NMFM310 – Základy matematického modelování

Poissonův proces

Cvičení 10 | 15.05.2019

Příklad 1:

Ukážte, že exponenciální rozdělení je rozdělení bez paměti, t.j., že pro náhodnou veličinu Y s exponenciálním rozdělením platí

$$\mathbb{P}(Y > s + t | Y > s) = P(Y > t).$$

Příklad 2:

Ukážte, že součet k nezávyslých náhodných veličín s exponenciálním rozdělením s parametrem $\lambda > 0$ a hustotou $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{I}_{\{x>0\}}$, má Erlangovo (gamma) rozdělení s parametry $\lambda > 0$ a $k \in \mathbb{N}$, s hustotou

$$g(x) = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{I}_{\{x>0\}}.$$

Příklad 3:

Ověřte, že pro Poissonův proces $\{N(t);\ t \geq 0\}$ s intenzitou $\lambda > 0$ platí nasledující rovnosti:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N(t+h) = k+1 | N(t) = k) &= \lambda h + o(h); \\
\mathbb{P}(N(t+h) = k | N(t) = k) &= 1 - \lambda h + o(h); \\
\mathbb{P}(N(t+h) > k+1 | N(t) = k) &= o(h);
\end{aligned}$$

Pro funkci $o(h)$ platí, že $\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$.

Příklad 4:

Uvažujte Poissonův proces $\{N(t);\ t \geq 0\}$ s intenzitou $\lambda = 1$. Jaká je pravděpodobnost„ že v časovém intervalu $[0, 4]$ nenastala žádná událost a zároveň v časovém intervalu $[2, 5]$ nastaly alespoň dvě události?

Příklad 5:

Na autobusovou zastávku přijíždějí autobusy linky č. 1 a liknky č.2. Příjezdy autobusů obou linek jsou události Poissonových procesů s intenzitami $\lambda_1 > 0$ a $\lambda_2 > 0$. Jaká je pravděpodobnost, že na zastávku prijede jako první autobus linky č.2?

Příklad 6: Ověřte, že nasledující algoritmus skutečne generuje na intervalu $[0, T]$ Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$:

- **Krok 1:** Generuj náhodnú veličinu S, která má Poisssonovo rozdělení s parametrem λT (celkový počet událostí na intervalu $[0, T]$).
- **Krok 2:** Generuj posloupnost S nezávislých náhodných veličín $X_1, \ldots, X_S$ s rovnoměrným rozdělením na intervalu $[0, T]$.
- **Krok 3:** Uspořádaný náhodný výběr $X_{(1)}, \ldots, X_{(S)}$ tvoří jednotlivé časy události. Poissonův proces je pak odpovídající čítací proces pro týto události.