

NMFM 310 | Základy matematického modelování

MFF UK | Letný semester 2018/2019 | Prednáška



Matúš Maciak | @K151

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~maciak>

Prednáška: Po: 15:40–17:10 @K11

Cvičenie: St: 14:00-15:30 @K8

Úvod a priebeh semestra

- ❑ 12 prednášok (+1) | 12 cvičení (+1) | 6 tématických okruhov;
- ❑ **Korekvizita:** NMFM301 - Statistika pro finanční matematiky;
(*NMFM301 musí být alespoň zapsán současně s předmětem NMFM310*)

❑ Deterministické modely

- ❑ Vyrovnávání dat, klouzavé průměry;
- ❑ Diferenciální rovnice a modely růstu;
- ❑ Lineární regulace a lineární soustavy;

❑ Stochastické modely

- ❑ Markovovy řetězce s diskrétním časem a stavovým prostorem;
- ❑ Časové řady, ARMA procesy;
- ❑ Poissonův proces a příbuzné modely;

- ❑ **Ďalšie podrobnosti:** <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~maciak>

Doporučená literatúra

- ❑ Mandl P.: **Pravděpodobnostní dynamické modely.**
Academia Praha, 1985.
- ❑ Prášková, Z., Lachout, P.: **Základy náhodných procesů I.**
Matfyzpress, Praha, 2012.
- ❑ Prášková, Z.: **Základy náhodných procesů II.**
Karolinum, Praha, 2004.

Doporučená literatúra

- ❑ Mandl P.: *Pravděpodobnostní dynamické modely*.
Academia Praha, 1985.
 - ❑ Prášková, Z., Lachout, P.: *Základy náhodných procesů I*.
Matfyzpress, Praha, 2012.
 - ❑ Prášková, Z.: *Základy náhodných procesů II*.
Karolinum, Praha, 2004.
- + bibliografické odkazy a referencie uvedené v priebehu prednášky;
- (PDF súbor so slidami z prednášky netvorí postačujúci materiál pre úspešné zloženie zkúšky. Súčasťou zkúšky sú aj poznámky a dôkazy, ktoré nie sú explicitne uvedené v slidoch, ale budu odvodené na prednáške.)*

Kapitola 1

Vyrovnávání dat

Data v matematice a statistice

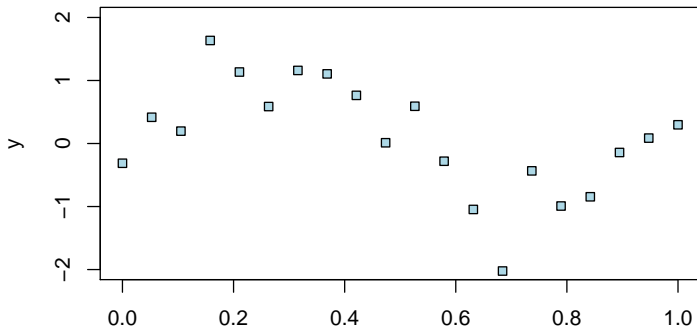
- ❑ Data (informace) můžeme kategorizovat podľa rôznych kritérií, ale z hľadiska matematiky/štatistiky je podstatne rozlišovať **deterministický** a **stochastický** charakter dat;
- ❑ V štatistike sa najčastejšie využíva **náhodný výber**; (nezávisle, rovnako rozdelené náhodné veličiny – *i.i.d.* z anglického "*Independent and Identically Distributed* random variables")
- ❑ V praxi často **časovo závislá štruktúra pozorovaní** – časové rady; (vývoj hodnôt v čase – resp. v diskretných časových okamžikoch)
 - ❑ napr. hodnota kurzu $x(t)$ pre $t \in \{t_1, \dots, t_n\}$;
 - ❑ alebo vzájomne porovnanie, napr. $x(t)$ vs. $y(t)$;
 - ❑ alebo data $(x_1, y_1)^T, \dots, (x_n, y_n)^T$, pre usporiadané indexy;
- ❑ **Závislé** a často **nestejně rozdelené náhodné veličiny** – n.i.n.i.d; (jak takéto data analyzovať a jaké (vhodné) metódy/modely používať?)

Vyrovnávání dat

Vyrovnávání dat – proložení dat nějakou hladkou křivkou, která v nějakom zmyslu vystihuje nějakú základnú vlastnosť dat, ale nebere v potaz drobné chyby, nepresnosti, fluktuácie (charakterizácie dat).

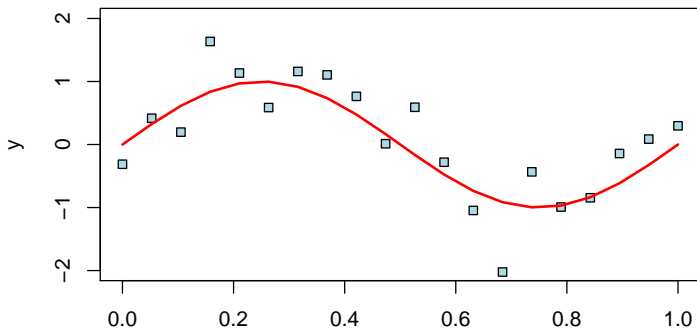
Vyrovnávání dat

Vyrovnávání dat – proložení dat nějakou hladkou křivkou, která v nějakom zmyslu vystihuje nějakú základnú vlastnosť dat, ale neberie v potaz drobné chyby, nepresnosti, fluktuácie (charakterizácie dat).

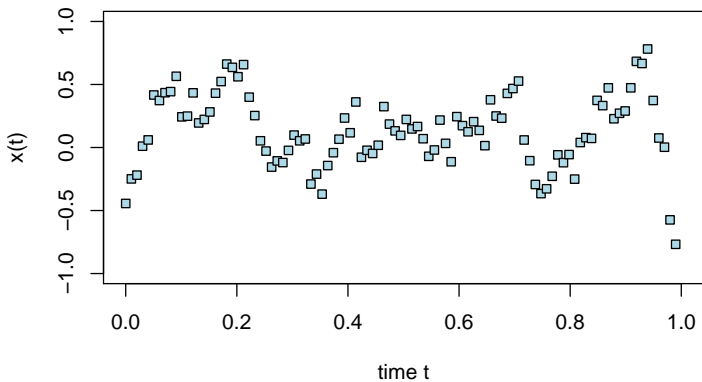


Vyrovnávání dat

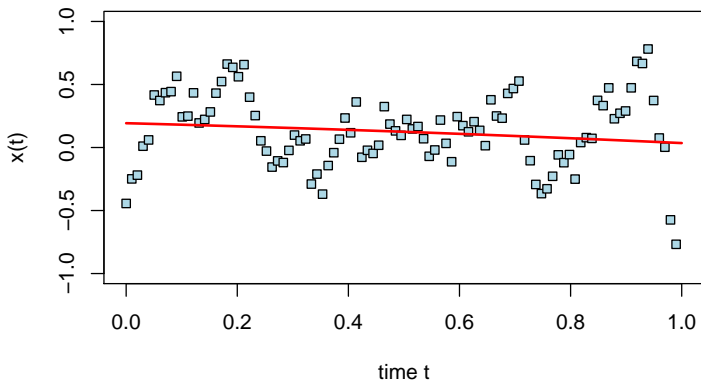
Vyrovnávání dat – proložení dat nějakou hladkou křivkou, která v nějakom zmyslu vystihuje nějakú základnú vlastnosť dat, ale neberie v potaz drobné chyby, nepresnosti, fluktuácie (charakterizácie dat).



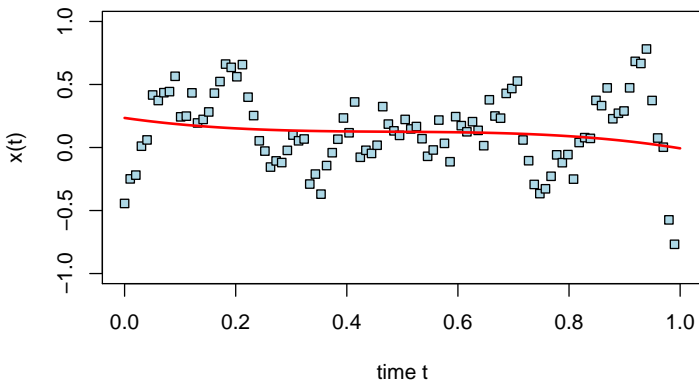
Jak volit "hladku křivku"?



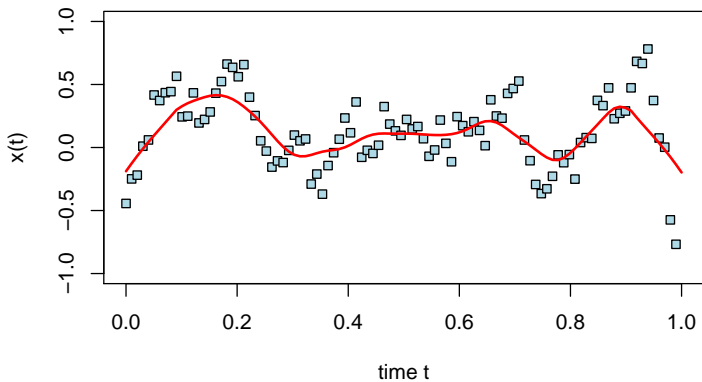
Jak volit "hladku křivku"?



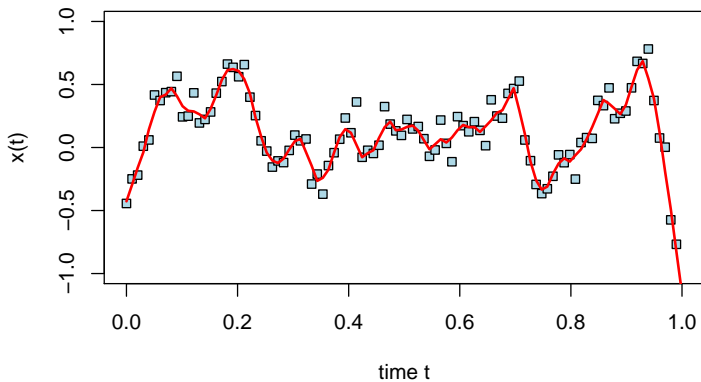
Jak volit "hladku křivku"?



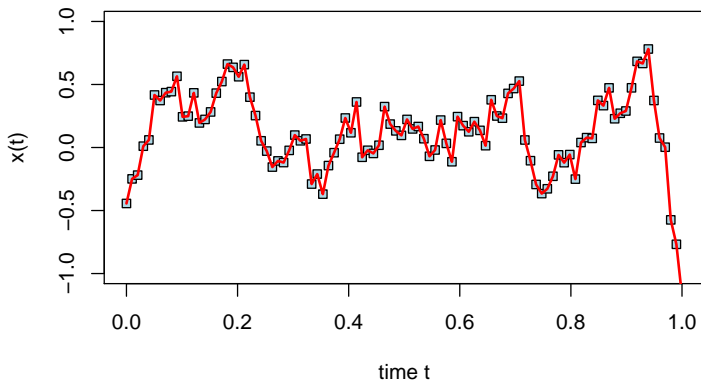
Jak volit "hladku křivku"?



Jak volit "hladku křivku"?



Jak volit "hladku křivku"?



Od parametrických po neparametrické

V zásadě rozlišujeme **tri základné prístupy** pri modelovaní dat, resp. pri prekladaní dat (ne nutne hladkou) krivkou. Základný rozdiel je v celkovej miere **flexibility a komplexity** výsledného modelu.

❑ Parametrický postup

❑ jednoduchost

(jednoduchý model, výpočet, aj interpretácia, priamočiaré vlastnosti)

❑ málo flexibilný

(príliš triviálny model, ktorý často nedostatečne vystihuje podstatu dat)

❑ Neparametrický postup

❑ výborná flexibilita

(bez akýchkoľvek predpokladov na konkrétny parametrický tvar krivky)

❑ príliš zložitý

(pomerne náročný na výpočet, vlastnosti a takmer nemožná interpretácia)

❑ Semiparametrický postup

❑ dostatečne flexibilný, akceptovateľná zložitost

(bez predpokladov na konkrétny tvar, ale pomocou (skrytých) parametrov)

❑ málo intuitívny

(kombinácia dobrých, ale aj zlých vlastností predchádzajúcich postupov)

Čo bolo na počiatku?



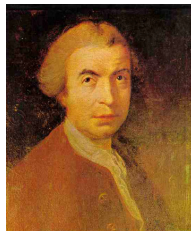
o Roger Cotes (1682 – 1716)



o Tobias Mayer (1723 – 1762)



o Pierre-Simon Laplace (1749–1827)



o Roger Joseph Boscovich (1711 – 1787)

Čo bolo na počiatku?



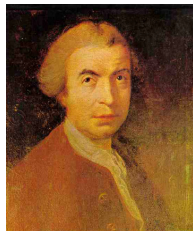
o Roger Cotes (1682 – 1716)



o Tobias Mayer (1723 – 1762)



o Pierre-Simon Laplace (1749–1827)



o Roger Joseph Boscovich (1711 – 1787)

- ❑ **1722** – kombinácia viacerých rôznych pozorovaní uskutočnených za stejných podmínek, namiesto presnej replikácie experimentu (**method of averages**);
- ❑ **1750** – štúdium pohybu Mesiaca kolem země v roce 1750 (Tobias Mayer) a sledovanie vzájomného pohybu Jupitera a Saturnu (Laplace);
- ❑ **1757** – kombinácia viacerých rôznych pozorovaní uskutočnených za rôznych (kontrolovaných) podmienok pri štúdiu tvaru Zeme Boscovichom (**least absolute deviations**);
- ❑ **1799** – chyba aproximácie meraná ako absolútna vzdialenosť vs. kvadrát vzdialenosti vs. metóda vedúca k jej minimalizácii (Laplace vs. Gauss);

Metóda najmenších čtverců



Charles Friedrich Gauss (1777 – 1855)

- ❑ metoda sa postupne vyvinula v súvislosti s **astronómiou** a **geodéziou** pri riešení problémov s **navigáciou lodí**;
- ❑ **P.S.Laplace** a **T. Mayer** využili tzv. **metodu priemerov** pre vysvetlenie pohybov nebeských telies již v roce **1750**;
- ❑ prvýkrát publikovaná (**Legendre, 1805**) ako algebraický nástroj na **fitovanie lineárnych rovníc** na data;
- ❑ **C.F. Gauss** v **1809** publikuje prácu o metode najmenších štvorcov a dáva ju súvislosti s **teóriou pravdepodobnosti** a **normálnym rozdelením**;

Parametrické vyrovnávanie dat

Křivka jednoznačně určená niekoľkými parametrami

- ❑ předem zvolíme tvar hladké křivky napr. parabola $x \rightarrow a + bx + cx^2$;
- ❑ neznáma křivka definovaná pomocou neznámých parametrov $a, b, c \in \mathbb{R}$;
- ❑ parametre majú konkrétnu a často priamočiaru interpretáciu;
- ❑ odhady parametrov jako minimalizace součtu čtverců odchylek;
- ❑ volba počtu parametrů \implies konkrétny tvar a flexibilita křivky;
- ❑ rozhodnutí mezi celkovým počtem parametrů a velikosti součtu čtverců;

Parametrické vyrovnávání dat

Křivka jednoznačně určená několika parametry

- ▣ předem zvolíme tvar hladké křivky napr. parabola $x \rightarrow a + bx + cx^2$;
- ▣ neznáma křivka definovaná pomocí **neznámých parametrů** $a, b, c \in \mathbb{R}$;
- ▣ parametry mají konkrétní a často **priamočiaru interpretáciu**;
- ▣ odhady parametrů jako **minimalizace součtu čtverců** odchylek;
- ▣ volba počtu parametrů \implies konkrétní tvar a flexibilita křivky;
- ▣ rozhodnutí mezi celkovým **počtem parametrů** a **velikosti součtu čtverců**;

There is no free lunch!

