NMSA202 | **Cvičení 6**

27. 03. 2017

Náhodné vektory II.

1. Nechť X a Y jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny. Určete rozdělení, střední hodnotu a rozptyl veličiny $Z = X + Y$, jestliže
   (a) X, Y mají exponenciální rozdělení $\mathsf{Exp}(\lambda)$,
   (b) X, Y mají rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0, 1)$.
   (Na rozmyšlení: Jaká je hustota $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$, kde $X_i \sim \mathsf{Exp}(\lambda)$ jsou nezávislé?)
2. Náhodný vektor $(X, Y)'$ v příkladě 2 z minulého cvičení udával útratu za jídlo a pití na rodinné oslavě a měl sdružené rozdělení s hustotou $f(x, y) = x + y$ pro $0 < x < 1,\ 0 < y < 1$ a $f(x, y) = 0$ jinak. Označte $W = X - Y$ a $Z = X + Y$.
   (a) Jaká je střední hodnota a rozptyl náhodných veličin W a Z?
   (b) Spočtěte korelační koeficient $\mathsf{corr}\,(W, Z)$.
   (c) Určete střední hodnotu náhodné veličiny $U = \dfrac{\sin(\pi X)}{X + Y}$.
   (d)* Určete hustotu náhodné veličiny Z.
   Návod: Spočtěte nejdříve distribuční funkci $G(z)$ náhodné veličiny Z jako pravděpodobnost jevu $[X + Y \leq z]$. Vhodný obrázek pomůže.
3. V daný den přijde do školy X dívek a Y chlapců, kde X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny s Poissonovým rozdělením s parametry $\lambda > 0$ a $\mu > 0$.
   (a) Určete rozdělení a očekávanou hodnotu celkového počtu žáků ve škole v daný den.
   (b) Jaké je rozdělení počtu dívek, jestliže víme, že je ve škole v daný den celkem n žáků?
4. Nechť $I_1, \ldots, I_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s alternativním rozdělení, tj.
   $$\mathsf{P}(I_i = 1) = p, \qquad \mathsf{P}(I_i = 0) = 1 - p.$$
   Označme $X = \sum_{i=1}^{n} I_i$. Jaké má náhodná veličina X rozdělení? Pomocí vzorců (A1) a (A2) z „Opakování…“ spočítejte její střední hodnotu a rozptyl.
5. Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny, které splňují:
   $$\mathsf{P}(X = k) = (1 - p_1)^k p_1, \quad k = 0, 1, \ldots, \qquad \mathsf{P}(Y = l) = (1 - p_2)^l p_2, \quad l = 0, 1, \ldots$$
   Určete rozdělení náhodné veličiny $Z = X + Y$.
6. Najděte hustotu rozdělení součtu náhodných veličin X a Y, jestliže tyto jsou nezávislé a $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $Y \sim \mathrm{R}(0, \theta)$, Určete střední hodnotu a rozptyl $X + Y$.
7. Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením $\mathsf{N}(0,\, 1)$. Určete rozdělení, střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny $Z = X + Y$.
8. Nechť X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na intervalu $[0, 1]$. Najděte hustotu náhodné veličiny $Z = XY$.
9. Nechť X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělení $\mathsf{Exp}(\lambda)$, Najděte hustotu náhodné veličiny $Z = \frac{X}{Y}$.

Opakování z přednášky

Rozdělení součtu náhodných veličin. Nechť má náhodný vektor $(X,Y)'$ sdružené spojité rozdělení s hustotou $f(x,y)$. Potom má náhodná veličina $Z = X + Y$ rozdělení s distribuční funkcí

$$G(z) = \iint_{x+y\le z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Hustotu náhodné veličiny Z pak dostaneme jako $g(z) = G'(z)$.

Speciálně, jsou-li X, Y **nezávislé** náhodné veličiny se spojitým rozdělením s hustotami f_X, f_Y, pak má veličina $Z = X + Y$ rozdělení s hustotou

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x.$$

Jestliže X, Y jsou náhodné veličiny, které nabývají pouze nezáporných celočíselných hodnot, potom pro rozdělení náhodné veličiny $Z = X + Y$ platí

$$\mathsf{P}(Z=n) = \sum_{k=0}^{n} \mathsf{P}(X=k, Y=n-k).$$

Jsou-li X, Y navíc **nezávislé**, pak platí

$$\mathsf{P}(Z=n) = \sum_{k=0}^{n} \mathsf{P}(X=k)\,\mathsf{P}(Y=n-k).$$

Další (možná) užitečné informace. Jestliže $X_1, \ldots, X_n$ jsou náhodné veličiny a $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, pak platí (za předpokladu existence daných momentů)

- $\mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i\,\mathsf{E}\,X_i,$ (A1)
- $\mathsf{var}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2\,\mathsf{var}\,(X_i) + \sum\sum_{i\neq j} a_i\,a_j\,\mathsf{cov}\,(X_i, X_j)$ (A2).

Rozdělení součinu a podílu. Nechť X, Y jsou **nezávislé** veličiny s hustotami f_X, f_Y. Pak
(a) veličina $V = XY$ má rozdělení s hustotou

$$g(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X\left(\tfrac{v}{x}\right) f_Y(x)\,\tfrac{1}{|x|}\,\mathrm{d}x,$$

(b) je-li $f_Y(y) = 0$ pro $y < 0$, má veličina $W = \dfrac{X}{Y}$ rozdělení s hustotou

$$h(w) = \int_{0}^{\infty} x f_X(wx) f_Y(x)\,\mathrm{d}x.$$