NMFM 310 | Základy matematického modelování

Letný semester 2017/2018 | Prednáška MFF UK

Matúš Maciak | @K151

http://www.karlin.mff.cuni.cz/∼maciak

Prednáška: Ut: 9:00-10:30 @K6
Cvičenie: Ut: 10:40-12:20 @K6

Úvod a priebeh semestra

- 12 prednášok | 12 cvičení | 6 tématických okruhov;
- **Prerekvizita:** NMFM301 - Statistika pro finanční matematiky;

- Vyrovnávání dat, klouzavé průměry;
- Diferenciální rovnice a modely růstu;
- Lineární regulace a lineární soustavy;
- Markovovy řetězce s diskrétním časem a stavovým prostorem;
- Časové řady, ARMA procesy;
- Poissonův proces a příbuzné modely;

- **Podrobnosti na** http://www.karlin.mff.cuni.cz/~maciak

Doporučená literatúra

- Mandl P.: Pravděpodobnostní dynamické modely.
  Academia Praha, 1985.
- Prášková, Z., Lachout, P.: Základy náhodných procesů I.
  Matfyzpress, Praha, 2012.
- Prášková, Z.: Základy náhodných procesů II.
  Karolinum, Praha, 2004.

Doporučená literatúra

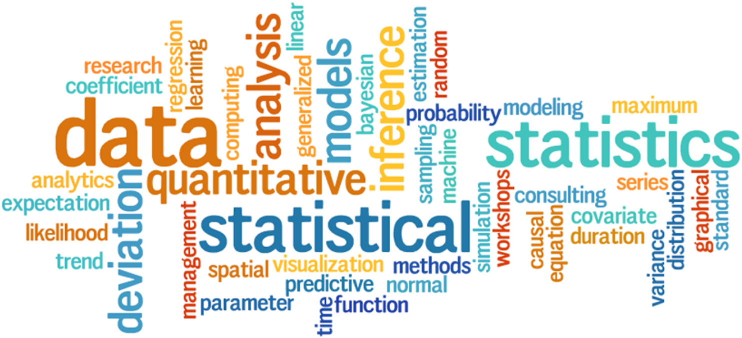
- Mandl P.: Pravděpodobnostní dynamické modely.
  Academia Praha, 1985.
- Prášková, Z., Lachout, P.: Základy náhodných procesů I.
  Matfyzpress, Praha, 2012.
- Prášková, Z.: Základy náhodných procesů II.
  Karolinum, Praha, 2004.

+ bibliografické odkazy a referencie v priebehu prednášky;

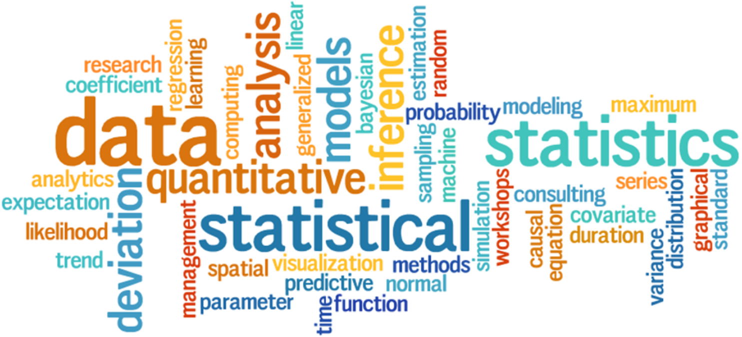
Kapitola 1

Vyrovnávání dat

Čo sú to data? Čo je to model?



Čo sú to data? Čo je to model?



- (Anglické) slovo "data" prvykrát použité v roce 1640;
- V zmysle "transmittable and storable computer information" v roce 1946;
- Data – konkrétne hodnoty kvalitatívnych a kvantitatívnych premenných;
- Merané, zbierané, analyzované, reportované a interpretované hodnoty;

Data ve statistice

- Najčastejšie sa v štatistike používa **náhodný výběr**;
(nezávisle, stejně rozdělené náhodné veličiny – *i.i.d.* – odvodené z anglického "*independent and identically distributed* random variables")

- V praxi často **časovo závislá štruktúra pozorovaní** – časové řady;
(vývoj hodnot v čase – diskrétnych časových okamžikoch)
  - napr. hodnota kurzu $x(t)$ pro $t \in \{t_1, \ldots, t_n\}$;
  - alebo vzájomne porovnanie, napr. $x(t)$ vs. $y(t)$;
  - alebo data $(x_1, y_1)^\top, \ldots, (x_n, y_n)^\top$, pro uspořádané indexy;

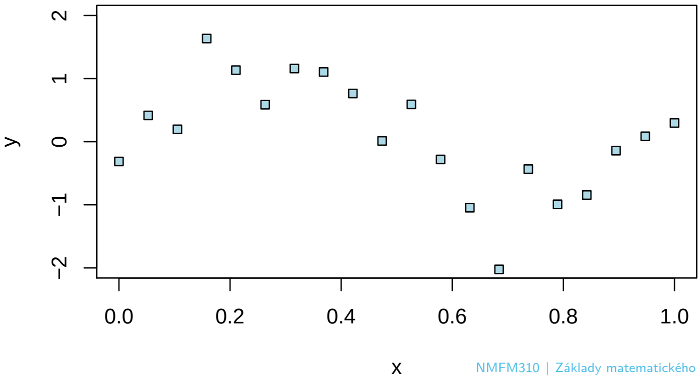
- **Závislé** a často **nestejně rozdelené náhodné veličiny** – n.i.n.i.d;
(jak takéto data analyzovat a jaké (vhodné) metódy/modely používat?)

Vyrovnávání dat

Vyrovnávání dat – proložení dat nějakou hladkou křivkou, která v nějakom zmyslu vystihuje nějaku základní vlastnost dat, ale nebere v potaz drobné chyby, nepřesnosti, fluktuace (charakterizace dat).

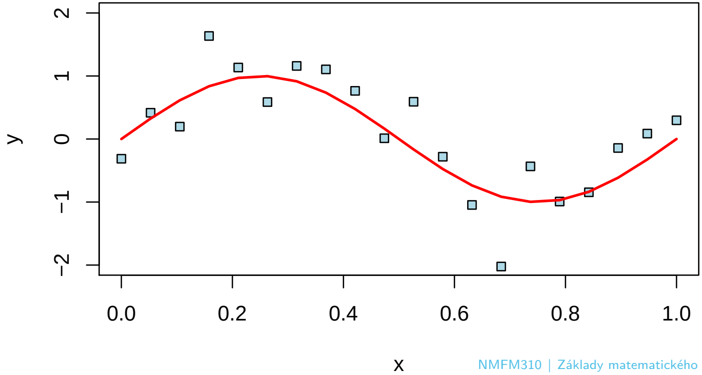
Vyrovnávání dat

Vyrovnávání dat – proložení dat nějakou hladkou křivkou, která v nějakom zmyslu vystihuje nějaku základní vlastnost dat, ale nebere v potaz drobné chyby, nepřesnosti, fluktuace (charakterizace dat).

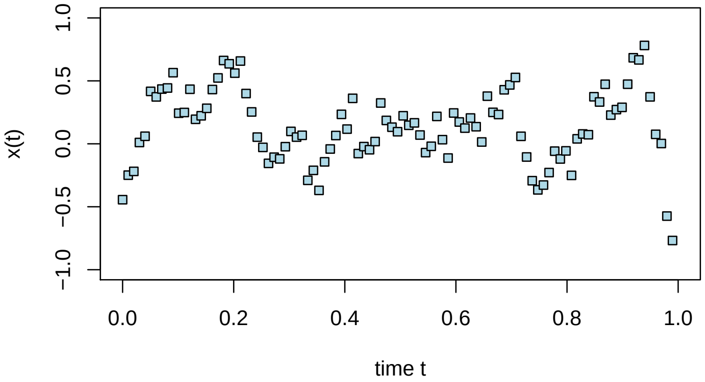


Vyrovnávání dat

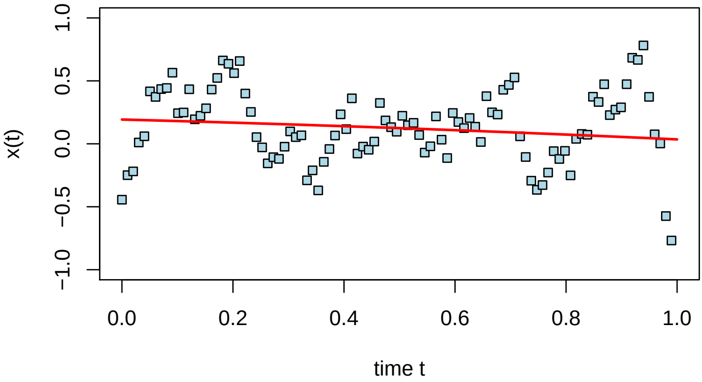
Vyrovnávání dat – proložení dat nějakou hladkou křivkou, která v nějakom zmyslu vystihuje nějaku základní vlastnost dat, ale nebere v potaz drobné chyby, nepřesnosti, fluktuace (charakterizace dat).



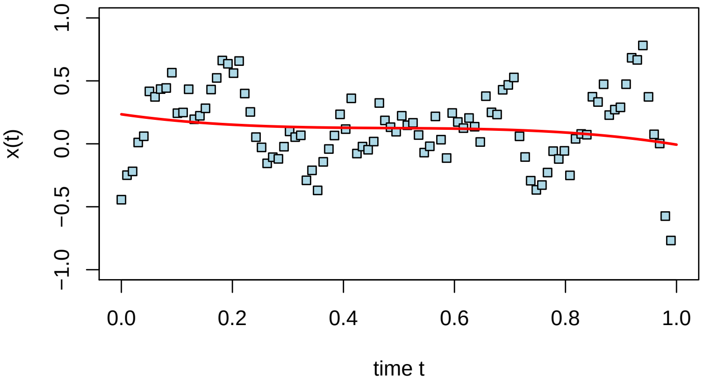
Jak volit "hladku křivku"?



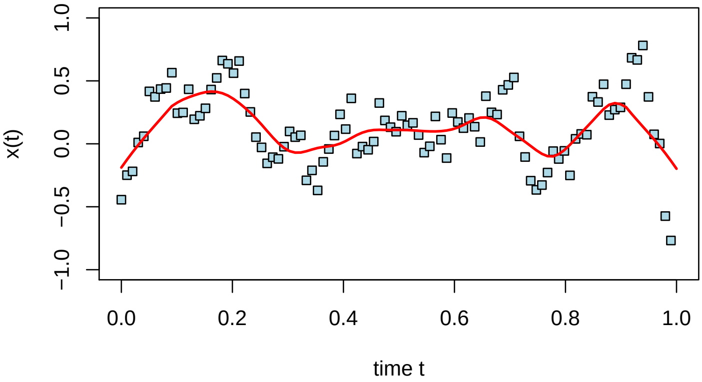
Jak volit "hladku křivku"?



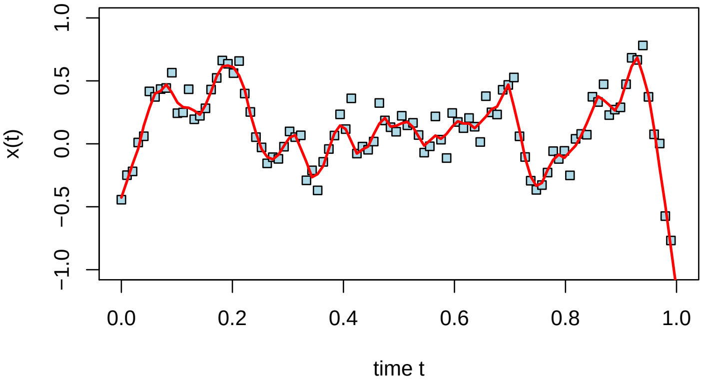
Jak volit "hladku křivku"?



Jak volit "hladku křivku"?



Jak volit "hladku křivku"?



Od parametrických po neparametrické

V zásade rozlišujeme **tri základné prístupy** pri modelovaní dat, resp. pri překladaní dat (ne nutně hladkou) křivkou. Zádladný rozdíl je v celkové míře flexibility a komplexity výsledného modelu.

- **Parametrický postup**
  - jednoduchost
    (formálný výpočet, model, interpretácia, vlastnosti)
  - málo flexibilný
    (príliš jednoduchý model, ktorý často nedostatečně vystihuje data)
- **Neparametrický postup**
  - výborná flexibilita
    (bez akýchkoľvek predpokladov na konkrétny parametrický tvar křivky)
  - príliš zložitý
    (pomerne náročný na vypočet, vlastnosti a takmer nemožná interpretácia)
- **Semiparametrický postup**
  - dostatečne flexibilný, akceptovatelná zložitost
    (bez predpokladov na konkrétny tvar, ale pomocou (skrytých) parametrov)
  - málo intuitívny
    (kombinácia dobrých, ale aj špatných vlastnosti parametrických a neparametrických postupov)

Metóda nejmenších čtverců

Charles Friedrich Gauss (1777 – 1855)

- metoda sa postupne vyvinula v súvislosti s astronómiou a geodéziou pri riešeni problémov s navigáciou lodí;
- P.S.Laplace a T. Mayer využili tzv. metodu priemerov pre vysvetlenie pohybov nebeských telies již v roce 1750;
- prvykrát publikovaná (Legendre, 1805) ako algebraický nástroj na fitovanie lineárnych rovníc na data;
- C.F. Gauss v 1809 publikuje prácu o metode najmenších štvorcov a dáva ju súvislosti s teóriou pravdepodobnosti a normálnym rozdelením;

Parametrický spůsob vyrovnávání

Křivka jednoznačne určená parametrami

- předem zvolíme tvar hladké křivky napr. parabola $x \longrightarrow a + bx + cx^2$;
- neznáma křivka definovaná pomocou neznámych parametrov $a, b, c \in \mathbb{R}$;
- parametre majú konkrétnu a často priamočiaru interpretáciu;
- odhady parametrov jako minimalizace součtu čtverců odchylek;
- volba počtu parametrů $\Longrightarrow$ konkrétny tvar a flexibilita křivky;
- rozhodnutí mezi celkovým počtem parametrů a velikosti součtu čtverců;

Parametrický spůsob vyrovnávání

Křivka jednoznačne určená parametrami

- předem zvolíme tvar hladké křivky napr. parabola $x \longrightarrow a + bx + cx^2$;
- neznáma křivka definovaná pomocou neznámych parametrov $a, b, c \in \mathbb{R}$;
- parametre majú konkrétnu a často priamočiaru interpretáciu;
- odhady parametrov jako minimalizace součtu čtverců odchylek;
- volba počtu parametrů $\Longrightarrow$ konkrétny tvar a flexibilita křivky;
- rozhodnutí mezi celkovým počtem parametrů a velikosti součtu čtverců;

There is no free lunch!

- pro dostatečne velký počet parametrov $\Longrightarrow$ interpolace dat;
- interpolace $\Longrightarrow$ nulový součet čtverců $\Longrightarrow$ žádne vyhlazení dat;
- tzv. Bias-variance Trade-off (vychýlenie vs. variability);
  (rozhodnutie ohľadom flexibility a komplexity modelu)

Metóda nejmenších čtverců – algebraicky

- obecně předpokládame tvar nějaké hladké křivky

$$x \longrightarrow a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \cdots + a_p f_p(x),$$

  pro nějaké neznáme parametry $a_1, \dots a_p \in \mathbb{R}$;
- označme odhadnuté hodnoty parametrov jako $\hat{a}_1, \dots \hat{a}_p \in \mathbb{R}$;
- pak vyrovnanú hodnotu v datech lze zapsat jako

$$\hat{y}_i = \hat{a}_1 f_1(x_i) + \hat{a}_2 f_2(x_i) + \cdots + \hat{a}_p f_p(x_i),$$

  kde $\hat{y}_i$ značí vyrovnanú hodnotu príslušnú hodnotě y_i;
- pro skrátený zápis pomocou vektorov používame značení

$$\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)^\top, \qquad \hat{\boldsymbol{y}} = (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n)^\top;$$

Metóda nejmenších čtverců – maticově

- explicitne po zložkách dostaneme vyrovnané hodnoty jako

$$\hat{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \vdots \\ \hat{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \dots & f_p(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \dots & f_p(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \dots & f_p(x_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_p \end{pmatrix}$$

- stručný/alternatívny zápis v maticovom tvare jako

$$\hat{\boldsymbol{y}} = \mathbb{F} \cdot \widehat{\boldsymbol{a}},$$

kde $\widehat{\boldsymbol{a}} = (\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p)^\top$;

- odhady neznámych parametrov $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}$ jsou definované tak, že minimalizují nejmenší čtverce (součet čtverců odchýlek)

$$S(\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \sum_{j=1}^{p} \hat{a}_j f_j(x_i) \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \|\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}}\|_2^2$$

$$= (\boldsymbol{y} - \mathbb{F}\hat{\boldsymbol{a}})^\top (\boldsymbol{y} - \mathbb{F}\hat{\boldsymbol{a}});$$

Metóda nejmenších čtverců – formálně

- formálně zapsané, odhady parametrov $a_1, \dots, a_p$ jsou definované jako riešenie minimalizačného problému

$$(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p)^\top = \underset{a_1,\dots,a_p \in \mathbb{R}}{\mathit{Argmin}} \sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - \sum_{j=1}^{p} a_j f_j(x_i) \Big)^2 \qquad (1)$$

$$= \underset{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^p}{\mathit{Argmin}} \; \|\boldsymbol{y} - \mathbb{F}\boldsymbol{a}\|_2^2;$$

- Ide o konvexný problém (minimalizácia konvexnej funkcie, cez konvexnú množinu) a teda existuje globálne minimum, ktoré je riešením normálných rovníc. Ak má $\mathbb{F}$ plnú hodnosť, tak existuje jednoznačné riešenie;

Samostatný úkol

- Ukážte, že problém (1) je naozaj konvexný problém. Za akých podmienok má matica $\mathbb{F} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ plnú hodnosť?
- Dokážte, že dosažené řešení je skutečně globálnim minimem.

Metóda nejmenších čtverců – príklad

Príklad

Uvažujte data $(y_1, x_1)^\top, \dots, (x_n, y_n)^\top$, které chceme preložiť jednoduchou přímkou, t.j. $x \longrightarrow a + bx$, pro $a, b \in \mathbb{R}$ neznáme parametre.
Nájděte explicitné řešení pro rovnicu vyhlazovací přímky.

Metóda nejmenších čtverců – príklad

Príklad

Uvažujte data $(y_1, x_1)^\top, \ldots, (x_n, y_n)^\top$, které chceme preložiť jednoduchou přímkou, t.j. $x \longrightarrow a + bx$, pro $a, b \in \mathbb{R}$ neznáme parametre.
Nájděte explicitné řešení pro rovnicu vyhlazovací přímky.

Pravděpodobnostní interpretace:

- náhodný vektor $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)^\top$ a jeho realizace $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)^\top$;
- predpokládame, že platí model $\boldsymbol{Y} = \mathbb{F}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\varepsilon}$;
- vektor náhodných chýb $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)^\top \sim (\mathbf{0}, \sigma^2\mathbb{I})$;
- z vlastnosti střední hodnoty a rozptylu lze přepsát jako

$$\mathsf{E}\boldsymbol{Y} = \mathbb{F}\boldsymbol{a} \qquad \mathrm{Var}\,\boldsymbol{Y} = \sigma^2\mathbb{I},$$

pro jednotkovou matici $\mathbb{I} = Diag\{1, \ldots, 1\}$, typu $n \times n$;

Regresní model – teoretické vlastnosti odhadu

Věta: Střední hodnota a rozptyl odhadu parametru v lineárni regrese

Mějme lineárny regresný model $\boldsymbol{Y} = \mathbb{F}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\varepsilon}$, pro vektor náhodných chýb se složkami s nulovou střední hodnotou $\mathsf{E}\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathsf{E}\varepsilon_1, \ldots, \mathsf{E}\varepsilon_n)^\top = (0, \ldots, 0)^\top$ a rozptylovou matici $\sigma^2\mathbb{I}$.
Pak platí, že

- odhad parametru $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^p$ metódou nejmenších čtverců je nestranný a jeho rozptyl je $\sigma^2(\mathbb{F}^\top\mathbb{F})^{-1}$;
- jsou-li navíc $(y_i, \varepsilon_i)^\top$, pro $i = 1, \ldots, n$ nezávislé a stejně rozdelené (*i.i.d.*), pak je $\hat{\boldsymbol{a}}$ konzistentní odhad vektoru $\boldsymbol{a}$;
- plati-li navíc $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ pak odhady parametrů $a_1, \ldots, a_p$ mají také normálné rozdělení a platí, že $\hat{\boldsymbol{a}} \sim N_p(\boldsymbol{a}, \sigma^2(\mathbb{F}^\top\mathbb{F})^{-1})$;

Gauss-Marková věta říka, že odhad $\hat{\boldsymbol{a}}$ je **nejlepší**, **nestranný**, **lineární** odhad vektoru parametrov $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^p$ (tzv. BLUE – Best Linear Unbiased Estimate)

Parametricky ⇒ Semiparametrický postup

Parametre, ktoré sa nachádzajú v modeli nemajú priamy vzťah na tvar neznámej křivky a taktiež nemajú intuitívnu interpretáciu, jako tomu bylo v případě parametrických modelov.

- **SPLINY - po částech (lokálne) parametrické vyhlazování;** *(neznáma křivka je pořád definovaná pomoci parametrů, ale parametre nedefinují přímo tvar dané křivky)*
- **Vhlazování je proto mnohem flexibilnejší a adaptívnejší;** *(kromě samotných neznámych parametrů jsou ale potřebné dodatečné parametry – tzv. uzly a tiež množina tzv. bázických funkcii, tzv. splinová báze)*
- **uzly definují podintervaly definičného oboru křivky;** *(důležitá je pak otázka, jak uzly správně volit; v podintervalech jsou časti křivky definované různe, ale celková křivka ma hezké, předem dané vlastnosti)*

Lokální vyhlazování pomoci Splinů

Definice: Spline

Nechť $\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_k$ je posloupnost vnitřních uzlů z definičního oboru $\mathcal{D} = [\xi_0, \xi_{k+1}]$. Pak splinem řádu $\ell \in \mathbb{N}$ nazveme nazveme libovolnou funkci f takovou, která je v každém intervalu $[\xi_j, \xi_{j+1}]$, pro $j = 0, \ldots, k$ polynomem stupně ℓ a která ma v celém definičním oboru $\mathcal{D} = \cup_{j=0}^{k} [\xi_j, \xi_{j+1}]$ spojité derivace (jednostranné derivace v krajních bodech) až do řádu $(\ell - 1)$ (včetně).

Lokální vyhlazování pomoci Splinů

Definice: Spline

Nechť $\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_k$ je posloupnost vnitřních uzlů z definičního oboru $\mathcal{D} = [\xi_0, \xi_{k+1}]$. Pak splinem řádu $\ell \in \mathbb{N}$ nazveme nazveme libovolnou funkci f takovou, která je v každém intervalu $[\xi_j, \xi_{j+1}]$, pro $j = 0, \ldots, k$ polynomem stupně ℓ a která ma v celém definičním oboru $\mathcal{D} = \cup_{j=0}^{k} [\xi_j, \xi_{j+1}]$ spojité derivace (jednostranné derivace v krajních bodech) až do řádu $(\ell - 1)$ (včetně).

Príklad

Uvažujte interval $(0, 1)$ jako definičný obor $\mathcal{D}$. Definujte posloupnost uzlů $0 < \xi_1 < \xi_2 < 1$ a navrhněte spline třetího řadu $(\ell = 3)$ na $\mathcal{D}$ tak, aby splňoval definici.

Různe splinové bázy

Existuje celá řada různych způsobu, jak definovat splinovu bazu a sestrojit spline. Nektěré metody jsou intuitivné a jednoduché, ale výpočetně náročné pro velké $n \in \mathbb{N}$. Jiné jsou pomerně zložite a hodně špatně interpretovatelné, ale zase výpočetně stabilnější.

- **Truncated Splines**
  - jednoduché, intuitívne, jednoduché na odvodenie;
  - výpočetne nestabilné hlavne pre velké $n \in \mathbb{N}$;
- **B-Splines**
  - vypočetně stabilné a jednoduché pro invertování $\mathbb{F}$;
  - pro obecný stupeň $\ell \in \mathbb{N}$ nelze jednoducho vyjádřit (napr. De Boor - rekurze);
- **Ortogonálne spliny**
  - výpočetne veľmi jednoduché, okamžítá invertibilita, numerická stabilita;
  - netriviálne na vytvorenie, náročné na interpretáciu;

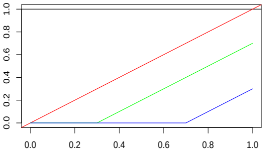
Různe splinové bázy

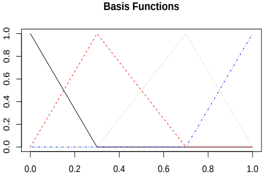
Existuje celá řada různych způsobu, jak definovat splinovu bazu a sestrojit spline. Některé metody jsou intuitivné a jednoduché, ale výpočetně náročné pro velké $n \in \mathbb{N}$. Jiné jsou pomerně zložite a hodně špatně interpretovatelné, ale zase výpočetně stabilnější.

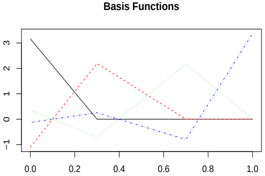
- **Truncated Splines**
  - jednoduché, intuitívne, jednoduché na odvodenie;
  - výpočetne nestabilné hlavne pre velké $n \in \mathbb{N}$;
- **B-Splines**
  - vypočetně stabilné a jednoduché pro invertování $\mathbb{F}$;
  - pro obecný stupeň $\ell \in \mathbb{N}$ nelze jednoducho vyjádřit (napr. De Boor - rekurze);
- **Ortogonálne spliny**
  - výpočetne veľmi jednoduché, okamžítá invertibilita, numerická stabilita;
  - netriviálne na vytvorenie, náročné na interpretáciu;
- **Mnoho jiných ...**
  - Box spliny, M-Spliny, T-Spliny;
  - ... ...

Porovnání: T-spliny, B-spliny, O-spliny

- Uzly: $\xi_1 = 0.3, \xi_2 = 0.7$; Stupeň $\ell = 1$ (lineárne spliny (báze));

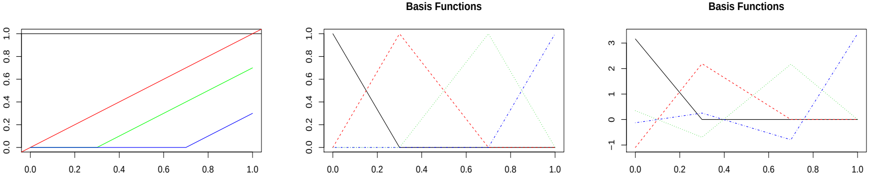




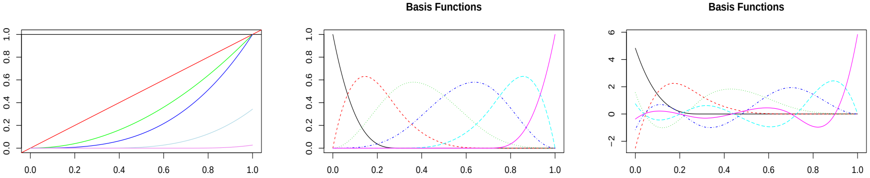


Porovnání: T-spliny, B-spliny, O-spliny

- Uzly: $\xi_1 = 0.3, \xi_2 = 0.7$; Stupeň $\ell = 1$ (lineárne spliny (báze));



- Uzly: $\xi_1 = 0.3, \xi_2 = 0.7$; Stupeň $\ell = 3$ (kubické spliny (báze));



Truncated splines – "zkosené" spliny

Príklad

- mějme uzly $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$ uvnitř $\mathcal{D}$, a nechť $\ell = 1$ (lineární spliny);
  Pak příslučné funkce $f_1(x), \ldots, f_p(x)$ mají následujíci tvar:

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = x, \qquad \begin{aligned} f_3(x) &= (x - \xi_1)_+, \\ f_4(x) &= (x - \xi_2)_+, \\ f_5(x) &= (x - \xi_3)_+ \end{aligned}$$

- pro stejné uzly $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$ uvnitř $\mathcal{D}$, a řád $\ell = 3$ (kubické spliny);
  Příslušné funkce $f_1(x), \ldots, f_p(x)$ mají tvar:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1, & f_2(x) &= x, & f_5(x) &= (x - \xi_1)_+^3, \\ f_3(x) &= x^2, & f_4(x) &= x^3, & f_6(x) &= (x - \xi_2)_+^3, \\ & & & & f_7(x) &= (x - \xi_3)_+^3 \end{aligned}$$

Pro splinové bázy obecně platí, že $p = \ell + k + 1$, kde $\ell \in \mathbb{N}$ je stupeň splinové bázy,resp. řád splinu a $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je počet vnítřních uzlů $\xi_1 < \cdots < \xi_k \in \mathcal{D}$.

Semiparametrický $\Rightarrow$ Neparametrický postup

Bez parametrov - žádny konkrétny tvar neznáme křivky, ani zápis neznámej křivky pomoci lineárnej kombinace funkci bázy.

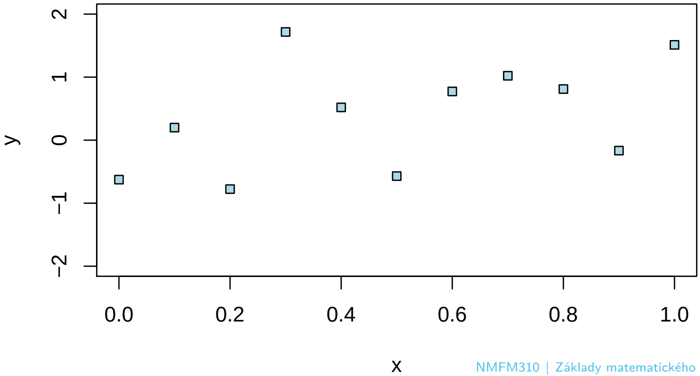
- **Klouzavé průměry (KP)** – lokálny neparametrický postup vyhlazování; *(schopný zachytit trend – t.j. směr a míru pohybu pozorovaných hodnot)*
- nevystupují tady žádne neznáme parametre, které bychom odhadovali; *(výsledná vyhlazovací křivka je pouze funkci pozorovaných dat)*
- jedná se o lokální vyrovnávání pozorovaných dat; *(v daném bodě $x \in \mathcal{D}$ závisí výrovnání pouze od několika sousedů)*
- formálně zapsáno, pro pozorování y_i získame hodnotu $\hat{y}_i$ jako

$$\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^{r} w_j y_{i+j} \qquad \text{pro } i = r+1, \ldots, n-r;$$

- pro váhy w_j platí, že $\sum_{j=-r}^{r} w_j = 1$; *(číslo $r \in \mathbb{N}$ se nazýva délka klouzavého průměru)*

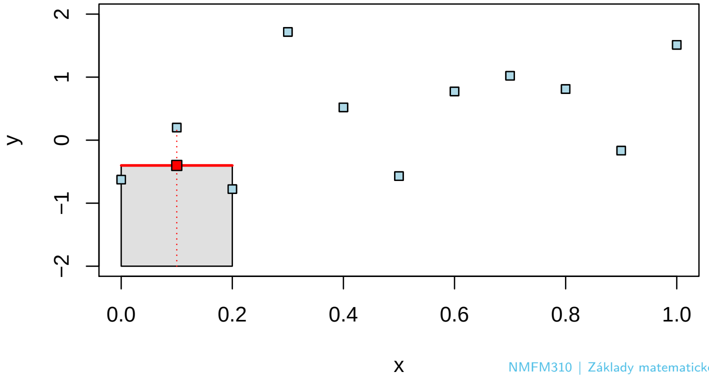
Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definováný jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^{r} w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r+1, \ldots, n-r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a tiež $\sum_{j=-r}^{r} w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme $\hat{y}_i$ pomoci y_i a dvou vedlejších sousedů;



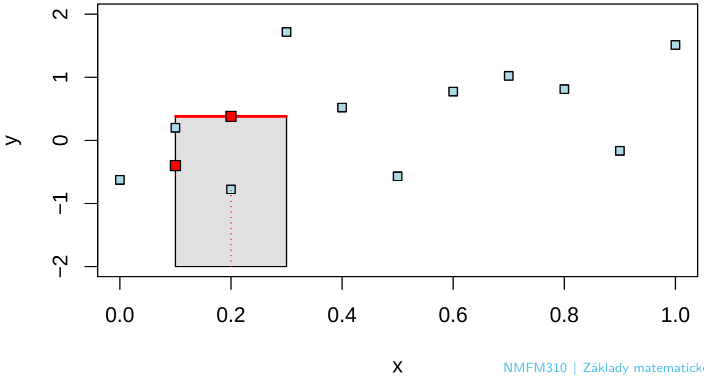
Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definováný jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^{r} w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r+1, \ldots, n-r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a tiež $\sum_{j=-r}^{r} w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme $\hat{y}_i$ pomoci y_i a dvou vedlejších sousedů;



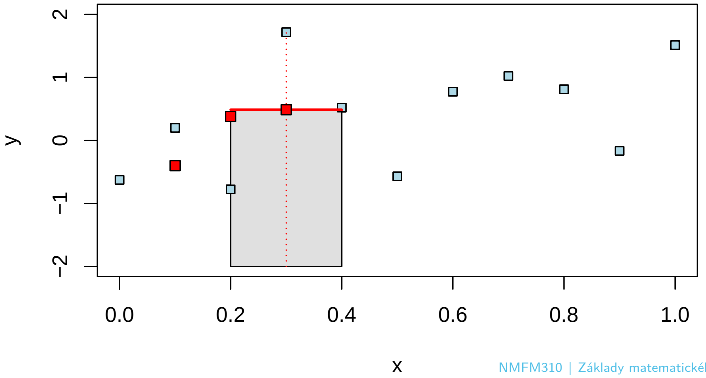
Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definováný jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^{r} w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r+1, \ldots, n-r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a tiež $\sum_{j=-r}^{r} w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme $\hat{y}_i$ pomoci y_i a dvou vedlejších sousedů;



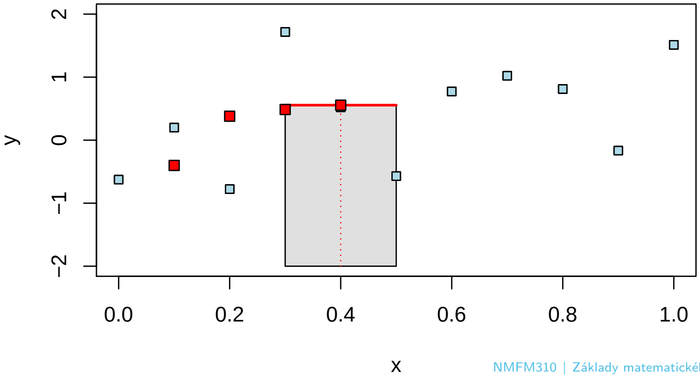
Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definováný jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^{r} w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r+1, \ldots, n-r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a tiež $\sum_{j=-r}^{r} w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme $\hat{y}_i$ pomoci y_i a dvou vedlejších sousedů;