- ▣ pro dostatečně velký počet parametrů \implies **interpolace dat**;
- ▣ interpolace \implies **nulový součet čtverců** \implies žádné vyhlazení dat;
- ▣ tzv. **Bias-variance Trade-off** (vychýlení vs. variability);
(rozhodnutí ohledom celkové flexibility a komplexity finálního modelu)

Metóda nejmenších čtverců – algebraicky

- obecně předpokládáme tvar nějaké hladké křivky

$$x \longrightarrow a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \cdots + a_p f_p(x),$$

pro nějaké **neznáme parametry** $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}$;

- označme **odhadnuté hodnoty parametrů** jako $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p \in \mathbb{R}$;
- pak vyrovnanú hodnotu v datech $\{(x_i, y_i); i = 1, \dots, n\}$ lze zapsat jako

$$\hat{y}_i = \hat{a}_1 f_1(x_i) + \hat{a}_2 f_2(x_i) + \cdots + \hat{a}_p f_p(x_i),$$

kde \hat{y}_i značí **vyrovnanú hodnotu** príslušnú hodnotě y_i ;

- pro skrátenej zápis pomocou vektorov používame značení

$$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^\top, \quad \hat{\mathbf{y}} = (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n)^\top;$$

Metóda nejmenších čtverců – maticově

- explicitně po zložkách dostaneme **vyrovnané hodnoty** jako

$$\hat{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \vdots \\ \hat{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \dots & f_p(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \dots & f_p(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \dots & f_p(x_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_p \end{pmatrix}$$

- stručný/alternativní **zápis v maticovém tvare** jako

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbf{a}},$$

kde $\hat{\mathbf{a}} = (\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p)^\top$ je vektor odhadnutých parametrů;

- odhady neznámých parametrů $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}$ jsou definované tak, že **minimalizují nejmenší čtverce** (součet čtverců odchylek)

$$\begin{aligned} S(\mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{j=1}^p \hat{a}_j f_j(x_i) \right)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|_2^2 \\ &= (\mathbf{y} - \mathbb{F}\hat{\mathbf{a}})^\top (\mathbf{y} - \mathbb{F}\hat{\mathbf{a}}); \end{aligned}$$

Metóda najmenších čtverců – formálně

- formálně zapsané, odhady parametrov a_1, \dots, a_p jsou definované jako riešenie minimalizačného problému

$$\begin{aligned}
 (\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p)^\top &= \underset{a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}}{\operatorname{Argmin}} \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{j=1}^p a_j f_j(x_i) \right)^2 \\
 &= \underset{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p}{\operatorname{Argmin}} \|\mathbf{y} - \mathbb{F}\mathbf{a}\|_2^2;
 \end{aligned} \tag{1}$$

- Ide o **konvexný problém** (minimalizácia konvexnej funkcie, cez konvexnú množinu) a teda **existuje globálne minimum**, ktoré je **riešením normálných rovníc**. Ak má \mathbb{F} plnú hodnotu, tak existuje **jednoznačné riešenie**;

Samostatný úkol

- Ukážte, že problém (1) je naozaj konvexný problém. Za akých podmienok má matica $\mathbb{F} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ plnú hodnotu?
- Dokážte, že dosažené riešenie je skutočne globálnim minimom.
- Jaké je riešenie úlohy (1), ak by \mathbb{F} neměla plnou hodnotu?

Metóda nejmenších čtverců – příklad

Příklad

Uvažujte data $(y_1, x_1)^T, \dots, (y_n, x_n)^T$, které chceme preložit jednoduchou přímkou, t.j. $x \rightarrow a + bx$, pro $a, b \in \mathbb{R}$ neznáme parametre. Nájďte explicitné řešení pro rovnici vyhlazovací přímky.

Metóda nejmenších čtverců – příklad

Příklad

Uvažujte data $(y_1, x_1)^T, \dots, (y_n, x_n)^T$, které chceme preložit jednoduchou přímkou, t.j. $x \rightarrow a + bx$, pro $a, b \in \mathbb{R}$ neznáme parametre. Nájďte explicitné řešení pro rovnici vyhlazovací přímky.

Pravděpodobnostní interpretace:

- ❑ náhodný vektor $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^T$ a jeho realizace $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$;
- ❑ predpokládame, že platí model $\mathbf{Y} = \mathbb{F}\mathbf{a} + \boldsymbol{\varepsilon}$;
- ❑ vektor náhodných chýb $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^T \sim (\mathbf{0}, \sigma^2\mathbb{I})$;
- ❑ z vlastnosti střední hodnoty a rozptylu lze přepsát jako

$$\mathbb{E}\mathbf{Y} = \mathbb{F}\mathbf{a} \quad \text{Var}\mathbf{Y} = \sigma^2\mathbb{I},$$

pro jednotkovou matici $\mathbb{I} = \text{Diag}\{1, \dots, 1\}$, typu $n \times n$;

Regresní model – teoretické vlastnosti odhadu

Věta: Střední hodnota a rozptyl odhadu parametru v lineární regrese

Mějme lineární regresní model $\mathbf{Y} = \mathbb{F}\mathbf{a} + \boldsymbol{\varepsilon}$, pro vektor náhodných chýb se složkami s nulovou střední hodnotou $E\boldsymbol{\varepsilon} = (E\varepsilon_1, \dots, E\varepsilon_n)^\top = (0, \dots, 0)^\top$ a rozptylovou matici $\sigma^2\mathbb{I}$.

Pak platí, že

- ❑ odhad parametru $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p$ metodou nejmenších čtverců je **nestranný** a jeho **rozptyl** je $\sigma^2(\mathbb{F}^\top\mathbb{F})^{-1}$;
- ❑ jsou-li navíc $(y_i, \varepsilon_i)^\top$, pro $i = 1, \dots, n$ nezávislé a stejně rozdělené (*i.i.d.*), pak je **$\hat{\mathbf{a}}$ konzistentní odhad vektoru \mathbf{a}** ;
- ❑ platí-li navíc $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ pak odhady parametrů a_1, \dots, a_p mají také normální rozdělení a platí, že **$\hat{\mathbf{a}} \sim N_p(\mathbf{a}, \sigma^2(\mathbb{F}^\top\mathbb{F})^{-1})$** ;

Gauss-Markovská věta říká, že odhad $\hat{\mathbf{a}}$ je **nejlepší, nestranný, lineární odhad** vektoru parametrů $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p$ (tzv. BLUE – Best Linear Unbiased Estimate)

Parametricky \Rightarrow Semiparametrický postup

Parametre, ktoré sa nachádzajú v modeli nemajú priamy vzťah na tvar neznámej křivky a taktiež **nemajú intuitívnu interpretáciu**, jako tomu bylo v případě parametrických modelov.

- ❑ **SPLINY - po částech (lokálně) parametrické vyhlazování;**
(neznáma křivka je pořád definovaná pomocí parametrů, ale parametre nedefinují přímo tvar dané křivky)
- ❑ **Vhlazování je proto mnohem flexibilnější a adaptivnější;**
(kromě samotných neznámých parametrů jsou ale potřebné dodatečné parametry – tzv. uzly a tiež množina tzv. bázických funkcii, tzv. splinová báze)
- ❑ **uzly definují podintervaly definičního oboru křivky;**
(důležitá je pak otázka, jak uzly správně volit; v podintervalech jsou části křivky definované různě, ale celková křivka má hezké, předem dané vlastnosti)

Lokální vyhlazování pomocí Splinů

Definice: Spline

Nechť $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_k$ je posloupnost vnitřních uzlů (bodů) z definičního oboru $\mathcal{D} = [\xi_0, \xi_{k+1}]$. Pak splinem řádu $\ell \in \mathbb{N}$ nazveme libovolnou funkci f takovou, která je v každém intervalu $[\xi_j, \xi_{j+1}]$, pro $j = 0, \dots, k$ polynomem stupně ℓ a která má v celém definičním oboru $\mathcal{D} = \cup_{j=0}^k [\xi_j, \xi_{j+1}]$ spojitě derivace (jednostranné derivace v krajních bodech) až do řádu $(\ell - 1)$ (včetně).

Lokální vyhlazování pomocí Splinů

Definice: Spline

Nechť $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_k$ je posloupnost vnitřních uzlů (bodů) z definičního oboru $\mathcal{D} = [\xi_0, \xi_{k+1}]$. Pak splinem řádu $\ell \in \mathbb{N}$ nazveme libovolnou funkci f takovou, která je v každém intervalu $[\xi_j, \xi_{j+1}]$, pro $j = 0, \dots, k$ polynomem stupně ℓ a která má v celém definičním oboru $\mathcal{D} = \cup_{j=0}^k [\xi_j, \xi_{j+1}]$ spojitě derivace (jednostranné derivace v krajních bodech) až do řádu $(\ell - 1)$ (včetně).

Příklad

Uvažujte interval $(0, 1)$ jako definiční obor \mathcal{D} . Definujte posloupnost uzlů $0 < \xi_1 < \xi_2 < 1$ a navrhnete spline třetího řádu ($\ell = 3$) na \mathcal{D} tak, aby splňoval definici.

Různe splinové bázy

Existuje celá řada různých způsobů, jak definovat splinovou bazu a sestavit spline. Některé metody jsou intuitivní a jednoduché, ale výpočetně náročné pro velké $n \in \mathbb{N}$. Jiné jsou poměrně složité a hodně špatně interpretovatelné, ale zase výpočetně stabilnější.

❑ Truncated Splines

- ❑ jednoduché, intuitivně, jednoduché na odvození;
- ❑ výpočetně nestabilné hlavně pro velké $n \in \mathbb{N}$;

❑ B-Splines

- ❑ výpočetně stabilné a jednoduché pro invertování \mathbb{F} ;
- ❑ pro obecný stupeň $\ell \in \mathbb{N}$ nelze jednoduše vyjádřit (napr. De Boor - rekurze);

❑ Ortogonálně spliny

- ❑ výpočetně velmi jednoduché, okamžitá invertibilita, numerická stabilita;
- ❑ netriviálně na vytvoření, náročné na interpretáciu;

Různé splinové bázy

Existuje celá řada různých způsobů, jak definovat splinovou bazu a sestavit spline. Některé metody jsou intuitivní a jednoduché, ale výpočetně náročné pro velké $n \in \mathbb{N}$. Jiné jsou poměrně složité a hodně špatně interpretovatelné, ale zase výpočetně stabilnější.

❑ Truncated Splines

- ❑ jednoduché, intuitivně, jednoduché na odvození;
- ❑ výpočetně nestabilné hlavně pro velké $n \in \mathbb{N}$;

❑ B-Splines

- ❑ výpočetně stabilné a jednoduché pro invertování \mathbb{F} ;
- ❑ pro obecný stupeň $\ell \in \mathbb{N}$ nelze jednoduše vyjádřit (napr. De Boor - rekurze);

❑ Ortogonálně spliny

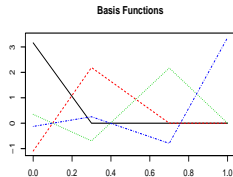
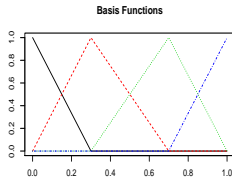
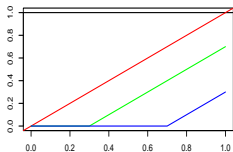
- ❑ výpočetně velmi jednoduché, okamžitá invertibilita, numerická stabilita;
- ❑ netriviálně na vytvoření, náročné na interpretáciu;

❑ Mnoho jiných ...

- ❑ Box spliny, M-Spliny, T-Spliny;
- ❑

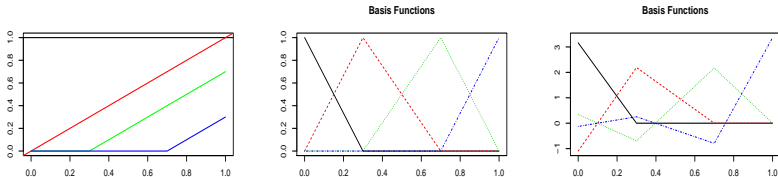
Porovnání: T-spliny, B-spliny, O-spliny

- Uzly: $\xi_1 = 0.3, \xi_2 = 0.7$; Stupeň $\ell = 1$ (lineární spliny (báze));

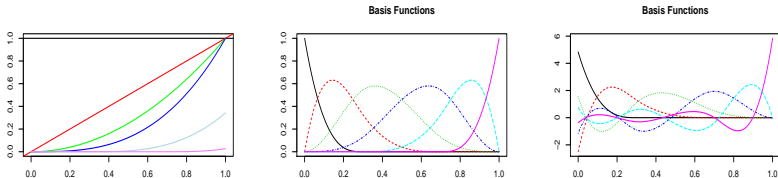


Porovnání: T-spliny, B-spliny, O-spliny

- Uzly: $\xi_1 = 0.3, \xi_2 = 0.7$; Stupeň $\ell = 1$ (lineární spliny (báze));



- Uzly: $\xi_1 = 0.3, \xi_2 = 0.7$; Stupeň $\ell = 3$ (kubické spliny (báze));



Truncated splines – "zkosené" spliny

Príklad

- máme uzly $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$ uvnitř \mathcal{D} , a nechť $\ell = 1$ (lineární spliny);
 Pak příslušné funkce $f_1(x), \dots, f_p(x)$ mají následující tvar:

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= 1, & f_2(x) &= x, & f_3(x) &= (x - \xi_1)_+, \\
 & & & & f_4(x) &= (x - \xi_2)_+, \\
 & & & & f_5(x) &= (x - \xi_3)_+
 \end{aligned}$$

- pro stejné uzly $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$ uvnitř \mathcal{D} , a řád $\ell = 3$ (kubické spliny);
 Příslušné funkce $f_1(x), \dots, f_p(x)$ mají tvar:

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= 1, & f_2(x) &= x, & f_5(x) &= (x - \xi_1)_+^3, \\
 f_3(x) &= x^2, & f_4(x) &= x^3, & f_6(x) &= (x - \xi_2)_+^3, \\
 & & & & f_7(x) &= (x - \xi_3)_+^3
 \end{aligned}$$

Pro splinové bázy obecně platí, že $p = \ell + k + 1$, kde $\ell \in \mathbb{N}$ je stupeň splinové bázy, resp. řád splinu a $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je počet vnitřních uzlů $\xi_1 < \dots < \xi_k \in \mathcal{D}$.

Semiparametrický \Rightarrow Neparametrický postup

Bez parametrů - žádný konkrétní tvar neznáme křivky, ani zápis neznámej křivky pomoci lineárnej kombinace funkci bázy.

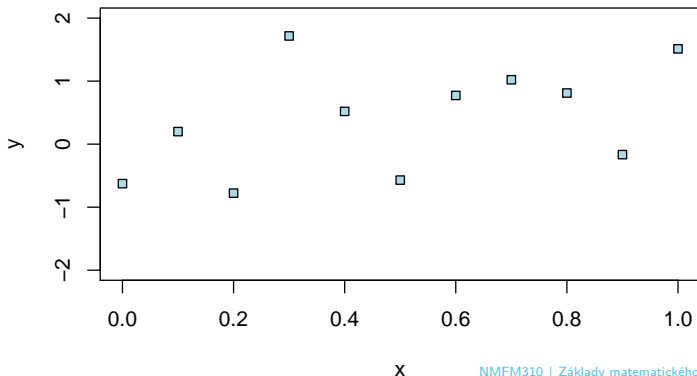
- ❑ **Klouzavé průměry (KP)** – lokální neparametrický postup vyhlazování; (*schopný zachytit trend – t.j. směr a míru pohybu pozorovaných hodnot*)
- ❑ nevystupují tady žádné neznáme parametre, které bychom odhadovali; (*výsledná vyhlazovací křivka je pouze funkci pozorovaných dat*)
- ❑ jedná se o lokální vyrovnávání pozorovaných dat; (*v daném bodě $x \in \mathcal{D}$ závisí vyrovnání pouze od několika susedů*)
- ❑ formálně zapsáno, pro pozorování y_i získame hodnotu \hat{y}_i jako

$$\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^r w_j y_{i+j} \quad \text{pro } i = r + 1, \dots, n - r;$$

- ❑ pro váhy w_j plátí, že $\sum_{j=-r}^r w_j = 1$; (*číslo $r \in \mathbb{N}$ se nazýva délka klouzavého průměru*)

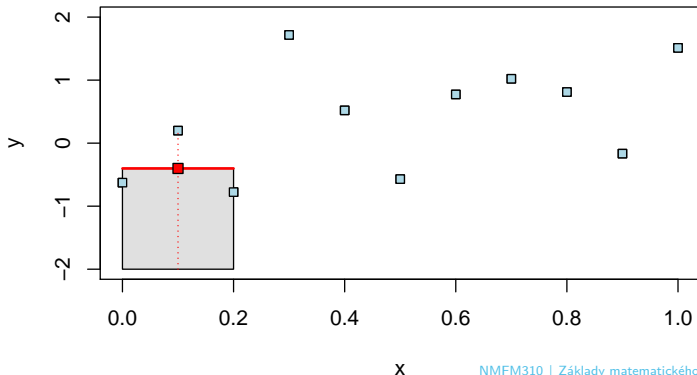
Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definovány jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^r w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r + 1, \dots, n - r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a tiež $\sum_{j=-r}^r w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme \hat{y}_i pomocí y_i a dvou vedlejších sousedů;



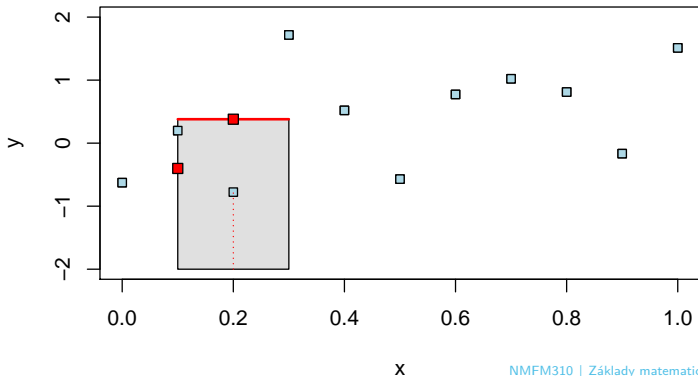
Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definovány jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^r w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r + 1, \dots, n - r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a tiež $\sum_{j=-r}^r w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme \hat{y}_i pomocí y_i a dvou vedlejších sousedů;



