Limitní věty II.

1. Uvažujme posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ s konečným rozptylem. Definujme veličiny $Y_k = k^{1/3}X_k$, $k = 1, 2, \dots$. Splňuje posloupnost $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$ silný zákon velkých čísel? Pokud ano, tak v řeči náhodných veličin $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ popište, co nám tento zákon dává.
2. Uvažujme posloupnost nezávislých náhodných pokusů, z nichž každý skončí úspěchem s pravděpodobností $p \in (0, 1)$ a neúspěchem s pravděpodobností $1 - p$. Dokažte, že relativní četnosti úspěchů v n pokusech konvergují při $n \to \infty$ k p skoro jistě.
3. Nechť má náhodná veličina X normální rozdělení $\mathsf{N}(1, 4)$. Pomocí tabulek určete $\mathsf{P}(X < 1)$, $\mathsf{P}(X > 5)$ a $\mathsf{P}(|X| < 2)$.
4. Nechť $X_1, X_2, \dots$ jsou nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$.
   (a) Jaké je rozdělení veličin $\sum_{i=1}^{n} X_i$ a $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$? Určete dále rozdělení veličiny
   $$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}.$$
   Vyjádřete veličinu Z_n pomocí výběrového průměru $\overline{X}_n$.
   (b) Nechť $\mu = 1$ a $\sigma^2 = 4$. Jak velké n je třeba zvolit, abychom měli zaručeno, že průměr veličin $X_1, \dots, X_n$ bude kladné číslo s pravděpodobností alespoň 0,99?
5. Jaká je pravděpodobnost, že při 10 000 hodech symetrickou mincí padne rub více než 4900 krát? Použijte CLV.
6. Nechť ν_n značí relativní četnost líců v n hodech mincí (mince je symetrická a hody provádíme nezávisle). Zjistěte, kolik musíme provést hodů, aby pravděpodobnost jevu $\big[|\nu_n - 1/2| \le 0{,}05\big]$ byla alespoň 0,95? Řešte
   (a) pomocí Čebyševovy nerovnosti,
   (b) pomocí CLV.
7. Na server má přístup 100 uživatelů. Z dřívějších zkušeností víme, že uživatel má na serveru průměrně 120 MB dat, směrodatná odchylka množství dat je 40 MB. Jak velký diskový prostor potřebujeme, aby s pravděpodobností alespoň 0.99 nedošlo k jeho zaplnění? (Užijte CLV.)
8. V daný den navštíví menzu n studentů, přičemž pravděpodobnost, že náhodný student chce vegetariánské jídlo je $p \in (0, 1)$. Označme V_n náhodnou veličinu udávající počet studentů požadujících vegetariánský oběd. Najděte ε tak, aby
   $$\mathrm{P}\Big(\Big|\tfrac{V_n}{n} - p\Big| < \varepsilon\Big) \approx 0{,}97.$$
   Vyčíslete pro $p = 0{,}1$ a $n = 100$ studentů. Pokuste se interpretovat, co jste spočítali.
9. Životnost jedné žárovky má exponenciální rozdělení se střední hodnotou 10 hodin. Jakmile se jedna žárovka porouchá, nahradíme ji ihned další. Kolik máme zakoupit žárovek, abychom měli jistotu, že budeme moci svítit alespoň 600 hodin s pravděpodobností alespoň 95%?

Opakování z přednášky

Normální rozdělení. Normální rozdělení $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ má hustotu

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{8.1}$$

kde $\mu \in \mathbb{R}$ a $\sigma^2 > 0$ jsou parametry. Je-li $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$, tj. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-x^2/2\}$, pak se toto rozdělení nazývá standardizované (normované) normální rozdělení a značí se $\mathsf{N}(0, 1)$.

- Distribuční funkce rozdělení $\mathsf{N}(0, 1)$ se značí jako Φ, tj. $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-t^2/2\}\, dt$. Tento určitý integrál je možné spočítat jen numericky, a proto hodnoty funkce Φ nalezneme v tabulkách. Ze symetrie platí
$$\Phi(x) + \Phi(-x) = 1, \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}. \tag{8.2}$$
Pro obecné $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ se potom distribuční funkce $F(x)$ spočte jako $F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$.
- Je-li $X \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$, pak $\mathsf{E}\, X = \mu$ a $\mathsf{var}\, X = \sigma^2$.
- Je-li $X \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ a $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, pak $aX + b$ má normální rozdělení $\mathsf{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.
- Jsou-li X, Y nezávislé normálně rozdělené a $a, b \in \mathbb{R}$, pak $aX + bY$ má normální rozdělení (s příslušnými parametry).
- Má-li $(X, Y)'$ sdružené dvourozměrné normální rozdělení, pak má $aX + bY$ normální rozdělení (s příslušnými parametry).

Centrální limitní věta (CLV) pro posloupnost nezávislých stejně rozdělených veličin: Nechť $\{X_n\}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených veličin s $0 < \mathsf{var}\, X_1 < \infty$. Pak

$$\mathsf{P}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mathsf{E}\, X_1}{\sqrt{n\, \mathsf{var}\, X_1}} \leq x\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{8.3}$$

neboli ekvivalentně

$$\mathsf{P}\left(\sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X}_n - \mathsf{E}\, X_1}{\sqrt{\mathsf{var}\, X_1}} \leq x\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{8.4}$$

kde Φ je distribuční funkci normálního rozdělení $\mathsf{N}(0, 1)$, jejíž hodnoty je možné najít např. v tabulkách. Zkráceně píšeme

$$Z_n := \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mathsf{E}\, X_1}{\sqrt{n \mathsf{var}\, X_1}} = \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X}_n - \mathsf{E}\, X_1}{\sqrt{\mathsf{var}\, X_1}} \overset{asympt.}{\sim} \mathsf{N}(0, 1) \tag{8.5}$$

a říkáme, že Z_n má asymptoticky normální rozdělení. CLV nám tedy říká, že distribuční funkce F_n veličiny Z_n se při $n \to \infty$ blíží k Φ. Pro n dost velké tedy lze uvažovat $F_n(x) \doteq \Phi(x)$.

Silný zákon velkých čísel:

- **(SZVČ pro nestejně rozdělené veličiny)** Nechť $\{X_n\}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin takových, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathsf{var}\, X_n}{n^2} < \infty$. Pak $(\overline{X}_n - \mathsf{E}\, \overline{X}_n) \to 0$ s.j.
- **(SZVČ pro stejně rozdělené veličiny)** Nechť $\{X_n\}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin. Pak $\overline{X}_n \to \mu$ s.j. pro nějaké $\mu \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když $\mathsf{E}\, |X_1| < \infty$. V tomto případě $\mu = \mathsf{E}\, X_1$.