NMSA202 | **Cvičení 5**
20. 03. 2017

Náhodné vektory

1. Házíme třikrát mincí. Označme X počet líců v prvních dvou hodech a Y počet rubů v posledních dvou hodech.
   (a) Určete sdružené rozdělení vektoru (X, Y).
   (b) Určete marginální rozdělení veličin X a Y. Jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé?
   (c) Spočtěte kovarianci $\mathsf{cov}\,(X, Y)$ a korelační koeficient ρ_{XY}. Jaký je vztah mezi nezávislostí dvou veličin a jejich kovariancí/korelací?
2. Chystáte oslavu narozenin ve své oblíbené restauraci a zvete všechny své příbuzné (budete za ně platit). Množství peněz, které všichni Vaši hosté dohromady projí a propijí (v tisíci EUR), jsou náhodné veličiny X a Y. Ze zkušenosti víte, že vektor $(X, Y)'$ má spojité rozdělení charakterizované sdruženou hustotu
$$f(x, y) = \begin{cases} c\,(x + y) & \text{pro } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ 0 & \text{jinak .} \end{cases}$$
   (a) Určete konstantu $c > 0$.
   (b) Jaké je rozdělení částky, kterou zaplatíte jen za nápoje? Jaké je rozdělení obnosu, který padne jen na jídlo? Jsou tyto dvě veličiny nezávislé?
   (c) Spočtěte kovarianci $\mathsf{cov}\,(X, Y)$ a korelační koeficient ρ_{XY}. Interpretujte.
   (d) Jaká je pravděpodobnost, že za pití zaplatíte více než dvojnásobek toho, co za jídlo?
   (e) Spočtěte $\mathsf{E}\left(\frac{1}{X+Y}\right)$.

   (Na rozmyšlení: Jak vypadá distribuční funkce $F(x, y)$?)
3. Dvojice součástek má dobu životnosti popsanou sdruženou hustotou
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,e^{-x-y/2} & \text{pro } x > 0,\ y > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$
   (a) Jaké je rozdělení dob životnosti jednotlivých součástek? Jsou tyto doby nezávislé?
   (b) S jakou pravděpodobností první součástka přežije druhou?
4. Krajta naklade N vajíček, kde N je náhodná veličina s Poissonovým rozdělením $\mathsf{Po}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Pravděpodobnost, že se z daného vajíčka vylíhne živá krajtička, je $p \in (0, 1)$, přičemž procesy „líhnutí“ jsou pro různá vajíčka nezávislé.
   (a) Jaká je pravděpodobnost, že se vylíhne právě k krajtiček? Jaký je očekávaný počet vylíhnutých krajtiček?
   (b) Jaké je rozdělení N, jestliže víme, že se vylíhlo k krajtiček?
   (c) Jsou veličiny udávající počet nakladených vajíček N a počet vylíhnutých krajtiček nezávislé?
5. Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(-1, 1)$. Označme $Y = X^2$. Spočtěte kovarianci veličin X a Y a jejich korelační koeficient ρ_{XY}. Jsou X a Y nezávislé?
6. Náhodný vektor $(X, Y)'$ má rovnoměrné rozdělení na množině M, kde $M = \big\{(x, y) :\ x \in [0, 1],\ y \in [0, 1],\ y \geq x\big\}$.
   (a) Rozhodněte, zda jsou X a Y nezávislé.
   (b) Spočítejte $\mathsf{cov}\,(X, Y)$.
7. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s distribuční funkcí F a hustotou f. Označme $U = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ a $V = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$.
   (a) Spočtěte distribuční funkci a hustotu veličiny U.
   (b) Spočtěte distribuční funkci a hustotu veličiny V.
   (c) Nechť F a f odpovídají rovnoměrnému rozdělení na intervalu $[0, 1]$. Spočtěte v tomto případě $\mathsf{E}\,U$, $\mathsf{var}\,(U)$, $\mathsf{E}\,V$ a $\mathsf{var}\,(V)$.

Opakování z přednášky

Kovariance a korelace: Nechť $\mathsf{E}\,X^2 < \infty$, $\mathsf{E}\,Y^2 < \infty$. Kovariance $\operatorname{cov}(X,Y)$ náhodných veličin X, Y je definována jako

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathsf{E}\,(X - \mathsf{E}\,X)(Y - \mathsf{E}\,Y) = \mathsf{E}\,(XY) - (\mathsf{E}\,X)(\mathsf{E}\,Y).$$

Koeficient korelace $\operatorname{corr}(X,Y) = \rho_{XY}$ je definován jako

$$\rho_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{var} X}\sqrt{\operatorname{var} Y}},$$

je-li $\operatorname{var} X, \operatorname{var} Y > 0$. Platí vždy $-1 \le \rho_{XY} \le 1$.

Marginální rozdělení:

(a) Jestliže má $\mathbf{X} = (X,Y)^T$ spojité rozdělení s hustotou $f(x,y)$, pak marginální hustotu veličiny X spočteme jako

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Podobně pro marginální hustotu f_Y veličiny Y.

(b) Jestliže má $\mathbf{X} = (X,Y)^T$ diskrétní rozdělení a nabývá pouze hodnot (x_i, y_j), pak marginální rozdělení veličiny X spočteme jako

$$\mathsf{P}(X = x_i) = \sum_j \mathsf{P}(X = x_i, Y = y_j).$$

Nezávislost:

(a) Jestliže má $\mathbf{X} = (X,Y)^T$ spojité rozdělení s hustotou f, X má marginální hustotu f_X a Y má hustotu f_Y, pak jsou veličiny X, Y nezávislé právě tehdy, když

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) \text{ pro s.v. } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(b) Jestliže má $\mathbf{X} = (X,Y)^T$ diskrétní rozdělení a nabývá pouze hodnot (x_i, y_j), pak jsou veličiny X, Y nezávislé právě tehdy, když

$$\mathsf{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathsf{P}(X = x_i)\,\mathsf{P}(Y = y_j) \quad \text{pro všechna } x_i, y_j.$$

Beta funkce: Při výpočtech se někdy hodí používat tzv. **beta funkci**, která je pro $a, b > 0$ definovaná jako

$$\mathrm{B}(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x.$$

Souvislost s gama funkcí (viz předchozí cvičení):

$$\mathrm{B}(a,b) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\,.$$