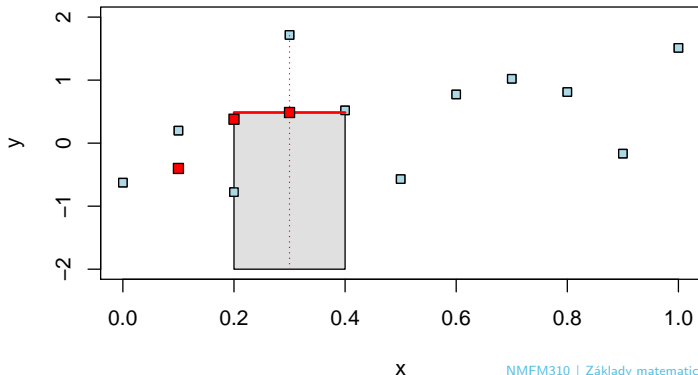
Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definovány jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^r w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r + 1, \dots, n - r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a tiež $\sum_{j=-r}^r w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme \hat{y}_i pomocí y_i a dvou vedlejších sousedů;



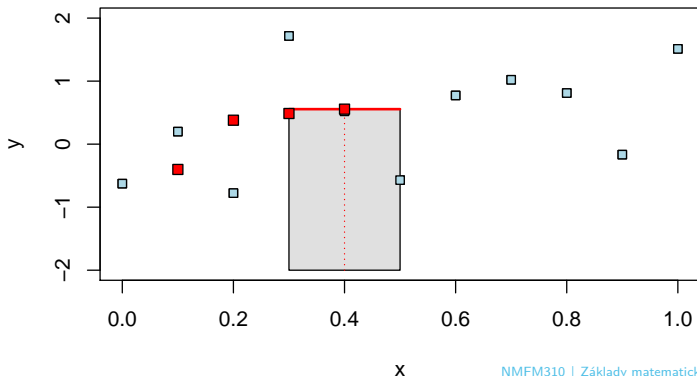
Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definovány jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^r w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r + 1, \dots, n - r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a tiež $\sum_{j=-r}^r w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme \hat{y}_i pomocí y_i a dvou vedlejších sousedů;



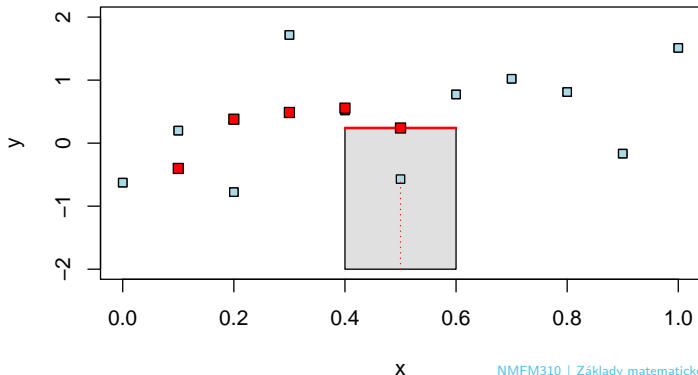
Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definovány jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^r w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r + 1, \dots, n - r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a tiež $\sum_{j=-r}^r w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme \hat{y}_i pomocí y_i a dvou vedlejších sousedů;



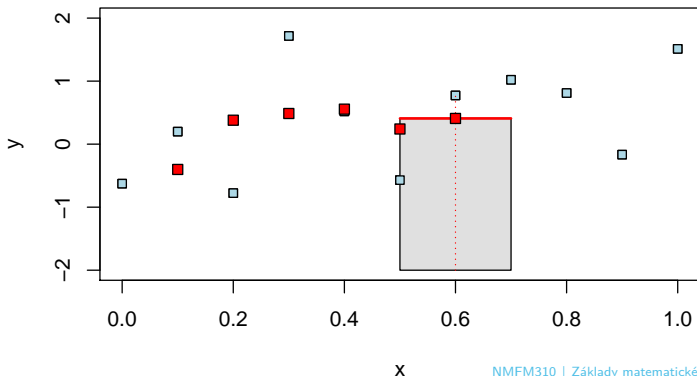
Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definovány jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^r w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r + 1, \dots, n - r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a tiež $\sum_{j=-r}^r w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme \hat{y}_i pomocí y_i a dvou vedlejších sousedů;



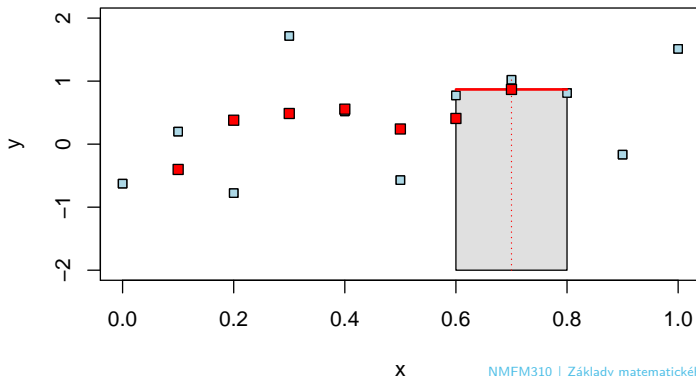
Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definovány jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^r w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r + 1, \dots, n - r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a tiež $\sum_{j=-r}^r w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme \hat{y}_i pomocí y_i a dvou vedlejších sousedů;



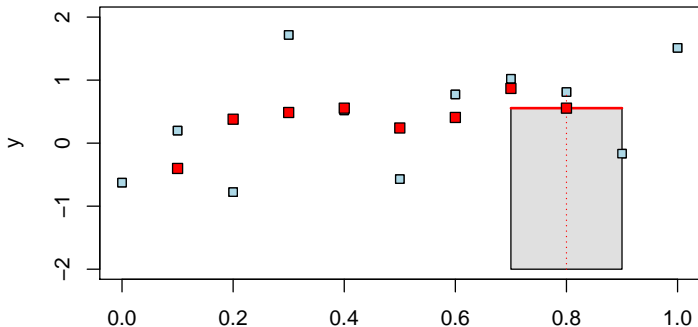
Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definovány jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^r w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r + 1, \dots, n - r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a tiež $\sum_{j=-r}^r w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme \hat{y}_i pomocí y_i a dvou vedlejších sousedů;



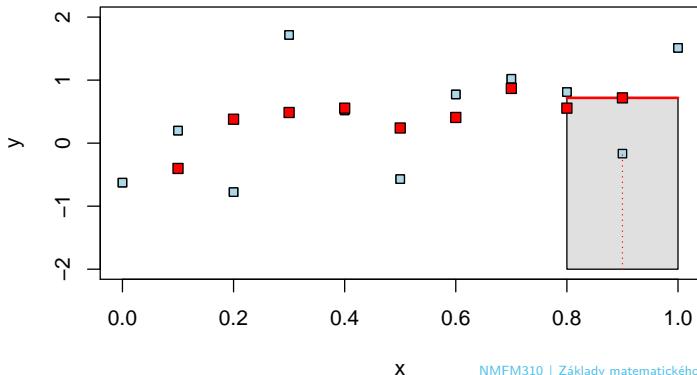
Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definovány jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^r w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r + 1, \dots, n - r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a tiež $\sum_{j=-r}^r w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme \hat{y}_i pomocí y_i a dvou vedlejších sousedů;



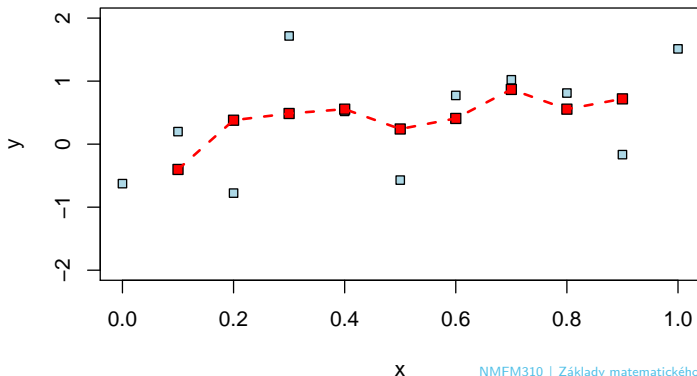
Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definovány jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^r w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r + 1, \dots, n - r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a tiež $\sum_{j=-r}^r w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme \hat{y}_i pomocí y_i a dvou vedlejších sousedů;



Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definovány jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^r w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r + 1, \dots, n - r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a tiež $\sum_{j=-r}^r w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme \hat{y}_i pomocí y_i a dvou vedlejších sousedů;



Jak definovat váhy w_j pro KP?

- ❑ **Stejné váhy pro všechny $j = -r, \dots, r$;**
 - ❑ jednoduchost, $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a vyrovnaná hodnota \hat{y}_i je pouze obyčejný aritmetický průměr z $2r + 1$ okolních hodnot, navíc nezáporné váhy;
 - ❑ není vyrovnaný počáteční a koncový úsek dat (potřebná data nejsou k dispozici) a obecně se nejedná o hladkou křivku v \mathcal{D} ;

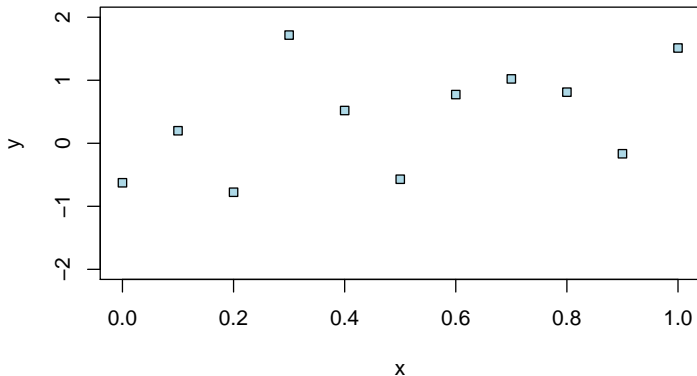
Jak definovat váhy w_j pro KP?

- ❑ **Stejné váhy pro všechny $j = -r, \dots, r$;**
 - ❑ jednoduchost, $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a vyrovnaná hodnota \hat{y}_i je pouze obyčejný aritmetický průměr z $2r + 1$ okolních hodnot, navíc nezáporné váhy;
 - ❑ není vyrovnán počáteční a koncový úsek dat (potřebná data nejsou k dispozici) a obecně se nejedná o hladkou křivku v \mathcal{D} ;

- ❑ **Obecně různé váhy pro $w_j, j = -r, \dots, r$;**
 - ❑ při správné volbě lze dosáhnout hladkou křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} a lze vyrovnat aj počáteční a koncové hodnoty;
 - ❑ nutnost dodatečných výpočtů, případně nějakých dodatečných parametrů;

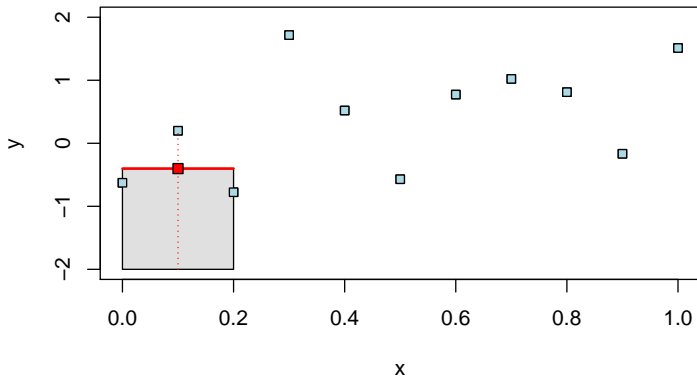
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



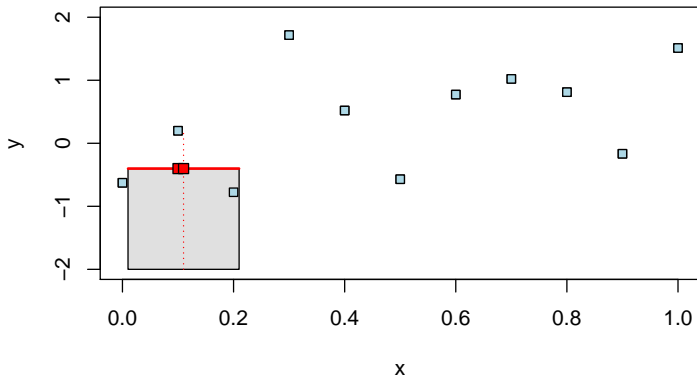
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



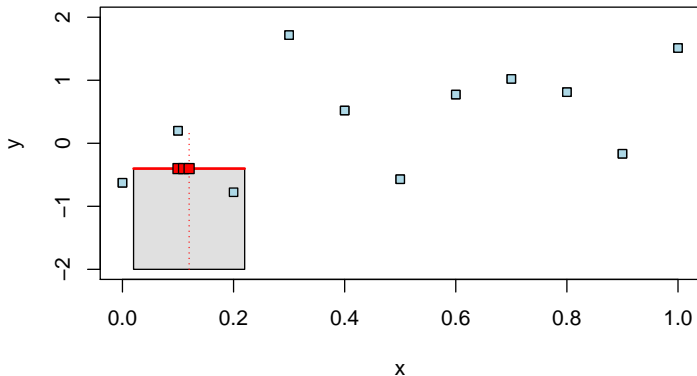
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



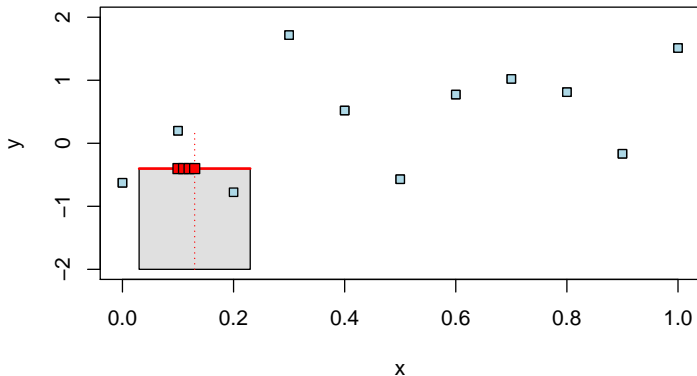
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



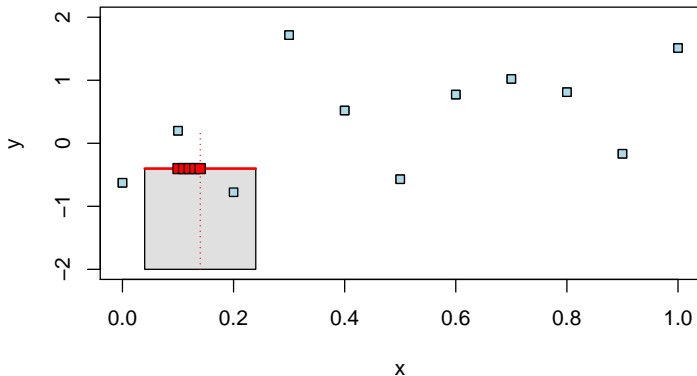
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



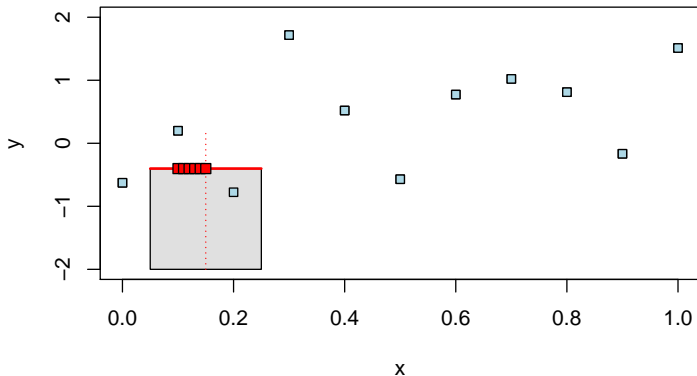
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



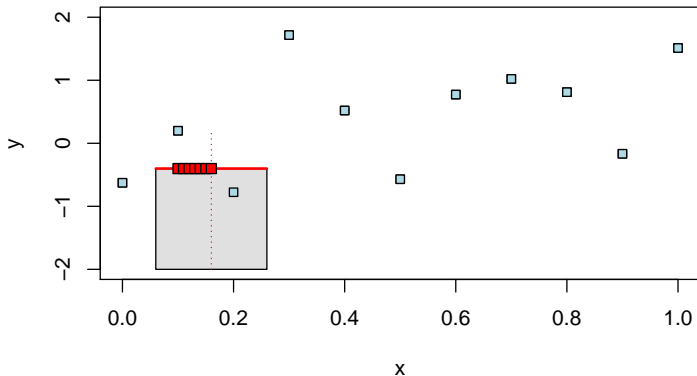
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



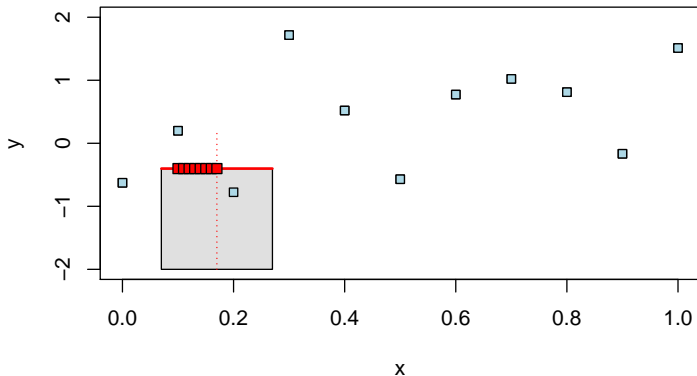
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