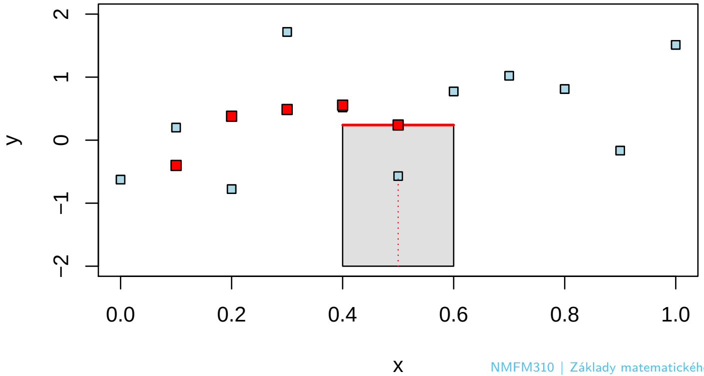
Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definováný jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^{r} w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r+1, \ldots, n-r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a tiež $\sum_{j=-r}^{r} w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme $\hat{y}_i$ pomoci y_i a dvou vedlejších sousedů;



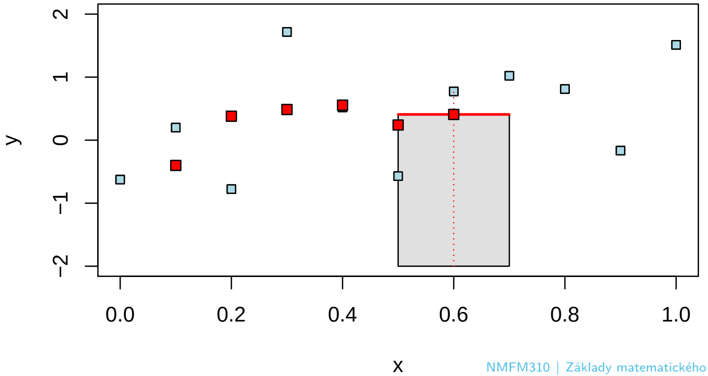
Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definováný jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^{r} w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r+1, \ldots, n-r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a tiež $\sum_{j=-r}^{r} w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme $\hat{y}_i$ pomoci y_i a dvou vedlejších sousedů;



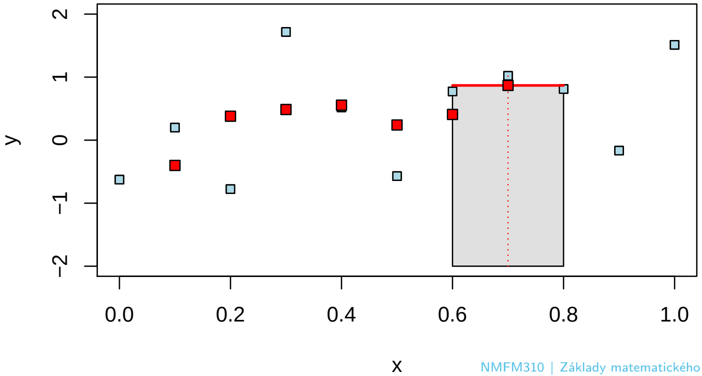
Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definováný jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^{r} w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r+1, \dots, n-r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a tiež $\sum_{j=-r}^{r} w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme $\hat{y}_i$ pomoci y_i a dvou vedlejších sousedů;



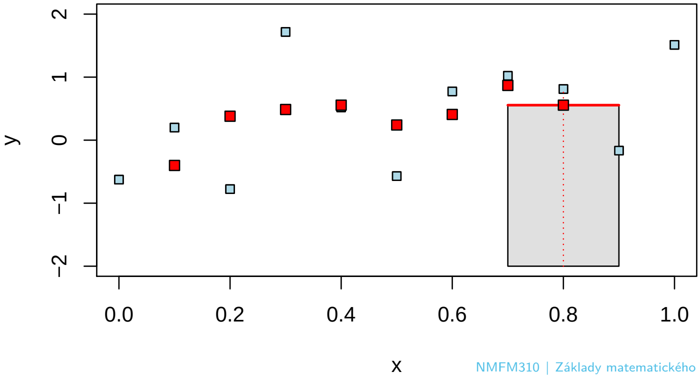
Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definovány jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^{r} w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r+1, \dots, n-r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a též $\sum_{j=-r}^{r} w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme $\hat{y}_i$ pomoci y_i a dvou vedlejších sousedů;



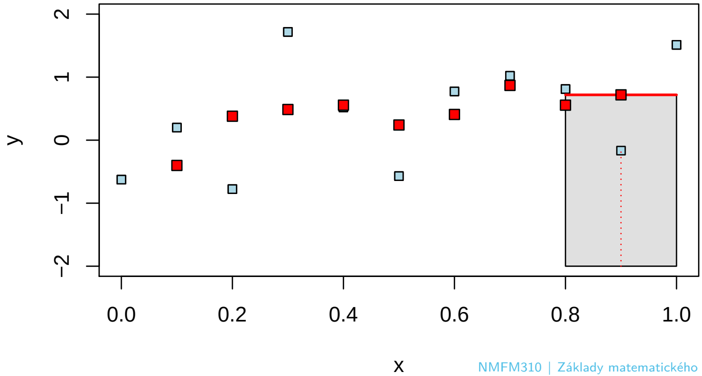
Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definováný jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^{r} w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r+1, \ldots, n-r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a tiež $\sum_{j=-r}^{r} w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme $\hat{y}_i$ pomoci y_i a dvou vedlejších sousedů;



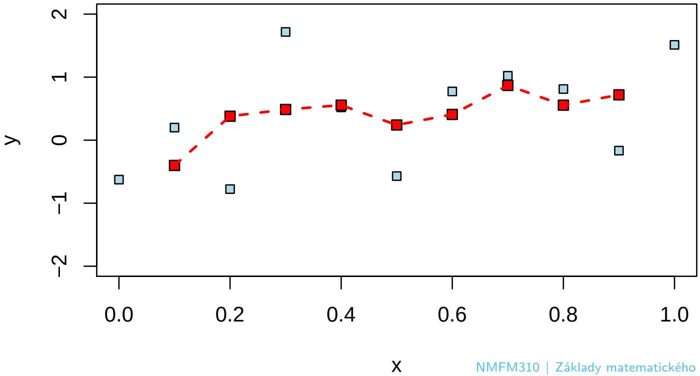
Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definováný jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^{r} w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r+1, \ldots, n-r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a tiež $\sum_{j=-r}^{r} w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme $\hat{y}_i$ pomoci y_i a dvou vedlejších sousedů;



Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definovány jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^{r} w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r+1, \ldots, n-r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a tiež $\sum_{j=-r}^{r} w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme $\hat{y}_i$ pomoci y_i a dvou vedlejších sousedů;



Jak definovat váhy w_j pro KP?

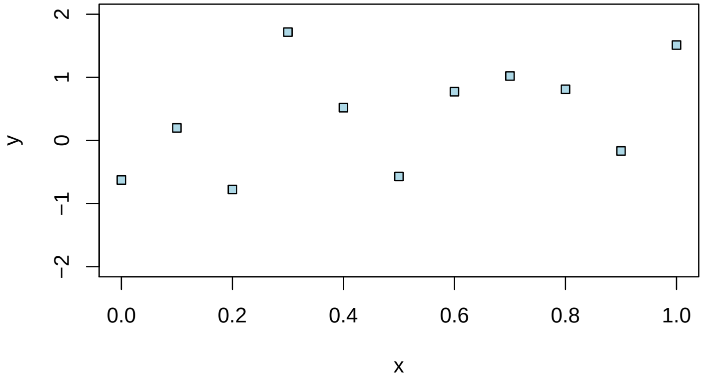
- **Stejné váhy pro všechny $j = -r, \ldots, r$;**
  - jednoduchost, $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a vyrovnaná hodnota $\hat{y}_i$ je pouze obyčejný aritmetický průmer z $2r + 1$ okolních hodnot, navíc nezáporne váhy;
  - není vyrovnán počáteční a koncový úsek dat (potřebna data nejsou k dispozicii) a obecně se nejedná o hladkou křivku v $\mathcal{D}$;

Jak definovat váhy w_j pro KP?

- **Stejné váhy pro všechny $j = -r, \ldots, r$;**
  - jednoduchost, $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a vyrovnaná hodnota $\hat{y}_i$ je pouze obyčejný aritmetický průmer z $2r + 1$ okolních hodnot, navíc nezáporne váhy;
  - není vyrovnán počáteční a koncový úsek dat (potřebna data nejsou k dispozicii) a obecně se nejedná o hladkou křivku v $\mathcal{D}$;
- **Obecně různe váhy pro w_j, $j = -r, \ldots, r$;**
  - při správne volbě lze dosáhnout hladkou křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$ a lze vyrovnát aj počátečné a koncové hodnoty;
  - nutnost dodatečných výpočtov, prípadně nějakých dodatečných parametrů;

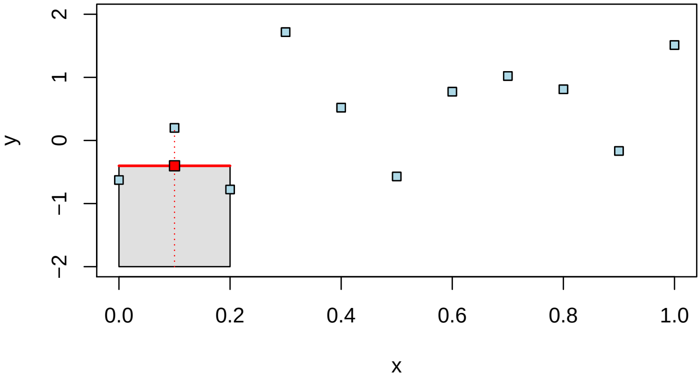
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



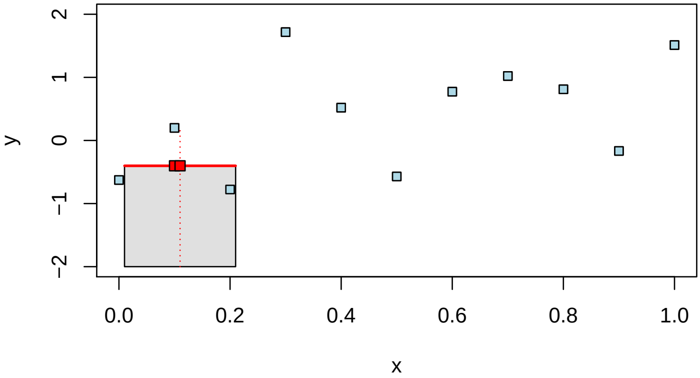
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



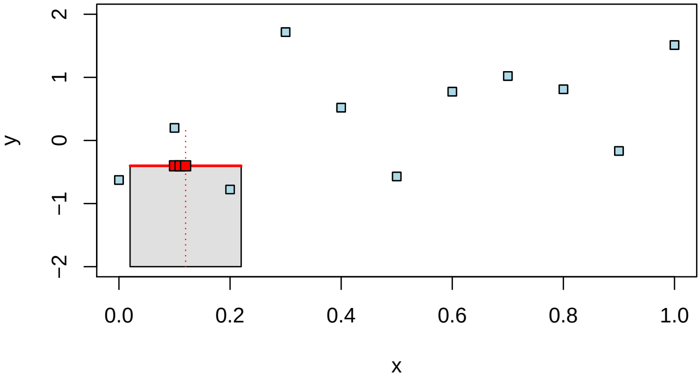
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



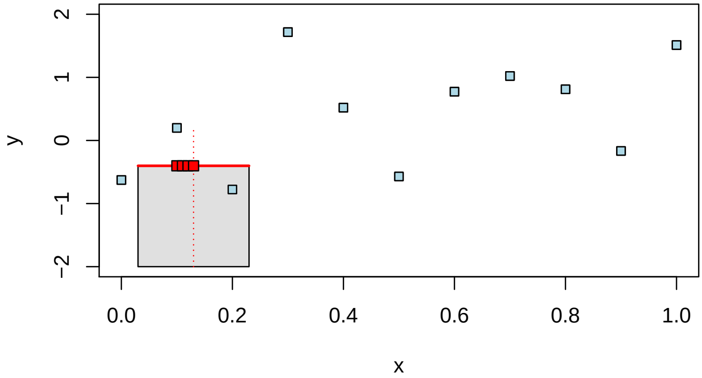
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



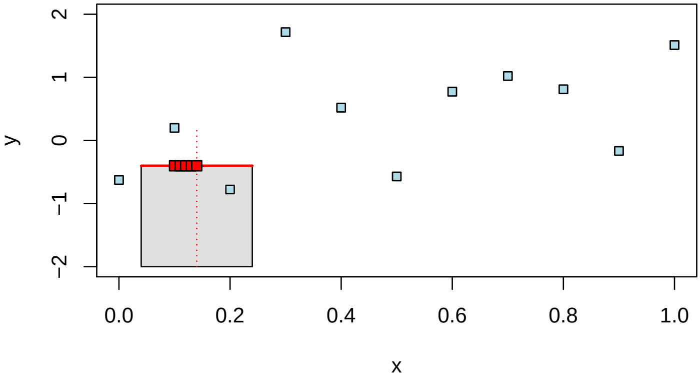
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



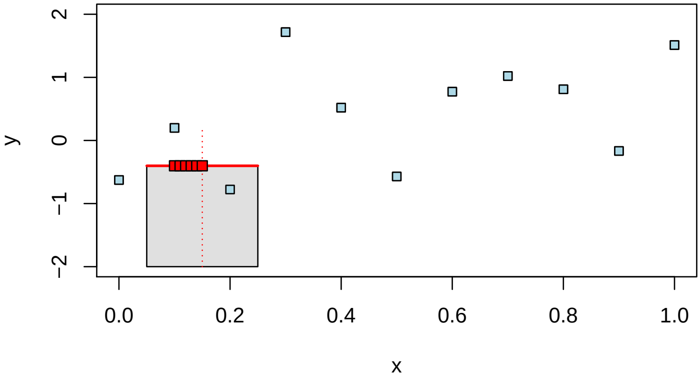
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



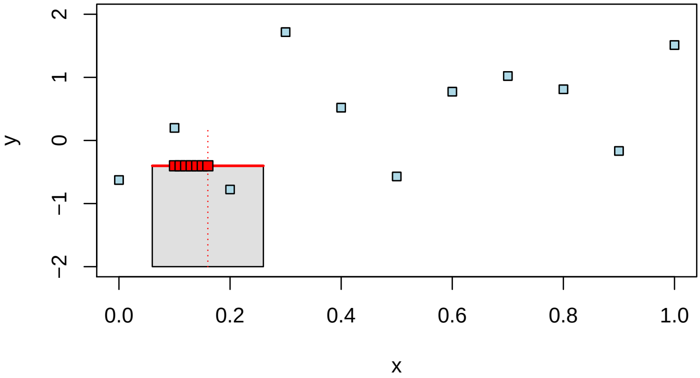
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



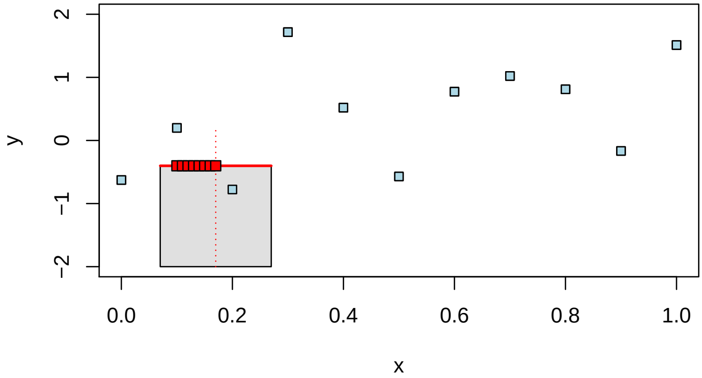
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



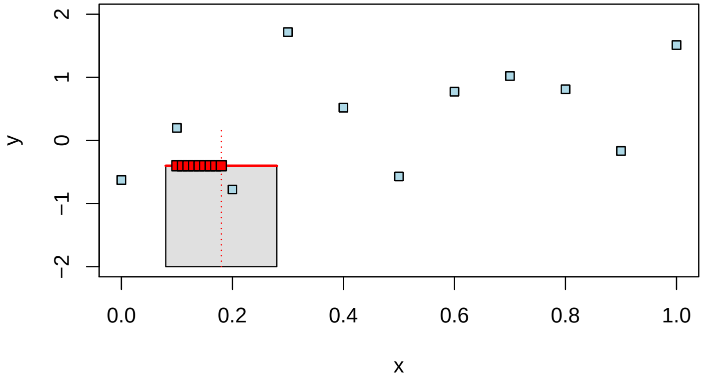
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



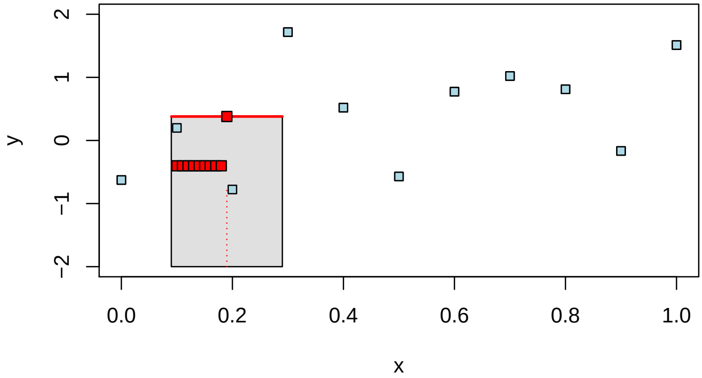
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



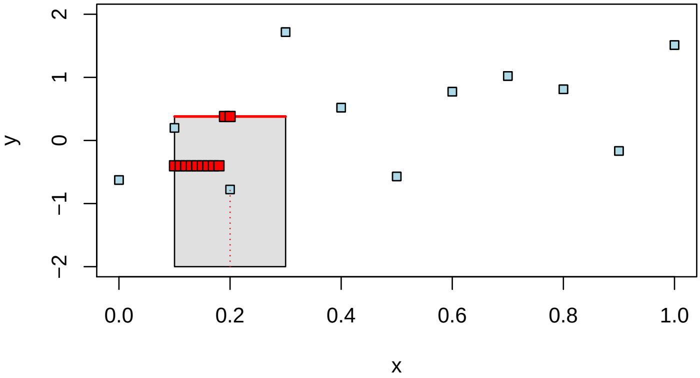
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



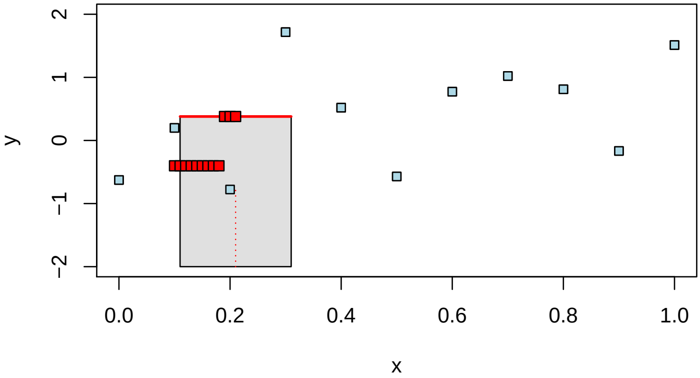
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



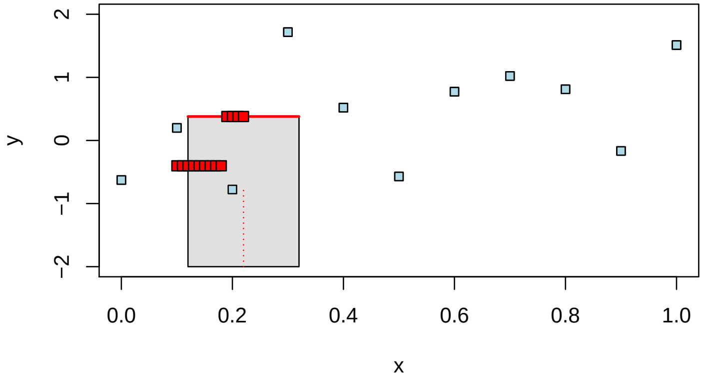
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



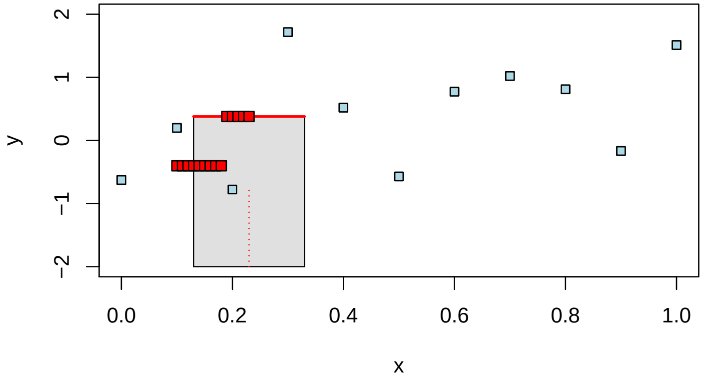
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



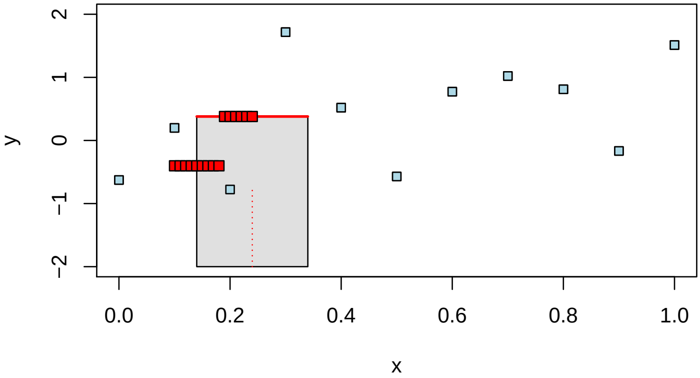
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



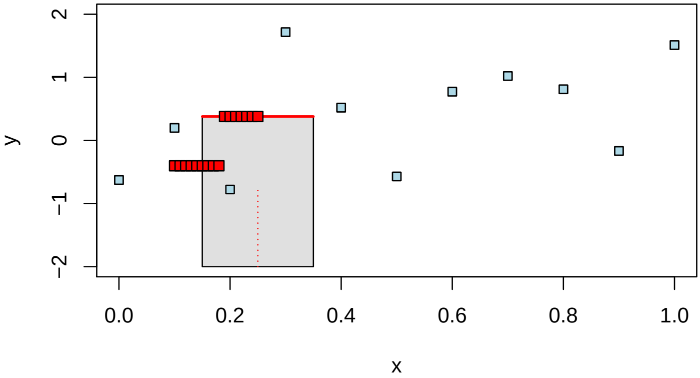
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



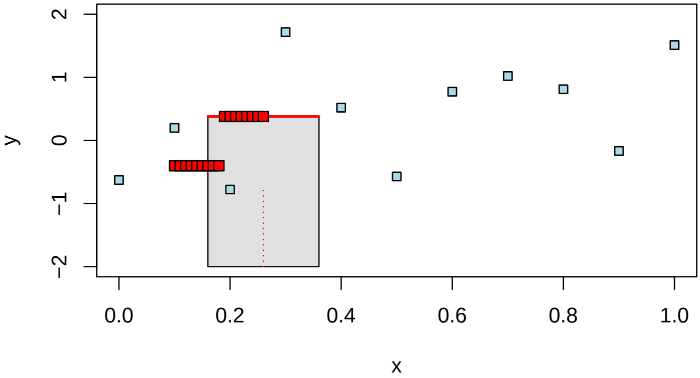
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



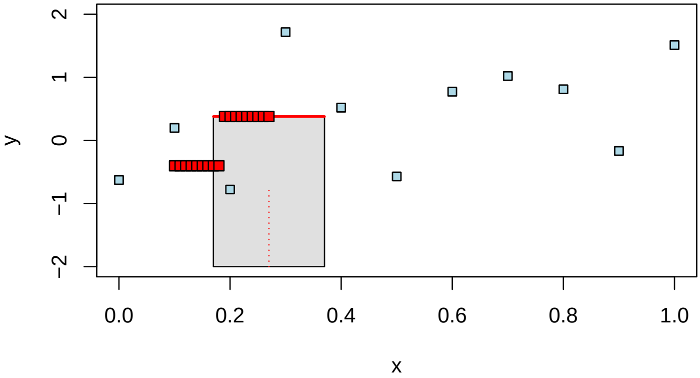
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



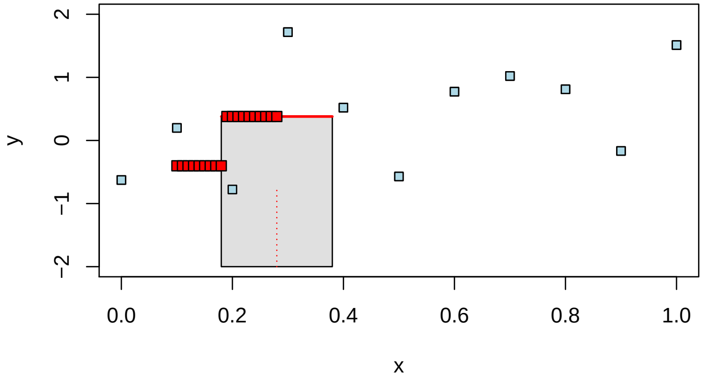
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



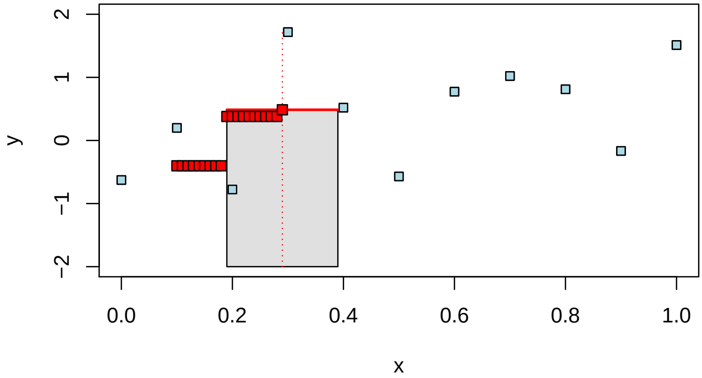
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



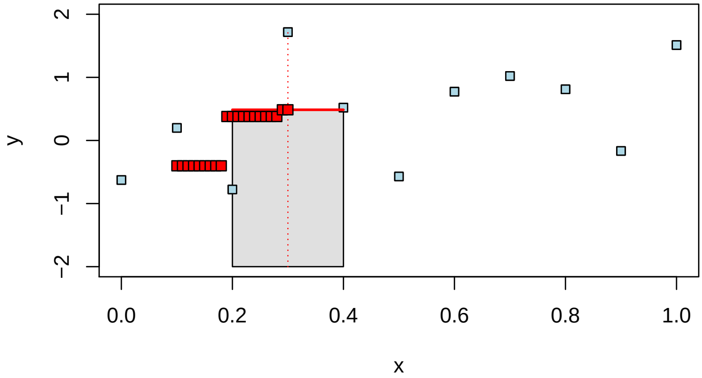
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



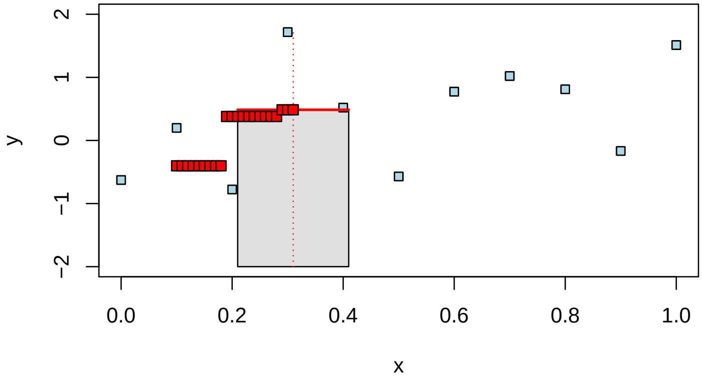
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



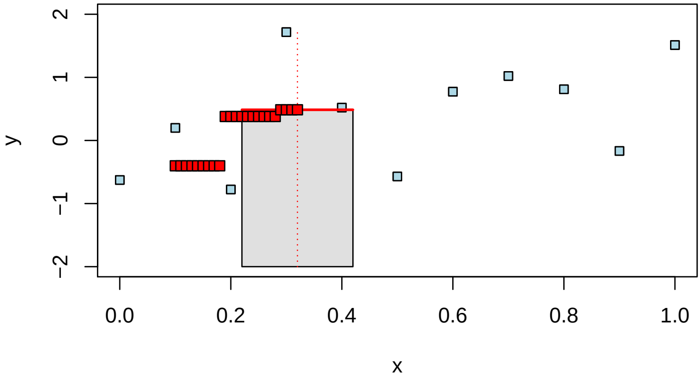
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



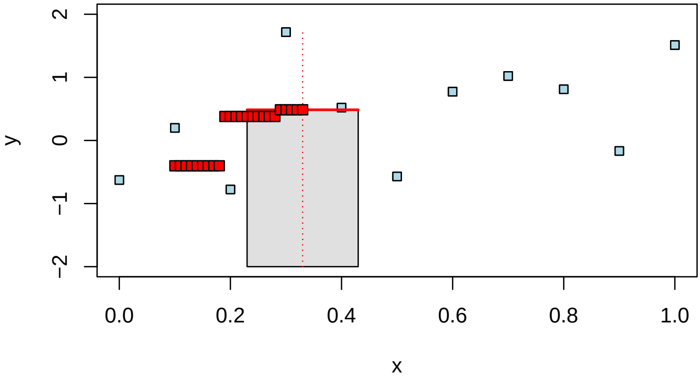
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



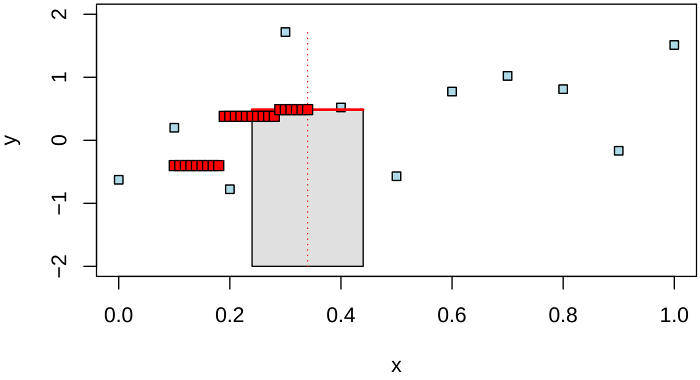
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



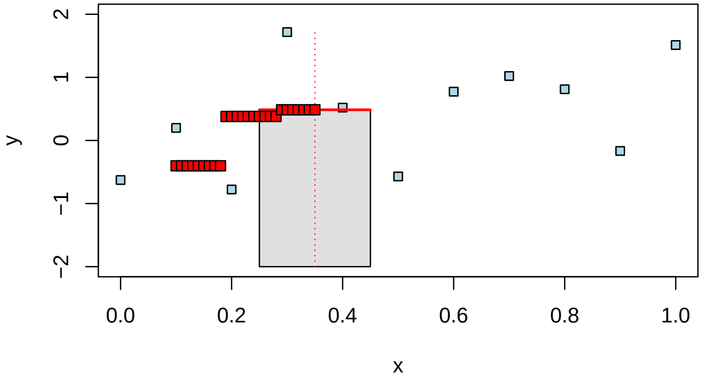
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



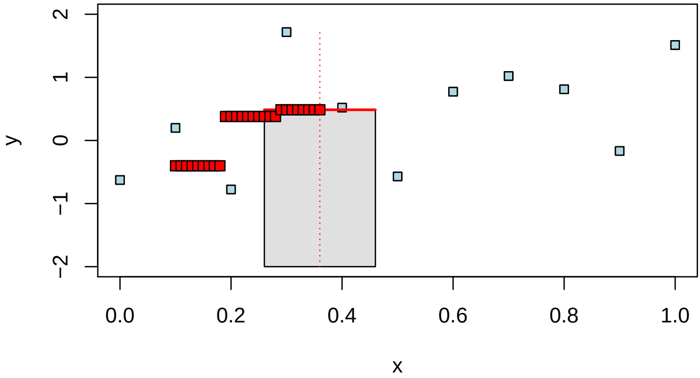
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



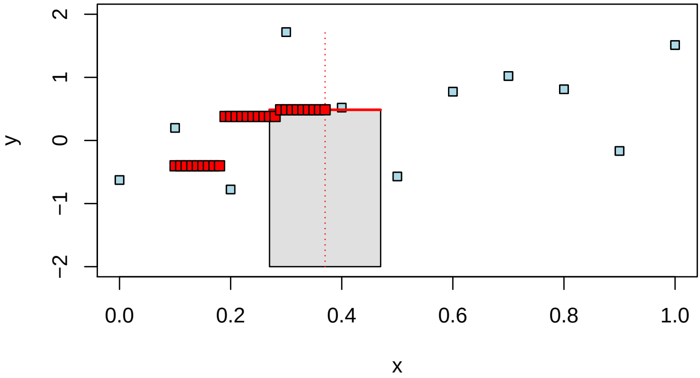
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



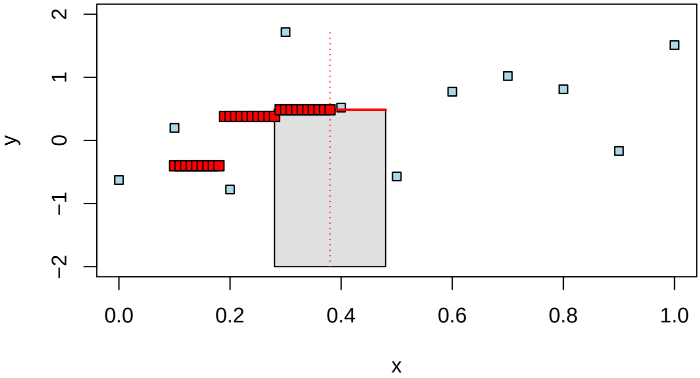
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



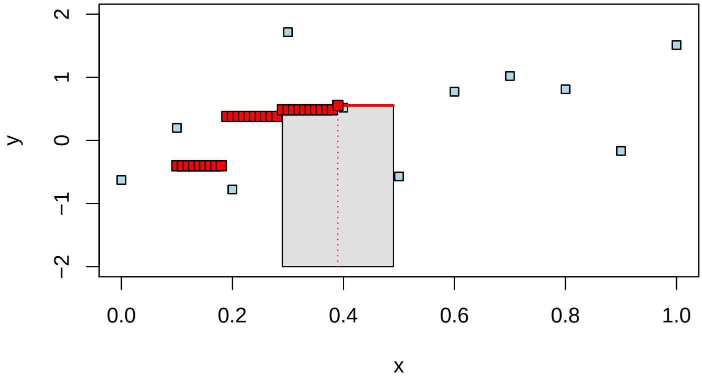
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



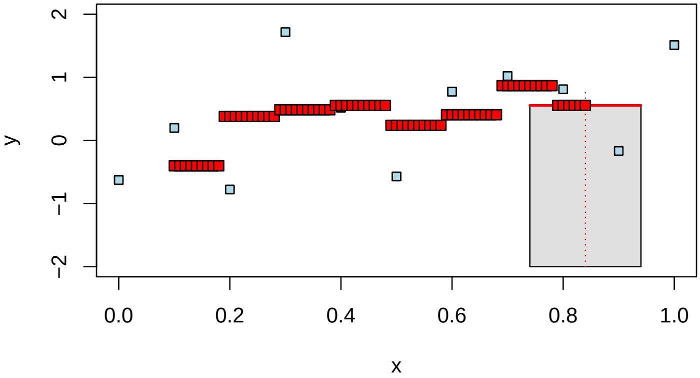
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



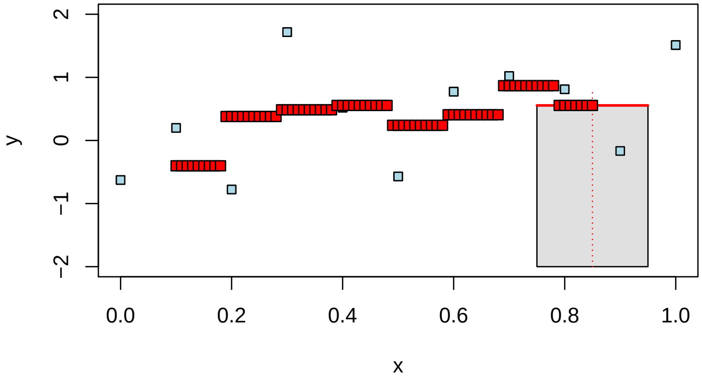
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



