

# NMFM310 – Základy matematického modelování

## Markovské řetězce I

Cvičení 5-6 | 27.03.2019

### Příklad 1:

Ukažte, že každá posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin, které nabývají jen spočetně mnoha hodnot, je homogenní markovský řetězec. Jaká je jeho matice pravděpodobností přechodu?

### Příklad 2:

Počasí v Montrealu je buď pěkné, nebo neutrální nebo špatné. Jestliže je dnes pěkně, zítra bude pěkně s pravděpodobností 0.6, neutrálně s pravděpodobností 0.2 a špatně s pravděpodobností 0.2. Jestliže je počasí neutrální, zítra bude pěkně, neutrálně nebo špatně s pravděpodobnostmi 0.25, 0.5 a 0.25. Jestliže je dnes špatné počasí, pak s pravděpodobnostmi 0.25 a 0.5 bude zítra neutrálně a špatně. Popište situaci jako homogenní Markovův řetězec. Nakreslete graf a napište matici přechodových pravděpodobností.

### Příklad 3:

Buď  $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ ,  $X_0 = 0$  posloupnost výsledků opakovaných hodů spravedlivou kostkou a definujme následující náhodné veličiny:

- $Y_n = \max(X_0, \dots, X_n)$  největší pozorovaná hodnota během prvních  $n$  hodů,
- $N_n =$  počet šestek, které padly během prvních  $n$  hodů,
- $C_n =$  počet hodů, které se uskutečnily do času  $n$  od poslední pozorované šestky.

Všechny posloupnosti  $\{Y_n\}$ ,  $\{N_n\}$  i  $\{C_n\}$  jsou markovské řetězce. Určete jejich matici pravděpodobností přechodu.

Určete, jak vypadají pravděpodobnosti  $p_{i,3}^{(2)}$ , pro  $i \in S$  a spočítejte matici  $\mathbb{P}^{(2)}$ .

Určete, jak vypadají pravděpodobnosti  $p_{i,j}^{(n)}$ ,  $i, j \in S, n \in \mathbb{N}$  pro případy a) a b).

Klasifikujte stavy řetězce pro případy a) a b).

### Příklad 4:

Aleš a Barbora hrají sérii šachových partií. Předpokládejme, že každá partie skončí s pravděpodobností  $\frac{1}{3}$  výhrou Aleše, s pravděpodobností  $\frac{1}{3}$  remízou, a s pravděpodobností  $\frac{1}{3}$  výhrou Barbory. Za výhru se získává jeden bod, za remízu půl bodu. Označme  $X_n$  absolutní hodnotu rozdílu získaných bodů obou hráčů po  $n$  partiích.

Určete matici pravděpodobností přechodu Markovova řetězce  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

### Příklad 5:

Nechť homogenní Markovův řetězec má matici pravděpodobností přechodu

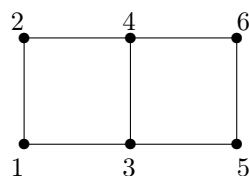
$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Předpokládejme, že počáteční rozdělení řetězce bylo rovnoměrné. Jaké je rozdělení v čase  $n = 3$ ?

b) Klasifikujte stavy řetězce.

### Příklad 6:

Uvažujme objekt, který se pohybuje po plánu znázorněném na obrázku. Pohyby jsou pouze mezi šesti význačnými body. V každém kroku si objekt vybere jeden ze čtyř směrů (sever, východ, jih západ – každý se stejnou pravděpodobností) a tímto směrem se vydá. Určeným směrem se pohybuje až tam, kam je to možné. Pokud v daném směru nevede cesta, zůstává na místě. Označme  $X_n$  polohu částice po  $n$  krocích.



- Určete matici pravděpodobností přechodu  $\mathbb{P}$  Markovova řetězce  $X_n$ .
- Určete rozdělení řetězce v časech  $n = 1, 2, 3$ , pokud  $X_0 = 1$ .
- Určete rozdělení řetězce v časech  $n = 1, 2$ , pokud  $X_0 = 3$ .
- Klasifikujte stavy řetězce.