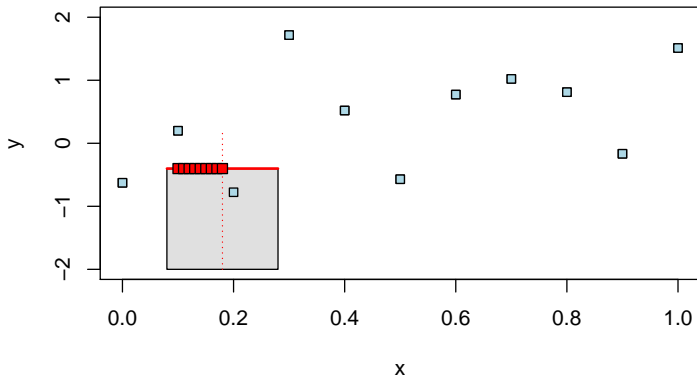
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



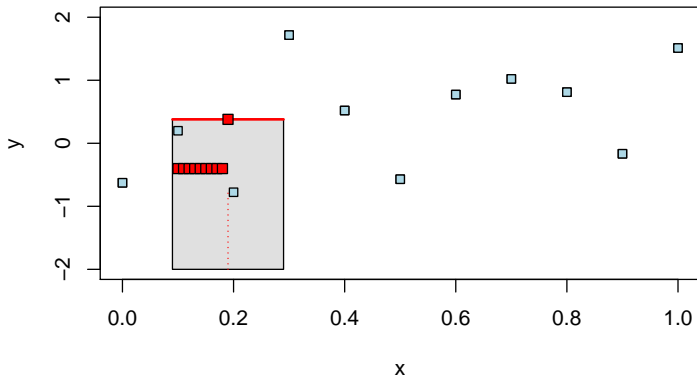
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



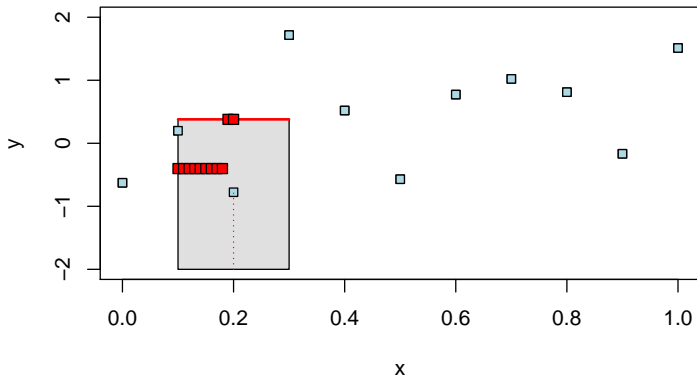
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



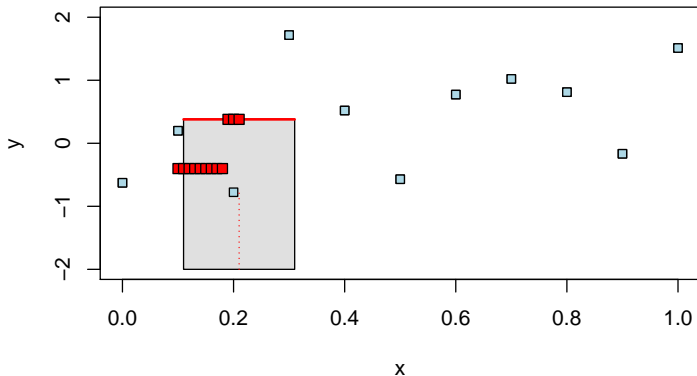
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



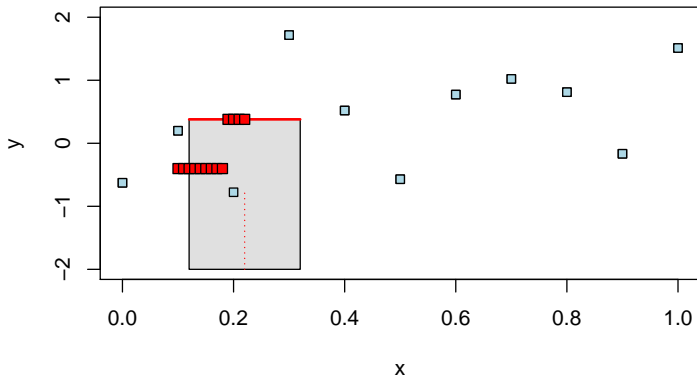
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



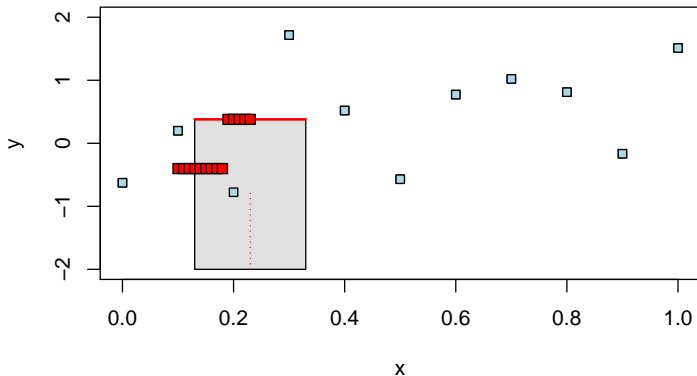
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



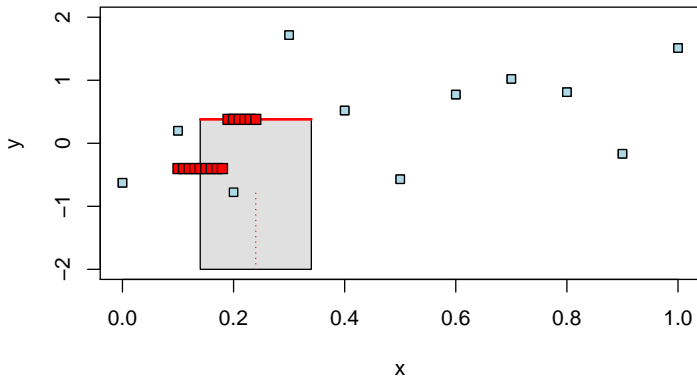
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



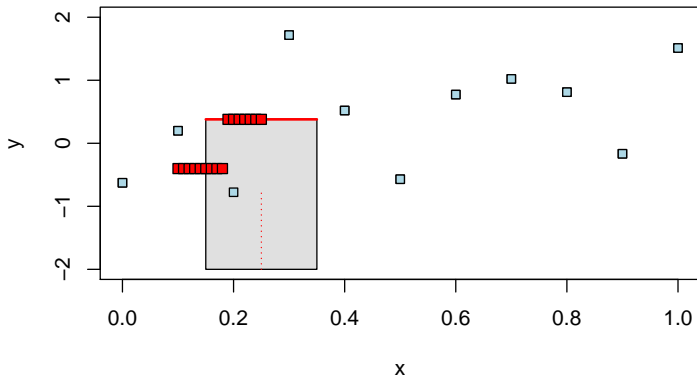
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



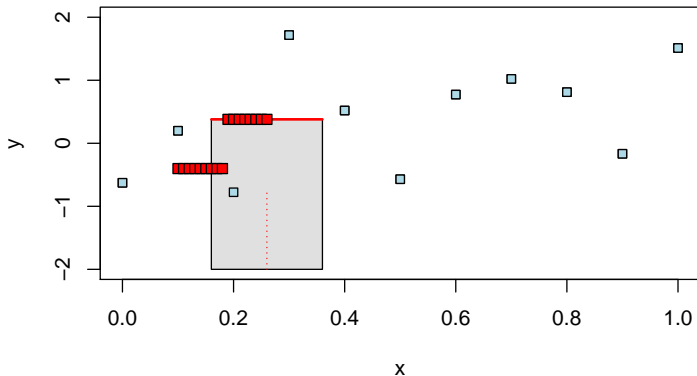
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



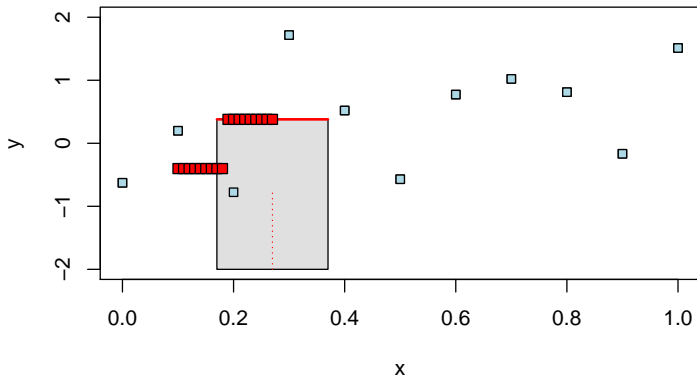
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



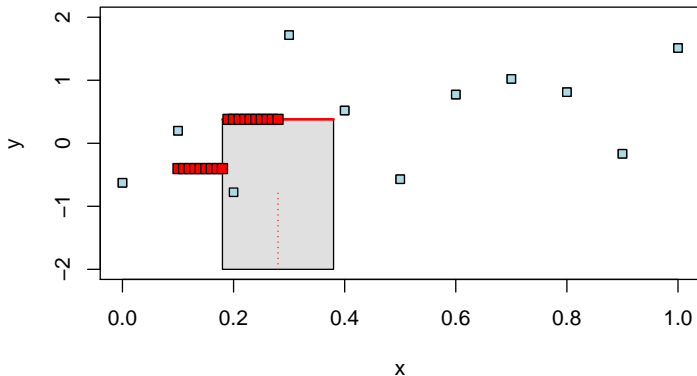
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



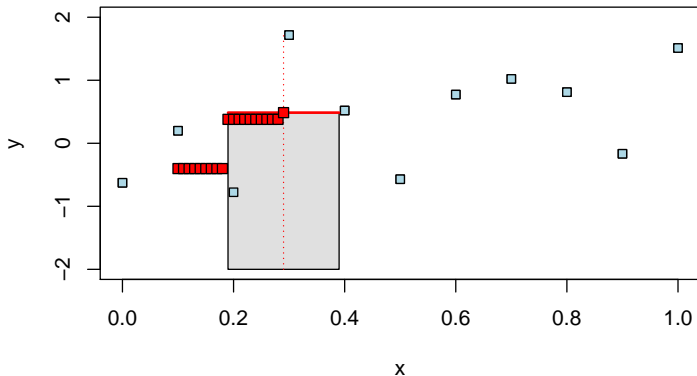
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



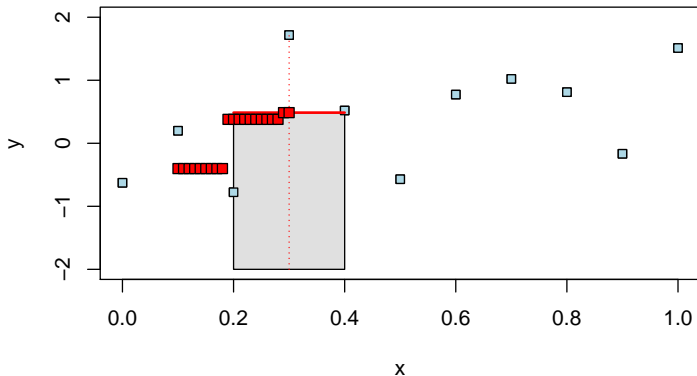
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



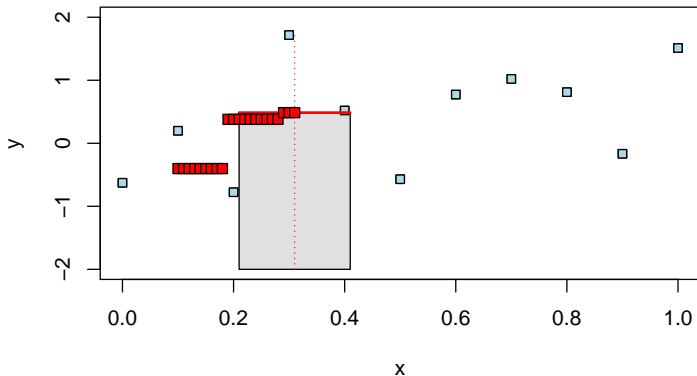
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



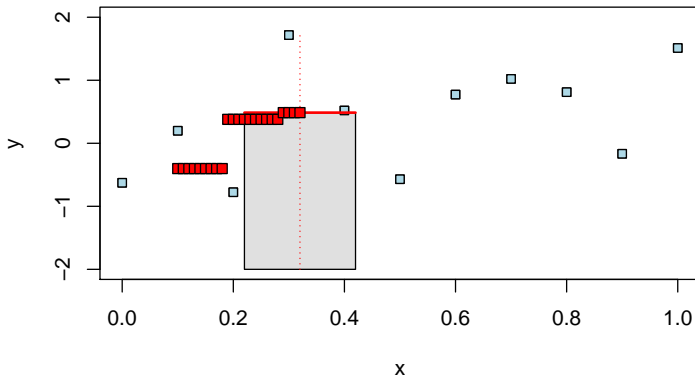
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



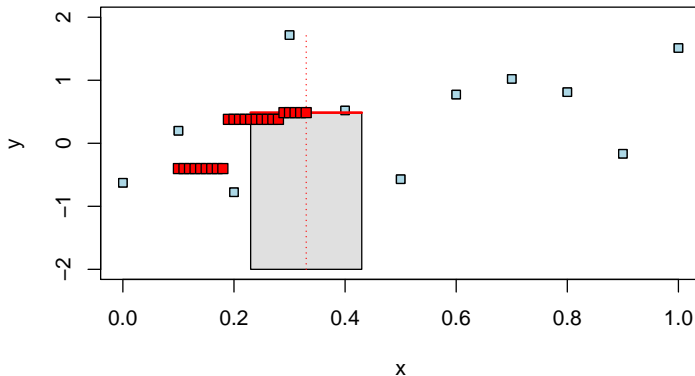
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



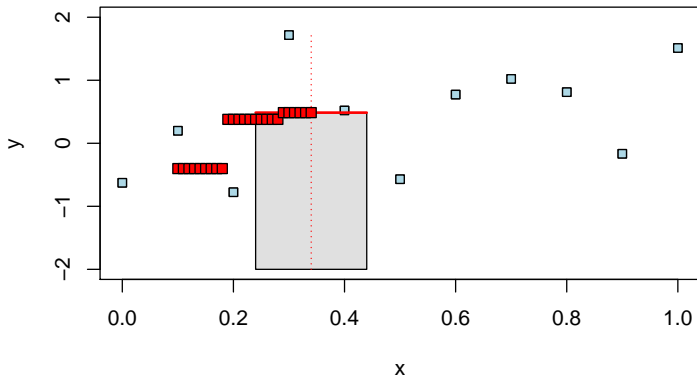
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



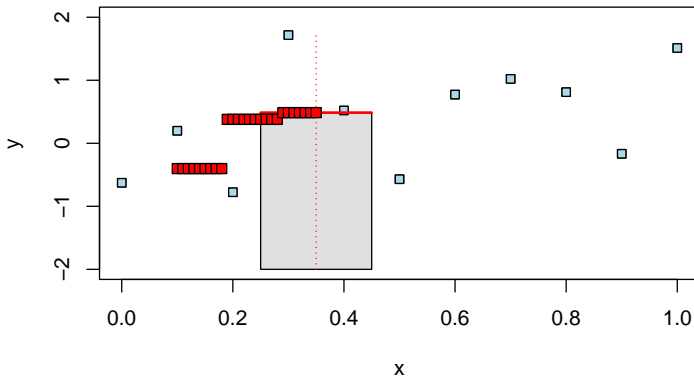
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



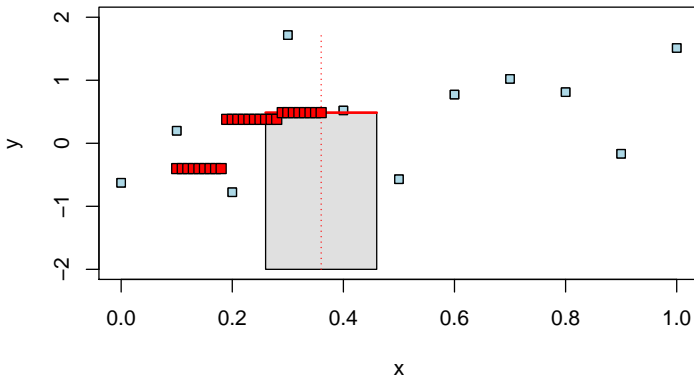
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



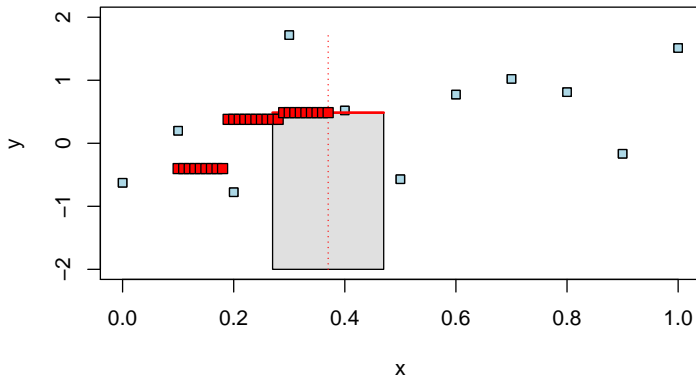
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