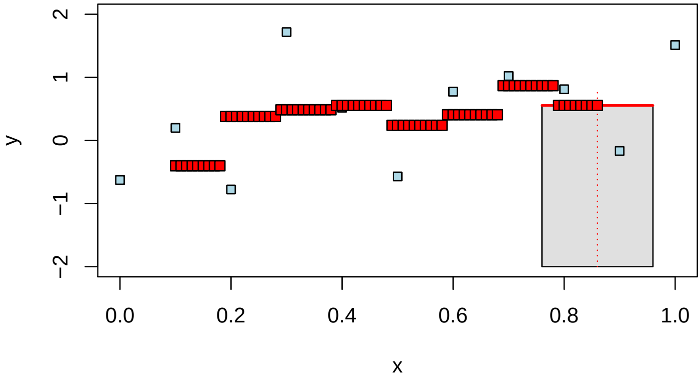
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



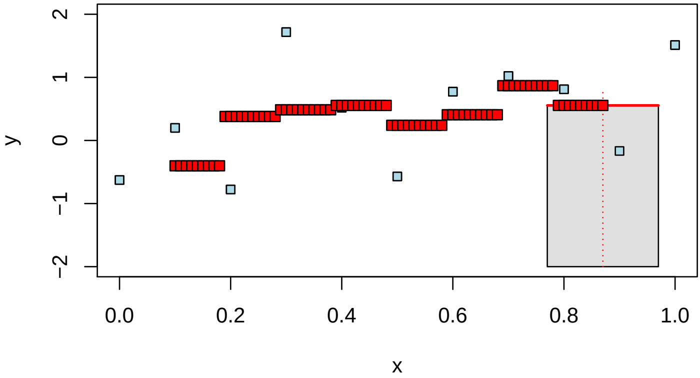
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



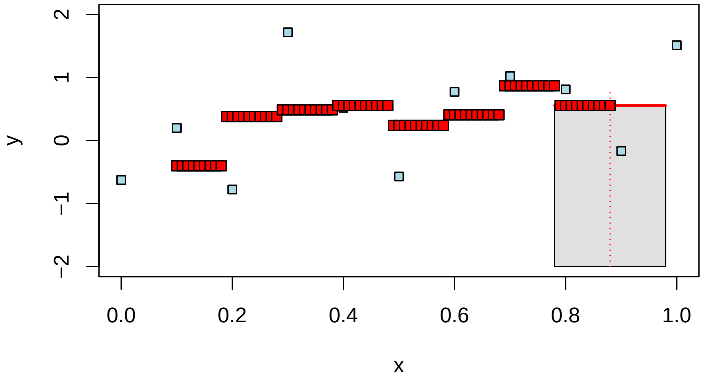
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



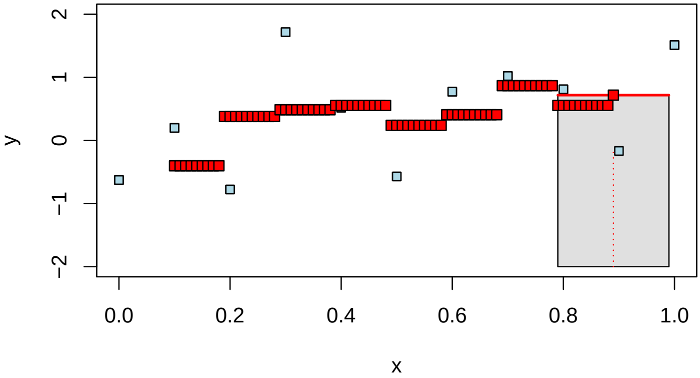
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



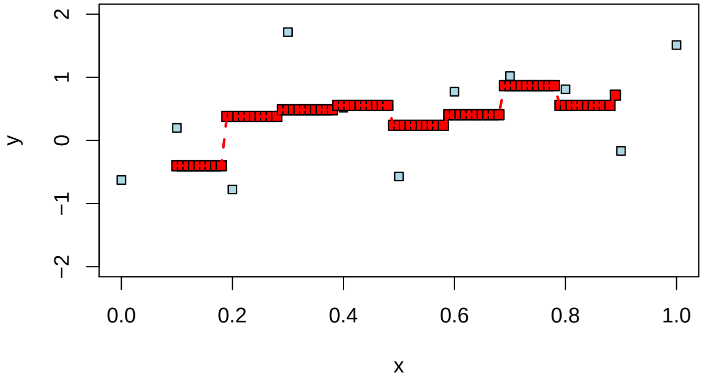
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



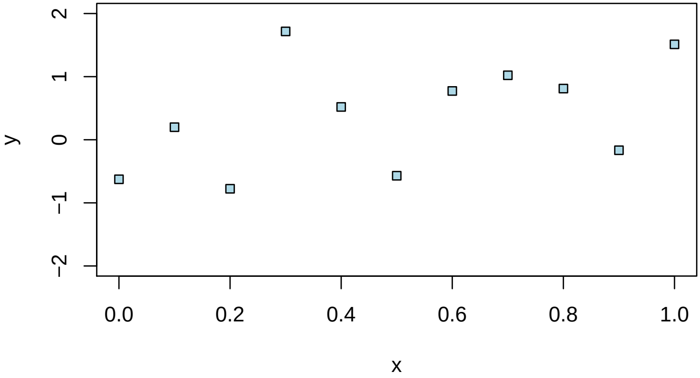
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



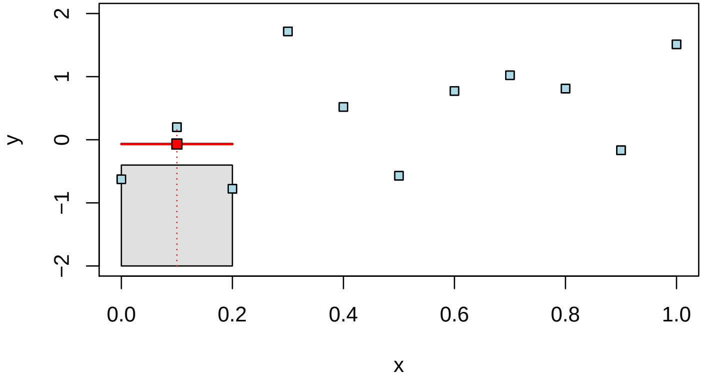
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



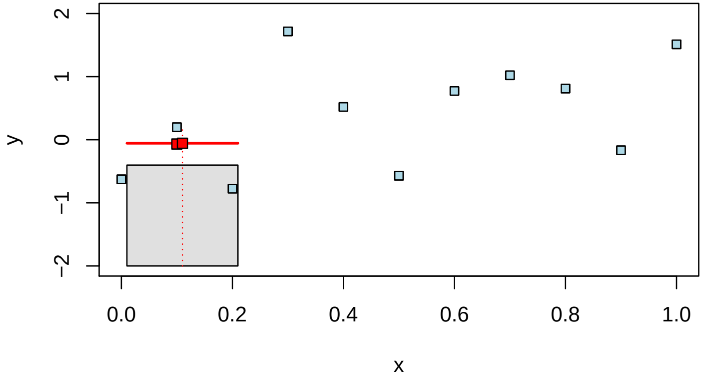
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



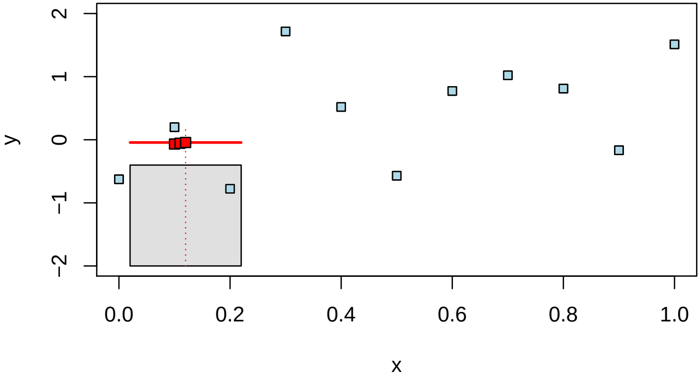
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



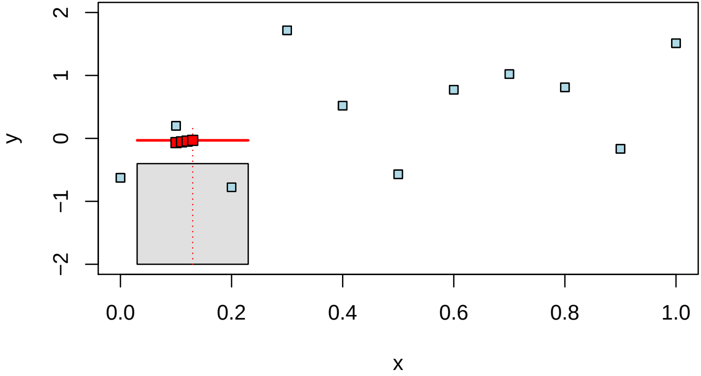
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



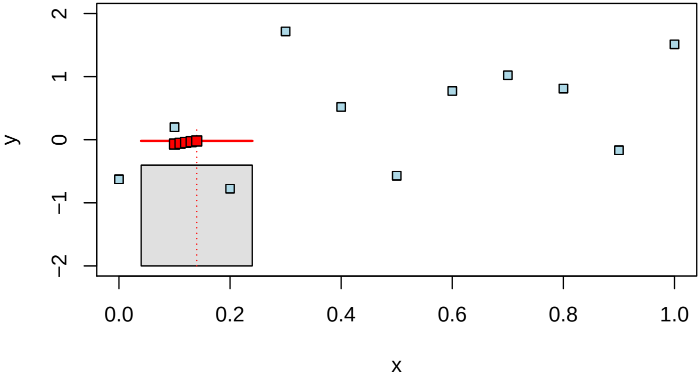
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



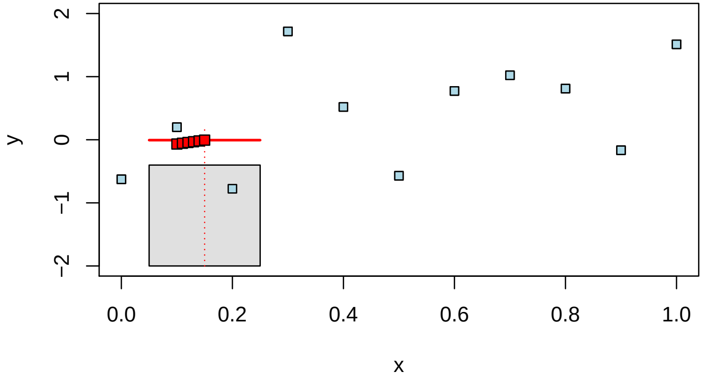
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



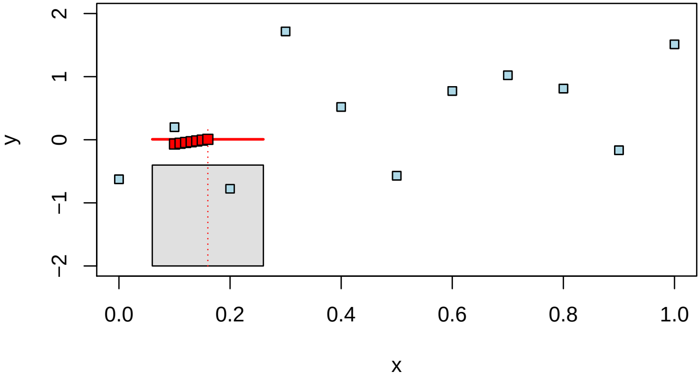
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



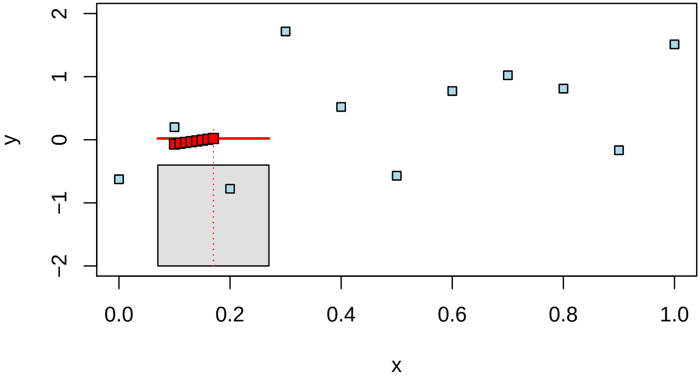
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



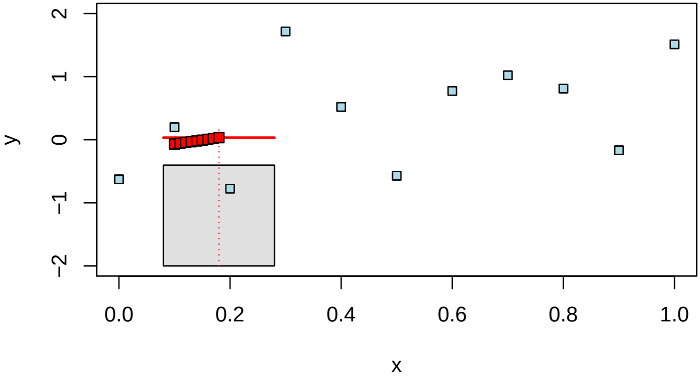
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



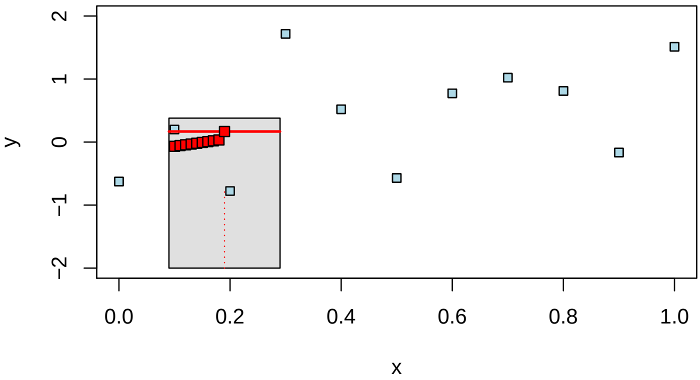
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



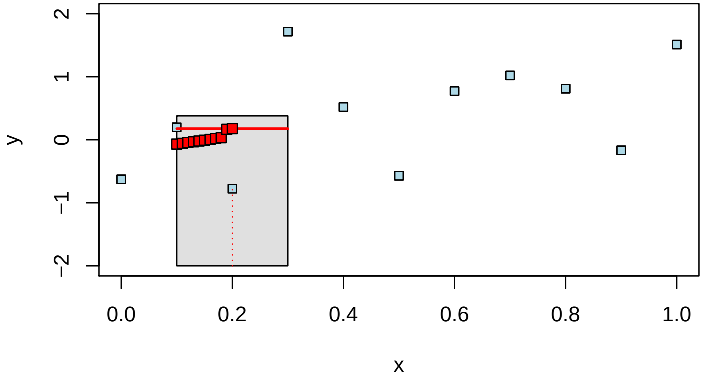
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



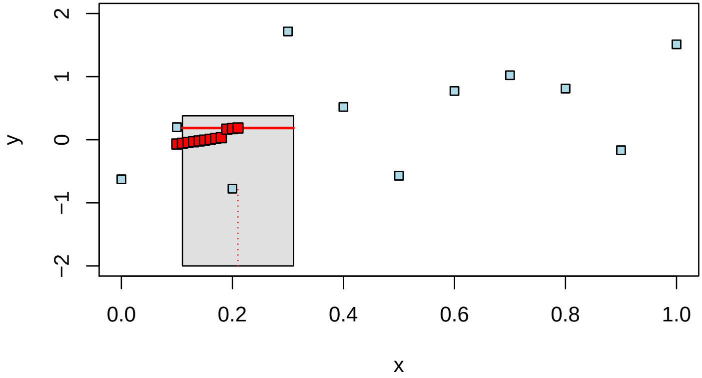
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



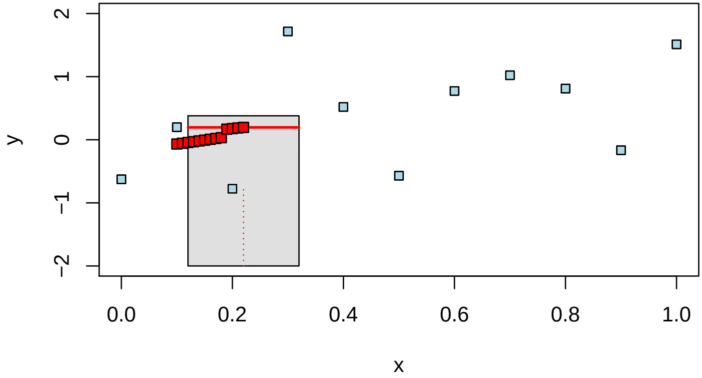
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



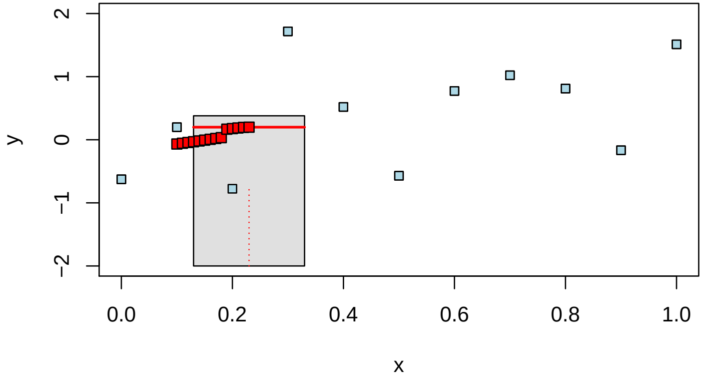
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



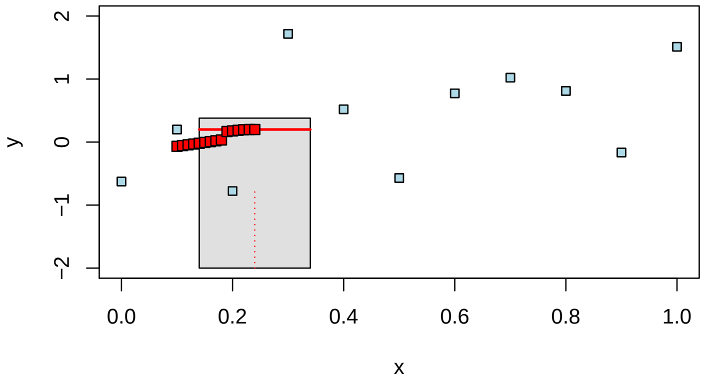
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



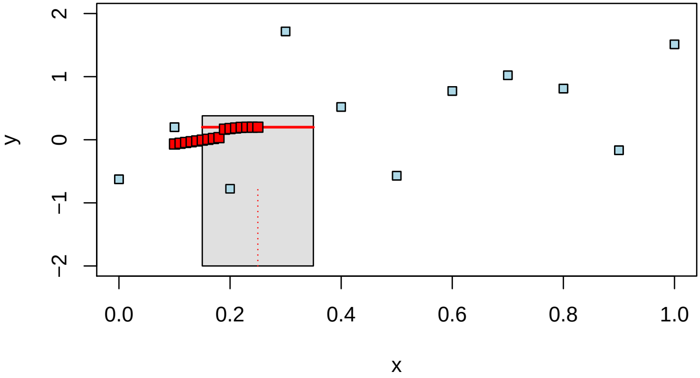
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



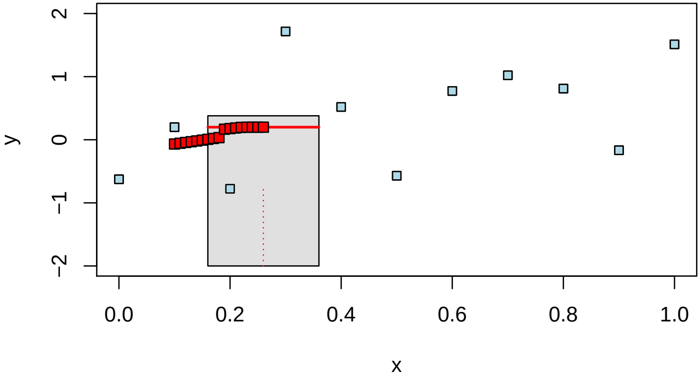
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



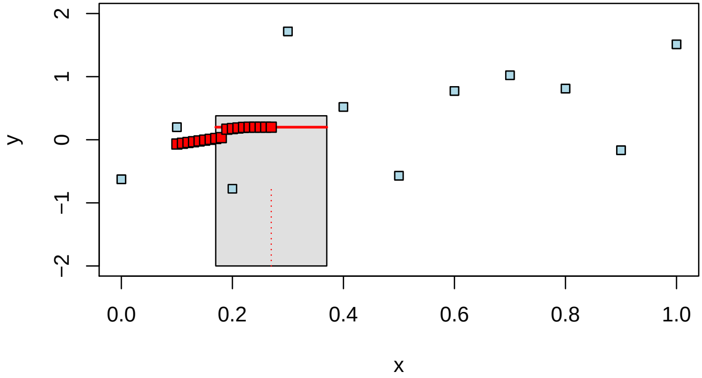
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



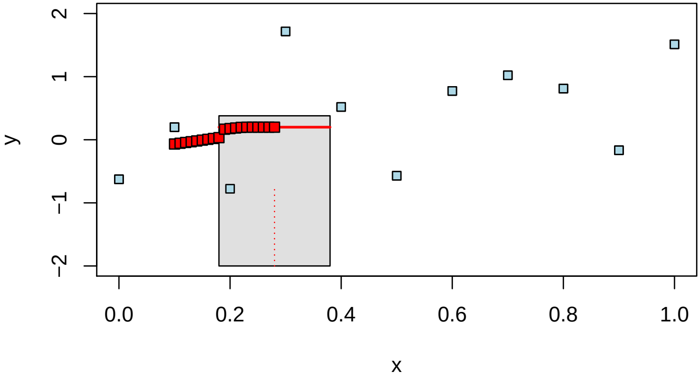
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



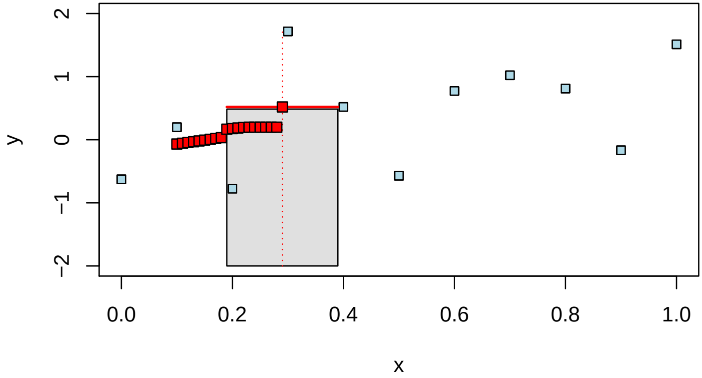
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



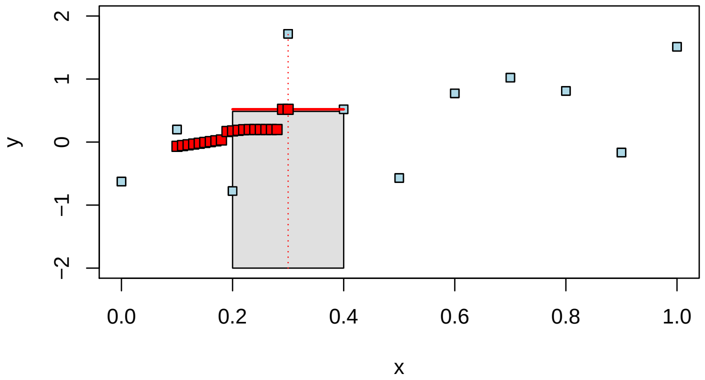
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



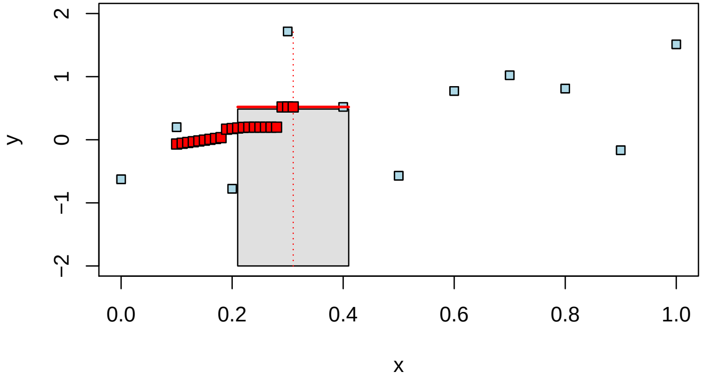
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



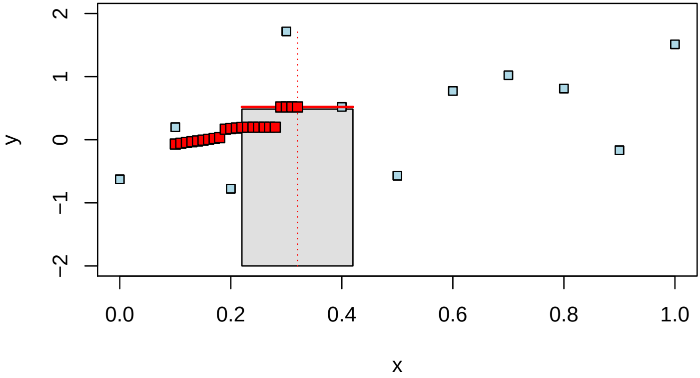
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



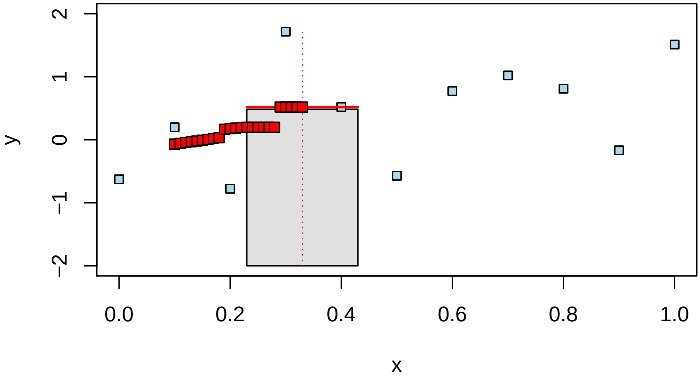
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



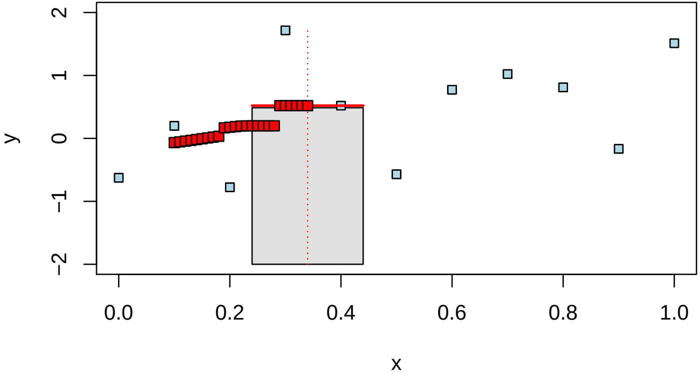
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



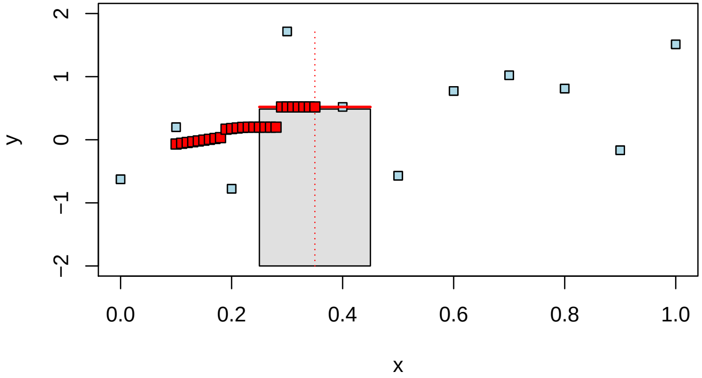
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



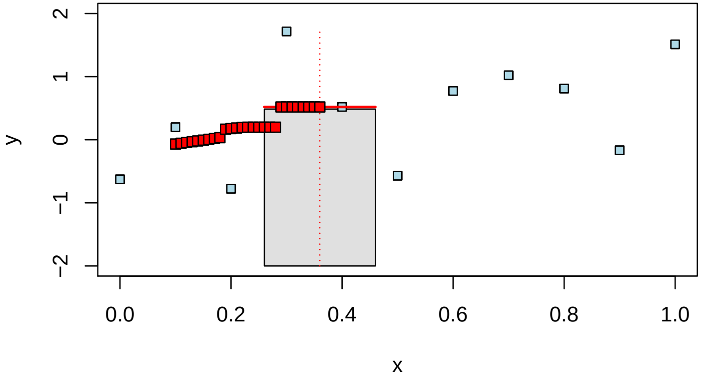
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



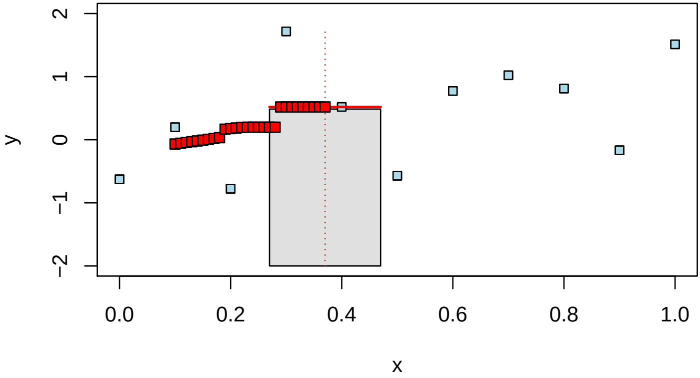
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



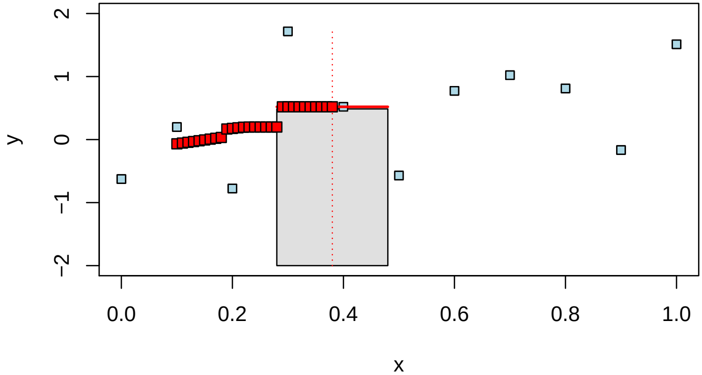
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



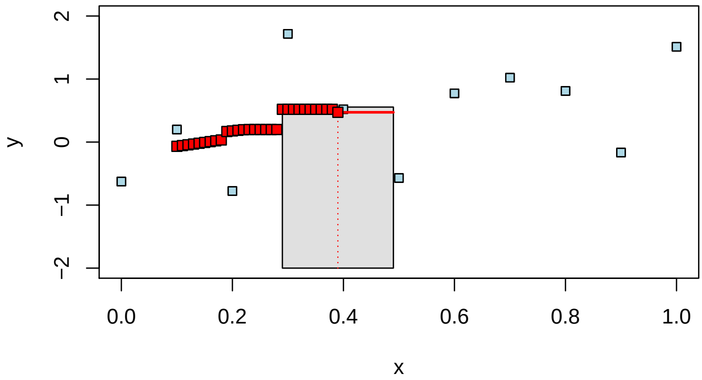
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



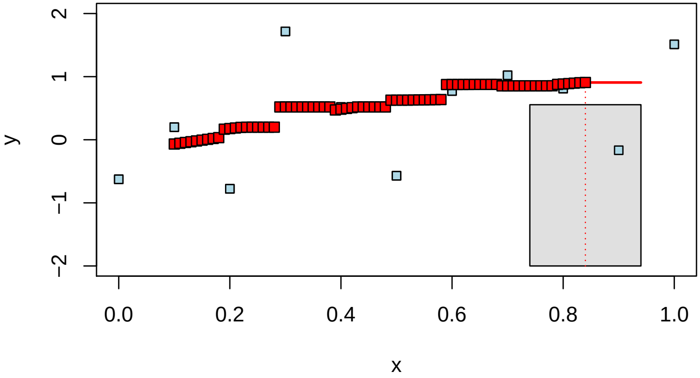
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



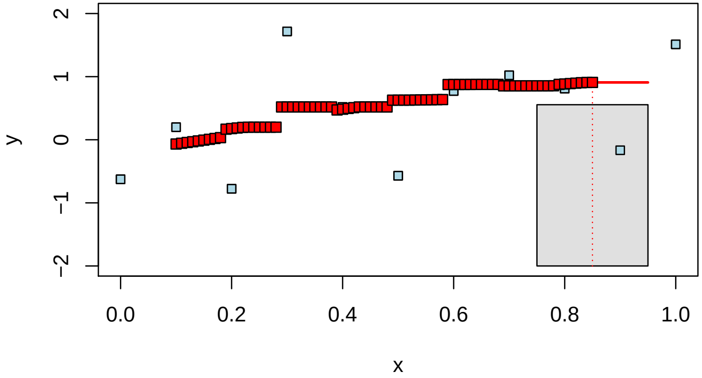
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



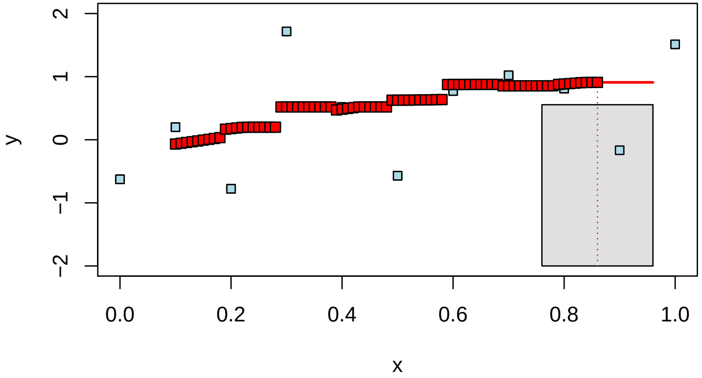
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



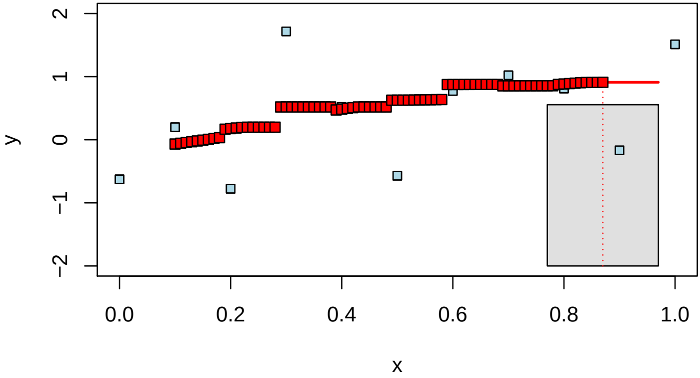
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



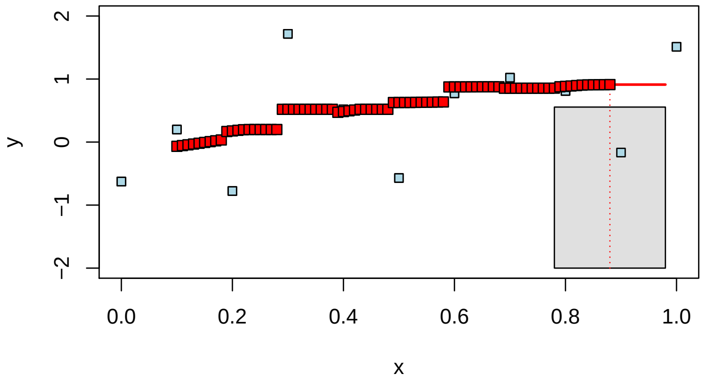
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



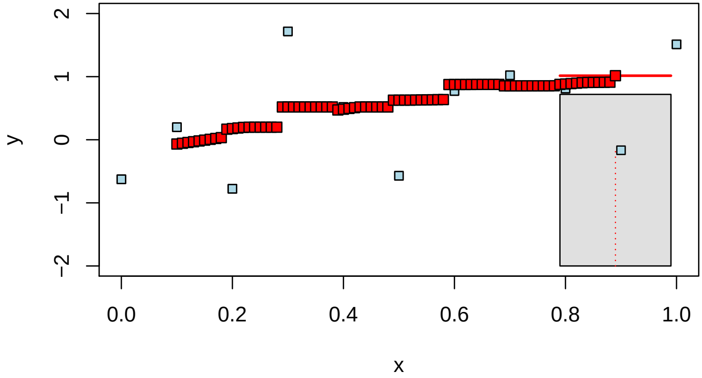
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



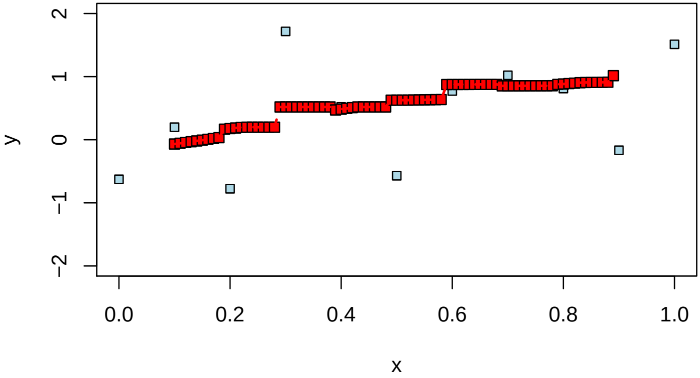
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



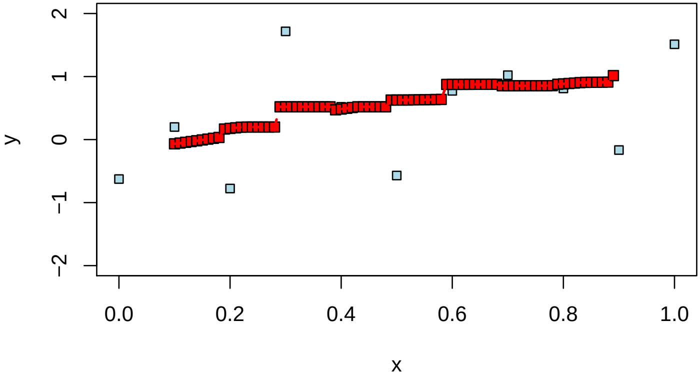
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



- Výsledná křivka nevypadá úplně hladce, ale to je z důvodu příliš hrubého gridu bodů z $\mathcal{D}$) v kterých počítame vážený průměr.

