

NMFM310 – Základy matematického modelování

Diferenciální rovnice a modely růstu

Cvičení 2 | 27.02.2019

Příklad 1: Řešte diferenciální rovnici pro neznáme parametry $a, k > 0$.

$$\frac{dy}{dt} = ay \left(1 - \frac{y}{k}\right)$$

Příklad 2: Ukažte, že logistická křivka je symetrická podle inflexního bodu.

Příklad 3: Ověřte, že $y(t) = k \exp(be^{-at})$ je řešením diferenciální rovnice pro $a, k > 0$.

$$\frac{dy}{dt} = -ay \ln(y/k)$$

Příklad 4: Určete saturační úroveň Gompertzovy křivky a její inflexní bod. Je Gompertzova křivka symetrická kolem inflexního bodu?

Příklad 5: Jak byste proložili daty exponenciální křivku

$$y(t) = be^{at},$$

za pomoci metody nejmenších čtverců na $\ln(y_{t_i})$?

Příklad 6: Hrubý odhad parametrů logistické křivky

$$y(t) = \frac{k}{1 + be^{-at}}, \quad (1)$$

pomocí metody nejmenších čtverců:

- parametry a, k - rovnici

$$\frac{dy}{dt} = ay \left(1 - \frac{y}{k}\right)$$

aproximujte pro diskrétní čas rovnici používající místo $\frac{dy}{dt}$ aproximaci diferencemi $\frac{\Delta y_{t_i}}{\Delta t_i}$ a z ní odvoďte rovnici pro regresi $\frac{\Delta y_{t_i}}{y_{t_i} \Delta t_i}$ na y_{t_i} . Použijte metodu nejmenších čtverců pro spočítání odhadů \hat{a}, \hat{k} .

- \hat{b} dopočítejte z rovnice pro $\ln b$ odvozené z (1) s dosazenými \hat{a}, \hat{k} průměrováním přes všechna pozorovaná data.

Domácí úloha

Deadline: 13.03.2019 (paper version)

Klasickým příkladem použití prokládání logistickou křivkou je případ odhadu růstu počtu obyvatel USA v začátcích 20. století. V souboru ObyvatelstvoUSA.csv jsou data za roky 1790 až 1940. H. Hotelling prokládal data za léta 1790 až 1910 logistickou křivkou a došel k odhadu

$$f(x) = \frac{195868}{1 + 67.5352 e^{-0.031239t}}$$

Proložte data za roky 1790 až 1910 logistickou křivkou pomocí metody z Příkladu 6. Takto obdržené odhady parametrů použijte jako výchozí pro metodu z přednášky a proveďte jeden a dva iterační kroky.

Pro všechny odhady logistické křivky (Hotellingův a tři Vaše) spočítejte předpovědi pro roky 1920, 1930 a 1940. Vytvořte graf.

Který odhad dopadl nejlépe?