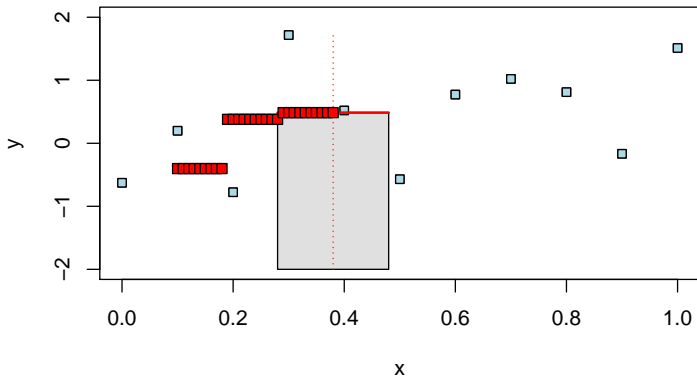
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



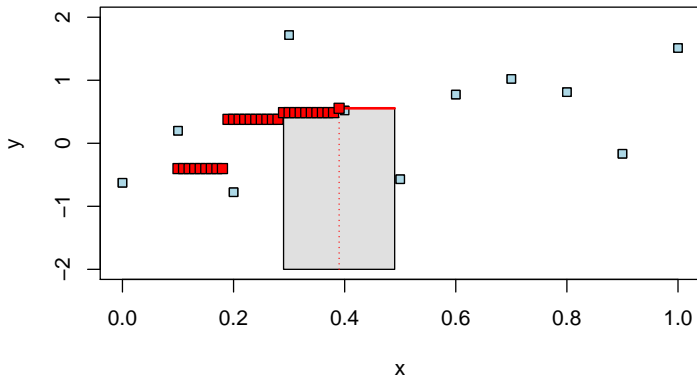
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



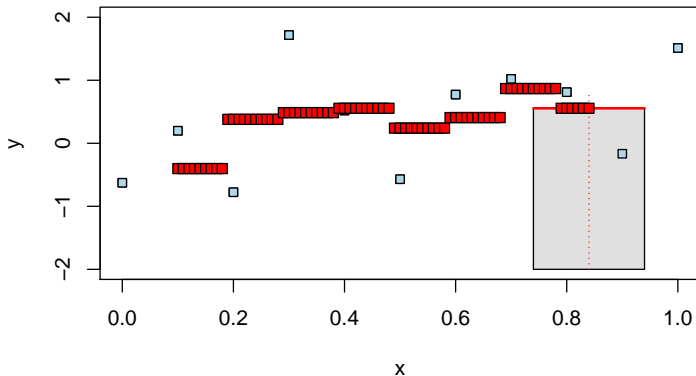
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



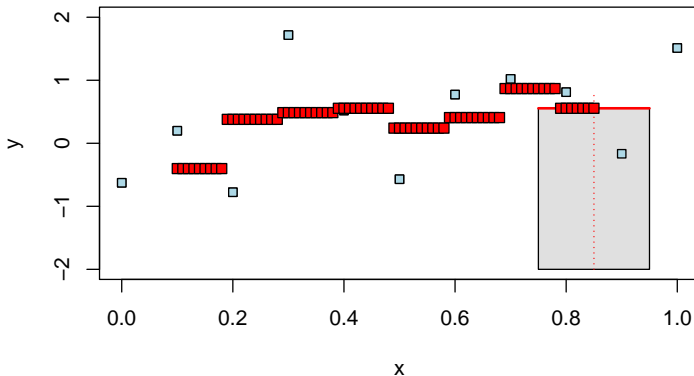
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



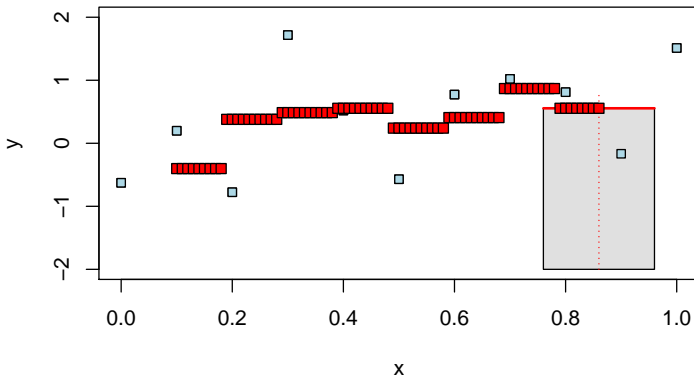
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



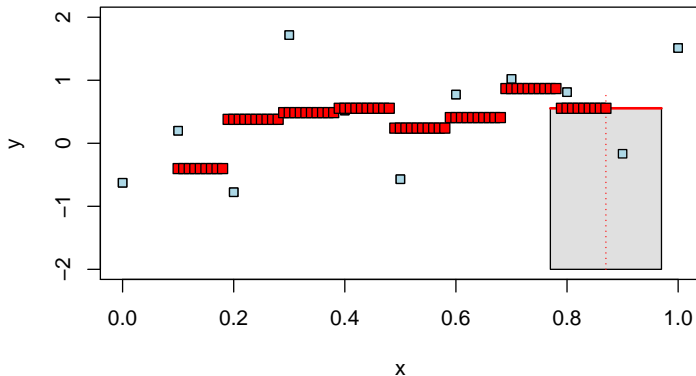
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



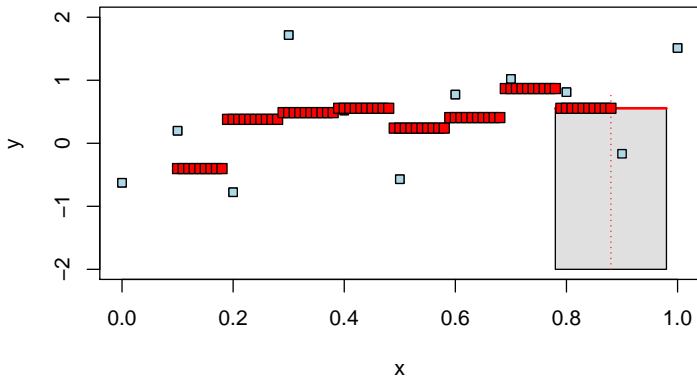
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



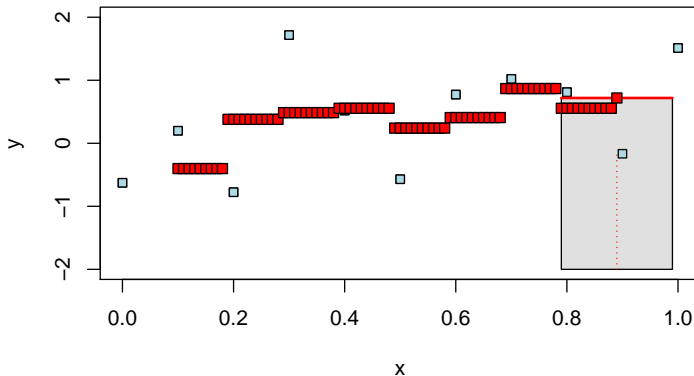
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



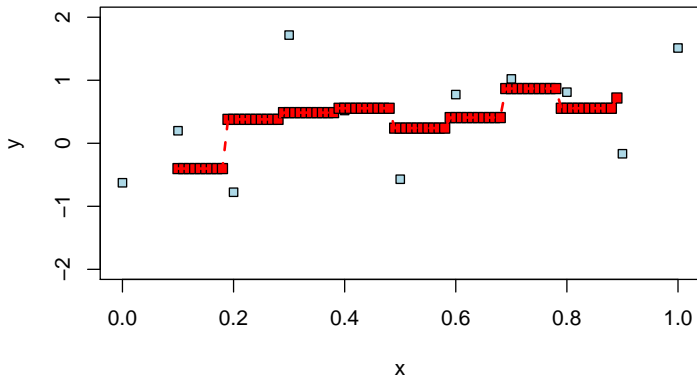
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



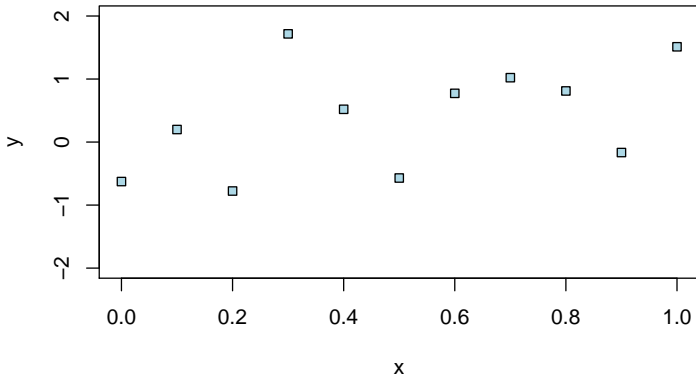
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



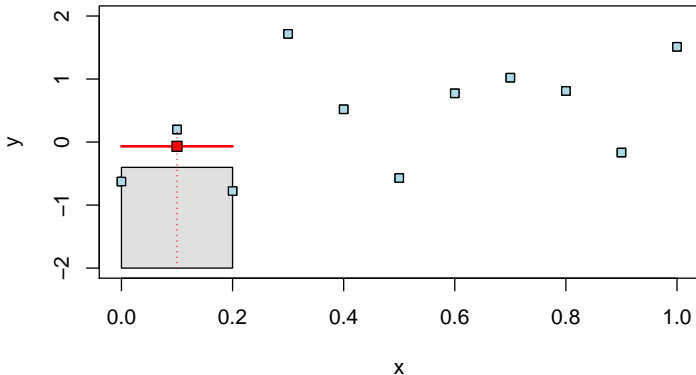
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



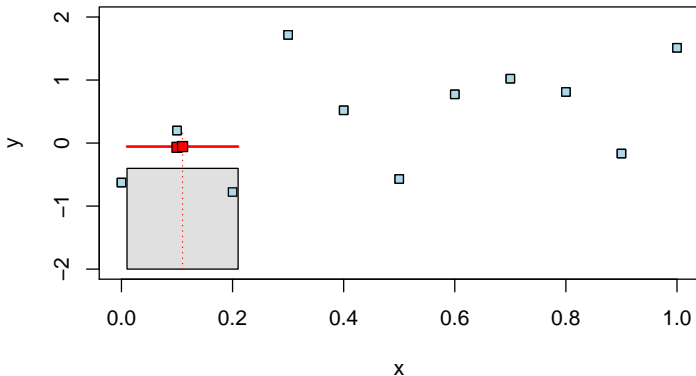
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



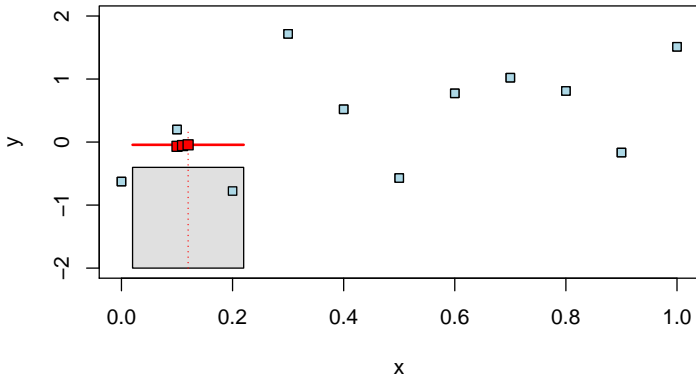
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



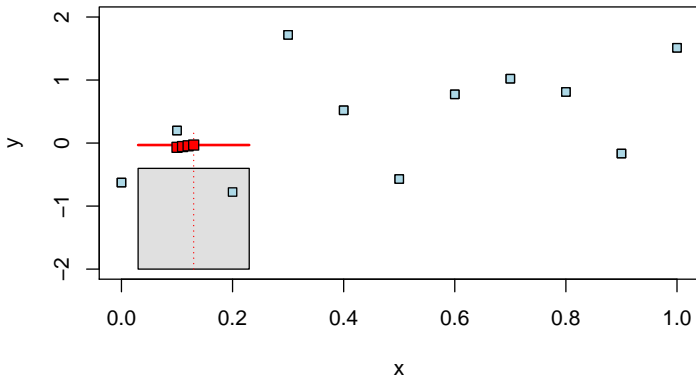
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



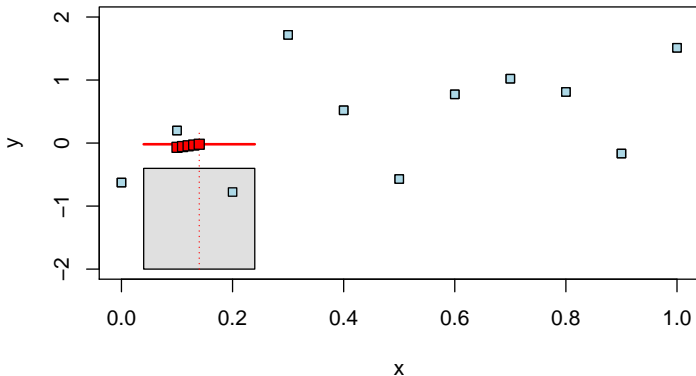
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



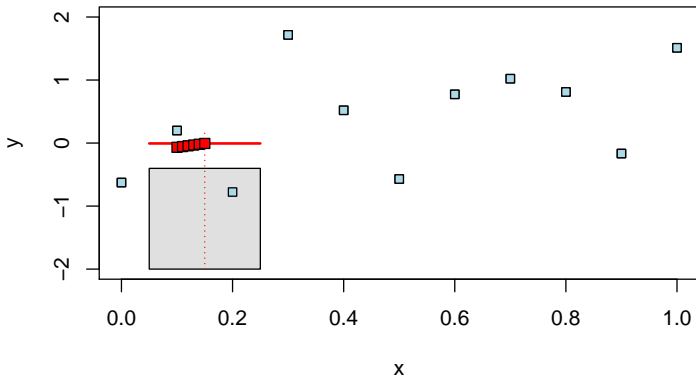
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



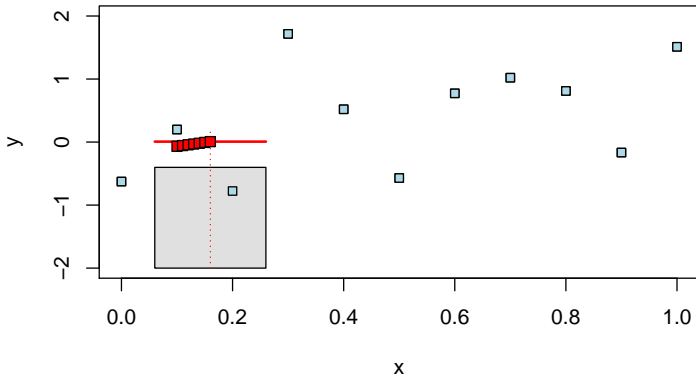
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



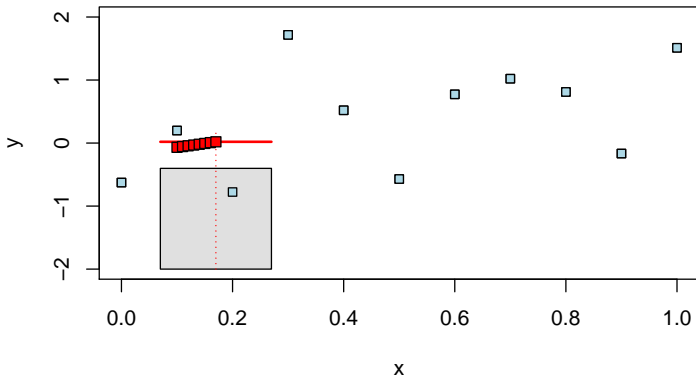
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



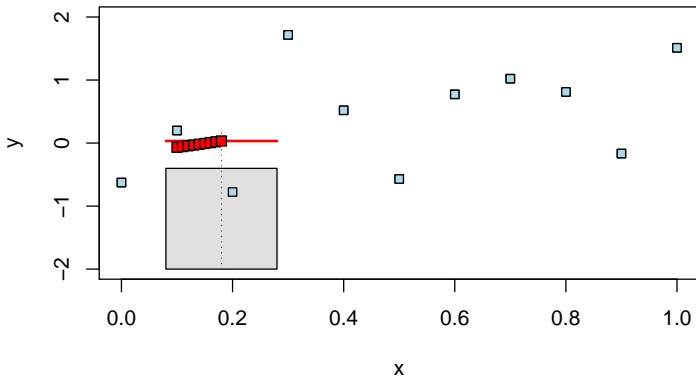
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



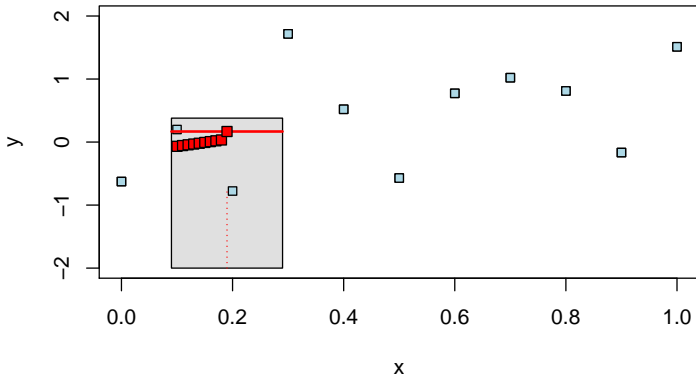
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