Konstrukce KP vyrovnáním úseků polynomy

- **IDEA:** váhy w_j pro vyrovnání hodnot y_i volíme tak, že $2r+1$ členů řady, t.j. hodnoty $y_{i-r}, \ldots, y_i, \ldots, y_{i+r}$, aproximujeme vhodným polynomem stupně $p \in \mathbb{N}$; Vyrovnána hodnota $\hat{y}_i$ je pak hodnota polynomu, ktorá odpovída pozorování y_i.
- hodnota $p \in \mathbb{N}$ se nazýva řád klouzavého průměru;
- formálně zapsáno, pro pozorování $y_{i-r}, \ldots, y_{i+r}$ uvažujeme polynom

$$y_{i+u} \approx c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + \cdots + c_p u^p \qquad \text{pro } u = -r, \ldots, r; \tag{2}$$

- resp. zapsáno v maticovem tvaře $\boldsymbol{y}_{(i)} \approx \mathbb{F}\boldsymbol{c}$, kde

$$\boldsymbol{y}_{(i)} = \begin{pmatrix} y_{i-r} \\ \vdots \\ y_{i+r} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & (-r) & (-r)^2 & \ldots & (-r)^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & r & r^2 & \ldots & r^p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix}$$

- vyrovnanou hodnotu $\hat{y}_i$ pro y_i pak dostaneme dosazením $u = 0$ do (2);

Váhy pomoci projekční matice

- pro čast pozorování $\boldsymbol{y}_{(i)} = (y_{i-r}, \dots, y_{i+r})^\top$ máme pro vyrovnání vztah

$$\hat{\boldsymbol{y}}_{(i)} = \mathbb{F} \cdot \hat{\boldsymbol{c}};$$

- pro odhadnuté parametry $\hat{\boldsymbol{c}} = (\hat{c}_1, \dots, \hat{\boldsymbol{c}}_p)^\top$ zase platí

$$\hat{\boldsymbol{c}} = (\mathbb{F}^\top \mathbb{F})^{-1} \mathbb{F}^\top \boldsymbol{y}_{(i)};$$

- pro vyrovnané hodnoty $\hat{\boldsymbol{y}}_{(i)} = (\hat{y}_{i-r}, \dots, \hat{y}_{i+r})^\top$ proto dostaneme

$$\hat{\boldsymbol{y}}_{(i)} = \mathbb{F}(\mathbb{F}^\top \mathbb{F})^{-1} \mathbb{F}^\top \boldsymbol{y}_{(i)} = \mathbb{H} \boldsymbol{y}_{(i)};$$

- matice $\mathbb{H} = \mathbb{F}(\mathbb{F}^\top \mathbb{F})^{-1} \mathbb{F}^\top$ se nazýva projekční matice;
- projekční matice definuje linárne zobrazení z $\mathbb{R}^{2r+1}$ do p rozměrného podprostoru (projekce z $\mathbb{R}^{2r+1}$ do $\mathbb{R}^p$);
- projekční matice $\mathbb{H}$ je typu $(2r+1) \times p$ a v prostředním řádku obsahuje váhy pro vyrovnání hodnoty y_i;

Váhy w_j vs. parametre $c_1, \dots c_p$

- pro vyhladené hodnoty $\hat{y}_i$, pro $i = r+1, \dots, n-r$, máme obecně

$$\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^{r} w_j y_{i+j} = \boldsymbol{h}_{r+1}^\top \boldsymbol{y}_{(i)} = \hat{c}_1,$$

  kde $\boldsymbol{h}_{r+1} = (h_{(r+1)1}, \dots, h_{(r+1)(2r+1)})^\top = (w_{-r}, \dots, w_r)^\top$, je $(r+1)$-ní řádek projekční matice $\mathbb{H} = (\boldsymbol{h}_1, \dots, \boldsymbol{h}_{2r+1})^\top$;
- maticově můžeme taktiež použít vyjádření ve tvaru

$$\hat{\boldsymbol{y}}_{(i)} = \mathbb{H}\boldsymbol{y}_{(i)} = \mathbb{F}(\mathbb{F}^\top\mathbb{F})^{-1}\mathbb{F}^\top \boldsymbol{y}_{(i)} = \mathbb{F}\hat{\boldsymbol{c}},$$

  přičemž vyhlazená hodnota $\hat{y}_i$, která nás zajíma, je $(r+1)$-ní element vektoru $\hat{\boldsymbol{y}}_{(i)} = (\hat{y}_{i-r}, \dots, \hat{y}_{i+r})^\top$;
- je důležité si uvědomit, že váhy $w_{-r}, \dots, w_r$ nezávisí na indexu $i = r+1, \dots, n-r$ a pro každou vyhlazenú hodnotu $\hat{y}_i$ jsou stejné; *(váhy $w_{-r}, \dots, w_r$ závisí pouze na matici $\mathbb{F}$, která je pořád stejná)*
- naproti tomu odhadnuté parametre $\hat{c} = (\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_p)^\top$ na indexu $i = r+1, \dots, n-r$ závísí, a pro každé $\hat{y}_i$ jsou parametry obecně různe; *(odhady $\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_p$ závisí na matici $\mathbb{F}$, ale také na vektoru $\boldsymbol{y}_{(i)}$)*

Odhad parametrů $c_0, \ldots, c_p$

- odhad parametrov $c_0, \ldots, c_p$ metódou nejmenších čtverců;

Samostatný úkol

Jak vypadá v tomhle případě matice $\mathbb{F}$ a jak se mení v závislosti na požadovanej hodnote y_i, pro $i = -r, \ldots, r$, kterú chceme vyhlazovat?

Jak vypadá projekční soustava normálných rovníc a příslušná projekční matice?

Príklad

Uvažujte kubický polynom pro $p = 3$ a $r = 2$. Polynom pro určení váh je ve tvaru $y_{i+u} \approx c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + c_3 u^3$, kde $c_0, \ldots, c_3 \in \mathbb{R}$ jsou neznáme parametry.

- sestavte příslušnou matici $\mathbb{F}$;
- nájděte projekčnou matici $\mathbb{H} = \mathbb{F}(\mathbb{F}^\top \mathbb{F})^{-1} \mathbb{F}^\top$;
- nájděte váhy w_j, pro $j = -2, 1, 0, 1, 2$ a spočtěte $\hat{y}_i$, pro $i = 3, \ldots, n-2$;

Vyrovnané hodnoty a predikce

- na rozdíl od klasických aritmetických klouzavých průměrů je možné využit vážené klouzavé průměry aj k vyrovnání počátečných a koncových hodnot;
- pro vyhlazení napr. koncového úseku stačí v (2) vhodne dosadit za u;

  Napr. pro $r = 1$ a $p = 1$, máme $y_{i+u} \approx c_0 + c_1 u$, pro $u = -1, 0, 1$ a $i = 2, \ldots, n-1$;
  Pro vylazení y_n dosadíme: $i \leftarrow n-1$ a $u \leftarrow 1 \Rightarrow y_n = y_{(n-1)+1} \approx c_0 + c_1$ a $\hat{y}_n = \hat{c}_0 + \hat{c}_1$;
- analogicky lze použít výraz (2) i pro budoucí predikce;

  Napr. pro $r = 2$ a $p = 2$, máme $y_{i+u} \approx c_0 + c_1 u + c_2 u^2$, pro $u = -2, \ldots, 2$ a $i = 3, \ldots, n-2$;
  Predikce y_{n+1}: $i \leftarrow n-2$ a $u \leftarrow 3 \Rightarrow y_{n+1} = y_{(n-2)+3} \approx c_0 + 3c_1 + 9c_2$ a $\hat{y}_{n+1} = \hat{c}_0 + 3\hat{c}_1 + 9\hat{c}_2$;

Príklad

Uvažujte kubický polynom pro $p = 3$ a $r = 2$. Polynom pro určení váh je ve tvaru $y_{i+u} \approx c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + c_3 u^3$, kde $c_0, \ldots, c_3 \in \mathbb{R}$ jsou neznáme parametry.

- spočtěte predikci o jeden krok dopředu a explicitně vyjadřite váhy pro vážený průměr;

Zhrnutí předchozí přednášky/opakování

- **Parametrické vyrovnávání dat;**
  (prokládaná křivka je jednoznačne určena pomoci několika málo parametrů, které jsou odhadnuté pomoci metody nejmenších čtverců)
- **Semiparametrické vyrovnávání dat;**
  (proložená křivka definovaná jako lineární kombinace několika málo bázických funkci – napr. splinů – odhady metodou nejmenšich čtverců)
- **Neparametrické vyrovnávání dat;**
  (proložená křivka definovaná pouze lokálně pomoci několika málo sousedů – případné váhy získané metódou nejmenších čtverců)

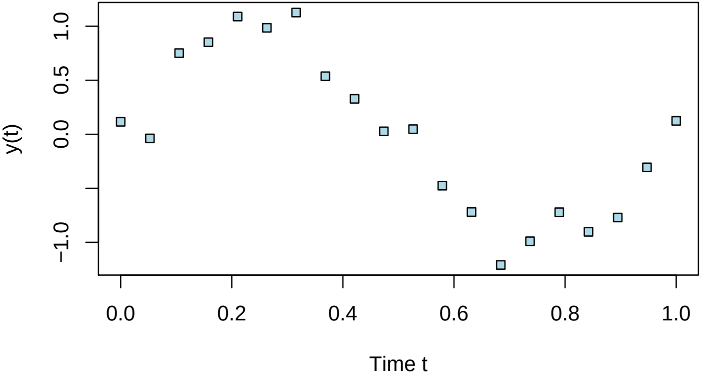
Zhrnutí předchozí přednášky/opakování

- **Parametrické vyrovnávání dat;**
  (prokládaná křivka je jednoznačne určena pomoci několika málo parametrů, které jsou odhadnuté pomoci metody nejmenších čtverců)
- **Semiparametrické vyrovnávání dat;**
  (proložená křivka definovaná jako lineární kombinace několika málo bázických funkci – napr. splinů – odhady metodou nejmenšich čtverců)
- **Neparametrické vyrovnávání dat;**
  (proložená křivka definovaná pouze lokálně pomoci několika málo sousedů – případné váhy získané metódou nejmenších čtverců)

- Příslušná metoda vyrovnávání musí byt zvolená s ohledem na následnou aplikaci/využití proložené křivky: jiné požadavky jsou kladené pro interpretaci, jiné pro vhodné zachycení neznámeho trendu;
- Problém optimálneho vyhlazení: hladkost proložené křivky vs. korespondence s původními daty (tzv. bias-variance trade-off); (neboli flexibilita vs. komplexita finálneho modelu)

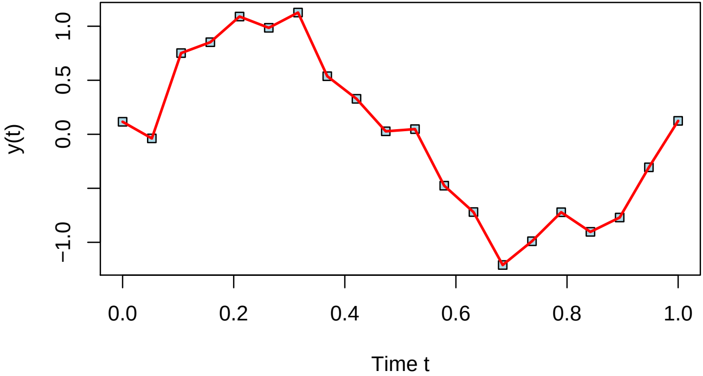
Vychýlení vs. variabilita

- Jak zvolit/vybrat vhodnou míru vyhlazení?
- Lze aplikovat nějaké optimálne kritérum pomoci kterého se rozhodnout?



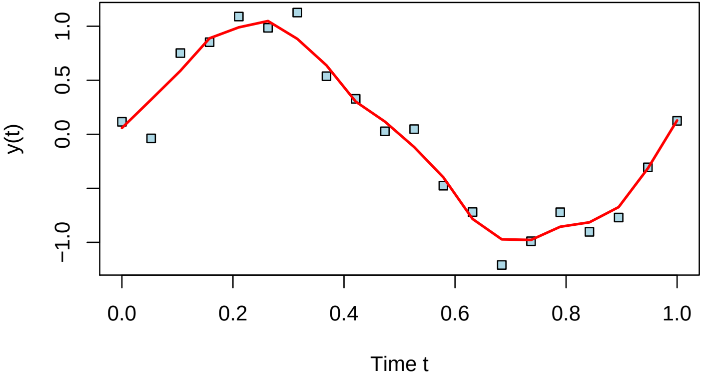
Vychýlení vs. variabilita

- Jak zvolit/vybrat vhodnou míru vyhlazení?
- Lze aplikovat nějaké optimálne kritérum pomoci kterého se rozhodnout?



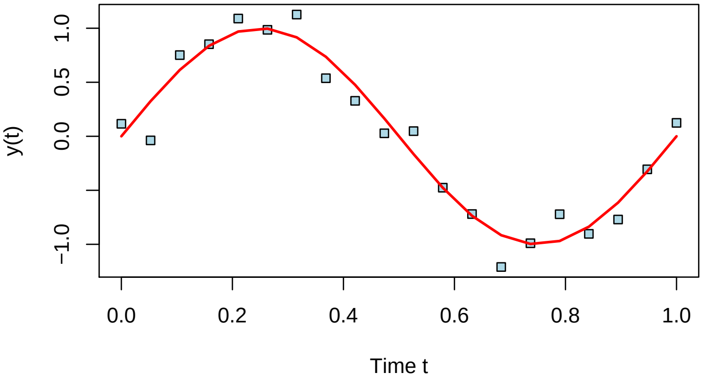
Vychýlení vs. variabilita

- Jak zvolit/vybrat vhodnou míru vyhlazení?
- Lze aplikovat nějaké optimálne kritérum pomoci kterého se rozhodnout?



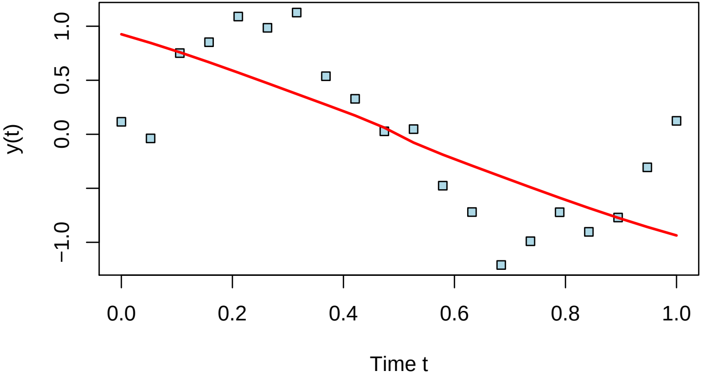
Vychýlení vs. variabilita

- Jak zvolit/vybrat vhodnou míru vyhlazení?
- Lze aplikovat nějaké optimálne kritérum pomoci kterého se rozhodnout?



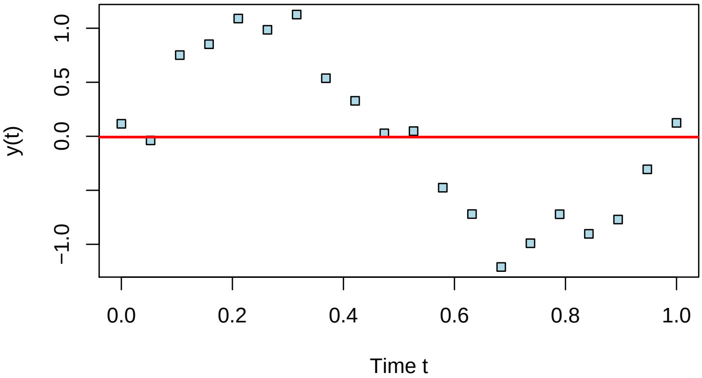
Vychýlení vs. variabilita

- Jak zvolit/vybrat vhodnou míru vyhlazení?
- Lze aplikovat nějaké optimálne kritérum pomoci kterého se rozhodnout?



Vychýlení vs. variabilita

- Jak zvolit/vybrat vhodnou míru vyhlazení?
- Lze aplikovat nějaké optimálne kritérum pomoci kterého se rozhodnout?



Whitttacker-Hendersonová metoda

Základnou úlohou vyhlazování dat je odhadnout hladký, pomalu se měníci trend. Zároveň cheme dosáhnout co nejlepší zhodu mezi původními daty a vylazenými daty;

- **Dokonalé vyhlazení**
  $\Rightarrow$ příliš velký součet čtverců odchylek, a malá zhoda s původními daty;
- **Dokonalá zhoda s daty**
  $\Rightarrow$ nulový součet čtverců odchylek, príliš velká variabilita, interpolace;

Whitttacker-Hendersonová metoda

Základnou úlohou vyhlazování dat je odhadnout hladký, pomalu se měníci trend. Zároveň cheme dosáhnout co nejlepší zhodu mezi původními daty a vylazenými daty;

- **Dokonalé vyhlazení**
  $\Rightarrow$ příliš velký součet čtverců odchylek, a malá zhoda s původními daty;
- **Dokonalá zhoda s daty**
  $\Rightarrow$ nulový součet čtverců odchylek, príliš velká variabilita, interpolace;

Whittacker/Hendersonova metoda

Metoda, která umožňuje hledat kompromis mezi těmeto dvěma požadavky tím, že jim přiděluje rozdílnou váhu. Výrovnané hodnoty minimalizují kritérium

$$M(\hat{\boldsymbol{y}}) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}_{\text{součet čtverců}} + \lambda \cdot \underbrace{\sum_{i=r+1}^{n} (\Delta^r \hat{y}_i)^2}_{\text{penalta}},$$

kde $\lambda > 0$ je nějaký vhodně zvolený ladící parametr.

Whitttacker-Hendersonová metoda

- W-H metoda nepředpokláda žádny konkrétny tvar prokladané křivky;
- symbol $\Delta^r \hat{y}_i$ označuje rekuzivnou r-tou zpětnou diferenci posloupnosti $\hat{y}_i$;
- obecně platí, že $\Delta^0 \hat{y}_i = \hat{y}_i$ a $\Delta^1 \hat{y}_i = \Delta \hat{y}_i = \hat{y}_i - \hat{y}_{i-1}$;
- pro r-tou zpětnou diferenci platí $\Delta^r \hat{y}_i = \Delta^{r-1} \hat{y}_i - \Delta^{r-1} \hat{y}_{i-1}$;
- obecně lze také zapsat pomoci binomické formule

$$\Delta^r \hat{y}_i = \binom{r}{0} \hat{y}_i - \binom{r}{1} \hat{y}_{i-1} + \cdots + (-1)^r \binom{r}{r} \hat{y}_{i-r},$$

Whitttacker-Hendersonová metoda

- W-H metoda nepředpokláda žádny konkrétny tvar prokladané křivky;
- symbol $\Delta^r \hat{y}_i$ označuje rekuzivnou r-tou zpětnou diferenci posloupnosti $\hat{y}_i$;
- obecně platí, že $\Delta^0 \hat{y}_i = \hat{y}_i$ a $\Delta^1 \hat{y}_i = \Delta \hat{y}_i = \hat{y}_i - \hat{y}_{i-1}$;
- pro r-tou zpětnou diferenci platí $\Delta^r \hat{y}_i = \Delta^{r-1} \hat{y}_i - \Delta^{r-1} \hat{y}_{i-1}$;
- obecně lze také zapsat pomoci binomické formule

$$\Delta^r \hat{y}_i = \binom{r}{0} \hat{y}_i - \binom{r}{1} \hat{y}_{i-1} + \cdots + (-1)^r \binom{r}{r} \hat{y}_{i-r},$$

IDEA:
Rekurzívní zpětná diference je diskrétné zobecnění pojmu derivace. Základnou myšlienkou je penalizovať príliš veľké rozdiely v danej r-tej diferencii. Napr. pro $r = 1$ penalizujeme príliš veľké rozdiely v první diferencii, t.j. pro $\lambda \to \infty$ dostaneme vyhlazení ve tvaru prímky.

Whitttacker-Hendersonová metoda

- kritérium $M(\hat{\boldsymbol{y}})$ lze zapsát aj v maticovém tvaru jako

$$M(\hat{\boldsymbol{y}}) = (\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}})^\top (\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}}) + \lambda \cdot \hat{\boldsymbol{y}}^\top \mathbb{K}^\top \mathbb{K} \hat{\boldsymbol{y}};$$

- matice $\mathbb{K}$ je typu $(n-r) \times n$ a ma tvar

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} (-1)^r & \dots & -\binom{r}{1} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & (-1)^r & \dots & -\binom{r}{1} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & (-1)^r & \dots & -\binom{r}{1} & 1 \end{pmatrix}$$

- derivováním podle $\hat{\boldsymbol{y}}$ dostaneme soustavu normálních rovníc

$$\nabla_{\hat{y}} M(\hat{\boldsymbol{y}}) = \left(\frac{\partial M(\hat{\boldsymbol{y}})}{\partial \hat{y}_1}, \dots, \frac{\partial M(\hat{\boldsymbol{y}})}{\partial \hat{y}_n} \right) = 2\boldsymbol{y} - 2\hat{\boldsymbol{y}} + 2\lambda \mathbb{K}^\top \mathbb{K} \hat{\boldsymbol{y}}$$

- riešime soustavu rovníc $\nabla_{\hat{y}} M(\hat{\boldsymbol{y}}) = 0 \Longrightarrow$ řešení ve tvaru

$$\hat{\boldsymbol{y}} = (\mathbb{I} + \lambda \mathbb{K}^\top \mathbb{K})^{-1} \boldsymbol{y};$$

To conclude

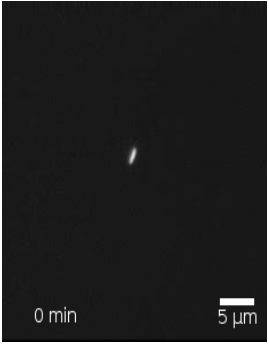
- Různe metody vyhlazování dat – prokladání vhodnou hladkou křivkou;
  - Parametrické metody
    (jednoduché, ale málo flexibilné)
  - Semiparametrické metody
    (vyrovnání jako lineární kombinace fukci báze, pomerně dobrá flexibilita)
  - Neparametrické metody
    (bez omezení na tvar prokladáné křivky, nelze ale vyjadřit explicitně)
- V některých připadech lze konstruovat predikci do budoucnosti;
  (není vhodné používat na predikci o moc kroků dopredu...)
- Whitttacker-Henderson - regularizační neparametrický postup;
  (vhodnou volbou $\lambda > 0$ *a* $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *lze dosáhnout požadovaný tvar)*
- Při vyhlazování dat pamatovat na vztah medzi vychýlením a variabilitou;
  (príliŝné vyhlazení $\equiv$ *malá variabilita a příliš velké odchýlky* $|$ *vice versa)*

Kapitola 2

Diferenciální rovnice a modely růstu

Modely růstu – motivace

Modely, kde velikost změny (růstu) závisí na aktuálnem stavu...



Široké uplatnění modelů v ...

- biológii
  (růst populace mikroorganizmů, výrusy, ...)
- fyzice
  (štiepenie, nukleárne reakcie, lavíny)
- ekonómia a finance
  (pyramidové schémy, modely kapitálu a poptávky)
- IT a informatika
  (výpočetná sila a zložitost, singularity, atď.)

Modely růstu – formálně

- jedná se víceparametrický deterministický (nelineární) model pro modelování růstu nějaké populace (počet obyvatelstva, zásoby nějakého statku, objem komodity, atď);
- zaužívané značení: $y(t)$ – stav (velikost) populace v čase $t \in \mathbb{R}$;
- model určen pomoci deferenciální rovnice, čo umožňuje vyjádřit závislost rychlosti růstu na velikosti populace v čase $t \in \mathbb{R}$;
- IDEA: očekáváme, že populace by měla růst rýchleji, když je velká, a naopak zase pomalejí, když je malá;
- diferenciální rovnice často v tvaru, který v určitem zmyslu modeluje lineární závislost růstu na velikosti:

$$\frac{dy}{dt} = a \cdot y \cdot g\left(\frac{y}{k}\right)$$

kde $y \equiv y(t)$ je funkce $t \in \mathbb{R}$ a $a, k > 0$ jsou neznáme parametry;

Korekce lineární závislosti růstu na velikosti

Funkce $g(\cdot)$ v zápisu diferenciální rovnice se používa ke korekci lineární závislosti růstu na velikosti populace – bez tehle korekce je totiž většina modelů praktický nesmyslných;

- **Volba $g(x) = 1$: Klasický model exponenciálního růstu**

$$\frac{dy}{dt} = a \cdot y \quad \Longrightarrow \text{řešení} \quad y(t) = be^{at};$$

- **Volba $g(x) = 1 - x$: Model logistického růstu**

$$\frac{dy}{dt} = a \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{k}\right) \quad \Longrightarrow \text{řešení} \quad y(t) = \frac{k}{1 + be^{-at}};$$

- **Volba $g(x) = -\log x$: Model Gomertzovej křivky**

$$\frac{dy}{dt} = -a \cdot y \cdot \log\left(\frac{y}{k}\right) \quad \Longrightarrow \text{řešení} \quad y(t) = k \cdot exp\{-be^{-at}\};$$

Modely růstu

Príklad

Uvažujte jednoduchý model exponencialního růstu. Ukážte, že funkce

$$y(t) = be^{at}$$

je skutečně řešením diferenciální rovnice $dy/dt = ay$.

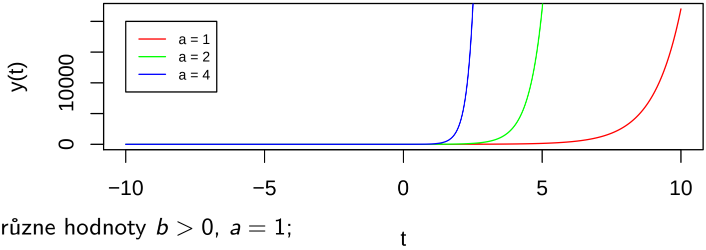
Príklad

Uvažujte model logistického růstu pro nějaké obecné $k > 0$.

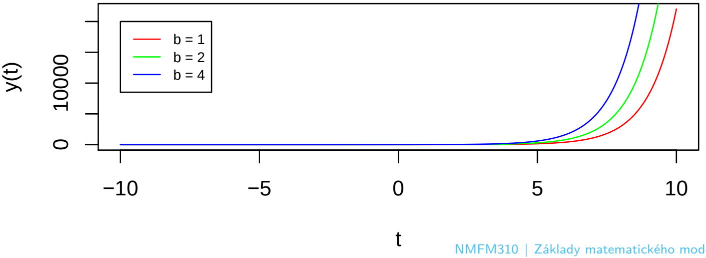
- ukážte, že funkce $y(t) = \frac{k}{1+be^{-at}}$ je řešením diferenciální rovnice $dy/dt = ay(1 - y/k)$
- nájděte inflexní bod a dokážte, že křivka logistického růstu je symetrická kolem tohto bodu;

Modely exponenciálního růstu

- různe hodnoty $a > 0$, $b = 1$;

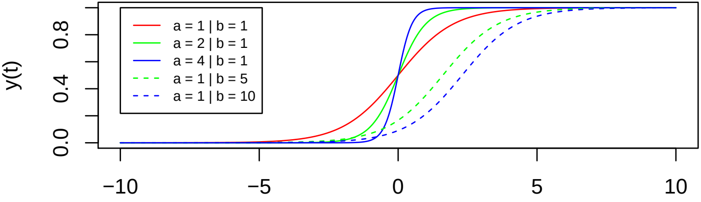


- různe hodnoty $b > 0$, $a = 1$;



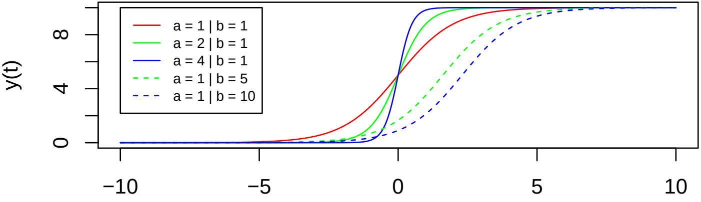
Modely logistického růstu

- $k = 1 \mid a > 0,\ b > 0;$



- $k = 1 \mid a > 0,\ b > 1;$

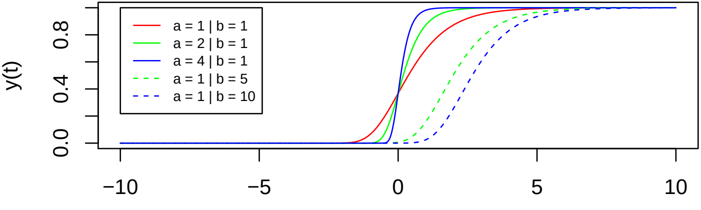
t



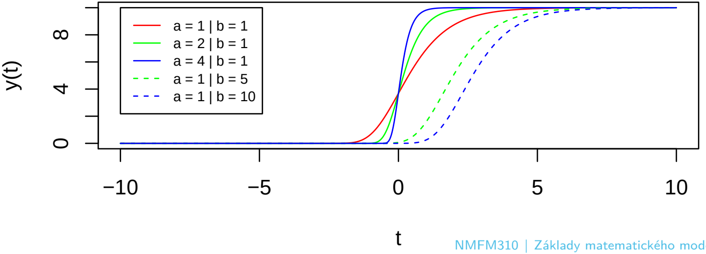
t

Modely Gompertzové křivky

- $k = 1 \mid a > 0,\ b > 0;$



- $k = 1 \mid a > 0,\ b > 1;$



Modely růstu – aplikace

- **Model exponenciálního růstu**
  - model neomezeného růstu při neomezených zdrojích;
  - aplikovatelný pouze v krátkodobem časovem horizontu;
  - v praxi většinou nedostupnost zdrojů při určitem stavu populace;
- **Model logistického růstu**
  - model s korekci pro saturovanou hodnotu – parametr $k > 0$;
  - pro celkový stav populace vždy platí, že $0 < y(t) < k$ pro $t \in \mathbb{R}$;
  - $(1 - y/k)$ omezuje nové přirůstky, pro velkou populaci – málo zdrojů;
  - jedná se o tzv. sigmoidální křivku (sigmoid function);
- **Gompertzová křivka**
  - zbecněná sigmoidální křivka (prudký nárůst, pomalejší saturace);
  - inflexní bod pro $t \in \mathbb{R}$, kde $y(t) = k/e$) (symetrická;)
  - častá aplikace např. pro tabulky úmrtnosti, růst nádorů, počet mobilních telefónů v populaci, a pod.;

Odhady parametrů pro modely růstu

Základný problém spočíva v tom, že funkce, které chceme prokládat daty, nejsou lineární funkcí hledaných (neznámych) parametrů – koeficientů. Nelze proto přímo aplikovat metodu nejmenších čtverců.

Řešení:

- preparametrizování modelu do lineárního tvaru;
- aproximace modelu a iteratívní postupy;
- numerické řešení pomoci počítačů;

Odhad parametrů pro exponenciální růst

- základní diferenciální rovnice a příslušné řešení:

$$\frac{dy}{dt} = a \cdot y \quad \text{a} \quad y(t) = be^{at};$$

pro nějaké neznáme parametry $a, b > 0$;

- rovnici lze logaritmovat a vyjádřit ve tvaru

$$\log(y(t)) = \log(b) + at;$$

- následně lze metodu nejmenšich čtverců aplikovat na data

$$(t_1, \log(y(t_1)))^\top, \ldots, (t_n, \log(y(t_n)))^\top;$$

Samostatný úkol

Uvažujte jednoduchý exponenciální růst a nájděte řešení pro odhad parametrů $\log(b) \in \mathbb{R}$ a $a > 0$. Vyjádřete příslušnú matici $\mathbb{F}$ a spočtěte také projekční matici $\mathbb{H}$. Nájděte vhodné odhady pro $a, b > 0$.

Odhad parametrů pro logistický růst

- základní diferenciální rovnice a příslušné řešení:

$$\frac{dy}{dt} = a \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{k}\right) \quad \text{a} \quad y(t) = \frac{k}{1 + be^{-at}};$$

pro nějaké neznáme parametry $a, b > 0$;

- diferenciální rovnici lze aproximovat pomoci diferenční rovnice

$$\frac{\Delta y_{t_i}}{\Delta t_i} = a y_{t_i}\left(1 - \frac{y_{t_i}}{k}\right)$$

- následně lze metodu nejmenšich čtverců aplikovat na data

$$(y_{t_2}, \frac{\Delta y_{t_2}}{\Delta t_2 y_{t_2}})^\top, \dots, (y_{t_n}, \frac{\Delta y_{t_n}}{\Delta t_n y_{t_n}})^\top;$$

pro parametre a a a/k. Parametr $b > 0$ pak vyjádřit z rovnice pro řešení.