### Příklad 7:

Simulování Markovova řetězce

Máme dáno počáteční rozdělení  $(p_i)_{i \in S}$  a matici pravděpodobností přechodu  $\mathbb{P}$  Markovova řetězce  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  a chceme simulovat náhodnou realizaci tohoto řetězce  $\{X_n\}$ . K tomu máme ještě k dispozici posloupnost náhodných čísel  $U_0, U_1, U_2, \dots$ , které jsou nezávislé, stejně rozdělené a mají rovnoměrné rozdělení na intervalu  $[0, 1]$ . Jedna možnost postupu je následující:

Zdefinujeme si (nenáhodně) zobrazení  $\Psi : [0, 1] \rightarrow S$  tak, aby pro každý stav  $i \in S$  platilo

$$\int_0^1 I(\Psi(x) = i) dx = p_i,$$

a zobrazení  $\Phi : S \times [0, 1] \rightarrow S$  tak, aby platilo

$$\int_0^1 I(\Phi(i, x) = j) dx = p_{ij},$$

pro každou dvojici stavů  $i, j \in S$ . Potom definujeme naši náhodnou realizaci řetězce  $\{X_n\}$  takto:

$$X_0 = \Psi(U_0), \quad X_{n+1} = \Phi(X_n, U_n) \quad \text{pro } n \geq 1.$$

- Ukažte, že takto generovaný řetězec  $\{X_n\}$  má skutečně požadované rozdělení.
- Navrhněte vhodné funkce  $\Psi$  a  $\Phi$ .

### Domácí úloha

Deadline: 10.04.2019 (paper version)

a) Aleš a Barbora hrají v kostky (každý vyhraje danou partii s pravděpodobností  $\frac{1}{2}$ ) a začínají oba s deseti mincemi. V každé partii ten, kdo prohraje, dá svému soupeři jednu minci. Buď  $X_n$  počet mincí, které vlastní Aleš v čase  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Pokud je jeden hráč ruinován, stav  $X_n$  zůstane zafixován a už se pro další  $n$  nemění. Buď  $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$  náš markovský řetězec, přičemž pokládáme  $X_0 = 10$ .

Klasifikujte stavy řetězce  $\{X_n\}$  a simulujte několik jeho průběhů (např. 20 průběhů, délku volte podle potřeby – skončete ve chvíli, kdy už se neděje nic zajímavého). Nakreslete graf se všemi průběhy a graf, který ukáže, jak se vyvíjejí četnosti

$$\hat{p}_i(t) = (\text{počet realizací řetězce ve stavu } i \text{ v čase } t) / (\text{počet všech simulovaných realizací}),$$

například pro časy  $t = 0, 5, 10, 15, 20, 25$ .

Spočtěte také, jaké jsou teoretické absolutní pravděpodobnosti  $\mathbf{p}(t)$  (k tomu budete samozřejmě potřebovat určit počáteční rozdělení  $\mathbf{p}(0)$  a matici pravděpodobností přechodu  $P$  - a použít software, který umí násobit matice).

b) Simulujte markovský řetězec z příkladu 4. Nasimulujte několik trajektorií (řekněme 10) délky 100, vycházející z počátečního stavu 0 a stejný počet vycházející z počátečního stavu 20. Vytvořte grafy s průběhem těchto trajektorií a spočtěte relativní četnosti jednotlivých stavů (tj. počet časových okamžiků, v nichž byl řetězec ve stavu  $i \in S$  dělený délkou pozorovaného řetězce – **pozor**, význam těchto četností je jiný než v případě a). Jak moc se tyto pozorované četnosti liší pro jednotlivé průběhy?

Jak se změní situace, když bude Aleš vyhrávat s pravděpodobností 0.5, remíza nastane s pravděpodobností 0.25 a Barbora vyhraje s pravděpodobností 0.25? Jak bychom mohli  $X_n$  upravit, aby šlo o markovský řetězec?

Nakreslete graf průběhů všech trajektorií a graf s relativními četnostmi.

Řešení by v obou případech a), b) mělo obsahovat popis, jak jste realizace řetězce generovali.