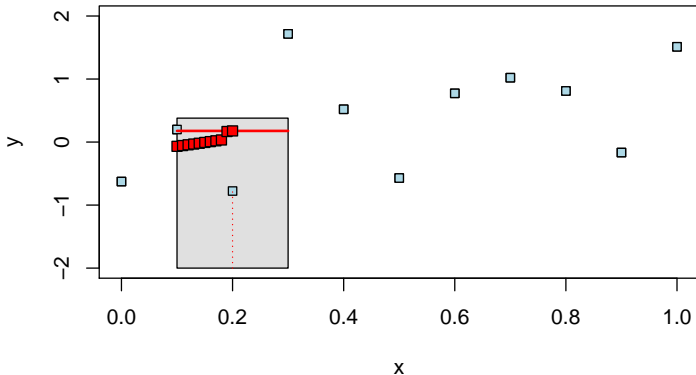
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



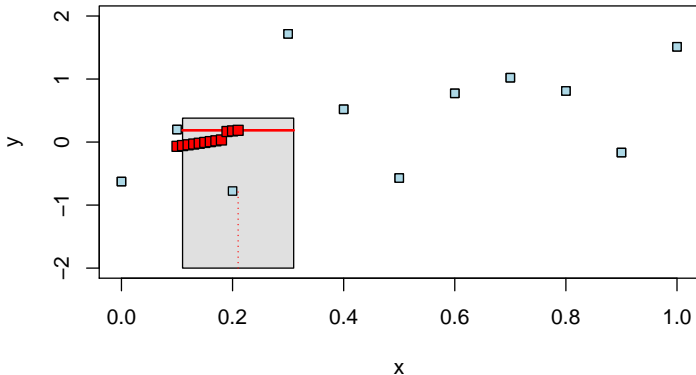
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



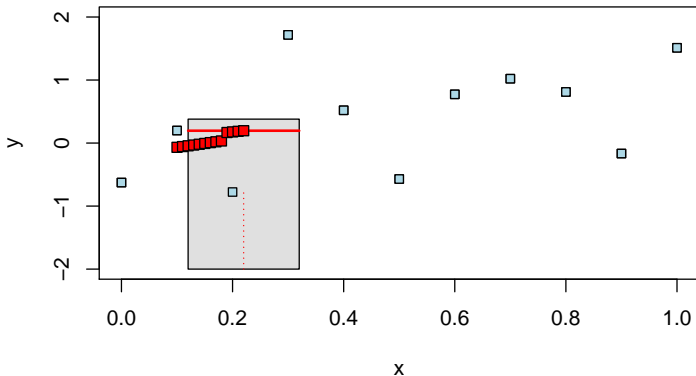
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



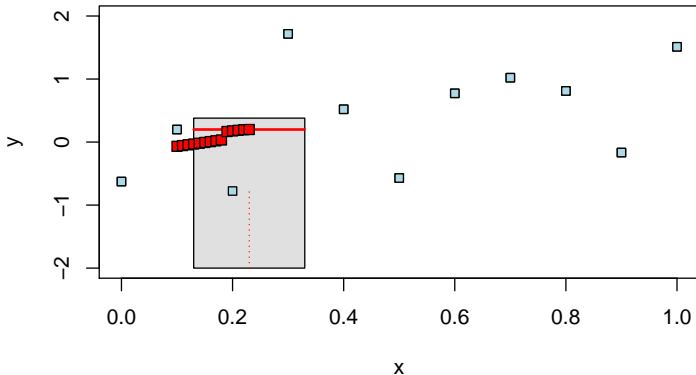
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



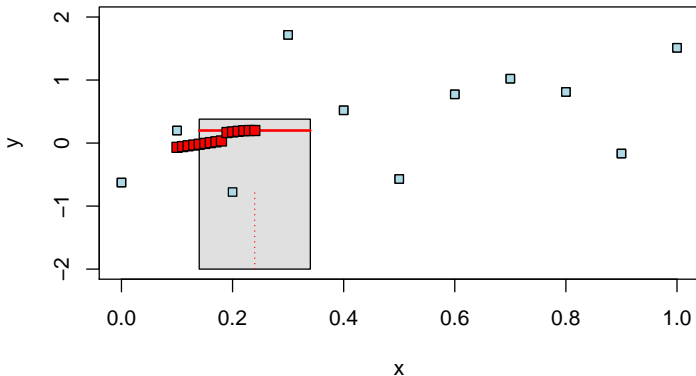
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



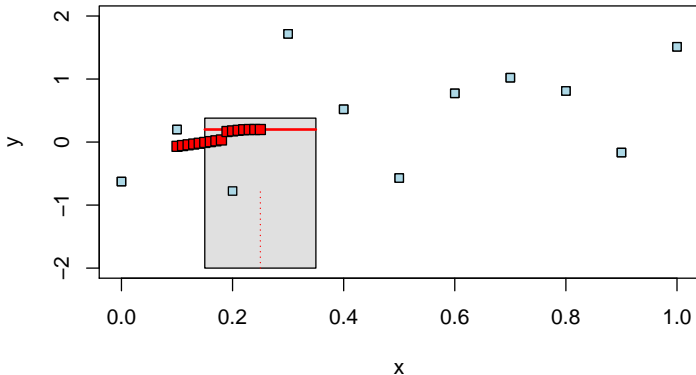
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



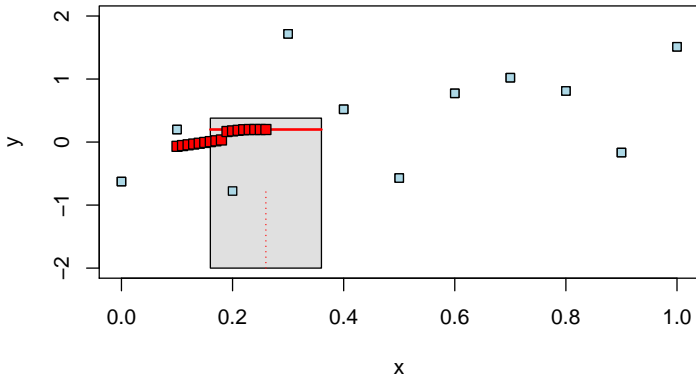
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



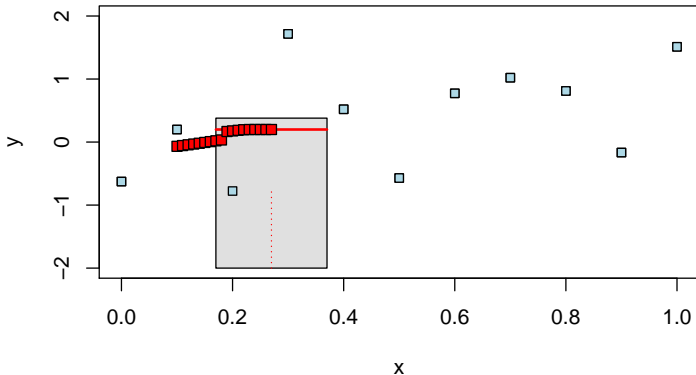
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



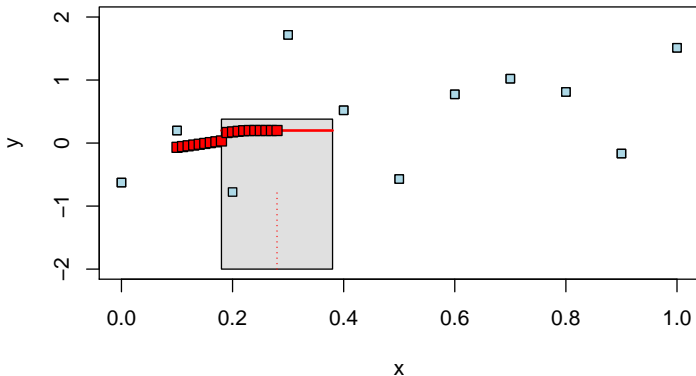
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



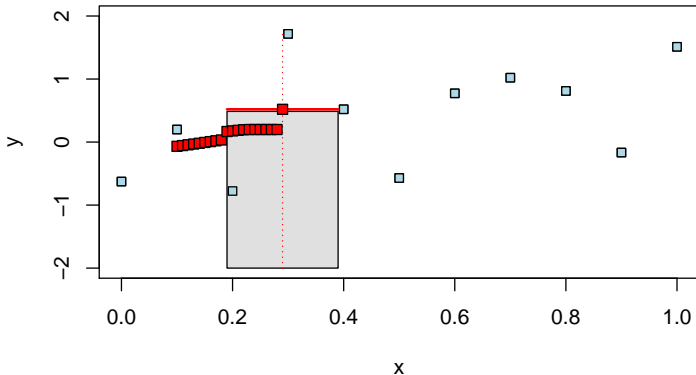
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



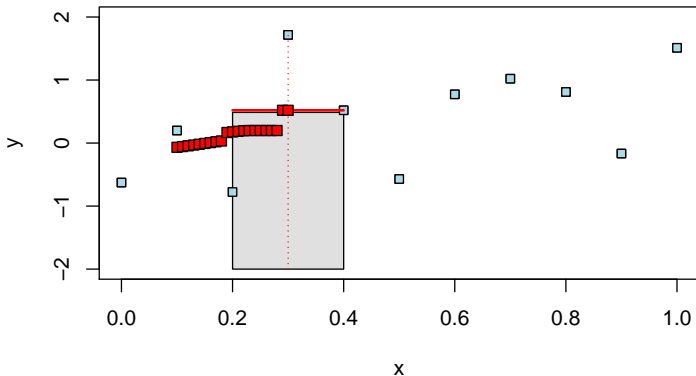
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



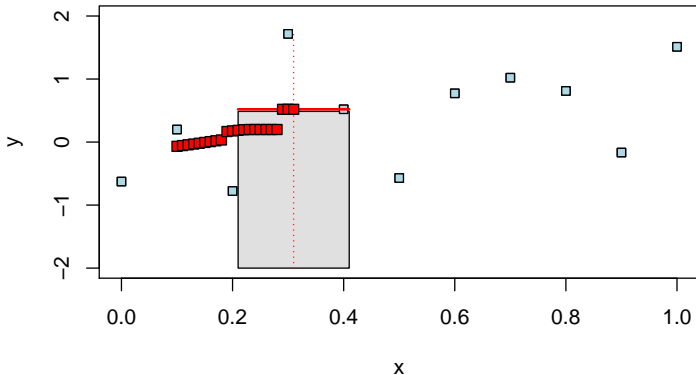
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



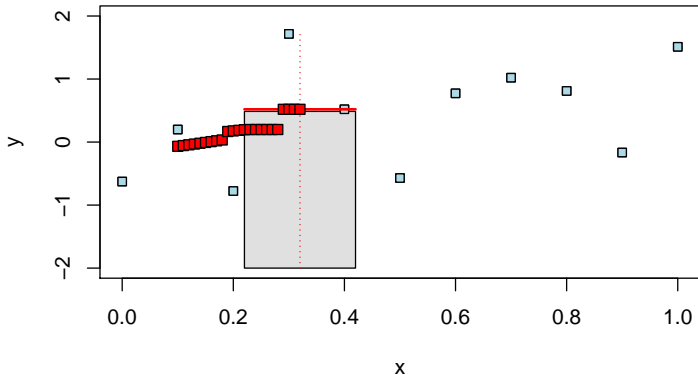
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



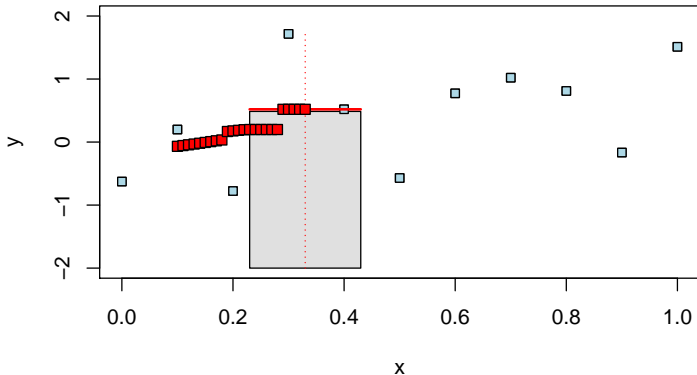
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



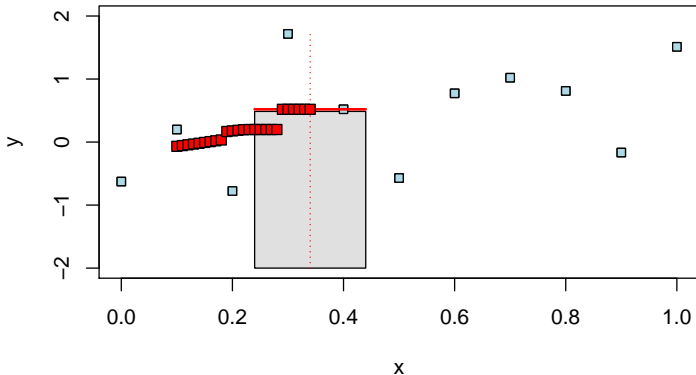
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



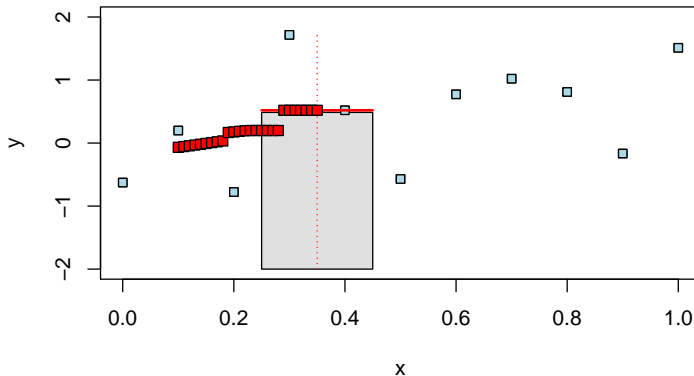
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



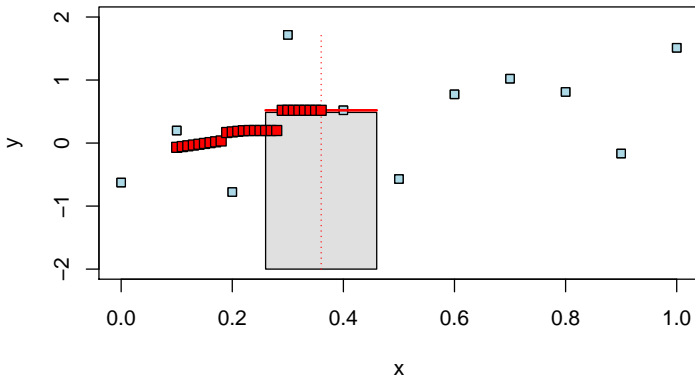
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



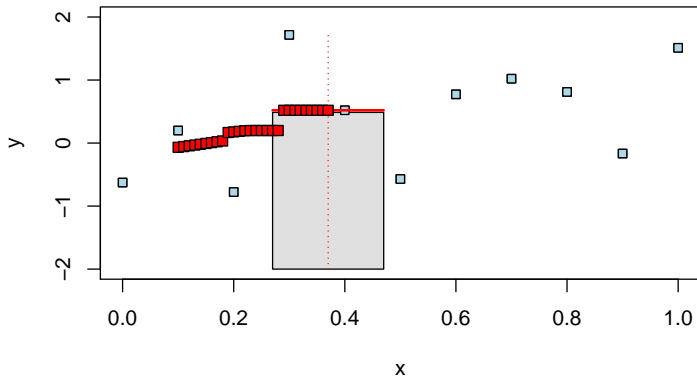
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



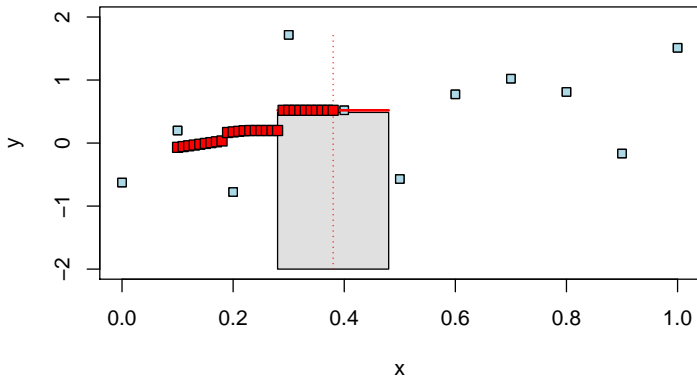
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



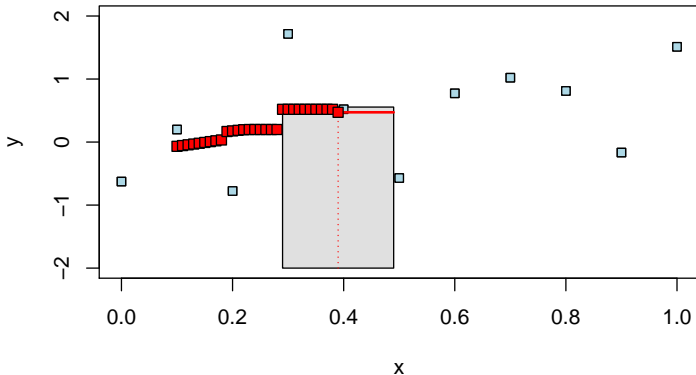
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