Samostatný úkol

Uvažujte jednoduchý logistický růst a nájděte řešení pro odhad parametrů $a, k > 0$. Nájděte také vhodný odhad pro parametr $b > 0$.

Vylepšení odhadů pro logistický růst

Odhady parametrů $a, b, k > 0$ získané v předchozím kroku jsou hodně hrubé jelikož jsme diferenciální rovnici diskretizovali – t.j. aproximovali pomoci diferenční rovnice. Získané odhady ale lze vylepšit – opět pomoci metody nejmenších čtverců.

- řešení diferenciální rovnice lze také parametrizovat jako

$$y(t) = \frac{k}{1 + be^{-at}} = \frac{d}{c + e^{-(a_1+\epsilon)t}},$$

pro $a = a_1 + \epsilon$, $b = \frac{1}{c}$ a $k = \frac{d}{c}$.

- pro hodnoty ϵt hodně malé, lze použít Taylorov rozvoj

$$e^{-\epsilon t} \approx 1 - \epsilon t;$$

- následně dostaneme aproximaci pro y_{t_i} ve tvaru

$$y_{t_i} \approx \frac{d}{c + e^{-a_1 t_i}(1 - \epsilon t_i)}, \quad i = 1, \dots, n;$$

- metodu nejmenších čtverců následně aplikovat na model

$$y_{t_i} e^{-a_1 t_i} \approx d - c y_{t_i} + \epsilon t_i y_{t_i} e^{-a_1 t_i}, \quad i = 1, \dots, n;$$

Vylepšení odhadů pro logistický růst

Samostatný úkol

Uvažujte logistický model růstu a navrhněte, jak by měla vypadat matice $\mathbb{F}$ pro vylepšení odhadu parametrů $a, b, k > 0$ pomoci nové parametrizace

$$y(t) = \frac{k}{1 + be^{-at}} = \frac{d}{c + e^{-(a_1+\epsilon)t}},$$

pro $a = a_1 + \epsilon$, $b = \frac{1}{c}$ a $k = \frac{d}{c}$.
Nájděte soustavu lineárních rovníc pro odhad parametrů d, c a ϵ.

- dosazením odhadov $\hat{d}, \hat{c}$ a $\hat{\epsilon}$ do vyjadření původních parametrů a, b a k dostaneme vylepšené odhady $\hat{a}, \hat{b}$ a $\hat{k}$;
- tenhle postup lze iteratívne opakovat a získat ještě přesnější odhady;

Zhrnutí předchozí přednášky/opakování

- Diferencialní modely a modely růstu jako vhodné a užitečné nástroje pro modelování růstu populací v závislosti na jejích velikosti.
- Jedná sa o nelineárné parametrické modely, přičemž na odhad neznámych parametrů nelze věččinou přímo aplikovat metodu nejmenších čtverců.
  - **Model exponenciálního růstu** – jednoduchý model ale aplikovatelný pouze v krátkodobem časovem horizontu (předpoklad neomezeného růstů při neomezených zdrojích);
  - **Model logistického růstu** – modifikace předchozího modelu pomoci dodatečného parametru – tzv. saturačnej hladiny pro maximální úroveň modelované populace;
  - **Model Gompertzovej křivky** – rozšíření modelu logistického růstu pro případy s nesymetickým počátečným nárůstem a konečnou saturaci – model asymetrický kolem inflexního bodu;
- Odhady neznámych parametrů v těchto modelech pomoci iteratívnych postupov, aproximaci a přeparametrizování původních rovníc, tak aby bylo možné aplikovat metodu nejmenších čtverců;

Newton-Raphson: Algoritmus

IDEA: Odhad neznámych parametrů přímo pomoci minimalizace součtu čtverců – hledáme ale argument minima nelineární fukce. Napr. pro logistickou křivku řešíme

$$S(a,b,k) = \underset{a,b,k>0}{Argmin} \quad \sum_{i=1}^{n} \left(y_{t_i} - \frac{k}{1+be^{-at_i}} \right)^2,$$

kde předpokládame, že máme pozorování $y_{t_1}, \ldots, y_{t_n}$ v časech $t_1, \ldots, t_n$;

- předpokládame, že existují nějaké počátečné hodnoty $a_0, b_0, k_0 > 0$, které jsou dostatečne blízko skutečným (neznámym) hodnotám, pro které je dosaženo minimum;
- Newton-Raphsonová metoda pak spočíva v aproximaci $S(a,b,k)$ pomoci Taylorovej řady v okolí bodu $(a_0, b_0, k_0)^\top$;
- opakovaným postupom – iteracemi – získame finálné řešení; *(finálné řešení je pouze aproximace skutečného řešení... dokonalost aproximace závisí od volby počátečných hodnot $a_0, b_0, k_0 > 0$ a také od celkového počtů uskutečněných iteraci)*

Newton-Raphson: Teoretické odvození

- Taylorov rozvoj pro $S(a,b,k)$ v bodě (a_0, b_0, k_0):

$$\begin{aligned} S(a,b,k) = {} & S(a_0,b_0,k_0) + \nabla S(a_0,b_0,k_0)^\top (a-a_0, b-b_0, k-k_0)^\top \\ & + \frac{1}{2}(a-a_0, b-b_0, k-k_0)\nabla^2 S(a_0,b_0,k_0)(a-a_0, b-b_0, k-k_0)^\top \\ & + R(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{k}); \end{aligned}$$

- hledáme bod, pro který $\nabla S(a,b,c) = 0$, teda

$$(-1)\cdot \nabla S(a_0,b_0,k_0) = \nabla^2 S(a_0,b_0,k_0)(a-a_0, b-b_0, k-k_0)^\top$$

- pro iterovaný postup definujeme obecně krok $\ell \in \mathbb{N}$ následovně:

$$\nabla S(a_{\ell-1}, b_{\ell-1}, k_{\ell-1}) = -\nabla^2 S(a_{\ell-1}, b_{\ell-1}, k_{\ell-1})(a_\ell - a_{\ell-1}, b_\ell - b_{\ell-1}, k_\ell - k_{\ell-1})^\top;$$

- postup opakujeme, až kým nedosáhneme požadovanou přesnost, t.j. $|a_\ell - a_{\ell-1}| < \epsilon$, $|b_\ell - b_{\ell-1}| < \epsilon$ a $|k_\ell - k_{\ell-1}| < \epsilon$, pro nějaké malé $\epsilon > 0$;

Příklad: Růst českého strakatého skota

Príklad

Modelování dynamiky růstu hospodářských zvířat

- výhodné z ekonomického i hospodářskeho hlediska;
- chov na maso: rýchly růst (fiziologický), vysoká hmotnost;
- jednoduché modelovat v krátkodobem horizontu;
- nutné použít několik modelů od narození až po dospělost;
- býky českého strakatého skota mezi 30 až 1470 dnů:

$$y(t) = 926.07 \exp\{-2.548 e^{-0.0032t}\} \quad \text{(Nešetřilová, ČZU);}$$

- odhady parametrov $a, b, k > 0$ pomoci Newton-Raphson metody;
- později vylepšení pomoci modelu dvoch logistických křivek;

Kapitola 3

Teorie Lineární Regulace

Modely lineární regulace

- jedná se o modely, kde vstupné data – t.j. posloupnost $u_0, u_1, u_2, \ldots,$ je převáděná na výstupne data – posloupnost $y_0, y_1, y_2, \ldots,$ a to pomoci specifické lineární transformace – tzv. lineární regulace;
- model lineární regulace lze formálně zapsát jako

$$y_t = \sum_{j=0}^{t} h_j u_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty} h_j u_{t-j},$$

pro $t \in \mathbb{Z}$ a $y_{-j} = u_{-j} = 0$ pro $j = 1, 2, \ldots$...

- neznáme parametre h_j pro $j = 0, 1, \ldots,$ určují konkrétní tvar modelu lineární regulace;
- vliv posloupnosti $u_0, u_1, u_2, \ldots$ na $y_0, y_1, y_2, \ldots$ nemusí byt přímy, ale napr. prostřednictvím dalších stavov systému – tzv. lineární soustavy;

Model jednotkového impulzu

Definice: Model jednotkového skoku

Vstupní posloupnost je ve tvaru $u_0 = 1, u_1 = 0, u_2 = 0, \ldots,$ nazývame jednotkovým impulzem. Odezvou systému lineárni regulace na tento impulz je pak posloupnost $h_0, h_1, h_2, \ldots,$, která se nazýva impulzní charakteristika soustavy lineární regulace.

Samostatný úkol

Z definice modelu lineární regulace lze okamžite ověřit, že plati:

- pro $t = 0$: $y_0 = h_0 u_0 = h_0$;
- pro $t = 1$: $y_1 = h_0 u_1 + h_1 u_0 = h_1$;
- pro $t = 2$: $y_2 = h_0 u_2 + h_1 u_1 + h_2 u_0 = h_2$;
- pro $t \in \mathbb{N}$: $y_t = h_0 u_t + \cdots + h_t u_0 = h_t$;
- pro $t \in \mathbb{N}$: $y_{-t} = u_{-t} = 0$;

Model jednotkového skoku

Definice: Model jednotkového impulzu

Vstupní posloupnost ve tvaru $u_t = 1$ pro $t = 0, 1, 2, \ldots$ nazýváme jednotkový skokem (v čase $t = 0$ se totíž hodnoty u_t změní z 0 na 1). Odezvou systému lineárni regulace na tento skok je pak posloupnost, která se nazýva přechodová charakteristika soustavy lineární regulace a platí, že

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} h_j u_{t-j} = \sum_{j=0}^{t} h_j u_{t-j} = \sum_{j=0}^{t} h_j.$$

K analýze linárních soustav se obecně hodí používat tzv. vytvořující funkce pro číselné posloupnosti a speciálně tzv. z-transformace.

Z-transformace

Z-transformace se obecně používa pro vyjádření signálu s diskrétním časem (t.j. posloupnosti reálních, nebo komplexních čísel) pomoci reprezentácie vrámci komplexnej frekvenčnej domény. Jedná se o diskrétni verzi Laplacovej transformáce.

Definice: Z-transformace (jednostranná)

Pro libovolnou posloupnost reálných čísel $\{a_k;\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ definujeme její z-transformaci jako funkci

$$A(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^{-j}, \quad \text{obecně pro } z \in \mathbb{C}.$$

- V teórii se také používa tzv. bilaterální (oboustranná) z-transformace; Pro oboustrannú z-transformaci platí $A(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j z^{-j}$;

Definice značení pro z-transformaci

Samostatný úkol

- Nekonečná řada $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^{-j}$ konverguje pro $|z| > z_0$ a diverguje pro $|z| < z_0$, pro nějaké $z_0 \in [0, \infty]$;
- Množina $\{z \in \mathbb{C};\ |A(z)| < \infty\}$ se často v literatúře značí jako ROC (tzv. "Region Of Convergence");
- na kružnici $|z| = z_0$ se řada může chovat libovolně (konvergovat pro některé body a divergovat pro jiné);

- pro posloupnost vstupů $\{u_t;\ t \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ budeme značit příslušnú z-transformaci jako funkci $U(z)$;
- pro posloupnost výstupů $\{y_t;\ t \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ budeme značit příslušnú z-transformaci jako funkci $Y(z)$;
- pro impulzní charakteristiku $\{h_t;\ t \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ budeme značit příslušnú z-transformaci jako funkci $H(z)$;

Impulzní přenosová funkce soustavy

Definice: Impulzní přenosová funkce

Funkce

$$H(z) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j z^{-j}$$

se nazýva impulzní přenosová funkce soustavy.

Samostatný úkol

Ukážte, že pro impulzní přenosovou funkci soustavý platí

$$Y(z) = H(z) \cdot U(z),$$

pro taková $z \in \mathbb{C}$, že $H(z)$ a $U(z)$ konvergují.

Impulzní přenosová funkce soustavy

Definice: Impulzní přenosová funkce

Funkce

$$H(z) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j z^{-j}$$

se nazýva impulzní přenosová funkce soustavy.

Samostatný úkol

Ukážte, že pro impulzní přenosovou funkci soustavý platí

$$Y(z) = \sum_{j=0}^{\infty} y_j z^{-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} h_\ell u_{j-\ell} \right) z^{-j} = \sum_{\ell=0}^{\infty} h_\ell z^{-\ell} \left(\sum_{j=0}^{\infty} u_{j-\ell} z^{-(j-\ell)} \right)$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} h_\ell z^{-\ell} \cdot \sum_{j=-\ell}^{\infty} u_j z^{-j} = \sum_{\ell=0}^{\infty} h_\ell z^{-\ell} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} u_j z^{-j} = H(z) \cdot U(z),$$

pro taková $z \in \mathbb{C}$, že $H(z)$ a $U(z)$ konvergují.

Příklad: Bakaláři na australských univerzitách

Príklad

Chceme zjisťovat závislost počtu bakalářských promoci na počtu studentů zapsaných v předchozích letech do prvního ročníka.

- počet studentů zapsaných do studia v roce t: u_t;
  (do prvního ročníku teda nastoupí v roce $t+1$)
- počet studentů v i-tém ročníku v roce t: $x_t^{(i)}$ pro $i = 1, \ldots, 4$;
- podíl studentů, kteří přejdou z i-tého do j-tého ročníka v následujícim školním roce: p_{ij};
- podíl studentů, kteří skončí v i-tém ročníku: q_i;
- zřejme platí, že $p_{ii} + p_{i(i+1)} + q_i = 1$ pro všechny $i = 1, 2, 3, 4$;

Bakalářský titul lze získat v třetím roce (Pass Degree), nebo pokračovat ve čtvrtem roce a získat Honours Degree.

Příklad: Bakaláři na australských univerzitách

Príklad

- nechť y_t značí počet promujících bakalářů v roce t;
- pak lze psát, že

$$y_t = c_3 x_t^{(3)} + c_4 x_t^{(4)},$$

  pro $c_3, c_4 \in (0,1)$ proporce studentu, kteří v třetím a čtvrtém roce promují.
- zřejme také platí následující:

$$x_{t+1}^{(1)} = u_t + p_{11} x_t^{(1)}; \qquad (3)$$

$$x_{t+1}^{(i+1)} = p_{i(i+1)} x_t^{(i)} + p_{(i+1)(i+1)}^{(i+1)}, \quad \text{pro } i = 1, 2, 3; \qquad (4)$$

- proporce odhadnuté pomoci historických statistik na univerzitách:
  $p_{12} = 0.61$; $p_{23} = 0.71$; $p_{34} = 0.16$; $c_3 = 0.81$; $c_4 = 0.91$;
  $p_{11} = 0.15$; $p_{22} = 0.11$; $p_{33} = 0.10$; $p_{44} = 0.05$;

Jak teda závisí y_t na hodnotách u_{t-j}?

Príklad

- Obecně můžeme pro $x_t^{(i)}$ psát, že

$$x_t^{(i)} = \sum_{j=0}^{\infty} f_j^{(i)} u_{t-j}, \tag{5}$$

kde $f_j^{(i)}$ je podíl těch, co se zapsali před j lety a teď jsou v i-tém ročníku a platí, že $f_0^{(i)} = 0$ pro všechny $i = 1, 2, 3, 4$;

- Přímym dosazením do (3) dostaneme

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_j^{(1)} u_{t+1-j} = u_t + p_{11} \sum_{j=0}^{\infty} f_j^{(1)} u_{t-j};$$

- Porovnáním koeficientu dostaneme:
$f_1^{(1)} = 1,\ f_2^{(1)} = p_{11} f_1^{(1)} = p_{11},\ f_3^{(1)} = p_{11} f_2^{(1)} = p_{11}^2, \ldots, f_n^{(1)} = p_{11}^{n-1};$

Příklad: Bakaláři na australských univerzitách

Příklad

- celkový počet studentů v prvním ročníku v roce t lze vyjádřit jako součet nově zapsaných a recyklovaných studentů:

$$X_t^{(1)} = u_{t-1} + \sum_{j=2}^{\infty} (p_{11})^{j-1} u_{t-j};$$

- Následně dosadíme (6) do (4):

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_j^{(i+1)} u_{t+1-j} = p_{i(i+1)} \sum_{j=0}^{\infty} f_j^{(i)} u_{t-j} + p_{(i+1)(i+1)} \sum_{j=0}^{\infty} f_j^{(i+1)} u_{t-j};$$

- Zjednodušení: obecně předpokládame, že $f_j^{(i)} = 0$, pro $j < i$;

Příklad: Bakaláři na australských univerzitách

Príklad

- Postupně dostaneme:

$$f_2^{(2)} = p_{12} f_1^{(1)} + p_{22} f_{12} = p_{12}$$

$$f_3^{(3)} = p_{23} f_2^{(2)} + p_{33} f_2^{(3)} = p_{23} f_2^{(2)} = p_{12} p_{23}$$

a obecně:

$$f_{j+1}^{(i+1)} = p_{i(i+1)} f_j^{(i)} + p_{(i+1)(i+1)} f_j^{(i+1)}$$

- Celkově pro y_t teda máme:

$$y_t = c_3 x_t^{(3)} + c_4 x_t^{(4)} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(c_3 f_j^{(3)} + c_4 f_j^{(4)} \right) u_{t-j}$$

$$= 0.3508 u_{t-3} + 0.1901 u_{t-4} + 0.0567 u_{t-5} + 0.0131 u_{t-6} + \dots$$

Maticový zápis | Stavový model

- Příklad o bakalářích na australských univerzitách lze také zapsát i pomoci alternatívného maticového zápisu (více kompaktně);
- Nechť $\boldsymbol{x}_t = (x_t^{(1)}, \ldots, x_t^{(4)})^\top$. Pak lze problém zapsat jako

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} p_{11} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{22} & 0 & 0 \\ 0 & p_{23} & p_{33} & 0 \\ 0 & 0 & p_{34} & p_{44} \end{pmatrix}}_{\mathbb{A}} \boldsymbol{x}_t + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{b}} u_t;$$

$$y_t = \underbrace{(0, 0, c_3, c_4)}_{\boldsymbol{c}} \cdot \boldsymbol{x}_t + \underbrace{0}_{d} \cdot u_t.$$

- Uveděný zápis definuje lineární stavovou ;
(vstupní posloupnost u_t, stavy systému $\boldsymbol{x}_t$, výstupná posloupnost y_t)

Zhrnutí předchozí přednášky/opakování

- **Modely lineární regulace**
  ↪ posloupnost výstupných dat je vyjádřená jako specifická lineární funkce vstupných dat, t.j. $y_t = h_0 u_t + \cdots + h_t u_0$, pro $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a vhodně zvolené parametry $h_0, \ldots, h_t \in \mathbb{R}$;

- **Z-transformace a impulzní přenosová funkce;**
  ↪ impulzní přenosová funkce $Y(z) = H(z)U(z)$ jako nástroj pro reprezentaci výstupnej posloupnosti $\{y_t\}$ vo frekvenčnej doméně pomoci z-transformace vstupu $\{u_t\}$ a parametru $\{h_t\}$:
  $U(z) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j z^{-j}$ a $H(z) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j z^{-j}$;

- **Lineární soustavy;**
  ↪ komplexný systém lineární regulace, kde mezi vstupní a výstupní posloupnosti existuje množina stavov $\boldsymbol{x}_t = (x_t^{(1)}, \ldots, x_t^{(r)})^\top$;

- **Obecný zápis lineární soustavy**

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathbb{A}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}u_t;$$
$$y_t = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{x}_t + d \cdot u_t,$$

pro matici $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, vektory $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^r$ a skalár $d \in \mathbb{R}$;

Stavový model – formálně

- uvažujeme systém, jehož stav lze popsat vektorem $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^r$;
- vývoj systému pak definujeme pomoci posloupnosti $\{\boldsymbol{x}_t;\ t \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$;
- předpokládame, že stav systému v čase $t = 0$ je $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^r$;
- následující stavy systému v čase $t+1$ jsou popsány pomoci modelu

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathbb{A}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}u_t,$$

  pro nějakou čtvercovou matici $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ a vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^r$;
- nepozorujeme ale přímo stav systému, ale pouze výstup y_t ve tvaru

$$y_t = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}_t + du_t,$$

  pro nějaký vektor $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^r$ a skalár $d \in \mathbb{R}$;
- Jak získat z tohto modelu přímou závislost výstupní posloupnosti y_t na vstupních datech u_t ve tvaru $y_t = \sum_{j=0}^{\infty} h_j u_{t-j}$?

Stavový model a stavové rovnice

- namísto původního systemu rovníc

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{t+1} &= \mathbb{A}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}u_t \\ y_t &= \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}_t + du_t \end{aligned}$$

- budeme uvažovat systém rovníc ve tvaru

$$\sum_{t=0}^{\infty} \boldsymbol{x}_{t+1} z^{-t} = \mathbb{A} \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} \boldsymbol{x}_t z^{-t}}_{\boldsymbol{X}(z)} + \boldsymbol{b} \underbrace{\sum_{t=0^{\infty}} u_t z^{-t}}_{U(z)}$$

$$\underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} y_t z^{-t}}_{Y(z)} = \boldsymbol{c}^\top \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} \boldsymbol{x}_t z^{-t}}_{\boldsymbol{X}(z)} + d \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} u_t z^{-t}}_{U(z)}$$

$\hookrightarrow$ kde jsme původní rovnice postupně vynásobili faktorem z^{-t} a pak sečetli přez všechny hodnoty pro $t = 0, 1, 2, \ldots$;

Stavový model a stavové rovnice

- namísto původního systemu rovníc

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{t+1} &= \mathbb{A}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}u_t \\ y_t &= \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}_t + du_t \end{aligned}$$

- budeme uvažovat systém rovníc ve tvaru

$$z\sum_{t=0}^{\infty} \boldsymbol{x}_{t+1}z^{-t-1} = \mathbb{A}\underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} \boldsymbol{x}_t z^{-t}}_{\boldsymbol{X}(z)} + \boldsymbol{b}\underbrace{\sum_{t=0^{\infty}} u_t z^{-t}}_{U(z)}$$

$$\underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} y_t z^{-t}}_{Y(z)} = \boldsymbol{c}^\top \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} \boldsymbol{x}_t z^{-t}}_{\boldsymbol{X}(z)} + d\underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} u_t z^{-t}}_{U(z)}$$

$\hookrightarrow$ kde jsme původní rovnice postupně vynásobili faktorem z^{-t} a pak sečetli přez všechny hodnoty pro $t = 0, 1, 2, \ldots;$

Stavový model a stavové rovnice

- namísto původního systemu rovníc

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{t+1} &= \mathbb{A}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}u_t \\ y_t &= \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}_t + du_t \end{aligned}$$

- budeme uvažovat systém rovníc ve tvaru

$$z\sum_{t=-1}^{\infty} \boldsymbol{x}_{t+1} z^{-t} = \mathbb{A}\underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} \boldsymbol{x}_t z^{-t}}_{\boldsymbol{X}(z)} + \boldsymbol{b}\underbrace{\sum_{t=0\infty} u_t z^{-t}}_{U(z)}$$

$$\underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} y_t z^{-t}}_{Y(z)} = \boldsymbol{c}^\top \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} \boldsymbol{x}_t z^{-t}}_{\boldsymbol{X}(z)} + d\underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} u_t z^{-t}}_{U(z)}$$

$\hookrightarrow$ kde jsme původní rovnice postupně vynásobili faktorem z^{-t} a pak sečetli přez všechny hodnoty pro $t = 0, 1, 2, \ldots$;

Stavový model a stavové rovnice

- namísto původního systemu rovníc

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{t+1} &= \mathbb{A}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}u_t \\ y_t &= \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}_t + du_t \end{aligned}$$

- budeme uvažovat systém rovníc ve tvaru

$$\underbrace{z\sum_{t=-1}^{\infty} \boldsymbol{x}_{t+1} z^{-t-1}}_{\boldsymbol{X}(z)} = \mathbb{A}\underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} \boldsymbol{x}_t z^{-t}}_{\boldsymbol{X}(z)} + \boldsymbol{b}\underbrace{\sum_{t=0\infty} u_t z^{-t}}_{U(z)}$$

$$\underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} y_t z^{-t}}_{Y(z)} = \boldsymbol{c}^\top \sum_{t=0}^{\infty} \boldsymbol{x}_t z^{-t} + d\sum_{t=0}^{\infty} u_t z^{-t}$$

$\hookrightarrow$ kde jsme původní rovnice postupně vynásobili faktorem z^{-t} a pak sečetli přez všechny hodnoty pro $t = 0, 1, 2, \ldots;$

Stavový model – řešení

- systém rovníc v maticovem zápisu:

$$\begin{aligned} z\boldsymbol{X}(z) &= \mathbb{A}\boldsymbol{X}(z) + \boldsymbol{b}U(z) \\ Y(z) &= \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{X}(z) + dU(z) \end{aligned}$$

- pokud existuje inverze $(z\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}$, lze řešení pro $\boldsymbol{X}(z)$ získat jako:

$$\begin{aligned} z\boldsymbol{X}(z) - \mathbb{A}\boldsymbol{X}(z) &= \boldsymbol{b}U(z) \\ (z\mathbb{I} - \mathbb{A})\boldsymbol{X}(z) &= \boldsymbol{b}U(z) \\ \boldsymbol{X}(z) &= (z\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} \cdot \boldsymbol{b}U(z) \end{aligned}$$

- následně pak pro $Y(z)$ získame řešení ve tvaru:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{X}(z) + dU(z) \\ &= \left[\boldsymbol{c}^\top \cdot (z\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}\boldsymbol{b} + d\right] U(z) \end{aligned}$$

Přenosová funkce soustavy

Definice: Přenosová funkce soustavy

Funkce $H(z) = \left[\boldsymbol{c}^\top \cdot (z\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}\boldsymbol{b} + d\right]$ se nazýva přenosová funke soustavy a platí, že

$$Y(z) = H(z)U(z),$$

pro každé $z \in \mathbb{C}$, pro které funkce $Y(z)$ a $U(z)$ konvergují.

Samostatný úkol

Ověřte, že pro libovolnou matici $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{r\times r}$, vektory $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^r$ a reální číslo $d \in \mathbb{R}$, takové, že inverzní matice $(z\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}$ existuje, je funkce $H(z)$ funkci z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, pro $z \in \mathbb{R}$ (tzn., ověřte příslušné rozměry v zápisu funkce H).

Přenosová funkce soustavy – vyjádření

Samostatný úkol

Přenosovou funkci soustavy lze vyjádřit jako podíl dvou polynomů stupně nejvýše r. Platí, že

$$H(z) = \left[\boldsymbol{c}^\top \cdot (z\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}\boldsymbol{b} + d\right] = \frac{\boldsymbol{c}^\top Adj(z\mathbb{I} - \mathbb{A})\boldsymbol{b} + d \cdot det(z\mathbb{I} - \mathbb{A})}{det(z\mathbb{I} - \mathbb{A})}$$

$$= \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{n_0 z^r + \cdots + n_r}{d_0 z^r + \cdots + d_r} = \frac{n_0 + \cdots + n_r z^{-r}}{d_0 + \cdots + d_r z^{-r}},$$

kde $N(z)$ a $D(z)$ jsou příslušné z-transformace polynómů $n_0 + \cdots + n_r z^{-r}$ a $d_0 + \cdots + d_r z^{-r}$.

Příklad: Bakaláři na australských univerzitách

Príklad

- pro model s bakaláři na australských univerzitách máme

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{22} & 0 & 0 \\ 0 & p_{23} & p_{33} & 0 \\ 0 & 0 & p_{34} & p_{44} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = (1, 0, 0, 0)^{\top},$$

$$\boldsymbol{c} = (0, 0, c_3, c_4)^{\top}, \qquad b = 0;$$

- pro matici $(z\mathbb{I} - \mathbb{A})$ dostaneme vyjádření ve tvaru

$$(z\mathbb{I} - \mathbb{A}) = \begin{pmatrix} z - p_{11} & 0 & 0 & 0 \\ -p_{12} & z - p_{22} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{23} & z - p_{33} & 0 \\ 0 & 0 & -p_{34} & z - p_{44} \end{pmatrix};$$

- a pro determinant matice $(z\mathbb{I} - \mathbb{A})$ dostaneme

$$det(z\mathbb{I} - \mathbb{A}) = (z - p_{11})(z - p_{22})(z - p_{33})(z - p_{44});$$

Příklad: Bakaláři na australských univerzitách

Príklad

- vzhledem k tvaru vektorů $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^r$ stačí pro adjungovanou matici spočíst prvky na pozici [3,1] a [4,1];
- pro přenosovou funkci soustavy pak přímo dostaneme

$$H(z) = \frac{c_3 p_{12} p_{23} (z - p_{44}) + c_3 p_{12} p_{23} p_{34}}{(z - p_{11})(z - p_{22})(z - p_{33})(z - p_{44})}$$

- pomoci přenosové funkce soustavy $H(z)$ dostaneme příme vyjádření počtu promujících bakalářů na počte zapsaných studentů (prostredníctvom spektrální domény) – bez explicitné prítomnosti stavů systému;

Obecný model

- v praxi je výhodnější uvažovat obecnou situaci, kdy výstup v čase t závisí také na předchozích výstupech, t.j., uvažujeme rovnici

$$d_0 y_t + \cdots + d_r y_{t-r} = n_0 u_t + \cdots + n_r u_{t-r}, \tag{6}$$

  pro $d_0 \neq 0$;

- co lze také ekvivalentně přepsát jako

$$y_t = \underbrace{-\frac{d_1}{d_0} y_{t-1} - \ldots - \frac{d_r}{d_0} y_{t-r}}_{\text{autoregresní část soustavy}} + \underbrace{\frac{n_0}{d_0} u_t + \cdots + \frac{n_r}{d_0} u_{t-r}}_{\text{regresní část soustavy}},$$

  pro $d_0 \neq 0$;

- délky pro autoregresní část a regresní část mohou být obecně různe
  $\hookrightarrow$ některé koeficienty $d_1, \ldots, d_r, n_0, \ldots, n_r$ mohou být nulové;

- **IDEA:** Opět chceme nají vyjádření ve tvaru $y_t = \sum_{k=0}^{\infty} h_k y_{t-k}$;

Obecný model

- analogickým postupem (vynásobime členem z^{-t} a sečteme přes všechny hodnoty t) dostaneme vyjádření (6) ve tvaru

$$\sum_{t=0}^{\infty}\left(d_0 z^{-0} y_t z^{-t} + \ldots + d_r z^{-r} y_{t-r} z^{-(t-r)}\right)$$
$$= \sum_{t=0}^{\infty}\left(n_0 z^{0} u_t z^{-t} + \cdots + n_r z^{-r} u_{t-r} z^{-(t-r)}\right)$$

- díky zavedenému značení $u_{-t} = y_{-t} = 0$ pro $t \in \mathbb{N}$ můžeme psát

$$\left(d_0 z^{-0} + \cdots + d_r z^{-r}\right)\sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k} = \left(n_0 z^{-0} + \cdots + n_r z^{-r}\right)\sum_{k=0}^{\infty} u_k z^{-k};$$

- co lze také přepsát do obecného tvaru lineárního modelu jako

$$d(z^{-1})Y(z) = n(z^{-1})U(z)$$

pro $d(x) = d_0 + d_1 x + \cdots + d_r x^r$ a $n(x) = n_0 + n_1 x + \cdots + n_r x^r$;

Obecný model – některé vlastnosti

- obecně i zde platí, že $Y(z) = H(z)U(z)$, pro takové $z \in \mathbb{C}$, že $H(z)$ a $U(z)$ konvergují;
- dostazením tedy dostaneme, že

$$d(z^{-1})Y(z) = d(z^{-1})H(z)U(z) = n(z^{-1})U(z),$$

pro takové $z \in \mathbb{C}$, že pravá strana konverguje;
- pro přenosovou funkci soustavy mame

$$H(z) = \frac{n(z^{-1})}{d(z^{-1})} = \frac{n_0 + \cdots + n_r z^{-r}}{d_0 + \cdots + d_r z^{-r}};$$

- rovnice (6) se někdy zapisuje ve tvaru

$$(d_0 + \cdots + d_r z^{-r})y_t = (n_0 + \cdots + n_r z^{-r})u_t$$

nebo zjednodušene $d(z^{-1})y_t = n(z^{-1})u_t$, kde z se interpretuje jako operátor posunutí, t.j., $zx_t = x_{t+1}$ a z^{-1} jako operátor zpětného posunutí, t.j., $z^{-1}x_t = x_{t-1}$;

Obecný model – příklad

Príklad

Předpokládame jednoduchý model lineárního systému ve tvaru

$$y_{t+1} - ay_t = u_t \quad \text{resp.} \quad (1 - az^{-1})y_t = u_t.$$

- pro přenosovou funkci soustavy dostaneme

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a};$$

- lze jednoduše rozvinout jako

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k};$$

- pro impulzní charakteristiku soustavy teda máme $y_t = h_t = a^t$;
- pro přechodovou charakteristiku soustavy máme $y_t = \sum_{k=0}^{t} h_k$;

Stabilita lineární soustavy

- **Stabilita soustavy**
  Jedná se o základní vlastnost, která se u lineárních soustav zkoumá.

Definice: Stabilita lineární soustavy

Řekneme, že lineární soustava je stabilní, pokud platí, že

$$\lim_{t\to\infty} h_t = 0. \tag{7}$$

- Alternatívně lze říct, že odezva soustavy na jednotkový impuls se postupně vytráci, pokud je soustava stabilní;
- (7) je zároveň nutná podmínka k tomu, aby přechodová charakteristika soustavy, teda řada $\sum_{k=0}^{\infty} h_k$, byla konvergentní (ale ne postačující);

Stabilita lineární soustavy

Věta: Stabilita lineární soutavy

Soustava odpovídající obecnému modelu s přenosovou funkcí ve tvaru

$$H(z) = \frac{n(z^{-1})}{d(z^{-1})} = \frac{N(z)}{D(z)},$$

kde $N(z) = n_0 z^r + \cdots + n_r z^0$ a $D(z) = d_0 z^r + \cdots + d_r z^0$ jsou nesoudělné polynomy, je stabilní právě tehdy, když se všechny kořeny polynomu $D(z)$ nacházejí uvnitř jednotkového kruhu v komplexní rovině.

Príklad

Jeli $h_k = a^k$, pak je soustava stabilní právě tehdy, když je $|a| < 1$.

Stabilita stavového modelu

- pro stavový model obecně platí: $D(z) = det(z\mathbb{I} - \mathbb{A})$;
- kořeny $D(z)$ jsou právě všechná vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ a jsou v absolútní hodnotě menší než hodnota 1;

Príklad

Uvažujme nějakou stabilní soustavu a jednotkový skok $1 = u_0 = u_1 = \dots,$ jako vstup. Pak pro přechodovou charakteristiku soustavy, posloupnost y_t dostaneme

$$\lim_{t\to\infty} y_t = \lim_{t\to\infty} \sum_{k=0}^{t} h_k y_{t-k} = \lim_{t\to\infty} \sum_{k=0}^{t} h_k = \sum_{k=0}^{\infty} h_k = y_\infty$$

a soustava se tedy v nekonečném horizontu ustálí na nové úrovní. Obecně tedy předpoklad $h_t \to 0$ není postačující k tomu, aby řada $\sum_{k=0}^{\infty} h_k$ byla konvergentní.

- Pokud jsou ale kořeny $D(z)$ v jednotkovém kruhu (podmínka stability), pak také řada $\sum_{k=0}^{\infty} h_k$ konverguje absolútně.

