

  (c) pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ je $\mathsf{P}(X = a) = \int_{\{a\}} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$,
  (d) je-li $a < b$, pak

$$\mathsf{P}(a < X < b) = \mathsf{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- **Střední hodnota** X se spočte jako

$$\mathsf{E}\,X = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{(existuje-li)}.$$

  Střední hodnota veličiny $Y = h(X)$ se spočte jako $\mathsf{E}\,h(X) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x)\,\mathrm{d}x$ (existuje-li).

- **Kvantilová funkce** $F^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R}$ spojité veličiny X je inverzní funkce k distribuční funkci F. **Medián** veličiny X je taková hodnota $\hat{x}$, že $\mathsf{P}(X \leq \hat{x}) = \mathsf{P}(X \geq \hat{x}) = 1/2$, tj. spočteme jej jako $\hat{x} = F^{-1}(1/2)$.

Při výpočtech se někdy hodí používat tzv. **gama funkci**, která je pro $p > 0$ definovaná jako

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Platí

- $\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$. Speciálně, je-li $n \in \mathsf{N}$, pak $\Gamma(n) = (n-1)!$,
- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$,
- pro libovolné $a > 0$ platí

$$\int_0^{\infty} x^{p-1}\,\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(p)}{a^p}.$$