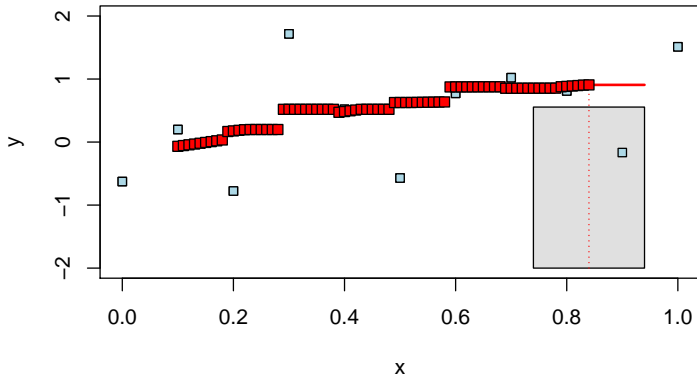
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



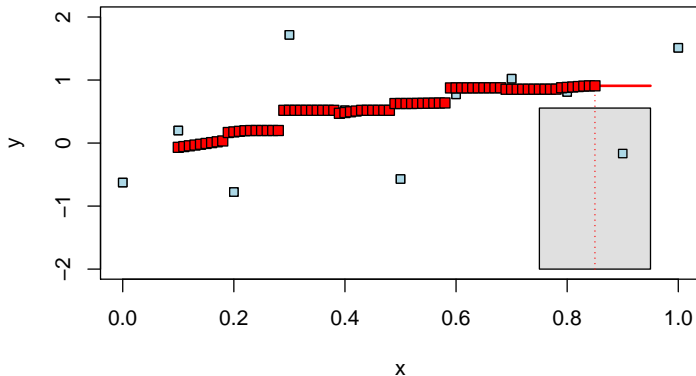
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



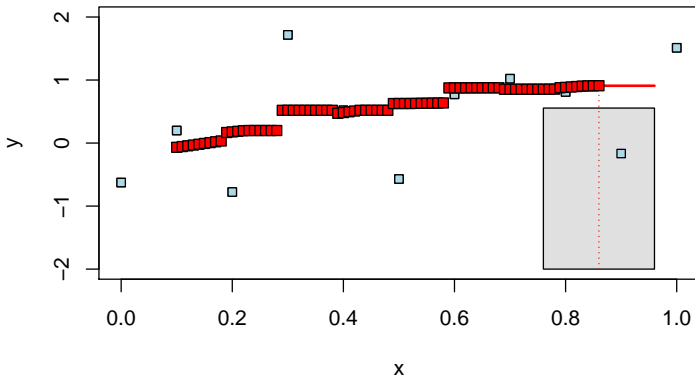
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



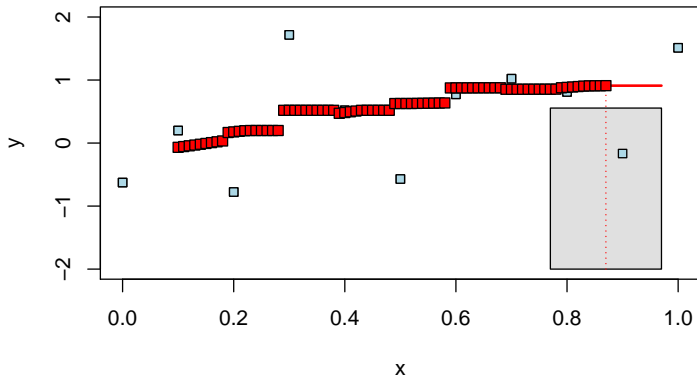
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



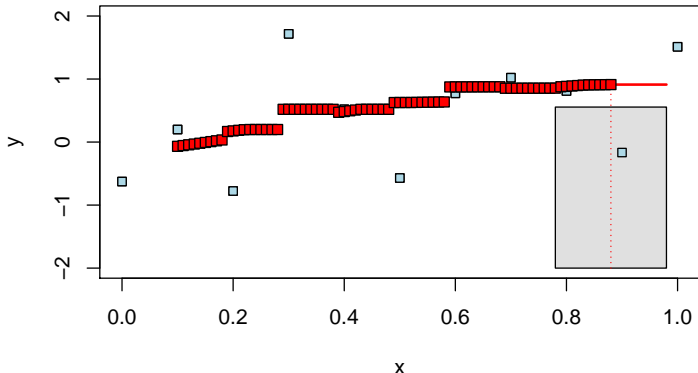
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



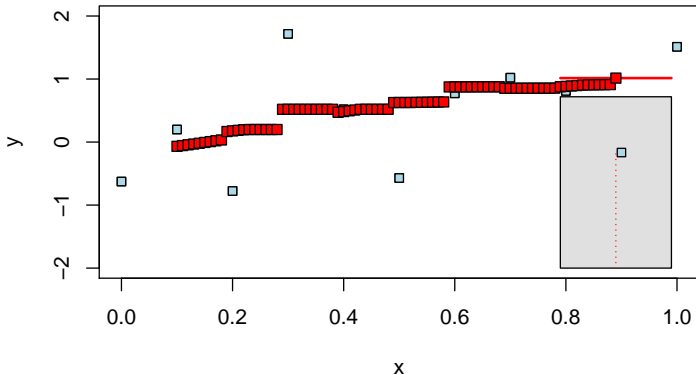
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnou volbu vyhlazovacích vah je možné získat určitým zobecněním hladkou křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



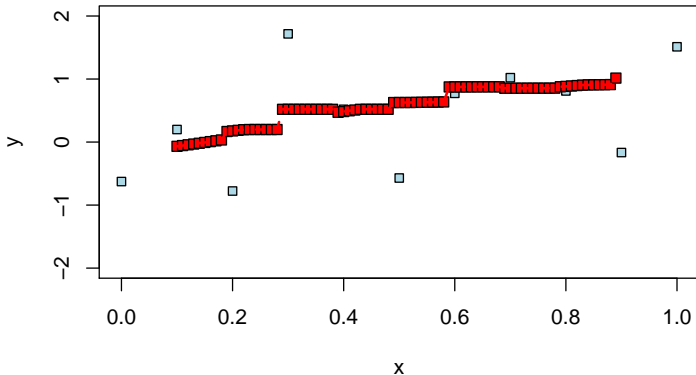
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



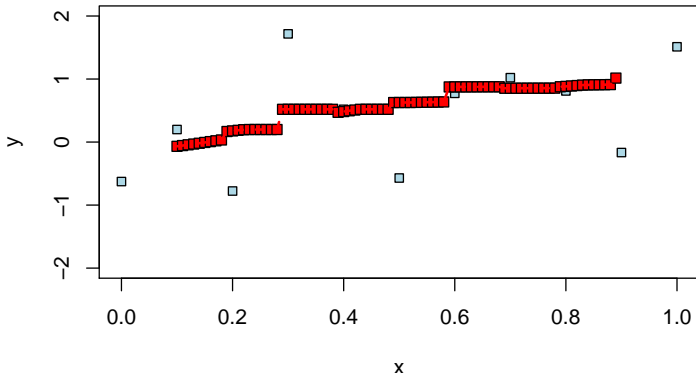
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnou volbu vyhlazovacích vah je možné získat určitým zobecněním hladkou křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnou volbu vyhlazovacích vah je možné získat určitým zobecněním hladkou křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



- Výsledná křivka nevypadá úplně hladce, ale to je z důvodu příliš hrubého gridu bodů z \mathcal{D}) v kterých počítáme vážený průměr.

Konstrukce KP vyrovnáním úseků polynomy

- **IDEA:** váhy w_j pro vyrovnání hodnot y_i volíme tak, že $2r + 1$ členů řady, t.j. hodnoty $y_{i-r}, \dots, y_i, \dots, y_{i+r}$, aproximujeme vhodným polynomem stupně $p \in \mathbb{N}$; Vyrovnána hodnota \hat{y}_i je pak hodnota polynomu, která odpovídá pozorování y_i .
- hodnota $p \in \mathbb{N}$ se nazývá **řád klouzavého průměru**;
- formálně zapsáno, pro pozorování y_{i-r}, \dots, y_{i+r} uvažujeme polynom

$$y_{i+u} \approx c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + \dots + c_p u^p \quad \text{pro } u = -r, \dots, r; \quad (2)$$

- resp. zapsáno v **maticovém tvaře** $\mathbf{y}_{(i:r)} \approx \mathbb{F} \mathbf{c}$, kde

$$\mathbf{y}_{(i:r)} = \begin{pmatrix} y_{i-r} \\ \vdots \\ y_{i+r} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & (-r) & (-r)^2 & \dots & (-r)^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & r & r^2 & \dots & r^p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix}$$

- vyrovnanou hodnotu \hat{y}_i pro y_i pak dostaneme **dosazením** $u = 0$ do (2);

Váhy pomoci projekční matice

- pro část pozorování $\mathbf{y}_{(i:r)} = (y_{i-r}, \dots, y_{i+r})^\top$ máme pro vyrovnání vztah

$$\hat{\mathbf{y}}_{(i:r)} = \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbf{c}};$$

- pro odhadnuté parametry $\hat{\mathbf{c}} = (\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_p)^\top$ zase platí

$$\hat{\mathbf{c}} = (\mathbb{F}^\top \mathbb{F})^{-1} \mathbb{F}^\top \mathbf{y}_{(i:r)};$$

- pro vyrovnané hodnoty $\hat{\mathbf{y}}_{(i:r)} = (\hat{y}_{i-r}, \dots, \hat{y}_{i+r})^\top$ proto dostaneme

$$\hat{\mathbf{y}}_{(i:r)} = \mathbb{F}(\mathbb{F}^\top \mathbb{F})^{-1} \mathbb{F}^\top \mathbf{y}_{(i:r)} = \mathbb{H} \mathbf{y}_{(i:r)};$$

- matice $\mathbb{H} = \mathbb{F}(\mathbb{F}^\top \mathbb{F})^{-1} \mathbb{F}^\top$ se nazývá **projekční matice**;
- projekční matice definuje **linárne zobrazení** z \mathbb{R}^{2r+1} do p rozměrného podprostoru (**projekce z \mathbb{R}^{2r+1} do \mathbb{R}^p**) v \mathbb{R}^{2r+1} ;
- projekční matice \mathbb{H} je typu $(2r+1) \times p$ a v prostředním řádku **obsahuje váhy pro vyrovnání hodnoty y_i** ;

Váhy w_j vs. parametre c_1, \dots, c_p

- pro vyhlazené hodnoty \hat{y}_i , pro $i = r + 1, \dots, n - r$, máme obecně

$$\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^r w_j y_{i+j} = \mathbf{h}_{r+1}^\top \mathbf{y}_{(i:r)} = \hat{c}_1,$$

kde $\mathbf{h}_{r+1} = (h_{(r+1)1}, \dots, h_{(r+1)(2r+1)})^\top = (w_{-r}, \dots, w_r)^\top$, je $(r + 1)$ -ní řádek projekční matice $\mathbb{H} = (\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{2r+1})^\top$;

- maticově můžeme taktiež použít vyjádření ve tvaru

$$\hat{\mathbf{y}}_{(i:r)} = \mathbb{H} \mathbf{y}_{(i:r)} = \mathbb{F} (\mathbb{F}^\top \mathbb{F})^{-1} \mathbb{F}^\top \mathbf{y}_{(i:r)} = \mathbb{F} \hat{\mathbf{c}},$$

přičemž vyhlazená hodnota \hat{y}_i , která nás zajíma, je $(r + 1)$ -ní element vektoru $\hat{\mathbf{y}}_{(i:r)} = (\hat{y}_{i-r}, \dots, \hat{y}_{i+r})^\top$;

- je důležité si uvědomit, že váhy w_{-r}, \dots, w_r nezávisí na indexu $i = r + 1, \dots, n - r$ a pro každou vyhlazenú hodnotu \hat{y}_i jsou stejné; (váhy w_{-r}, \dots, w_r závisí pouze na matici \mathbb{F} , která je pořád stejná)
- naproti tomu odhadnuté parametre $\hat{\mathbf{c}} = (\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_p)^\top$ na indexu $i = r + 1, \dots, n - r$ závisí, a pro každé \hat{y}_i jsou parametre obecně různé; (odhady $\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_p$ totiž závisia na matici \mathbb{F} , ale tiež na vektore $\mathbf{y}_{(i:r)}$)

Odhad parametrů c_0, \dots, c_p

- ❑ odhad parametrů c_0, \dots, c_p pomocí metody nejmenších čtverců;

Samostatný úkol

Jak vypadá v tomto případě matice \mathbb{F} a jak se mění v závislosti na požadované hodnotě y_i , pro $i = -r, \dots, r$, kterou chceme vyhlazovat?

Jak vypadá projekční soustava normálních rovnic a příslušná projekční matice?

Příklad

Uvažujte kubický polynom pro $p = 3$ a $r = 2$. Polynom pro určení váh je ve tvaru $y_{i+u} \approx c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + c_3 u^3$, kde $c_0, \dots, c_3 \in \mathbb{R}$ jsou neznámé parametry.

- ❑ sestavte příslušnou matici \mathbb{F} ;
- ❑ nájděte projekční matici $\mathbb{H} = \mathbb{F}(\mathbb{F}^T \mathbb{F})^{-1} \mathbb{F}^T$;
- ❑ nájděte váhy w_j , pro $j = -2, 1, 0, 1, 2$ a spočtěte \hat{y}_i , pro $i = 3, \dots, n - 2$;

Vyrovnané hodnoty a predikce

- na rozdíl od klasických aritmetických klouzavých průměrů je možné využít vážené klouzavé průměry aj k vyrovnání počátečních a koncových hodnot;
- pro vyhlazení napr. koncového úseku stačí v (2) vhodne dosadit za u ;

Napr. pro $r = 1$ a $p = 1$, máme $y_{i+u} \approx c_0 + c_1 u$, pro $u = -1, 0, 1$ a $i = 2, \dots, n-1$;

Pro vylazení y_n dosadíme: $i \leftarrow n-1$ a $u \leftarrow 1 \Rightarrow y_n = y_{(n-1)+1} \approx c_0 + c_1$ a $\hat{y}_n = \hat{c}_0 + \hat{c}_1$;

- analogicky lze použít výraz (2) i pro budoucí predikce;

Napr. pro $r = 2$ a $p = 2$, máme $y_{i+u} \approx c_0 + c_1 u + c_2 u^2$, pro $u = -2, \dots, 2$ a $i = 3, \dots, n-2$;

Predikce y_{n+1} : $i \leftarrow n-2$ a $u \leftarrow 3 \Rightarrow y_{n+1} = y_{(n-2)+3} \approx c_0 + 3c_1 + 9c_2$ a $\hat{y}_{n+1} = \hat{c}_0 + 3\hat{c}_1 + 9\hat{c}_2$;

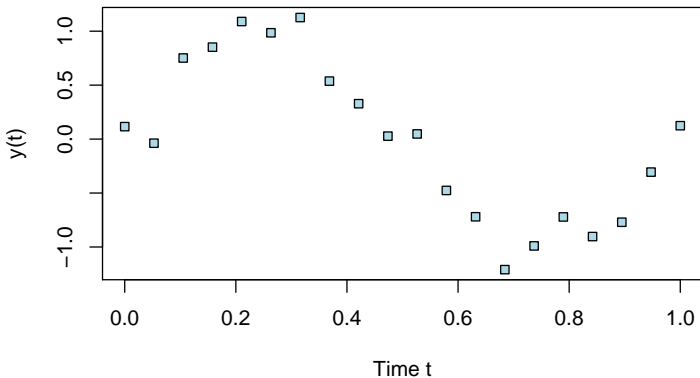
Príklad

Uvažujte kubický polynom pro $p = 3$ a $r = 2$. Polynom pro určení váh je ve tvaru $y_{i+u} \approx c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + c_3 u^3$, kde $c_0, \dots, c_3 \in \mathbb{R}$ jsou neznáme parametry.

- spočtete predikci o jeden krok dopředu a explicitně vyjadřite váhy pro vážený průměr;

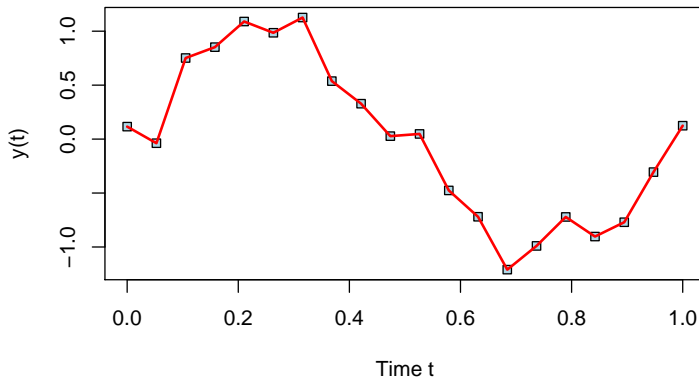
Vychýlení vs. variabilita

- ❑ Jak zvolit/vybrat **vhodnou míru vyhlazení**?
- ❑ Lze aplikovat **nějaké optimální kritérium** pomoci kterého se rozhodnout?