Zhrnutí předchozí přednášky/opakování

- **Modely lineární regulace & lineární soustavy**
  $\hookrightarrow$ modely, které posloupnost výstupných dat $\{y_t\}$ modelují jako linární funkci vstupných dat $\{u_t\}$, t.j. $y_t = h_0 u_t + \cdots + h_t u_0$, pro $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;
- **Obecný maticový zápis systému se stavy $\boldsymbol{x}_t = (x_{t1}, \ldots, x_{tr})^\top$**

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathbb{A}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}u_t;$$
$$y_t = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{x}_t + d \cdot u_t,$$

  pro nějakou matici $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, vektory $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^r$ a skalár $d \in \mathbb{R}$;
- **Řešení pomoci přenosové funkce soustavy**
  $\hookrightarrow$ cílem je najít vyjádření závislosti výstupné posloupnosti na vstupních datech prostředníctvím tzv. přenosové funkce soustavy: $Y(z) = H(z)U(z)$;

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k} = [\boldsymbol{c}^\top \cdot (z\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}\boldsymbol{b} + d] = N(z)/D(z)$$

- **Základní vlastnosti lineární soustavy**
  - přechodová charakteristika soustavy $\sum_{k=0}^{t} h_k$;
  - stabilita lineární soustavy pro $lim_{t\to\infty} h_t = 0$;

Kapitola 4

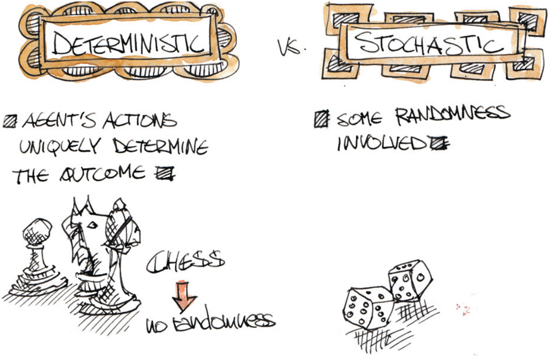
Markovské řetězce

Deterministické data $\Rightarrow$ Stochastické data

- v deterministických modelech je výstup (reakce) jednoznačné definovaná pomoci vstupu (akce) – napr. model lineární soustavy;
- v stochastických modelech je přítomen náhodný element, který přináší do výstupu jistou míru neurčitosti – napr. náhodná procházka;

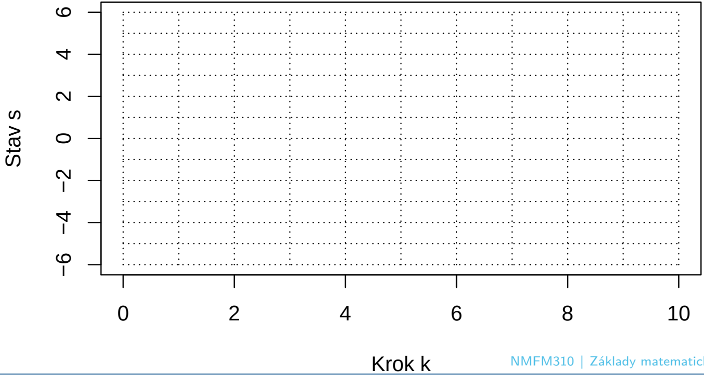
Deterministické data ⇒ Stochastické data

- v deterministických modelech je výstup (reakce) jednoznačné definovaná pomoci vstupu (akce) – napr. model lineární soustavy;
- v stochastických modelech je přítomen náhodný element, který přináší do výstupu jistou míru neurčitosti – napr. náhodná procházka;



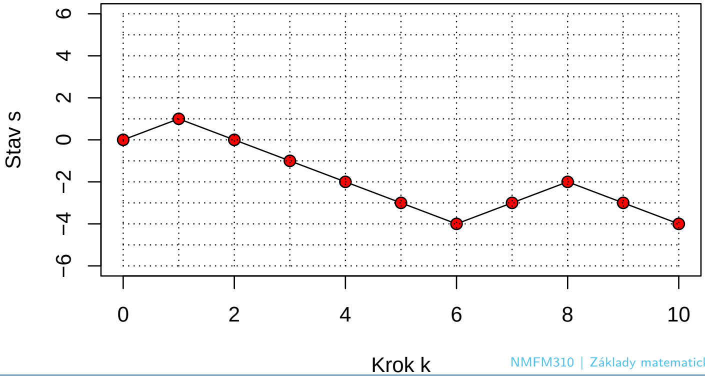
Náhodná procházka na přímce

- házime symetrickou minci (pravděpodobnost, že padne hlava je 1/2);
- záčíname v počátku, t.j. počáteční stav je v bodě nula;
- když padne hlava, posuneme se na ose napravo, když líce, tak nalevo;



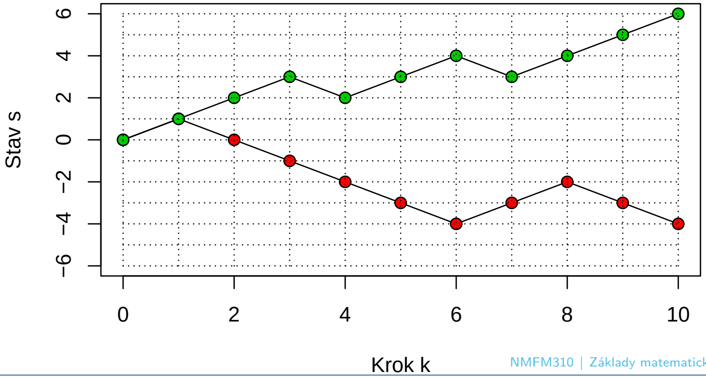
Náhodná procházka na přímce

- házime symetrickou minci (pravděpodobnost, že padne hlava je 1/2);
- záčíname v počátku, t.j. počátečný stav je v bodě nula;
- když padne hlava, posuneme se na ose napravo, když líce, tak nalevo;



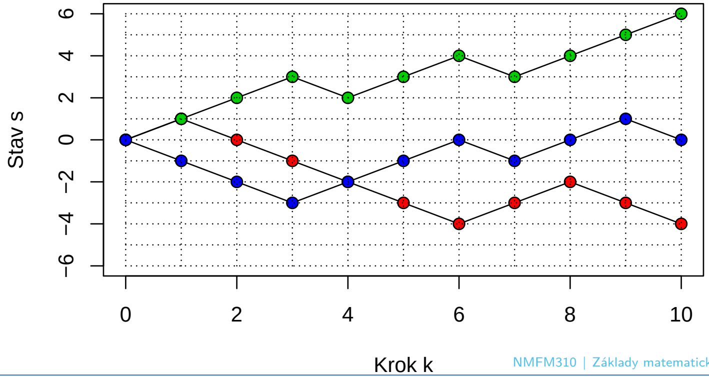
Náhodná procházka na přímce

- házime symetrickou minci (pravděpodobnost, že padne hlava je 1/2);
- záčíname v počátku, t.j. počátečný stav je v bodě nula;
- když padne hlava, posuneme se na ose napravo, když líce, tak nalevo;



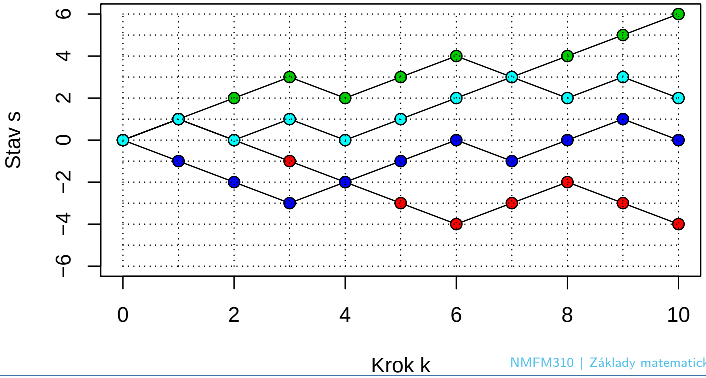
Náhodná procházka na přímce

- házime symetrickou minci (pravděpodobnost, že padne hlava je 1/2);
- záčíname v počátku, t.j. počáteční stav je v bodě nula;
- když padne hlava, posuneme se na ose napravo, když líce, tak nalevo;



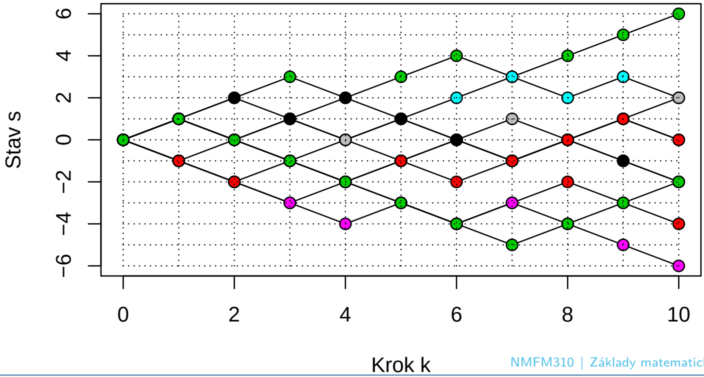
Náhodná procházka na přímce

- házime symetrickou minci (pravděpodobnost, že padne hlava je 1/2);
- záčíname v počátku, t.j. počátečný stav je v bodě nula;
- když padne hlava, posuneme se na ose napravo, když líce, tak nalevo;



Náhodná procházka na přímce

- házime symetrickou minci (pravděpodobnost, že padne hlava je 1/2);
- záčíname v počátku, t.j. počátečný stav je v bodě nula;
- když padne hlava, posuneme se na ose napravo, když líce, tak nalevo;



Stochastické celočíselné posloupnosti

- uvažujme nějakou posloupnost $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$, která nabýva pouze celočíselné hodnoty;
- hodnoty $n \in \mathbb{N}$ interpretujeme jako časové okamžiky, ve kterých posloupnost $\{X_n\}$ nabýva své hodnoty;
- hodnoty $s \in \mathbb{S}$, které může posloupnost $\{X_n\}$ hypoteticky nabývat, nazývame stavy;
- množina $\mathcal{S}$ všech možných stavů posloupnosti $\{X_n\}$, které může posloupnost nabývat, se nazýva stavový prostor;
- budeme uvažovat pouze diskrétní časové okamžiky a posloupnosti, kde $\mathcal{S}$ je nejvýše spočetná množina;
- stav poslopnosti $\{X_n\}$ v nějakem konkrétním čase $n \in \mathbb{N}$ závisí na předchozích stavech, ale závislost není deterministická;
- stav posloupnosti $\{X_n\}$ v čase $n \in \mathbb{N}$ je vyjádřen prostřednictvím pravděpodobnostního modelu;

Markovský řetězec a markovská vlastnost

Definice: Markovův řetězec

Řekneme, že posloupnost celočíselných náhodných veličín $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ se nazýva Markovův řetězec (markovský řetězec), jestliže platí, že

$$P[X_{n+1} = j | X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0] = P[X_{n+1} = j | X_n = i_n],$$

pro každé $n \geq 0$ a každé $i_0, \dots, i_n \in \mathbb{Z}$ takové, že

$$P[X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0] > 0.$$

Množina všech stavů je v tomto připadě množina $\mathbb{Z}$, t.j., $\mathcal{S} \equiv \mathbb{Z}$.

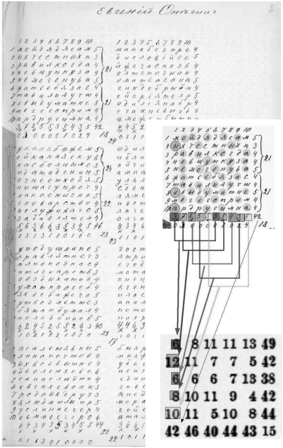
Markovskou vlastnosti nazývame fakt, že výsledek v čase $n+1$ závisí pouze na stavu daného řetězce v čase n (tudíž na stave v předchozím kroku, neboli v přítomnosti), nikoli na minulosti, t.j. na posloupnosti realizovaných stavů před časem n.

Markovský řetězec a markovská vlastnost

Příklady Markovských řetězců

- **První aplikace:** Andrei A. Markov použil Markovský řetězec na analýzu 20.000 listů z Pushkinovej básne Eugeny Onegin a studoval pravděpodobnosti výskytu samohlásek a souhlasek na základě předchozího výskytu (samohlásek a souhlasek);
- **Teória informaci:** striktně povedané, každý proces pri ktorom zdroj prenáša nějaké informace, je markovský řetězec (Shannonova teórie);
- **Informatika (IT):** aplikácia pre vyhľadavacie algoritmy (napr. Google), hodnotenie web stránok (PageRank), computer performance evaluation;
- **Marketing:** systémy hromadné obsluhy, modelování správania zákazníkov/klientov a modelování změn ich preferencí;
- **Finance a business:** modelování různych finančných trhov, změny různych stavů, jejích chování a pod.
- **Matematika:** simulačné metódy, rozhodovací algoritmy, analýza a spracování dat, atď.;

Markovský řetězec a Eugeny Onegin



- prvních 800 písmen z celkových 20.000 listů v Pushkinovom Eugeny Oneginovi;
- výskyt jednotlivých písmen zapsán pomoci 40 čtvercových matíc typu 10×10;
- spodní matice typu 6×6 zobrazuje frekvenčný výskyt některých písmen v 500 případech;
- na základě této analýzy sa ukázalo, že není žádny matematický rozdíl mezi kostkou, kterou hodíme 1000 krát a 1000 kostkami, které hodime jednou;

Hilgers, P. and Langville, A. (2006). The Five Greatest Applications of Markov Chains. *MAM 2006: Markov Anniversary Meeting . Raleigh 2006*.

Pravděpodobnosti přechodu

Definice: Pravděpodobnost přechodu

Pravděpodobnost $p_{ij}(n, n+1) \in [0,1]$, pro $i, j \in \mathcal{S}$, definovanou jako

$$p_{ij}(n, n+1) = P[X_{n+1} = j | X_n = i],$$

nazývame pravděpodobnost přechodu ze stavu i v čase n do stavu j v čase $n+1$;

Definice: Homogenní Markovský řetězec

Markovský řetězec se nazýva homogenní, jestliže platí, že

$$p_{ij} = p_{ij}(n, n+1),$$

pro všechny $i, j \in \mathcal{S}$, tudíž pravděpodobnosti přechodů zo stavu i do stavu j nezávisí na čase n.

Počáteční rozdělení řetězce

Definice: Počáteční rozdělení

Pravděpodobnosti $p_i \in [0, 1]$, pro $i \in \mathcal{S}$, které jsou definovány jako

$$p_i = P[X_0 = i],$$

pro $i \in \mathcal{S}$, nazývame počáteční rozdělení řetězce.

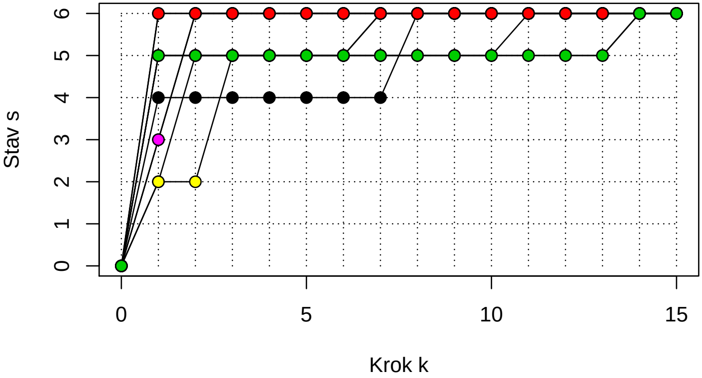
- v případě homogénních Markových řetězců se obvykle přechodové pravděpodobnosti zapisují v maticovem tvaru – tzv. matici přechodových pravděpodobností (resp. přechodová matice): $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j \in \mathcal{S}}$;
- počátečné rozdělení řetězce se zapisuje pomoci vektoru pravděpodobnosti počátečného rozdělení: $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_{|\mathcal{S}|})^\top$;

Matice přechodových pravděpodobnosti

- matice přechodových pravděpodobnosti je definována jako $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j=1}^{|S|}$;
  (pro nejvýše spočetný stavový prostor $\mathcal{S}$ a stavy $i, j \in \mathcal{S}$)
- matice přechodových pravděpodobnosti může být obecně nekonečná;
  (pro nekonečnou, ale nejvýše spočetnou množinu stavů $\mathcal{S}$)
- matice přechodových pravděpodobnosti je stochastická matice;
  (součet hodnot v každém řádku je roven hodnote jedna)
- vektor počátečného rozdělení řetezce ma součet jedna;
  (v nějakom stave $s \in \mathcal{S}$ musí řetězec začít)
- obecně řádky přechodové matice $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j=1}^{|\mathcal{S}|}$ značí výchozí stav $i \in \mathcal{S}$ a v sloupcích matice se uvádějí koncové stavy $j \in \mathcal{S}$;

Příklad: Dosažené maximum na hrací kostce

- obecně v n-tém tahu sledujeme dosažené maximum v n hodech;
- minimální hodnota (stav) je jedna, maximální (stav)je hodnota 6;



Příklad: Dosažené maximum na hrací kostce

Príklad

Házime spravodlivou hrací kostkou a sledujeme dosažené maximum v $n \in \mathbb{N}$ hodech. Množina stavů je $\mathcal{S} = \{1, \ldots, 6\}$ a matici přechodových pravděpodobností pak můžeme zapsát jako

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

kde p_{ij} značí pravděpodobnost přechodu ze stavu i (řádek) do stavu j (sloupec), pro libovolné $i, j \in \mathcal{S}$.

Existence cesty v Markovském řetězci

- v souvislosti s Markovskými řetězcemi je někdy důležité vyšetřit existenci cesty z nějakého stavu $i \in \mathcal{S}$ do nějakého jíného stavu $j \in \mathcal{S}$;

Věta: Existence cesty v Markovském rětězci

Nechť $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ je homogénní Markovský řetězec s nejvýše spočetnou množinou stavů $\mathcal{S}$, počátečným rozdělením $(p_i;\ i \in \mathcal{S})$ a maticou přechodových pravděpodobností $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j \in \mathcal{S}}$.
Pak platí, že

$$P[X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n] = p_{i_0} p_{i_0 i_1} \ldots p_{i_{n-1} i_n},$$

pro libovolné stavy $i_0, \ldots, i_n \in \mathcal{S}$.

Pravděpodobnosti přechodů vyšších řádů

- existence cesty ze stavu $i \in \mathcal{S}$ do stavu $j \in \mathcal{S}$ v n krocích souvisí s přechodovými pravděpodobnostmi vyšších řádů – pravděpodobnostmi $p_{ij}^{(n)}$;

Definice: Pravděpodobnost přechodu v n krocích

Nechť $p_{ij}^{(0)} = \mathbb{I}_{\{i=j\}}$ a $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$. Pak pravděpodobnost

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k \in \mathcal{S}} p_{ik}^{(n)} p_{kj}$$

se nazýva pravděpodobnost přechodu ze stavu i do stavu j po $(n+1)$ krocích (resp. $p_{ik}^{(n)}$ je pravděpodobnost přechodu n-tého řádu ze stavu i do stavu k).

- pro matici přechodových pravděpodobností n-tého řádu pak používame značení $\mathbb{P}^{(n)} = (p_{ij}^{(n)})_{i,j \in \mathcal{S}}$;

Pravděpodobnost přechodu n-tého řádu

Věta: Pravděpodobnost přechodu v n-tém kroku

Nechť $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $i, j \in \mathcal{S}$. Pak platí, že

$$P[X_{m+n} = j | X_m = i] = p_{ij}^{(n)}.$$

Pro matici přechodových pravděpodobností n-tého řádu zároveň platí, že

$$\mathbb{P}^{(n)} = \mathbb{P}^n.$$

- stejně jako matice $\mathbb{P}$ aj matice přechodových pravděpodobností vyšších řádů $\mathbb{P}^{(m)}$, jsou stochastické matice, t.j. součet prvků v každém řádku je roven hodnotě jedna;

Příklad: Dosažené maximum na hrací kostce

Príklad

Házime spravodlivou hrací kostkou a sledujeme dosažené maximum v $n \in \mathbb{N}$ hodech. Množina stavů je $\mathcal{S} = \{1, \ldots, 6\}$ a matici přechodových pravděpodobností pak můžeme zapsát jako
Pro přechodové pravděpodobnosti vyšších řádů máme

$$p_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{pro } i > 0; \\ \left(\frac{j}{6}\right)^n & \text{pro } i = j; \\ \left(\frac{j}{6}\right)^n - \left(\frac{j-1}{6}\right)^n & \text{pro } j > i; \end{cases}$$

Chapman-Kolmogorova věta

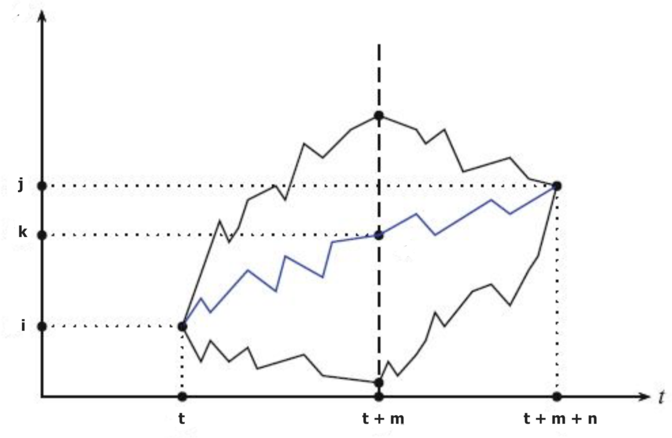
Věta: Chapman-Kolmogorov

Nechť $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ je homogénní Markovský řetězec. Pak pro libovolná $n, m \in \mathbb{N}$ platí, že

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in \mathbb{S}} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}.$$

- **IDEA:**
  Pro pravděpodobnost cesty zo stavu $i \in \mathcal{S}$ do stavu $j \in \mathcal{S}$ v $n + m$ krocích, se stačí podívat na všechny možné dosažitelné stavy $k \in \mathcal{S}$ po n krocích a pak všechny možné cesty zo stavu $k \in \mathcal{S}$ do stavu $j \in \mathcal{S}$ v m krocích.

Chapman-Kolmogorova věta



Zhrnutí předchozí přednášky/opakování

Markovské řetězce

- Posloupnosti celočíselných náhodných veličín: $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$; (uvažujeme pouze diskrétní čas a diskrétne stavy);
- Množina stavů $\mathcal{S}$ je nejvýše spočetná (např. $\mathcal{S} \equiv \mathbb{Z}$);
- Platí Markovská vlastnost: $P[X_{n+1} = j | X_n, \ldots, X_1] = P[X_{n+1} = j | X_n]$;
- Homogenita: nezávislost přechodov mezi stavy na čase $n \in \mathbb{N}$;

Pravděpodobnosti přechodov a počátečné rozdělení

- Pravděpodobnost přechodu ze stavu i do stavu j:

$$p_{ij} = P[X_{n+1} = j | X_n = i]$$

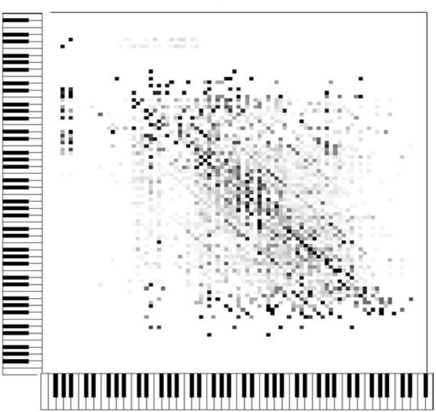
- Pravděpodobnost přechodu ze stavu i do j n-tého řádů:

$$p_{ij}^{(n)} = P[X_{m+n} = j | X_m = i]$$

- Počátečné rozdělení Markovského řetězce pro stavy $i \in \mathcal{S}$:

$$p_i = P[X_0 = i]$$

Reprezentace Markovského řetězce



I. Stravinsky "The Fire-bird" suite melody

- pomoci matice přechodových pravděpodobnosti $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j \in \mathcal{S}}$;
- případně matice přechodových pravdepodobnosti vyšších řádů $\mathbb{P}^{(n)}$;
- orientovaný graf s vrcholy pro stavy a váhami pro jednotlivé hrany;
- obrazek ilustrující matici přechodových pravděpodobnosti;

Klasifikace stavů Markovského řetězce

Definice: Dosažitelnost stavu v Markovském řetězci

Řekneme, že nějaký stav $j \in \mathcal{S}$ je dosažitelný ze stavu $i \in \mathcal{S}$, pokud existuje číslo $n \in \mathbb{N}$ takové, že $p_{ij}^{(n)} > 0$.

- pro vyjádření faktu, že stav j je dosažitelný ze stavu i (ne nutně v jednom kroku), používame značení $i \longrightarrow j$;

Definice: Nerozložitelnost Markovského řetězce

Řekneme, že Markovský řetězec je nerozložitelný, pokud každý stav je dosažitelný z každého stavu.

- dosažitelnost stavů v Markovském řetězci a nerozložitelnost řetězce nemusí byt patrná pouze z pohledu na samotnou matici $\mathbb{P}$;

Rozložitelnost a nerozložitelnost řetězce

Príklad

Uvažujme Markovský řetězec se čtyřprvkovou množinou stavů $\mathcal{S}$ a maticou přechodových pravděpodobnosti

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- jedná se o rozložitelný Markovský řetězec protože stav 1 nelze dosáhnout ze žádneho jiného stavu 2,3 a 4;
- pro nerozložitelnost řetězce by stačilo umožnit přechod ze stavu 2 do stavu 1, t.j., definovat $p_{21} > 0$;

Samostatný úkol

Reprezentujte Markovský řetězec z příkladu pomoci vhodného grafu.

Uzavřená množina stavů

Definice: Množna uzavřených stavů

Řekneme, že neprázdna množina stavů $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ je uzavřená množina, pokud každý stav vně množiny $\mathcal{C}$ není dosažitelný z žádneho stavu množiny $\mathcal{C}$.

- **IDEA:**
  Jakmile řetězec jednou vejde do nějakého stavu $s \in \mathcal{C}$, pak již nemůže řetězec nabýt zádneho jiného stavu, kromě stavů v množine $\mathcal{C}$.
- uzavřenost ve zmyslu *nemůžeme ven, ale pořád můžeme dovnitř*;

Věta: Nerozložitelnost řetězce I

Markovský řetězec je nerozložitelný právě tehdy, kdýž neexistuje žádna uzavřená množina $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$, taková, že $\mathcal{C} \neq \mathcal{S}$.

Rozložitelnost a nerozložitelnost řetězce

Věta: Uzavřená množina stavů

Množina stavů $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$, taková, že $\mathcal{C} \neq \mathcal{S}$ je uzavěná právě tehdy, když platí, že

$$p_{jk} = 0 \quad \text{pro} \quad \forall j \in \mathcal{C} \quad \text{a} \quad \forall k \notin \mathcal{C}.$$

Věta: Nerozložitelnost řetězce II

Řetězec je nerozložitelný právě tehdy, když po vhodném přečíslování stavů řetězce (a teda příslusnou permutaci řádků a sloupců matice $\mathbb{P}$) je matice přechodových pravděpodobností ve tvaru

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbb{Q} & \mathbb{R} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbb{P}_1$ a $\mathbb{R}$ jsou čtvercové matice a $\mathbb{P}_1$ je navíc stochastická.

Doba prvního vstupu (návratu) do stavu

Definice: Doba prvního vstupu

Pro libovolný stav $i \in \mathcal{S}$ definujeme

$$\nu_i = \inf\{n \in \mathbb{N};\ X_n = i\}$$

jako čas prvního vstupu (resp. doba prvního návratu řetězce $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ do stavu $i \in \mathcal{S}$, t.j., záleží na počátečném rozdělení).

- analogicky lze definovat i obecný čas k-tého vstupu (návratu) řetězce do stavu $i \in \mathbb{S}$ jako

$$\nu_i(k) = \inf\{n > \nu_i(k-1);\ X_n = i\},$$

kde definujeme $\nu_i(1) \equiv \nu_i$, pro $i \in \mathcal{S}$;

Doba mezi návraty do stavu

Pro doby, které Markovský řetězec strávi mezi jednotlivými návraty do daného stavu $i \in \mathcal{S}$ se obecně zavádi značení

- $T_i(1) = \nu_i = \nu_i(1)$: doba do prvního návratu/vstupu do stavu $j \in \mathbb{S}$;
- $T_i(2) = \nu_i(2) - \nu_i(1)$: doba mezi prvním a druhým návratem/vstupem;
- $T_i(k) = \nu_i(k) - \nu_i(k-1)$: doba mezi k-tym a $(k-1)$-vým návratem;

- Samozrejme platí, že

$$\nu_i(k) = T_i(1) + T_i(2) + \cdots + T_i(k);$$

Poznámka:
Je vhodné rozlyšovat návrat do stavu $i \in \mathcal{S}$ (pokud již řetězec v tomto stavu v minulosti byl) a vstup do stavu $i \in \mathcal{S}$ (pokud řetězec v daném stavu ještě nebyl).
V praxi (ovšem ne nutně vždy a všude) se obecně používa vyjádření o prvním vstupu do stavu $i \in \mathcal{S}$ ("nultý" návrat) a pak o k-tém návratu (t.j., $(k+1)$-ní vstup).

Trvalý a přechodný stav v Markovském řetězci

Definice: Trvalý stav

Stav $i \in \mathcal{S}$ takový, že platí

$$P_i[\nu_i < \infty] = P[\nu_i < \infty | X_0 = i] = 1,$$

se nazýva trvalý stav rětězce $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$.

Definice: Přechodný stav

Stav $i \in \mathcal{S}$ takový, že platí

$$P_i[\nu_i = \infty] = P[\nu_i = \infty | X_0 = i] > 0,$$

se nazýva přechodný (transcientný) stav rětězce $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$.

Přechodný a trvalý nulový a nenulový stav

- Trvalý stav je teda takový, že řetězec, který vychází ze stavu $i \in \mathbb{S}$ (proto podmínka, že $X_0 = i$), se v konečne mnoha krocích do tohto stavu vráti s pravděpodobnosti 1;

- V opačnem případě (t.j., existuje kladná pravděpodobnost, že řetězec, který začal ve stavu $i \in \mathbb{S}$, se již nikdy do tohto stavu nevráti) řekneme, že stav je přechodný.

Definice: Trvalý nulový a nenulový stav

- Trvalý stav $i \in \mathcal{S}$ takový, že $E_i \nu_i = \infty$, se nazýva nulový stav;
- Trvalý stav $i \in \mathcal{S}$ takový, že $E_i \nu_i < \infty$, se nazýva nenulový stav;

Střední hodnoty v definici jsou definované vzhledem k pravděpodobnostní míře $P_i[\cdot] = P[\cdot | X_0 = i]$ (t.j., záleží na počátečném rozdělení);

Klasifikace stavů v Markovském řetězci

- Do trvalého stavu se Markovský řetězec vrátí nekonečne mnoho krát s pravděpodobnosti 1.

- Do přehodného stavu se Markovský řetězec vráti nekonečne mnoho krát s pravděpodobnosti nula.

- Nechť $f_i^{(n)} = P_i[\nu_i = n]$ (první návrat v čase n) a nechť $f_i^{(0)} = 0$. Pak je zřejmé, že stav $i \in \mathcal{S}$ je trvalý, právě tehdy, když platí, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_i^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} f_i^{(n)} = 1;$$

- Pro střední hodnotu $E_i\nu_i$ platí: $E_i\nu_i = \sum_{n=1}^{\infty} nP_i[v_i = n] = \sum_{n=1}^{\infty} nf_i^{(n)}$;

- Obecně pro $n \geq 1$ platí, že $p_{ii}^{(n)} = P_i[X_n = i] = \sum_{k=1}^{n} f_i^{(k)} p_{ii}^{(n-k)}$;
- Obecně pro $n \geq 0$ a $i \neq j$ platí $p_{ij}^{(n)} = P_i[X_n = j] = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}$, kde $f_{ij}^{(n)} = P_i[\nu_j = n] = P[\nu_j = n | X_0 = i]$ (první vstup v čase n);

Periodický a neperiodický stav

Definice: Periodický stav

Stav $i \in \mathcal{S}$ v homogénním Markovském řetězci $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ se nazýva periodický s periodou $d \in \mathbb{N}$, pokud platí, že

$$d = NSD(n > 0;\ p_{ii}^{(n)} > 0) > 1,$$

teda největší společný dělitel pro čas návratu do stavu i je větší jako jedna.

- Pokud platí, že $NSD = 1$, pak řekneme, že stav $i \in \mathbb{N}$ je aperiodický neboli neperiodický.

Stavy stejného typu

Definice: Stavy stejného typu

Řekneme, že dva stavy jsou stejného typu, pokud platí, že oba stavy jsou trvalé/přechodné, nulové/nenulové a periodické/neperiodické, so stejnou periodou $d > 1$.

Príklad

- Ověřte, že v Markovském řetězci s přechodovou matici

$$\mathbb{P}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & (1-p) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

  jsou včechny stavy periodické, s periodou $d = 3$ pro $p \in (0,1)$.
- Co se stane, když do procesu přidáme jednu smyčku typu $p_{ii} > 0$?

Klasifikace stavů v Markovském řetězci

Věta: Trvalý a trvalý nulový stav

- Stav $i \in \mathcal{S}$ je trvalý $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$;
- Stav $i \in \mathcal{S}$ je přechodný $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$;
- Trvalý stav $i \in \mathcal{S}$ je nulový $\Leftrightarrow p_{ii}^{(n)} \longrightarrow 0$ pro $n \to \infty$;

Věta: Řetězec s konečně mnoho stavy

- V řetězci s konečně mnoho stavy nemohou být všechy stavy přechodné.
- V řetězci s konečne mnoho stavy neexistují stavy trvalé nulové.

- Když existuje cesta $i \to j \to i$, pak jsou oba stavy i a j stejného typu. Pokud $i \to j \not\to i$, pak stav i je přechodný.
- V nerozložitelném řetězci jsou všechny stavy stejného typu.

Absorbčné a ergodické stavy

- V případě Markovských procesů je užitečné ještě definovat tzv. absorbční stav a ergodický stav procesu.

Definice: Absorbční stav

Stav, ze kterého není dosažitelný žádný jiný stav, se nazýva absorbčný.

Definice: Ergodický stav

Stav, který je trvalý, nenulový a neperiodický, se nazýva ergodický.

Příklad: Dosažené maximum na hrací kostce

Príklad

- stav $i \in \mathcal{S}$ je trvalý $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$, pro $i = 1, \dots, 6$;
    - v našem případě platí: $p_{ii}^{(n)} = \left(\frac{i}{6}\right)^n$;
    - pro $i = 1, \dots, n$ je řada konvergentní;
    - pro $i = 6$ je suma divergentní;
- stav $i = 6$ je proto trvalý, stavy $i = 1, \dots, 5$ jsou přechodné;
- je stav $i = 6$ nulový nebo nenulový?
    - podle definice: $E_i \nu_i = 1 \cdot 1 = 1 < \infty$;
    - stav $i = 6$ je proto trvalý nenulový;
    - střední doba návratu do stavu $i = 6$ je 1 ($v_6 = 1$);
    - množina stavů $\{6\}$ je uzavřená, a stav je absorbční;

Příklad: Náhodná procházka

Príklad

- otázka zní, jak se chovají pravděpodobnosti $p_{ii}^{(n)}$?
- z povahy řetězce je zřejmé, že $p_{ii}^{(n)} = 0$ pro $n \in \mathbb{N}$ liché;
- pro pravděpodobnosti $p_{ii}^{(2n)}$ pak dostaneme:

$$p_{ii}^{(2n)} = \binom{2n}{n} 2^{-2n} = \frac{(2n)!2^{-2n}}{(n!)^2} \approx \frac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{4\pi n}2^{-2n}}{n^{2n}e^{-2n}2\pi n} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \to 0,$$

kde jsme využili Stirlingovou approximaci $n! \approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$;

- tudíž platí, že $p_{ii}^{(n)} \to 0$, pro $n \to \infty$;
- zároveň platí, že $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$;
- všechny stavy jsou proto trvalé nulové;

Příklad: Člověče nezlob se!

Samostatný úkol

Uvažujte hru Člověče nezlob se, kde hrací plocha ma pouze 15 stanovíšť. Hráč se posune o tolik kroků dopředu, kolik hodil bodů na kostke. Když hodí hodnotu šest, háže opět a posune se o počet kroků daný součtem bodů v jednotlivých hodech. Hrá končí, když se hráč vráti spátky na štartovací pozici – t.j. políčko č. 15.
Jak vypadá matice přechodových pravděpodobností? Klasifikujte stavy Markovského procesu.

Zhrnutí předchozí přednášky/opakování

- Homogénní Markovské řetězce s diskrétným časem $n \in \mathbb{N}$ a nejvýše spočetnou množinou stavu $\mathcal{S}$;
- Klasifikace stavů v Markovském řetězci:
  - Trvalé nulové a nenulové stavy;
  - Přechodné stavy;
  - Neperiodické a periodické stavy s periodou $d > 1$;
  - Absorbční a ergodické stavy;
- Rozložitelnost a nerozložitelnost řetězce:
  - Dosažitelnost stavů (existence cesty $i \to j \to i$);
  - Uzavřené podmnožiny stavů $\Rightarrow$ rozložitelnost řetězce;
- Zavedené veličiny a značení:
  - Počáteční a přechodové pravděpodobnosti: $p_i, p_{ij}, p_{ij}^{(n)}$ pro $i, j \in \mathcal{S}$;
  - Čas prvního (obecně k-tého) návratu/vstupu do stavu $i \in \mathcal{S}$: $\nu_i(k)$;
  - Čas mezi k-tým a $(k-1)$-ním vstupem do stavu $i \in \mathcal{S}$: $T_i(k)$;
  - Podmíněná pravděpodobnost počátečným stavem: $P_i[\cdot] = P[\cdot|X_0 = i]$;
  - Pravděpodobnost návratu/vstupu do stavu $i \in \mathcal{S}$ v čase $n \in \mathbb{N}$: $f_i^{(n)}, f_{\ell i}^{(n)}$;

Chování Markovských řetězců

- homogénní Markovský řetězec $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ s diskrétním časem a nejvýše spočetnou množinou stavů $\mathcal{S}$;
- zajíma nás dlouhodobé chování Markovských řetězců, t.j., pro $n \to \infty$;
- jaké je marginální rozdělení náhodnej veličiny X_n, pro $n \to \infty$;
- náhodné veličiny X_n mají obecně různe rozdělení pro různa $n \in \mathbb{N}$;

Chování Markovských řetězců

- homogénní Markovský řetězec $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ s diskrétním časem a nejvýše spočetnou množinou stavů $\mathcal{S}$;
- zajíma nás dlouhodobé chování Markovských řetězců, t.j., pro $n \to \infty$;
- jaké je marginální rozdělení náhodnej veličiny X_n, pro $n \to \infty$;
- náhodné veličiny X_n mají obecně různe rozdělení pro různa $n \in \mathbb{N}$;

- **Otázka:** Lze něco obecně říct o rozdělení X_n, pro $n \to \infty$?
  - např., rozdělení je stejné pro všechny $n \geq n_0$, pro nějaké vhodně zvolené $n \in \mathbb{N}$;
  - nebo rozdělení náhodne veličiny X_n konverguje k nějakému limitnímu rozdělení pro $n \to \infty$;
  - nebo existuje nějaké rozdělení Markovského řetězce, které zaručuje nějakou "stabilitu" řetězce;

Stacionární rozdělení Markovského řetězce

Definice: Stacionární rozdělení Markovského řetězce

Řekneme, že pravděpodobnostné rozdělení $\boldsymbol{\pi} = (\pi_i;\ i \in \mathcal{S})$ na množine stavů $\mathcal{S}$ je stacionární rozdělení Markovského řetězce, pokud platí, že

$$\pi_j = \sum_{i \in \mathcal{S}} \pi_i p_{ij},$$

pro všechny $j \in \mathcal{S}$. Maticově lze také zapsát jako

$$\boldsymbol{\pi}^\top = \boldsymbol{\pi}^\top \mathbb{P},$$

pro matici přechodových pravděpodobnosti $\mathbb{P}$.

Samostatný úkol

Vysvětlete, co znamená, že $\boldsymbol{\pi} = (\pi_i;\ i \in \mathcal{S})$ je pravděpodobnostné rozdělení na množine stavů $\mathcal{S}$.

Limitní rozdělení Markovského řetězce

Definice: Limitní rozdělení Markovského řetězce

Řekneme, že pravděpodobnostné rozdělení $\mathcal{P} = (p_i;\ i \in \mathcal{S})$ na množine stavů $\mathcal{S}$ je limitní rozdělení Markovského řetězce, pokud platí, že

$$p_i = \lim_{n\to\infty} p_i(n),$$

kde $p_i(n) = P[X_n = i]$, pro $i \in \mathcal{S}$.

Samostatný úkol

Ukážte, ze pro Markovský řetězec s maticou přechodových pravděpodobnosti

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

neexistuje limitní rozdělení.

Limitní vs. stacionární rozdělení

- **Stacionární rozdělení** Markovského řetězce se vztahuje pouze k pravděpodobnostem přechodu p_{ij}, pro $i, j \in \mathcal{S}$. Nezávisí teda na počátečném rozdělení Markovského řetězce.
- **Limitní rozdělení** se vztahuje k rozdělení celého Markovského řetězce. Je tedy ovplivněno i počátečním rozdělením Markovského řetězce.
- Snadno lze nahlédnout, že pokud je počáteční rozdělení řetězce rovno stacionárnímu rozdělení $\boldsymbol{\pi}$, pak je i rozdělení řetězce ve všech dalsích časech $n \in \mathbb{N}$, t.j. rozdělení $(p_i(n);\ i \in \mathcal{S})$, rovné rozdělení $\boldsymbol{\pi}$.

Věta: Stritně stacionární proces

V případě, že počáteční rozdělení řetezce je stejné jako stacionární rozdělení, pak pro libovolnú posloupnost $i_0, \dots, i_k$ stavů z $\mathcal{S}$ a libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí

$$P[X_0 = i_0, \dots, X_k = i_k] = P[X_n = i_0, \dots, X_{n+k} = i_k].$$

Takový řetězec se nazýva striktně stacionární.

Limitní rozdělení $\Rightarrow$ stacionární rozdělení

Věta: Limitní rozdělení a stacionární rozdělení

Nechť existuje limitní rozdělení $\mathcal{P} = (p_i;\ i \in \mathcal{S})$ Markovského řetězce $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Pak je toto rozdělení zároveň stacionárním rozdělením Markovského řetězce a tudíž platí, že

$$\mathcal{P} = \boldsymbol{\pi}.$$

- Opačná implikace samozřejme obecně neplatí: není pravda, že existence stacionárního rozdělení by byla postačujíci podmínka pro existenci limitního rozdělení Markovského řetězce;

Nerozložitelnost a stacionární rozdělení

Věta: Nerozložitelnost a existence stacionárního rozdělení

Nechť $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ je nerozložitelný Markovský řetězec s množinou stavů $\mathcal{S}$. Pak platí, že

- jsou-li všechny stavy přechodné, nebo trvalé nulové, pak stacionární rozdělení neexistuje;
- jsou-li všechny stavy trvalé nenulové, pak stacionární rozdelení existuje a je dané jednoznačně.
  - Jsou-li navíc všechny stavy neperiodické, pak

$$\lim_{n\to\infty} p_j(n) = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j = \frac{1}{E_j \nu_j},$$

  - Jsou-li všechny stavy periodické, pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_j(k) = \frac{1}{n} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} = \pi_j.$$

Příklad: Nehodové pojištení s bonusem

- V konečném nerozložitelném řetězci stacionární rozdělení vždy existuje. *(všechny stavy jsou totiž trvalé nenulové)*
- Stacionární rozdělení nerozložitelného řetězce nepopisuje pouze limity absolutních pravděpodobností jednotlivých stavů, ale popisuje také četnosti návratu do jednotlivých stavů, čas který daný Markovský řetězec v jednotlivých stavech strávi.

Príklad

Uvažujeme nehodové pojištění se třemi různymi úrovněmi:

- základní sazba (stav 1);
- sazba s bonusem 30 % (stav 2);
- sazba s bonusem 35 % (stav 2);

Rok bez pojistní události znamená postup do lepší pojistní kategórie pro přiští rok (když taková možnost existuje). Jedná pojistní událost v průběhu roka znamená posun o jednu kategórii níž (pokud to lze) pro další rok. V případě většího počtů události posun do základní kategórie.

Příklad: Nehodové pojištení s bonusem

Príklad

- situaci chceme modelovat pomoci Markovského řetězce;
- počet pojistních události Y_n v danem roce $n \in \mathbb{N}$ ma Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda > 0$;
- náhodná veličina X_{n+1} je definovaná následovně:

$$X_{n+1} = \begin{cases} \min(X_n + 1, 2) & \text{pro } Y_n = 0 \\ \max(X_n - 1, 0) & \text{pro } Y_n = 1 \\ 0 & \text{pro } Y_n > 1 \end{cases}$$

- ukážte, že $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ je Markovský řetězec;
- nájděte matici přechodových pravděpodobnosti $\mathbb{P}$;
- nájděte soustavu rovníc pro nalezení stacionárního rozdělení;

Počet přechodů stavem $j \in \mathcal{S}$

Definice: Počet přechodů daným stavem

Náhodná veličina

$$N_j(n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{\{X_k=j\}},$$

se nazýva počet přechodů stavem $j \in \mathbb{S}$ v prvních $n \in \mathbb{N}$ krocích (resp. počet návratů do stavu $j \in \mathcal{S}$).

- počet návratů do stavu j (náhodná veličina $N_j(n)$) úzce souvisí s časmi návratu do stavu $j \in \mathcal{S}$;

Počet přechodů, časy návratů a klasifikace

- Limitním přechodem získame celkový počet návratu do stavu $j \in \mathcal{S}$ jako

$$N_j = \lim_{n\to\infty} N_j(n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{\{X_k=j\}}.$$

- Snadno se nahlédne, že platí nasledujíci:
  - $N_j \geq k \Leftrightarrow \nu_j(k) < \infty;$
  - $N_j = k \Leftrightarrow \nu_j(k) < \infty \bigwedge \nu_j(k+1) = \infty;$

Věta: $0 - 1$ zákon

- ak je stav $j \in \mathcal{S}$ trvalý, pak $P_j[N_j = \infty] = 1;$
- ak je stav $j \in \mathcal{S}$ přechodný, pak $P_j[N_j = \infty] = 0;$

Počet přechodů $N_j(n)$ a stacionární rozdělení

Věta: Stacionární rozdělení v řetězci s trvalými nenulovými stavy

V nerozložitelnem Markovském řetězci s trvalými nenulovými a neperiodickými stavy platí s pravděpodobností jedna, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_j(n)}{n} = \pi_j,$$

pro všechny stavy $j \in \mathcal{S}$.

Příklad: Stacionární rozdělení

Príklad

Uvažujme Markovský řetězec s maticou přechodových pravděpodobností

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & p & 0 & \dots \\ 0 & q & 0 & p & \dots \\ 0 & 0 & q & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

pro nějake vhodně zvolené $p > 0$ a $q > 0$, takové, že $p + q = 1$.

- Nájděte stacionární rozdělení pro daný Markovský řetězec.

Zhrnutí předchozí přednášky/opakování

- Homogégnní Markovské řetězce s diskrétným časem $n \in \mathbb{N}$ a nejvýše spočetnou množinou stavu $\mathcal{S}$;
- Klasifikace stavů v Markovském řetězci:
  - Trvalé nulové a nenulové stavy;
  - Přechodné stavy;
  - Neperiodické a periodické stavy s periodou $d > 1$;
  - Absorbční stavy a ergodické stavy;
- Rozložitelnost a nerozložitelnost řetězce:
  - Dosažitelnost stavů;
  - Uzavřené podmnožiny stavů;
  - Počty přechodu, návratu a vstupu do daného stavu;
- Limitní a stacionární rozdělení Markovského řetězce
  - Limitní rozdělení - popisuje chováni celého Markovského řetězce včetne počátečného rozdělení;
  - Stacionární rozdělení - vyjadruje určitou stabilitu řetězce vzhledem k pravdepodobnostem přechodu;

Kapitola 5

Časové řady

Nádodné procesy vs. časové řady

- **Stochastický proces**
  $\hookrightarrow$ posloupnost (reálných) náhodných veličín $\{X_t;\ t \in T\}$ definovaných na stejném pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$;
- **Časová řada (proces)**
  $\hookrightarrow$ stochastický proces indexovaný celočíselnou množinou T (resp. stochastický proces s diskrétnym časom);

- v niektorých literárných zdrojoch sa pod pojmom časová řada rozumí již nějaká konkrétní realizace náhodného procesu $\{X_t;\ t \in T\}$, t.j., posloupnost konkrétních hodnot $X_1, X_2, \ldots,$ neboli $x_1, x_2, \ldots;$

Bílý šum

Definice: Bílý šum

Posloupnost centrovaných a nekorelovaných náhodných veličín $\{X_t;\ t \in T\}$ s kladným konečným rozptylom se nazýva bílý šum.

Definice: Striktní bílý šum

Posloupnost nezávislých, stejně rozdelených, nedegenerovaných a centrovaných náhodných veličín $\{X_t;\ t \in T\}$ se nazýva striktní bílý šum.

- vpodstatě je bílý šum náhodný signál s rovnoměrnou spektrální hustotou; *(analógie s bílým svělem, které obsahuje všechny ostatné frekvence)*

Příklad: Bílý šum a striktní bílý šum

Príklad

- posloupnost nezávislých náhodných veličín z rozdělení $N(0,1)$ je bílý šum a zároveň aj striktní bílý šum (obecně $N(0,\sigma^2)$);
- posloupnost nezávislých náhodných veličín z rozdělení $C(0,1)$ je striktní bílý šum, ale není to bílý šum – neexistuje totiž ani střední hodnota, ani konečný rozptyl;
- posloupnost nekorelovaných náhodných veličín z nějakého obecného rozdělení F je bílý šum, pokud jsou veličiny centrované (t.j. s nulovou střední hodnotou) a s konečným rozptylem; Pokud navíc je rozdělení F normální, pak se jedná o striktní bílý šum;

- Striktní bílý šum a bílý šum jsou obecně časové řady s nejjednodušší závislostní struktúrou – nekorelované, neboli dokonce nezávislé. Zároveň v sobě nenesou žádnou informaci, jedna se pouze o náhodné chyby, stochastické fluktuace.

Silná stacionarita

Definice: Silná stacionarita

Řekneme, že posloupnost náhodných veličín $\{X_t;\ t \in T\}$ je striktně stacionární (resp. silně stacionární), pokud pro $\ell \in \mathbb{N}$, libovolné $k_1, \ldots, k_\ell \in T$ a každé $h > 0$ takové, že $k_1 + h, \ldots, k_\ell + h \in T$ platí, že

$$\mathcal{L}(X_{k_1}, \ldots, X_{k_\ell}) = \mathcal{L}(X_{k_1+h}, \ldots, X_{k_\ell+h}).$$

- Silná stacionarita znamená, že libovolná ℓ-tice náhodných veličích je stejně rozdělená v libovolnem časovém okamžiku;
- Z definice samozřejme plyne, že pro silně stacionární posloupnost $\{X_t;\ t \in T\}$ jsou náhodné veličiny X_t stejně rozdelené pro všechny $t \in T$;

Slabá stacionarita

Definice: Slabá stacionarita

Řekneme, že posloupnost náhodných veličín $\{X_t;\ t \in T\}$ je slabě stacionární, pokud platí:

- $EX_t = \mu$ pro všechna $t \in T$ (t.j., nezávisí na t);
- $R(k) = E\Big[(X_{t+k} - \mu)(X_t - \mu)\Big]$ (t.j, nezávisí na $t \in T$);

- funkce $R(k)$ se nazýva autokovarianční funkce posloupnosti;
- hodnota $R(0) = E(X - \mu)^2$ je rozptyl posloupnosti (konstantní v čase);
- funkce $r(k) = R(k)/R(0)$ se nazýva autokorelační funkce posloupnosti;
- samozřejme platí, že $R(k) = R(-k)$ pro libovolné $k \in \mathbb{N}$;

Příklad: Bílý šum a striktní bílý šum

Príklad

- pokud ma silně stacionární posloupnost konečné druhé momenty, pak je zřejmě slabě stacionární;
- pokud je posloupnost náhodných veličín gausovská (t.j. všechny konečněrozměrná rozdělení jsou normální) a slabě stacionární, pak je také silně stacionární;
- striktní bílý šum je silně (striktně) stacionární (nezávislé a stejně rozdělené náhodné veličiny);
- bílý šum je obecně slabě stacionární (centrované a nekorelované náhodné veličiny);

Klouzavé průměry řádu $q \in \mathbb{N}$

Definice: $MA(q)$ proces

Nechť posloupnost $\{\varepsilon_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ je bílý šum s konečným rozptylem $\sigma^2 < \infty$. Pak náhodnou posloupnost

$$X_t = a_0\varepsilon_t + a_1\varepsilon_{t-1} + \cdots + a_q\varepsilon_{t-q}, \quad \text{pro } t \in \mathbb{Z},$$

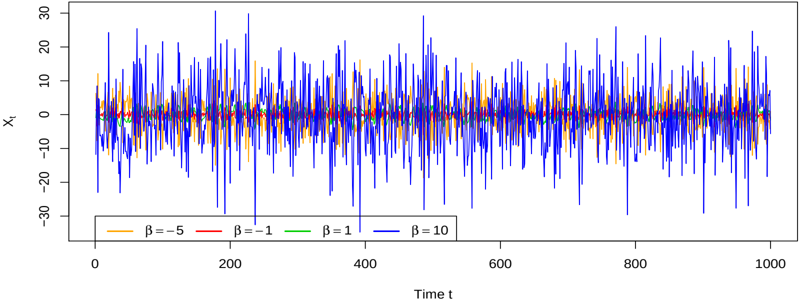
pro nějaké koeficienty $a_0, \ldots, a_q \in \mathbb{R}$, takové, že $a_0 \neq 0 \neq a_q$, nazývame posloupnost klouzavých průměrů řádu q.

- obecně majú $MA(q)$ procesy složitejší korelační strukturu než bílý šum, avšak složky X_t a X_{t+k} jsou nekorelované pro $k > q$.

Příklad: $MA(1)$ proces

Príklad

- nechť $X_t = \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1}$, pro $\{\varepsilon_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ bílý šum;
- Pro jaké hodnoty $\beta \in \mathbb{R}$ je $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ stacionární?
- Jak je definovaná autokovarianční a autokorelační funkce?



Autoregresní model řádu $p \in \mathbb{N}$

Definice: $AR(p)$ proces

Nechť posloupnost $\{\varepsilon_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ je bílý šum s konečným rozptylem $\sigma^2 < \infty$. Pak náhodnou posloupnost

$$d_0 X_t + d_1 X_{t-1} + \cdots + d_p X_{t-p} = \varepsilon_t, \quad \text{pro } t \in \mathbb{Z}, \tag{8}$$

pro nějaké koeficienty $d_0, \ldots, d_p \in \mathbb{R}$, takové, že $d_0 \neq 0 \neq d_q$, nazýváme autoregresní posloupnost řádu q.

- Ekvivalentně lze model přepsát pomoci rovnice $X_t = \tilde{d}_1 X_{t-1} + \cdots + \tilde{d}_p X_{t-p} + \widetilde{\varepsilon}_t$, kde $Var \widetilde{\varepsilon}_t = \frac{1}{d_0^2} Var \varepsilon_t$ a $\tilde{d}_j = -d_j / d_0$;
- Obecně jsou pro týto modely autokorelace nenulové a jednotlivé složky se navzájem ovlivňují i když jsou libovolně daleko od sebe.
- Pokud je posloupnost stacionární, pak závislost mezi složkami se vzrůstajícím rozdílem v čase nutně slabne;

Stacionarita autoregresní posloupnosti

Věta: Stacionarita autoregresní posloupnosti

Nechť $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ je autoregresní posloupnost p-tého řádu definovaný rovnici (8) a nechť bez ujmy na obecnosti $d_0 = 1$. Nechť jsou všechny kořeny polynomu

$$d(z) = 1 + d_1 z + \dots d_p z^p$$

vně jednotkového kruhu v komplexní rovině. Pak je proces $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ slabě stacionární a náhodná veličina ε_t je nekorelovaná se všemi náhodnými veličinami $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots$.

Centrovanost a kauzálnost *AR* posloupnosti

- za platnosti podmínek předchozí věty je posloupnost $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ také centrovaná, protože ze slabé stacionarity také automaticky plyne, že

$$0 = E\varepsilon_t = d_0 EX_t + \dots d_p EX_{t-p} = \mu \left(\sum_{i=1}^{p} d_i \right),$$

  a tudíž $\mu = 0$. Ak by $\sum_{i=1}^{p} d_i = 0$, pak by to znamenalo, že 1 je také kořenem polynomu $d(z)$, což je spor s předpokladem uvedéné věty;

- za platnosti podmínek předchozí věty také platí, že posloupnost $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ lze vyjádřit v kauzálnim tvare, t.j. existuje vyjádření

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varepsilon_{t-k},$$

  kde koeficienty c_k jsou určený vztahem $c(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \frac{1}{d(z)}$, pro $|z| \leq 1$.

Příklad: $AR(1)$ proces

Príklad

- nechť $X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t$, pro $\{\varepsilon_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ bílý šum;
- polynom $d(z) = 1 - az$ má kořen v bodě $z = 1/a$;
- kořen je vně jednotkového kruhu $\Leftrightarrow$ $|a| > 1$;
- potom platí, že

$$X_t = aX_{t-1}+\varepsilon_t = a(aX_{t-2}+\varepsilon_{t-1})+\varepsilon_t = \cdots = a^k X_{t-k}+\sum_{\ell=0}^{k-1} a^\ell \varepsilon_{t-\ell};$$

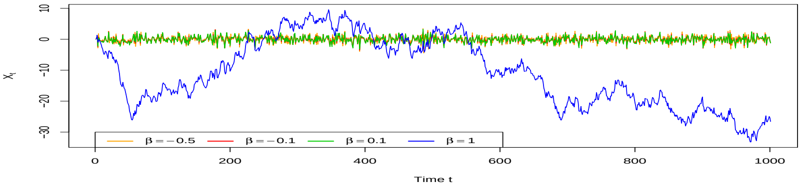
- a náhodnú veličinu X_t lze (limitním přechodem) vyjádřit kauzálně jako

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \varepsilon_{t-k}$$

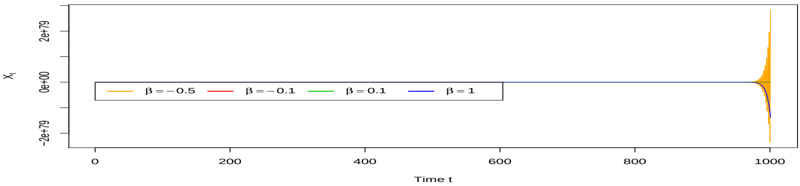
(t.j. lineární kombinaci minulosti posloupnosti $\{\varepsilon_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$)

Příklad: $AR(1)$ proces

- pro parametr $|a| \leq 1$



- pro parametr $|a| > 1$



Příklad: $AR(1)$ proces

- Rozptyl procesu lze spočítat i pomoci soustavy rovníc:

$$EX_tX_{t-1} = aEX_{t-1}^2 + E\varepsilon_t X_{t-1}$$
$$EX_t\varepsilon_t = aEX_{t-1}\varepsilon_t + E\varepsilon_t^2$$

- pak kůli nekorelovanosti ε_t a X_{t-1} máme $EX_{t-1}\varepsilon_t = 0$ a tudíž

$$\sigma^2 = E\varepsilon_t^2 = EX_t\varepsilon_t = EX_t(X_t - aX_{t-1}) = R(0) - aR(1) = R(0)[1 - ar(1)]$$

- z první rovnice pak dostaneme

$$R(1) = aR(0) \quad \Leftrightarrow \quad a = R(1)/R(0) = r(1)$$

- pro rozptyl $R(0)$ procesu $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ dostaneme

$$R(0) = \frac{\sigma^2}{1-a^2} = \frac{\sigma^2}{1-(r(1))^2};$$

Yule-Walkerovy rovnice

Za předpokladu, že ε_t je nekorelované s $X_{t-1}, X_{t-2}, X_{t-3} \dots$ (viď také předchozí věta o stacionaritě autoregresní posloupnosti), lze analogicky postup aplikovat i pro obecný autoregresný proces řádu p;

- uvažujme obecný autoregresný proces

$$X_t = a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} + \varepsilon_t \tag{9}$$

- rovnici autoregresného procesu vynásobime postupně veličinami $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p}$ a aplikujeme operátor stredné hodnoty:

$$\begin{aligned}
EX_tX_{t-1} &= a_1 EX_{t-1}^2 + \cdots + a_p EX_{t-p}X_{t-1} + E\varepsilon_t X_{t-1} \\
EX_tX_{t-2} &= a_1 EX_{t-1}X_{t-2} + \cdots + a_p EX_{t-p}X_{t-2} + E\varepsilon_t X_{t-2} \\
&\dots\dots\dots \\
EX_tX_{t-p} &= a_1 EX_{t-1}X_{t-p} + \cdots + a_p EX_{t-p}^2 + E\varepsilon_t X_{t-p}
\end{aligned}$$

Yule-Walkerovy rovnice

- soustavu rovníc lze ekvivalentně přepsát v maticovem tvaru

$$\begin{pmatrix} R(0) & \dots & R(p-1) \\ \dots & \dots & \dots \\ R(p-1) & \dots & R(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(1) \\ \vdots \\ R(p) \end{pmatrix}$$

- neboli také pomoci autokorelační funkce $r(\cdot)$ jako

$$\begin{pmatrix} r(0) & \dots & r(p-1) \\ \dots & \dots & \dots \\ r(p-1) & \dots & r(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(1) \\ \vdots \\ r(p) \end{pmatrix}$$

- pomoci této soustavy lze spočíst hodnoty autokorelační funkce v časech $1, 2, \dots, p$. Pro hodnoty $r(k)$, kde $k > p$ lze využít diferenční rovnici

$$r(k) - a_1 r(k-1) - \dots - a_p r(k-p) = 0,$$

kterú získame vynásobením rovnice (9) veličinou X_{t-k} a aplikovaním operátoru střední hodnoty;

Výpočet rozptylu pro $AR(p)$

- pro výpočet rozptylu $R(0)$ stačí vynásobit rovnici (9) veličinou ε_t a opět aplikovat operátor střední hodnoty;
- přímočaře dostaneme vyjádření

$$\begin{aligned}\sigma^2 = E\varepsilon_t^2 = EX_t\varepsilon_t &= EX_t(X_t - a_1X_{t-1} - \ldots - a_pX_{t-p}) \\ &= R(0)[1 - a_1r(1) - \ldots - a_pr(p)];\end{aligned}$$

- pro rozptyl $AR(p)$ procesu teda platí, že

$$VarX_t = R(0) = \frac{\sigma^2}{1 - a_1r(1) - \ldots - a_pr(p)};$$

Odhad neznámych parametrů

- Yule-Walkerove rovnice lze aplikovat i obráceným způsobem: použit data z procesu a odhadnout neznáme parametry $a_1, \ldots, a_p$ v $AR(p)$ procesu;
- pomoci dat (konkrétní realizace procesu $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$) lze odhadnout hodnoty autokovarianční funkce $\widehat{R}(0), \ldots, \widehat{R}(p)$;
- hodnoty odhadov autokovariančni funkce v daných bodech dosadit do Yule-Walkerových rovníc a řešit pro neznáme parametry $a_1, \ldots, a_p$;
- otázka pouze zůstava, jak správně nebo vhodně určit příslučný řád autokovariančního procesu, parametr $p \in \mathbb{N}$;
  (existují různa kritéria, tzv. "rules-of-thumb", nebo lze použít tzv. "expert judgement", nebo hlubší statistickou analýzu a formální statistické testy)

Zhrnutí předchozí přednášky/opakování

- Lineárni (stochastické) modely časových řád (MA a AR procesy);
- $MA(1)$: Posloupnost klouzavých průměrů řádu $q \in \mathbb{N}$
    - závislost mezi X_t a X_{t-k} mizne pro $k > q$;
    - obecně je $MA(q)$ proces stacionární (slabě);
    - charakterizace pomoci autokovarianční a autokorelační funkce;
- $AR(p)$: Autoregresní posloupnost řádu $p \in \mathbb{N}$:
    - nenulová autokorelace a mnohem složitější závislostní struktúra;
    - stacionarita pouze pro některé speciální případy (kořeny charakteristického polynomu vně jednotkového komplexního kruhu);
    - možnost vyjádřit stacionární AP proces v kauzální formě;
- Yule-Walkerové rovnice
    - výpočetný nástroj pro vyjádření autokovarianční a autokorelační funkce (charakterizace) procesu (časové řady);
    - inverzné využití Yule-Walkerových rovních pro odhad neznámých parametrů v $AR(p)$ procesu (za použití odhadů autokovariační/autokorelční fukce);

Konzistence odhadu parametrů

Věta: Konzistence odhadu parametrů v $AR(p)$ procesu

Nechť $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ je autoregresní posloupnost řádu $p \in \mathbb{N}$ generovaná modelem

$$X_t = a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} + \varepsilon_t,$$

kde $\{\varepsilon_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ je poslopnost nezávislých, stejně rozdělených n.v. se střední hodnotou nula a konečným rozptylem $\sigma^2 < \infty$. Nechť všechny kořeny polynomu $d(z) = 1 - a_1 z - \ldots - a_p z^p$ leží vně jednotkového kruhu v komplexní rovině. Nechť $\widehat{\boldsymbol{a}}_n$ je odhad parametrů $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_p)^\top$ pomoci Yule-Walkerových rovníc, založený na pozorovnáních $X_1, \ldots, X_n$ a odhadech $\widehat{R}(k)$ a $\widehat{r}(k)$, pro $k \geq 0$. Pak platí, že

$$\sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{a}}_n - \boldsymbol{a}) \xrightarrow{\mathcal{D}} N_p(\boldsymbol{0}, \sigma^2 \Gamma^{-1}),$$

kde $\Gamma = (R(i-j))_{ij}$.

Asymptotické rozdelení odhadů parametrů

- konvergence $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ v předchozí větě značí konvergenci v distribuci;
- ekvivalentně je možné také napsat, že platí

$$\sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^p} \left| P(\sqrt{n}(\widehat{a}_1 - a_1) \le x_1, \ldots, \sqrt{n}(\widehat{a}_p - a_p) \le x_p) - F(x_1, \ldots x_p) \right| \to 0,$$

pro $n \to \infty$, kde $F : \mathbb{R}^p \to [0,1]$ značí združenú distribuční funkci mnohorozměrného normálního rozdělení $N_p(\mathbf{0}, \sigma^2\Gamma^{-1})$;

- hustota mnohorozměrného normálního rozdělení $N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ je definováná:

$$f(x_1, \ldots, x_p) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}|\Sigma|} \exp\left\{ -\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\},$$

pro $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_p)^\top \in \mathbb{R}^p$, kde $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_p)^\top \in \mathbb{R}^p$ je vektor středních hodnot a Σ pozitívně definitná, symetrická varianční matice;

Odhad autokovarianční/autokorelační funkce

- máme k dispozici konkrérní realizaci časové řady $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ až do nějakého času $n \in \mathbb{N}$;
- to znamená, že máme k dispozici pozorované hodnoty (realizace) náhodných veličín $X_n, X_{n-1}, \ldots;$
- dále také předpokládame, že proces $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ je generovaný rovnicí

$$X_t = a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} + \varepsilon_t;$$

- parametre $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}$ jsou neznáme;
- **Jak pomoci empirických dat odhadnout parametry $a_1, \ldots, a_p$?**

Odhad autokovarianční/autokorelační funkce

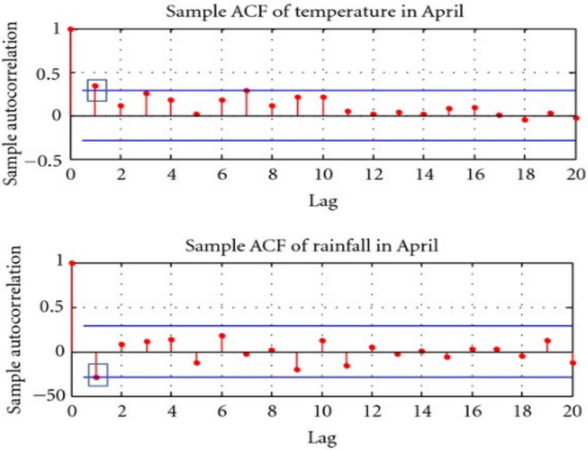
- v praktických prípadoch je k dispozici pouze konečná história (realizace) časové řady $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$, t.j., pozorování $X_1, \ldots, X_n$;
- odhad autokovarianční funkce $R(k)$ pro libovolné $k \in \{0, n-1\}$ získame pomoci vztahu

$$\widehat{R}(k) = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k} \left(X_{i+k} - \frac{1}{n-k} \sum_{j=1}^{n-k} X_{j+k} \right) \left(X_i - \frac{1}{n-k} \sum_{j=1}^{n-k} X_j \right)$$

- odhad príslušné autokorelační funkce $r(k)$ pro libovolné $k \in \{0, n-1\}$ pak získame jako

$$\widehat{r}(k) = \frac{\widehat{R}(k)}{\widehat{R}(0)}.$$

Příklad: autokovarianční/autokorelační funkce



Neúplnost odhadů $\widehat{R}(k)$ a $\widehat{r}(k)$

- odhad autokovarianční funkce $R(k)$ nějaké posloupnosti se nazýva výběrová autokovarianční funkce – používame značení $\widehat{R}(k)$;
- odhad autokorelační funkce $r(k)$ nějaké posloupnosti se nazýva výběrová autokorelační funkce – používame značení $\widehat{r}(k)$;
- pro necentrovanou posloupnost $\{X_t;\ t \in \{1, \ldots, n\}\}$ odhadujeme střední hodnotu $\mu \in \mathbb{R}$ pomoci výběrové střední hodnoty definované

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i;$$

- výberová autokovariační/autokorelační funkce spočetená na základě realizace $X_1, \ldots, X_n$ poskytuje pouze omezenou informaci o celkové kovarianční/korelační struktúře posloupnosti;
- na základě realizace $X_1, \ldots, X_n$ totíž není možné spočítat hodnoty pro $\widehat{R}(k)$ a $\widehat{r}(k)$, kde $k \geq n$;

Modely $ARMA(p, q)$

- posloupnosti klouzavých průměrů a autoregresních posloupností lze vzájemně kombinovat do tzv. *ARMA* modelů;

Definice: $ARMA(p, q)$ proces

Nechť posloupnost $\{\varepsilon_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ je bílý šum s konečným rozptylem $\sigma^2 < \infty$. Pak náhodnou posloupnost

$$d_0 X_t + d_1 X_{t-1} + \cdots + d_p X_{t-p} = a_0 \varepsilon_t + \cdots + a_p \varepsilon_{t-q}, \qquad (10)$$

pro $t \in \mathbb{Z}$ a nějaké koeficienty $d_0, \ldots, d_p, a_0, \ldots, a_q \in \mathbb{R}$, takové, že $d_0, d_q, a_0, a_1 \neq 0$, nazýváme $ARMA(p, q)$ model.

- podobně jako v předchozích případech nás zajíma, za akých předpokladů bude $ARMA(p, q)$ posloupnost splňovat definici stacionarity (slabě);
- ekvivaletní zápis $ARMA(p, q)$ modelu lze vyjádřit pomoci vztahu

$$X_t = \tilde{d}_1 X_{t-1} + \cdots + \tilde{d}_p X_{t-p} + \tilde{a}_0 \varepsilon_t + \cdots + \tilde{a}_q \varepsilon_{t-q};$$

Stacionarita $ARMA(p, q)$ procesů

- předpokládejme, že v rovnicí (10) je $d_0 = a_0 = 1$ a definujeme polynomy

$$d(z) = 1 + d_1 z + \cdots + d_p z^p, \qquad n(z) = 1 + a_1 z + \cdots + a_q z^q; \qquad (11)$$

Věta: Stacionarita $ARMA(p, q)$ modelů

Nechť všechny kořeny polynomu $d(z)$ leží vně jednotkového kruhu v komplexní rovině a navíc, nechť jsou polynomy $d(z)$ a $n(z)$ nesoudělné, t.j. nemají společné kořeny. Pak je posloupnost definovaná rovnici (10) slabě stacionární, s nulovou střední hodnotou, a navíc, lze proces $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ vyjádřit v kauzálním tvaru, t.j.

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varepsilon_{t-k},$$

kde c_k jsou určený vztahem $c(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \frac{n(z)}{d(z)}$, pro $|z| \geq 1$.

Autokovariance/autokorelace *ARMA* procesů

- pokud by polynomy $d(z)$ a $n(z)$ měly společné kořeny, potom by polynom $c(z) = n(z)/d(z)$ určoval $ARMA(m, n)$ proces, pro $m < p$ a $n < q$;
- autokovarianční funkce stejně tak jako autokorelační funkce obecného $ARMA(p, q)$ procesu se spočte analogicky, jako v případe $AR(p)$ procesů, pomoci Yule-Walkerových rovníc.

Samostatný úkol

Uvažujte obecný $ARMA(1, 1)$ proces, definovaný předpisem

$$X_t + aX_{t-1} = \varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1},$$

pro $t \in \mathbb{Z}$, kde $\{\varepsilon_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ je bílý šum.

- definujte podmínky pro které je posloupnost $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ slabě stacionární;
- nájděte autokovarianční a autokorelační funkci posloupnosti $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$;
- pokud existuje, nájděte kauzální vyjádření procesu $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$;

Lineární filtrace

Definice: Lineární filtrace

Nechť $\{\varepsilon;\ t \in \mathbb{Z}\}$ je slabě stacionární posloupnost a $\{\xi_k;\ k \in \mathbb{Z}\}$ je posloupnost koeficientů takových, že $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\xi_k| < \infty$. Pak řekneme, že posloupnost

$$X_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k \varepsilon_{t-k}$$

vznikla lineární filtraci z posloupnosti $\{\varepsilon;\ t \in \mathbb{Z}\}$.
Posloupnost koeficientů $\{\xi_k;\ k \in \mathbb{Z}\}$ se nazýva lineární filtr.

Definice: Kauzální filtr

Nechť $\{\xi_k;\ k \in \mathbb{Z}\}$ je lineární filtr. Pokud platí, že $\xi_k = 0$ pro $k < 0$, pak je filtr kauzální, t.j. fyzikálně uskutečnitelný.

Lineární modely, procesy, systémy...

Definice: Lineární proces

Náhodnou posloupnost $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ nazýváme lineárním procesem, pokud existuje posloupnost nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličín ε_t, pro $t \in \mathbb{Z}$, s nulovou střední hodnotou a konečným rozptylem a lineární filtr $\{\xi_k;\ k \in \mathbb{Z}\}$ takový, že

$$X_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k \varepsilon_{t-k}.$$

Lineární proces je navíc kauzální, pokud je příslušný filtr kauzální.

- $ARMA(p,q)$ model je ekvivalentní s obecnou rovnici lineárního systému (viď Kapitola 3). Rovnice $ARMA$ modelu ale určuje vztah nikoli mezi nenáhodnými (deterministickými) posloupnostmi vstupů a výstupu, ale mezi náhodnými posloupnostmi bílého šumu a $ARMA$ procesem $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$.

Invertibilita *ARMA* posloupnosti

Definice: Invertibilita *ARMA* posloupnosti

Stacionární $ARMA(p,q)$ posloupnost $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ vzniklá z bílého šumu $\{\varepsilon_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$, se nazýva invertibilní, jestliže existuje posloupnost konstant $\{\psi_k;\ k \in \mathbb{Z}\}$ taková, že $\sum_{k=0}^{\infty} |\psi_k| < \infty$ a platí, že

$$\varepsilon_t = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k X_{t-k}.$$

- z pohledu posloupnosti $\{\varepsilon_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ by se dalo říct, že se jedná o kauzální posloupnost vzhledem k posloupnosti $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$;

Příklad: Striktná versus slabá stacionarita

Samostatný úkol

Nechť je posloupnost $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ definovaná předpisem

$$X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t,$$

pro $|\rho| < 1$ a posloupnost $\{\varepsilon_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ je daná předpisem

$$\varepsilon_t = \begin{cases} Z_t & t = 2k, k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(Z_t^2 - 1) & t = 2k+1, k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

kde $\{Z_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ je posloupnost nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličín s normovaným normálním rozdělením $N(0,1)$.

- Rozhodněte, zda je posloupnost $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ striktně stacionární.
- Rozhodněte, zda je posloupnost $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ slabě stacionární.
- Spočtěte autokovarianční funkci posloupnosti $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$.

Invertibilita *ARMA* posloupnosti

Věta: Invertibilita *ARMA* procesů

Nechť $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ je stacionární $ARMA(p,q)$ posloupnost, definovaná rovnici (10), pro $d_0 = a_1 = 1$. Nechť polynomy $d(z)$ a $n(z)$ definovane vztahy (11) nemají společné kořeny a navíc, nechť kořeny polynomu $n(z)$ leží vně jednotkového komplexního kruhu. Pak je posloupnost $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ invertibilní a lze psát

$$\varepsilon_t = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k X_{t-k},$$

pro $k \in \mathbb{Z}$, kde koeficienty ψ_k jsou určený vztahem

$$\Psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k z^k = \frac{d(z)}{n(z)},$$

pro $|z| \leq 1$.

Lineární predikce v časových řadách

- pomerně častý praktický problém v časových řadách: predikce;
- predikce/předpověď budoucích hodnot na základě pozorované realizace;
- z teoretického hlediska se jedná o pomerně náročnou úlohu, která vede na podmíněné střední hodnoty...
- **Jak to ale funguje v praktických problémoch?**

Lineární predikce v časových řadách

- pomerně častý praktický problém v časových řadách: predikce;
- predikce/předpověď budoucích hodnot na základě pozorované realizace;
- z teoretického hlediska se jedná o pomerně náročnou úlohu, která vede na podmíněné střední hodnoty...
- **Jak to ale funguje v praktických problémoch?**

- Jednoduchý příklad: predikce pozorování X_{t+1} na základě realizace X_t (predpověď o jeden krok dopředu na základě jediného pozorování);
- požadovaná predikce pro X_{t+1} je lineární: $\widehat{X}_{t+1} = a + bX_t$;
- navíc předpokládame, že $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ je slabě stacionární;
- kvalita predikce pomoci střední kvadratické chyby mezi X_{t+1} a $\widehat{X}_{t+1}$;

Predikce X_{t+1} formálně

- z formálneho matematického hlediska řešíme minimalizační problém

$$\min_{a,b\in\mathbb{R}} E\left[X_{t+1} - (a + bX_t)\right]^2 = \min_{a,b\in\mathbb{R}} E\left[X_{t+1} - \mu - \tilde{a} - b(X_t - \mu)\right]^2,$$

  kde $\tilde{a} = a + \mu(b-1)$;
- derivováním podle $\tilde{a}$ a b (a formálna záměna integrálu a derivace):

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{a}} : -2E\left[X_{t+1} - \mu - \tilde{a} - b(X_t - \mu)\right] = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial b} : -2E\left[X_{t+1} - \mu - \tilde{a} - b(X_t - \mu)\right](X_t - \mu) = 0$$

- z první rovnice dostaneme okamžitě, že $\tilde{a} = 0$;
- z druhé rovnice pak dostaneme, že

$$b = \frac{R(1)}{R(0)} = r(1);$$

- Predikce: $\widehat{X}_{t+1} = a + bX_t = \mu + b(X_t - \mu) = \mu + r(1)(X_t - \mu)$;

Predikce X_{t+1} formálně

- kvalita predikce sa posuzuje pomoci střední kvadratické chyby/odchýlky jako

$$MSE = E(X_{t+1} - \widehat{X}_{t+1})^2 = E\left[X_{t+1} - \mu - r(1)(X_t - \mu)\right]^2$$
$$= R(0)\left[1 + r(1)^2 - 2r(1)^2\right] = R(0)(1 - r(1)^2);$$

- čím silnější je lineární závislost mezi X_t a X_{t+1}, tím menší je chyba predikce (t.j., přesnější předpověď);
- obecně lze postup zobecnit na úlohu najít predikci pro X_{t+1}, na základě pozorovnání $X_t, X_{t-1}, \ldots X_{t-p}$;
- následně je samozřejme možné použít predikci $\widehat{X}_{t+1}$ a spočíst další predikci pro nasledujíci krok X_{t+2};

Příklad: predikce na základě X_t a X_{t-1}

Samostatný úkol

Předpokládejme, že posloupnost $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ je slabě stacionární.

- spočtěte obecný vztah pro predikci pozorování X_{t+1} na základě hodnot X_t a X_{t-1};
- jako kritérium kvality predikce použijte střední kvadratickú chybu/odchýlku;

Samostatný úkol

- Uvažujte model $ARMA(2,1)$ daný předpisem

$$X_t - 0.5X_{t-1} + 0.04X_{t-2} = \varepsilon_t + 0.25\varepsilon_{t-1},$$

pro $\{\varepsilon_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ bílý šum. Nájděte autokovarianční a autokorelační funkci procesu a jeho kauzální vyjádření.

Kauzalita a invertibilita *ARMA* procesů

Samostatný úkol

Nechť $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ je $ARMA(2,1)$ posloupnost definovaná rovnici

$$X_t - (a+b)X_{t-1} + abX_{t-2} = \varepsilon_t - a\varepsilon_{t-1},$$

kde $\{\varepsilon_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ je bílý šum. Diskutujte podmínky kauzality a invertibility vzhledem k neznámym parametrům $a, b \in \mathbb{R}$.

Spočtěte autokovarianční a autokorelační funkci posloupnosti $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$.

Zhrnutí předchozí přednášky/opakování

- Lineárni (stochastické) modely časových řád: *MA*, *AR* a *ARMA* procesy; *(náhodné procesy vytvorené z bílého šumu, indexováný nejvýše spočetnou množinou indexů T - napr. množinou celých čísel $\mathbb{Z}$)*
- Základná charakterizace procesů
  - střední hodnota procesu $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$;
  - rozptyl procesu$\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$;
  - autokovarianční a autokorelační funkce $R(k)$ a $r(k)$;
- Další vlastnosti modelů časových řád
  - silná (striktní) a slabá stacionarita;
  - kauzálnost a invertibilita procesu;
  - lineárni filtrace;
- Využití v praktických (reálných úlohach)
  - modelování procesů a odhadování koeficientu pomoci Yule-Walkerových rovníc (konzistentní odhady);
  - lineární predikce v časových řadách (předpověď nasledujících pozorování na základě tých předchozích);

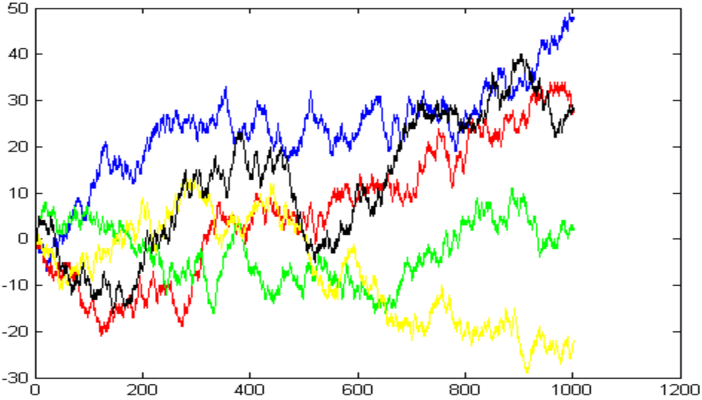
Kapitola 6

Poissonův proces

Náhodné procesy se spojitým časem

- **Stochastický (náhodný) proces**
  $\hookrightarrow$ posloupnost (systém) reálných náhodných veličín $\{X_t;\ t \in T\}$ definovaných na stejném pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$;
- **Proces so spojitým časem**
  $\hookrightarrow$ v případě, že $T \subset \mathbb{R}$, pak říkame, že se jedná o proces se spojitým časem, t.j., hodnota procesu $\{X_t;\ t \in T\}$ je definována v každém časovém okamžiku;
- **Trajektórie procesu**
  $\hookrightarrow$ pro konkrétne $\omega \in \Omega$ (elementární jev) je $X_t(\omega) \equiv X(\omega)(t)$ funkce definována na $T \subset \mathbb{R}$ (t.j., trajektórie procesu – jedna konkrétní realizace);

Trajektórie procesu



Čítací proces

Definice: Čítací proces

Řekneme, že náhodný proces $\{N_t;\ t \geq 0\}$ (teda proces se spojitím časem) je čítací proces, pokud existuje neklesající posloupnost nezávislých náhodných veličín $\{\xi_n\}$, pro $n \in \mathbb{N}$ (časy výskytu jednotlivých událostí) takových, že platí

$$N_t \equiv N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_{\{\xi_n \leq t\}}.$$

- Hodnotu $N(t)$ interpretujeme jako počet událostí, které nastaly do času t.
- Ekvivalentně lze proces $\{N_t;\ t \geq 0\}$ definovat jako proces, který ma zprava spojité a neklesající trajektorie, nabýva pouze celočíselných hodnot, a začina z nezáporne hodnoty, t.j. $N(0) \geq 0$;

Proces s nezávislými přírůstky

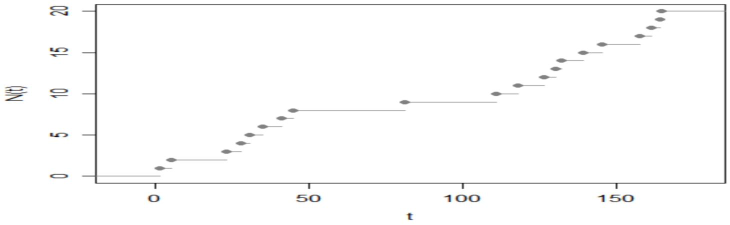
Definice: Nezávislé přírůstky

Řekneme, že proces $\{N(t); t \geq 0\}$ má nezávislé přírůstky, pokud pro každé $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$, $n \in \mathbb{N}$ a $t_i \in T$ pro $i = 1, \ldots, n$ platí, že $N(t_n) - N(t_{n-1}), \ldots, N(t_1) - N(t_0)$ jsou nezávislé náhodné veličiny.

Proces s nezávislými přírůstky

Definice: Nezávislé přírůstky

Řekneme, že proces $\{N(t); t \geq 0\}$ má nezávislé přírůstky, pokud pro každé $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$, $n \in \mathbb{N}$ a $t_i \in T$ pro $i = 1, \ldots, n$ platí, že $N(t_n) - N(t_{n-1}), \ldots, N(t_1) - N(t_0)$ jsou nezávislé náhodné veličiny.



Poissonův proces

Definice: Poissonův proces

Náhodný proces $\{N(t);\ t \geq 0\}$ se nazýva homogénní Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$, pokud platí:

- $N(0) = 0$;
- proces má nezávislé přírůstky;
- přírůstky $N(t+h) - N(t)$ mají Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda \cdot h$;

- nezávislé přírůstky Poissonovho procesu mají Poissonovo rozdělení s parametrem, který je přímo úměrný délce časového intervalu;
- parameter intenzity, $\lambda > 0$ je střední počet události za jednotku času;
- souvislost Poissonovho rozdělení s limitním binomickým rozdělením;

Poissonův proces

- **Poissonův proces je často interpretován jako nahodný bodový proces na reální přímce (půlpřímce);**
- **Na reální přímce je Poissonův proces speciálním případem Markovského procesu se spojitým časem (Markovská vlastnost);**
- **Hodně často používaný náhodný proces s využitím pro modelování náhodných (a na sobě nezávislých) událostí v čase;**
  - pojišťovníctví, systémy obsluhy, atď.;
  - chování zákazník, modelování chyb a poruch, atď.;
- **Existuje mnoho různych a užitečných zobecnění Poissonova procesu;**
  - Poissonův proces s variabilní intenzitou $\lambda(t)$;
  - prostorový Poissonův proces (mnohorozměrná zobecnění);
  - procesy obnovy a zrodu a zániku (tzv. renewal a birth-death procesy);
  - mnohe další...

Příklad: Poissonův proces

Príklad

Telefonní ústředna a počet hovoru
Jednotlivé přichozí volání jsou na sobě nezávislé. Potenciálne je ale velký počet lidí, kteří mohou zavolat, ale u každého jednotlivce se jedná pouze o hodně malou pravděpodobnost, že skutečne zavolá na ústřednu. Z historický dat např. víme, že na telefonní ústřednu příjde v průměru 5 hovorů za minútu.

- Jaká je pravděpodobnost, že za půl minúty nepříde žádne volání?
- Jaká je pravděpodobnost, že během pět sekud příjde alespoň 2 volání?

- pro Poissonův proces obecně platí, že $N(0) = 0$, proto také platí, že

$$N(t) = N(t) - N(0) \sim Po(\lambda t)$$

a proto také platí, že

$$P[N(t) = k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad \text{pro } k = 0, 1, \ldots .$$

Doby mezi událostmi v Poissonově procesu

Věta: Doby mezi událostmi v Poissonově procesu

Nechť $\{N(t);\ t \geq 0\}$ je Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$ a nechť $\{\xi_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ je posloupnost náhodných veličín definovaná předpisem

$$\xi_n = \inf\{t > 0;\ N(t) = n\}, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Pak náhodné veličiny $T_n = \xi_n - \xi_{n-1}$, pro $n = 1, 2, \ldots$, pro $\xi_0 = 0$, jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s parametrem $\lambda > 0$ a nazývají se doby mezi událostmi v Poissonově procesu $\{N(t);\ t \geq 0\}$.

Exponenciální a Erlangovo rozdělení

- náhodná veličina ξ_n pro $n \in \mathbb{N}$ se nazývá doba do n-té události;
- náhodná veličina ξ_n pro $n \in \mathbb{N}$ má Erlangovo rozdělení s hustotou

$$f_n(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, \quad \text{pro } x \geq 0.$$

- Erlangovo rozdělení s parametrami $\lambda > 0$ a $n \in \mathbb{N}$ je rozdělení součtu n nezávislých náhodných veličín s exponenciálním rozdělením s parametrem $\lambda > 0$ a jedná se o speciální případ Gamma rozdělení;
- exponenciální rozdělení s parametrem $\lambda > 0$ je rozdělení bez paměti, t.j., pro $X \sim Exp(\lambda)$ platí, že

$$P[X > s + h | X > s] = P[X > h].$$

Poissonův proces a exponenciální rozdělení

Věta: Náhodné veličíny s exponenciálním rozdělením a Poissonův pro

Nechť $T_1, T_2, \ldots,$ je posloupnost nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličín s exponenciálním rozdělením s parametrem $\lambda > 0$. Nechť $\xi_n = \sum_{k=1}^{n} T_k$. Pak

$$N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{I}_{\{\xi_k \leq t\}}$$

definuje Poissonův proces s intenzitiou $\lambda > 0$.

- pokud záme počet událostí do nějakého času $T > 0$, pak je výskyt události v intervalu $[0, T]$ tzv. “binomický“, t.j., časy událostí jsou nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na intervalu $[0, T]$;

Příklad: Binomická vlastnost

Príklad

Nechť $\{N(t);\ t \geq 0\}$ je Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$ a nechť $N(T) = n$ a $s \in (0, T)$. Pak jednoduchým výpočtom dostaneme

$$
\begin{aligned}
P[N(s) = k | N(T) = n] &= \frac{P[N(s) = k, N(T) = n]}{P[N(T) = n]} \\
&= \frac{P[N(s) = k, N(T) - N(s) = n - k]}{P[N(T) = n]} \\
&= \frac{P[N(s) = k] \cdot P[N(T) - N(s) = n - k]}{P[N(T) = n]} \\
&= \binom{n}{k} \left(\frac{s}{T}\right)^k \left(1 - \frac{s}{T}\right)^{n-k}
\end{aligned}
$$

- Žádna část intervalu $[0, T]$ není preferována a každý podinterval ma rovnaku šanci (úměrnou své délce), že do něj padne událost. Body jsou do intervalu $[0, T]$ umistňovány nezávisle na sobě.

Poissonův proces s konstantní intenzitou

- Pro obecný Poissonův proces $\{N(t);\ t \geq 0\}$ s konstantní intenzitou $\lambda > 0$ také platí nasledujíci:
  - $P[N(t+h) = n+1 | N(t) = n] = \lambda h + o(h)$
  - $P[N(t+h) = n | N(t) = n] = 1 - \lambda h + o(h)$
  - $P[N(t+h) > n+1 | N(t) = n] = o(h)$

  pro funkci $o(h)$ takovou, že

$$\lim_{h \to 0_+} \frac{o(h)}{h} \to 0.$$

Samostatný úkol

Ověřte, že uveděné vlastnosti skutečne platí pro obecný Poissonův proces s konstantní intenzitou $\lambda > 0$.

Příklad: škody v neživotnem pojištění

Príklad

Předpokládáme, že okamžiky pojistných událostí v čase tvoří Poissonův proces $\{N(t);\ t \geq 0\}$ s konstantní intenzitou $\lambda > 0$ a výše škod Y_k pro $k \in \mathbb{N}$ jsou nezávislé, stejně rozdělené náhodné veličiny se střední hodnotou $EY_k = \mu$.

- $S(t) = \sum_{k=0}^{N(t)} Y_k$, pro $t \geq 0$ a $Y_0 = 0$ je tzv. složený Poissonův proces;
- veličina $S(t)$ udáva celkovou výši škod do času $t \geq 0$ a platí

$$ES(t) = E\Big[E[S(t)|N(t)]\Big] = E\left[E\left[\sum_{k=0}^{N(t)} Y_k|N(t)\right]\right]$$

$$= E\Big[N(t) \cdot EY_k\Big] = EY_k \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} n\frac{(\lambda t)^n}{n!}\right) = \lambda t\mu;$$

K úhradě škodních nákladů by pojišťovna měla dostávat od pojištěných klientů pojistné ve výši $\lambda\mu$ za jednotku času.

Příklad: Systém obslužní linky

Príklad

Uvažujme obslužní linku, která poskytuje určitou službu (např., poladna v obchodě, telefonní linka, ...). Chceme modelovat chování takového systému.

- předpokládame, že příchody zákazníků do systému tvoří Poissonův proces s konstantní intenzitou $\lambda > 0$;
- když je linka obsazená, tvoří se fronta;
- doby obsluhy jednotlivých zákazníků jsou navzájem nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s parametrem $\mu > 0$;
- veličina $X(t)$ značí počet zákazníků v systému (ve frontě a při obsluhe);
- označme $p_k(t) = P[X(t) = k]$, pro $k = 0, 1, \dots;$
- předpokládame, že také platí nasledujíci:

$$
\begin{aligned}
P(X(t+h) = k+1 | X(t) = k) &= \lambda h + o(h) \\
P(X(t+h) = k | X(t) = k) &= 1 - \lambda h + o(h) \\
P(X(t+k) > k+1 | X(t) = k) &= o(h)
\end{aligned}
$$

Příklad: Systém obslužní linky

Príklad

- pro doby obsluhy pak platí: $T \sim Exp(\mu)$ a proto také platí:

$$\begin{aligned} P(\text{obsluha skončí v čase } (t, t+h] | \text{zákazník je obsluhován v čase } t) &= \mu h + o(h) \\ P(\text{obsluha neskončí v čase } (t, t+h] | \text{zákazník je obsluhován v čase } t) &= 1 - \mu h + o(h) \\ P(\text{více zákazníku obslouženo v } (t, t+h] | \text{zákazník je obsluhován v čase } t) &= o(h) \\ P(\text{přijde a odejde stejný počet v } (t, t+h] | \text{zákazník je obsluhován v čase } t) &= o(h) \end{aligned}$$

Samostatný úkol

Použijte vlastnosti exponenciálního rozdělení s parametrem $\mu > 0$, aplikujte Tayloův rozvoj a odvoďte vztahy uvedené v příkladu nahoře.

Zhrnutí předchozí přednášky/opakování

- Definice Poissonova procesu;
  - stochastický proces se spojitým časem a dikrétnymi stavy;
  - čítací proces (počet události) s počátkem v bodě nula;
  - nezávislé přírůstky s Poissonovým rozdelením;
    (pouze homogénní Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$)
- Doby mezi událostmi v Poissonovém procesu
  - nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením;
  - souvislost mezi Poissonovým a exponenciálním rozdělením;
  - exponenciální rozdělení, Erlangovo rozdělení, Gamma rozdělení;
- Široké využití v praxi
  - modelování různých systému obsluhy;
    (intenzita příchodu zákazníkov a intenzita obsluhy zákazníkov)
  - pojistné modely, modelování škodových událostí;
    (modelování výskytu pojistných události, vyplácení pojistného plnění)
  - využití v komplexných pravděpodobnostných modelech; *(napr. prostorové Poissonové modely, složené modely, atď.)*

Příklad: Systém obslužní linky

Príklad

- obecně můžeme psát, že v systému obslužní linky (model pro příchod a obsluhu zákazníku) nastane v intervalu $(t, t+h)$ jedna změna (t.j. přijede jeden zákazník nebo odejde jeden zákazník) s pravděpodobnosti
$$\mu h + \lambda h + o(h);$$
- pravděpodobnost, že v takomto systému nenastane v časovém intervalu $(t, t+h)$ zádna změna (nový zákazník nepříde a zádny nebude obslužen) je
$$1 - \mu h + \lambda h + o(h);$$
- pravděpodobnost, že v systému dojde v časovém intervalu $(t, t+h)$ k nějaké jiné změně (např. přijede více zákazníku, nebo více zákazníku bude obslouženo, nebo zaroveň alespoň jeden přijede a alespoň jeden bude obslužen) je zanedbatelná, t.j. řádu $o(h)$;

Příklad: Systém obslužní linky

Príklad

- zajíma nás limitní chování pravděpodobnosti

$$p_k(t) = P[X(t) = k],$$

pro $t \to \infty$;

- Jaké je limitní rozdělení zákazníků v systému?
(hromadí se zákazníci ve frontě, nebo je systém prázdny?)

- Příklad lze řešit pomoci soustavy diferenciálních rovníc...
- ... budeme uvažovat samostatně případ pro $k = 0$ a $k = 1, 2, \ldots$;

Řešení pomoci diferenciálních rovníc

- pro $k = 0$ dostaneme:

$$p_0(t+h) = p_0(t)(1 - \lambda h + o(h)) + p_1(t)(\mu h + o(h)) + \sum_{j=2}^{\infty} p_j(t) o(h)$$

Řešení pomoci diferenciálních rovníc

- pro $k = 0$ dostaneme:

$$p_0(t+h) = p_0(t)(1 - \lambda h + o(h)) + p_1(t)(\mu h + o(h)) + \sum_{j=2}^{\infty} p_j(t) o(h)$$

- pro $k = 1, 2, \dots$ dostaneme:

$$\begin{aligned} p_k(t+h) = &\sum_{j=0}^{k-2} p_j(t) o(h) + p_{k-1}(t)(\lambda h + o(h)) \\ &+ p_k(t)(1 - \lambda h - \mu h + o(h)) \\ &+ p_{k+1}(t)(\mu h + o(h)) + \sum_{j=k+2}^{\infty} p_j(t) o(h) \end{aligned}$$

Řešení pomoci diferenciálních rovníc

- algebraickou úpravou a limitním přechodem pro $h \to 0_+$ dostaneme diferenciální rovnici pro $k = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial t} p_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t)$$

Řešení pomoci diferenciálních rovníc

- algebraickou úpravou a limitním přechodem pro $h \to 0_+$ dostaneme diferenciální rovnici pro $k = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial t} p_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t)$$

- algebraickou úpravou a limitním přechodem pro $h \to 0_+$ dostaneme diferenciální rovnice pro $k = 1, 2, \ldots$:

$$\frac{\partial}{\partial t} p_k(t) = \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda + \mu) p_k(t) + \mu p_{k+1}(t)$$

Řešení pomoci diferenciálních rovníc

- Pokud existuje limita $lim_{t\to\infty} p_k(t)$, pak musí platit

$$0 = -\lambda p_0(\infty) + \mu p_1(\infty)$$
$$0 = \lambda p_{k-1}(\infty) - (\lambda + \mu) p_k(t) + \mu p_{k+1}(\infty)$$

- Soustava rovníc, jejíž řešením je

$$p_k(\infty) = \rho^k p_0(\infty),$$

kde $\rho = \lambda/\mu$;

- Zároveň musí platit, že

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(\infty) = 1,$$

jelikož se jedná o pravděpodobnostní rozdělení na množine $\{0, 1, 2, \ldots,\}$; (limitné rozdělení teda existuje pro $\rho < 1$ a ide o geometrické rozdělení s parametrem $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$)

Sjednocení nezávislých Poissonových procesů

- Generická vlastnost Poissonového rozdelení:

$$N_1 \sim Poiss(\lambda_1) \wedge N_2 \sim Poiss(\lambda_2) \quad \Longrightarrow N_1 + N_2 \sim Poiss(\lambda_1 + \lambda_2)$$

- Analogický aj pro Poissonov proces

Pro $\{N_1(t);\ t \geq 0\}$ a $\{N_1(t);\ t \geq 0\}$ dva nezávislé homogénní Poissonové procesy s intenzitou $\lambda_1 > 0$ a $\lambda_2 > 0$, pak aj

$$\{N_1(t) + N_2(t);\ t \geq 0\}$$

je homogénní Poissonov proces s príslušnou intenzitou $\lambda_1 + \lambda_2$;

Samostatný úkol

Ukážte, že Poissonov proces $\{N_1(t) + N_2(t);\ t \geq 0\}$ definovaný jako součet dvou vzájemně nezávislých homogénních Poissonových procesů s intenzitami $\lambda_1 > 0$ a $\lambda_2 > 0$ splňuje vlastnosti Poissonového procesu.

Zobecnění pro více procesů

- Zjednocení dvou nezávislých Poissonových procesů lze zobecnit na více než dva procesy;

- Obecně, pro $m \in \mathbb{N}$ nezávislých homogénních Poissonových procesů $\{N_1(t);\ t \geq 0\}, \ldots, \{N_m(t);\ t \geq 0\}$ s intenzitami $\lambda_j > 0$ pro $j = 1, \ldots, m$ platí, že
$$N(t) = N_1(t) + \cdots + N_m(t)$$
je opět Poissonov proces s příslušnou intenzitou
$$\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_m.$$

Samostatný úkol

Ukážte, že Poissonov proces $\{N_1(t) + \cdots + N_m(t);\ t \geq 0\}$ definovaný jako součet m vzájemně nezávislých homogénních Poissonových procesů s intenzitami $\lambda_j > 0$ pro $j = 1, \ldots, m$, splňuje vlastnosti Poissonového procesu.

Nezávislost a podmíněná závislost

- Nechť $\{N(t);\ t \geq 0\}$ je Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$;
- Události v procesu náhodne označíme dvěma různymi nálepkami...
- S pravděpodobnosti $p \in (0,1)$ označíme událost nálepkou A;
  (výskyt události typu A tvoří čítací proces $\{N_1(t); t \geq 0\}$)
- S pravděpodobnosti $(1-p)$ označíme událost nálepkou B;
  (výskyt události typu B tvoří čítací proces $\{N_2(t); t \geq 0\}$)

Věta: Nezávislých rozděleného Poissonového procesů

Čítací procesy $\{N_1(t); t \geq 0\}$ a $\{N_2(t);\ t \geq 0\}$ jsou vzájemně nezávislé homogénní Poissonové procesy s příslušnými intenzitami $\lambda_1 = \lambda p$ a $\lambda_2 = \lambda(1-p)$.

Nezávislost a podmíněná závislost

- Poissonové procesy $\{N_1(t); t \geq 0\}$ a $\{N_2(t); t \geq 0\}$ jsou dle předchozí věty sdruženě nezávislé;
- Podmíněně, při daném stavu procesu $\{N(t); t \geq 0\}$, jsou ale procesy $\{N_1(t); t \geq 0\}$ a $\{N_2(t); t \geq 0\}$ vzájemně závislé;

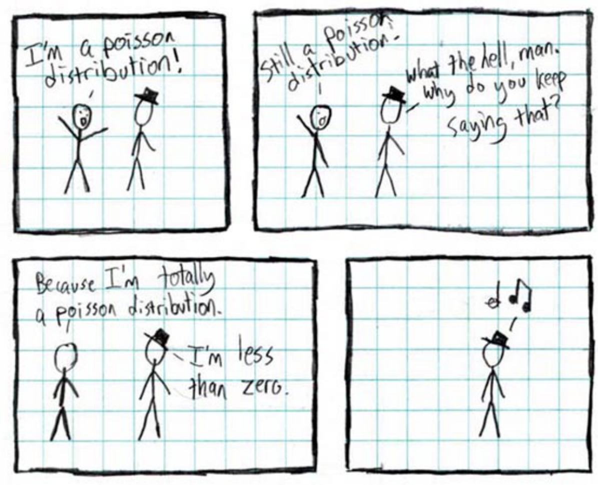
Samostatný úkol

Ukážte, proč jsou procesy $\{N_1(t); t \geq 0\}$ a $\{N_2(t); t \geq 0\}$ při danem $N \in \mathbb{N}$ podmíněně závislé. Dokonca jeden proces zcela určuje ten druhý.

Různá zobecnění Poissonového procesu

- zobecnění Poissonového procesu v neeuklidovských prostorech;
  (fundamentalní nástroj v pravděpodobnosti, teórii míri a topológii)
- dvojitě stochastický Poissonův proces (Coxův proces);
  (Poissonův proces s náhodnou intenzitiou Λ)
- složený Poissonův proces (tzv. marked process);
  (událost v čase ma vlastní náhodnou hodnotu)
- tzv. compound Poissonův proces;
  (Poissonův process jako součet několika složených Poissonových procesů)
- mnohé další zobecnění a speciální případy;
  (užitečný nástroj pro pravděpodobnostní teórii i statistické modelování)

Poisonous Poisson



To conclude...

Záverečné zkoušky

Zkouškové termíny

Závěrečná zkouška pozostáva z dvou časti;

- První část zkoušky
  $\hookrightarrow$ samostatna písomná práca, teoretické a praktické úlohy v rozsahu odprednášanej látky;

- Druhá část zkoušky
  $\hookrightarrow$ ústní zkouška pouze v případě vypracování písemné části na úrovni alespoň 60 %;

Zkouškové termíny

- **1. Termín:** Uterí | 29.05.2018
  (Posluchárna K7 | 9:00)
- **2. Termín:** Uterí | 05.06.2018
  (Posluchárna K7 | 9:00)
- **3. Termín:** Uterí | 26.06.2018
  (Posluchárna K7 | 9:00)
- **4. Termín:** September 2018
  (dodatečne bude upřesněno)

Na konkrétný zkouškový termín je nutný zápis prostredníctvom elektronického systému SIS! Zápočet je podmínkou k přihlásení se na zkoušku!