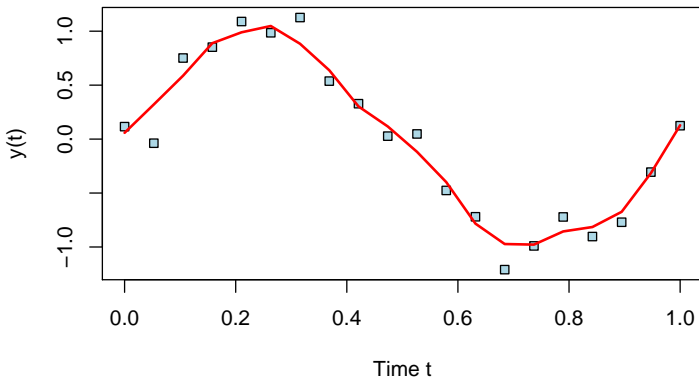
Vychýlení vs. variabilita

- ❑ Jak zvolit/vybrat vhodnou míru vyhlazení?
- ❑ Lze aplikovat nějaké optimální kritérium pomoci kterého se rozhodnout?



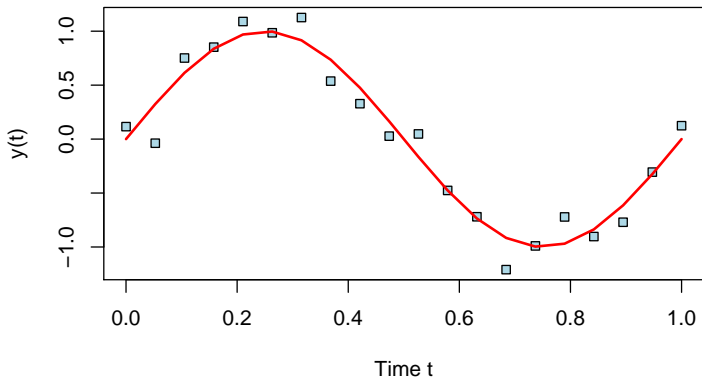
Vychýlení vs. variabilita

- ❑ Jak zvolit/vybrat vhodnou míru vyhlazení?
- ❑ Lze aplikovat nějaké optimální kritérium pomoci kterého se rozhodnout?



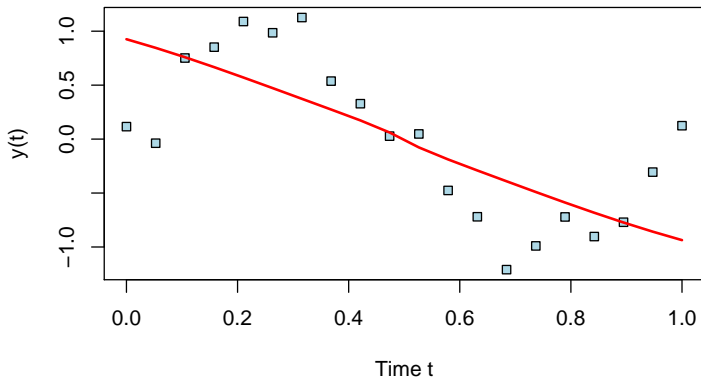
Vychýlení vs. variabilita

- ❑ Jak zvolit/vybrat vhodnou míru vyhlazení?
- ❑ Lze aplikovat nějaké optimální kritérium pomoci kterého se rozhodnout?



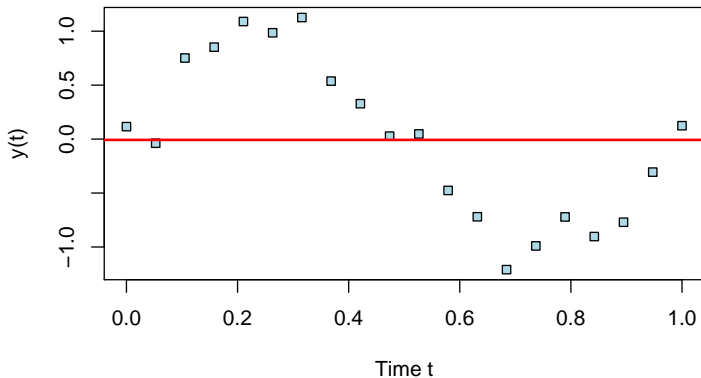
Vychýlení vs. variabilita

- ❑ Jak zvolit/vybrat vhodnou míru vyhlazení?
- ❑ Lze aplikovat nějaké optimální kritérium pomoci kterého se rozhodnout?



Vychýlení vs. variabilita

- ❑ Jak zvolit/vybrat **vhodnou míru vyhlazení**?
- ❑ Lze aplikovat **nějaké optimální kritérium** pomoci kterého se rozhodnout?



Whittacker-Hendersonová metoda

Základnou úlohou vyhlazování dat je odhadnout hladký, pomalu se měnící trend. Zároveň chceme dosáhnout co nejlepší zhodu mezi původními daty a vylazenými daty (zhodu mezi daty a modelem);

- ❑ **Dokonalé vyhlazení**
⇒ příliš velký součet čtverců odchylek, a malá zhoda s původními daty;
- ❑ **Dokonalá zhoda s daty**
⇒ nulový součet čtverců odchylek, příliš velká variabilita, interpolace;

Whittacker-Hendersonová metoda

Základnou úlohou vyhlazování dat je odhadnout hladký, pomalu se měnící trend. Zároveň chceme dosáhnout co nejlepší zhodu mezi původními daty a vylazenými daty (zhodu mezi daty a modelem);

- ❑ **Dokonalé vyhlazení**
⇒ příliš velký součet čtverců odchylek, a malá zhoda s původními daty;
- ❑ **Dokonalá zhoda s daty**
⇒ nulový součet čtverců odchylek, příliš velká variabilita, interpolace;

Whittacker/Hendersonova metoda

Metoda, která umožňuje hledat kompromis mezi těmito dvěma požadavky tím, že jim přiděluje rozdílnou váhu. Vyrovnané hodnoty minimalizují kritérium

$$M(\hat{\mathbf{y}}) = \underbrace{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}_{\text{součet čtverců}} + \lambda \cdot \underbrace{\sum_{i=r+1}^n (\Delta^r \hat{y}_i)^2}_{\text{penalta}},$$

kde $\lambda > 0$ je nějaký vhodně zvolený ladící parametr.

Whittacker-Hendersonová metoda

- ❑ W-H metoda nepředpokládá žádný konkrétní tvar prokladané křivky;
- ❑ symbol $\Delta^r \hat{y}_i$ označuje rekuzivnou r -tou zpětnou diferenci posloupnosti \hat{y}_i ;
- ❑ obecně platí, že $\Delta^0 \hat{y}_i = \hat{y}_i$ a $\Delta^1 \hat{y}_i = \Delta \hat{y}_i = \hat{y}_i - \hat{y}_{i-1}$;
- ❑ pro r -tou zpětnou diferenci platí $\Delta^r \hat{y}_i = \Delta^{r-1} \hat{y}_i - \Delta^{r-1} \hat{y}_{i-1}$;
- ❑ obecně lze také zapsat pomocí binomické formule

$$\Delta^r \hat{y}_i = \binom{r}{0} \hat{y}_i - \binom{r}{1} \hat{y}_{i-1} + \cdots + (-1)^r \binom{r}{r} \hat{y}_{i-r},$$

Whittacker-Hendersonová metoda

- ❑ W-H metoda nepředpokládá žádný konkrétní tvar prokladané křivky;
- ❑ symbol $\Delta^r \hat{y}_i$ označuje rekurzivnou r -tou zpětnou diferencí posloupnosti \hat{y}_i ;
- ❑ obecně platí, že $\Delta^0 \hat{y}_i = \hat{y}_i$ a $\Delta^1 \hat{y}_i = \Delta \hat{y}_i = \hat{y}_i - \hat{y}_{i-1}$;
- ❑ pro r -tou zpětnou diferencí platí $\Delta^r \hat{y}_i = \Delta^{r-1} \hat{y}_i - \Delta^{r-1} \hat{y}_{i-1}$;
- ❑ obecně lze také zapsat pomocí binomické formule

$$\Delta^r \hat{y}_i = \binom{r}{0} \hat{y}_i - \binom{r}{1} \hat{y}_{i-1} + \dots + (-1)^r \binom{r}{r} \hat{y}_{i-r},$$

IDEA:

Rekurzivní zpětná diference je diskrétné zobecnění pojmu derivace. Základnou myšlenkou je penalizovat příliš velké rozdiely v danej r -tej diferencii. Napr. pro $r = 1$ penalizujeme příliš velké rozdiely v první diferencii, t.j. pro $\lambda \rightarrow \infty$ dostaneme vyhlazení ve tvaru přímky.

Whittacker-Hendersonová metoda

- kritérium $M(\hat{\mathbf{y}})$ lze zapsát aj v maticovém tvaru jako

$$M(\hat{\mathbf{y}}) = (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})^\top (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) + \lambda \cdot \hat{\mathbf{y}}^\top \mathbb{K}^\top \mathbb{K} \hat{\mathbf{y}};$$

- matice \mathbb{K} je typu $(n - r) \times n$ a ma tvar

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} (-1)^r & \dots & -\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & (-1)^r & \dots & -\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & (-1)^r & \dots & -\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} & 1 \end{pmatrix}$$

- derivováním podle $\hat{\mathbf{y}}$ dostaneme soustavu normálních rovnic

$$\nabla_{\hat{\mathbf{y}}} M(\hat{\mathbf{y}}) = \left(\frac{\partial M(\hat{\mathbf{y}})}{\partial \hat{y}_1}, \dots, \frac{\partial M(\hat{\mathbf{y}})}{\partial \hat{y}_n} \right) = 2\mathbf{y} - 2\hat{\mathbf{y}} + 2\lambda \mathbb{K}^\top \mathbb{K} \hat{\mathbf{y}}$$

- riešime soustavu rovnic $\nabla_{\hat{\mathbf{y}}} M(\hat{\mathbf{y}}) = 0 \implies$ řešení ve tvaru

$$\hat{\mathbf{y}} = (\mathbb{I} + \lambda \mathbb{K}^\top \mathbb{K})^{-1} \mathbf{y};$$

To conclude

- ❑ Data jako posloupnost **deterministických** nebo **stochastických** veličiny;
- ❑ **Různé metody vyhlazování dat** – prokládání vhodnou hladkou křivkou;
 - ❑ Parametrické metody
(jednoduché, ale málo flexibilné)
 - ❑ Semiparametrické metody
(vyrovnání jako lineární kombinace funkcí báze, poměrně dobrá flexibilita)
 - ❑ Neparametrické metody
(bez omezení na tvar prokládané křivky, nelze ale vyjádřit explicitně)
- ❑ **V některých případech lze konstruovat predikci do budoucnosti;**
(*není vhodné používat na predikci o moc kroků dopředu...*)
- ❑ **Whitttacker-Henderson - regularizační neparametrický postup;**
(*vhodnou volbou $\lambda > 0$ a $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ lze dosáhnout požadovaný tvar*)
- ❑ **Při vyhlazování dat pamatovat na vztah mezi vychýlením a variabilitou;**
(*přílišné vyhlazení \equiv malá variabilita a příliš velké odchýlky | vice versa*)

Kapitola 2

Diferenciální rovnice a modely růstu

Modely růstu – motivace

Modely, kde velikost změny (růstu) závisí na aktuálním stavu...
(*obecně řečeno, jedná se o model dynamiky nějaké populace*)

Široké uplatnění těchto modelů v ...

- ❑ **biologii**
(růst populace mikroorganismů, viry, ...)
- ❑ **fyzice**
(štiepenie, nukleárne reakcie, lavíny, ...)
- ❑ **ekonómia a finance**
(pyramidové schémy, modely kapitálu, ...)
- ❑ **IT a informatika**
(výpočetná síla a zložitost, singularity, ...)

Modely růstu – formálně

- ❑ jedná se **víceparametrický deterministický (nelineární) model** pro modelování růstu (stavu) nějaké populace (počet obyvatelstva, zásoby nějakého statku, objem komodity, atd');
- ❑ zaužívané značení: $y(t) \geq 0$ jako stav (velikost) populace v čase $t \in \mathbb{R}$;
- ❑ model určen pomocí **diferenciální rovnice**, čo umožňuje vyjádřit **závislost rychlosti růstu na velikosti populace** v čase $t \in \mathbb{R}$;
- ❑ **IDEA**: očekáváme, že populace by měla růst rychleji, když je velká, a naopak zase pomaleji, když je malá;
- ❑ diferenciální rovnice často v tvaru, který v určitém zmyslu modeluje **lineární závislost růstu na velikosti**:

$$\frac{dy}{dt} = a \cdot y \cdot g\left(\frac{y}{k}\right)$$

kde $y \equiv y(t)$ je funkce $t \in \mathbb{R}$ a $a, k > 0$ jsou **neznáme parametry**;

Korekce lineární závislosti růstu na velikosti

Funkce $g(\cdot)$ v zápisu diferenciální rovnice se používá ke korekci lineární závislosti růstu na velikosti populace – bez tehle korekce je totiž většina modelů praktický nesmyslných;

- **Volba $g(x) = 1$: Klasický model exponenciálního růstu**

$$\frac{dy}{dt} = a \cdot y \implies \text{řešení } y(t) = be^{at};$$

→ pro nějaké parametry $a, b > 0$;

- **Volba $g(x) = 1 - x$: Model logistického růstu**

$$\frac{dy}{dt} = a \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{k}\right) \implies \text{řešení } y(t) = \frac{k}{1 + be^{-at}};$$

→ pro nějaké parametry $a, b, k > 0$;

- **Volba $g(x) = -\log x$: Model Gomertzovej křivky**

$$\frac{dy}{dt} = -a \cdot y \cdot \log\left(\frac{y}{k}\right) \implies \text{řešení } y(t) = k \cdot \exp\{-be^{-at}\};$$

→ pro nějaké parametry $a, b, k > 0$;

Modely růstu

Príklad

Uvažujte jednoduchý model exponenciálního růstu. Ukážete, že funkce

$$y(t) = be^{at}$$

je skutečně řešením diferenciální rovnice $dy/dt = ay$.

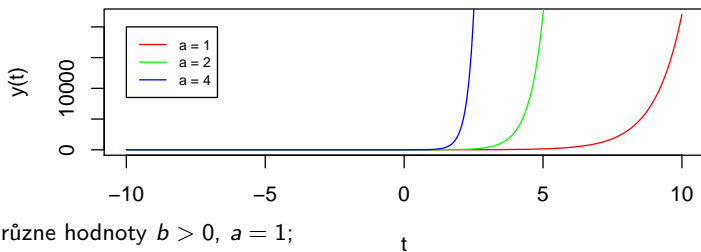
Príklad

Uvažujte model logistického růstu pro nějaké obecné $k > 0$.

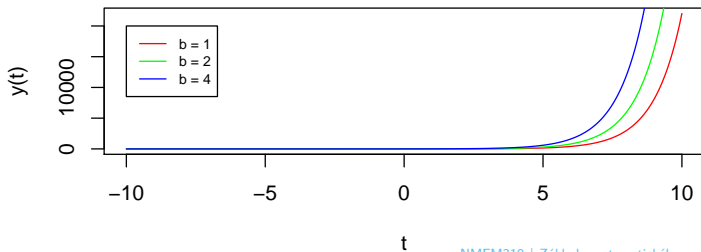
- ukážete, že funkce $y(t) = \frac{k}{1+be^{-at}}$ je řešením diferenciální rovnice $dy/dt = ay(1 - y/k)$
- nájde inflexní bod a dokážete, že křivka logistického růstu je symetrická kolem tohoto bodu;

Modely exponenciálního růstu

- různé hodnoty $a > 0$, $b = 1$;

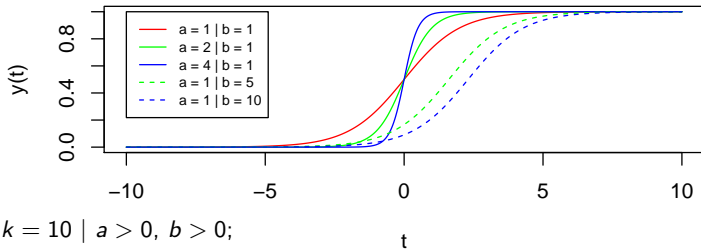


- různé hodnoty $b > 0$, $a = 1$;

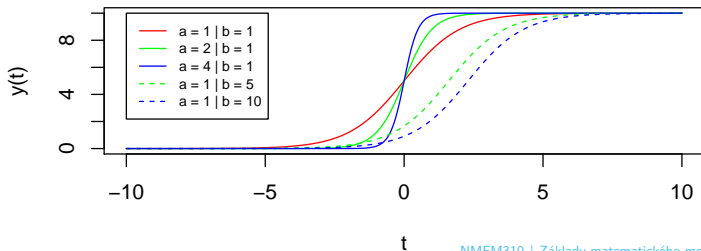


Modely logistického růstu

□ $k = 1 \mid a > 0, b > 0;$

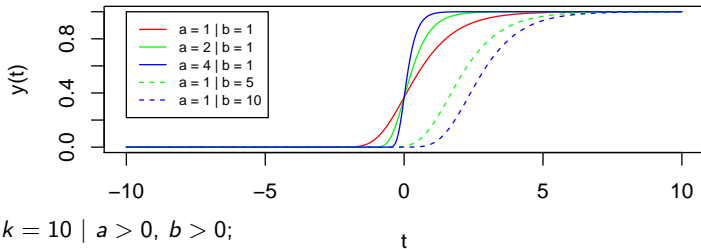


□ $k = 10 \mid a > 0, b > 0;$

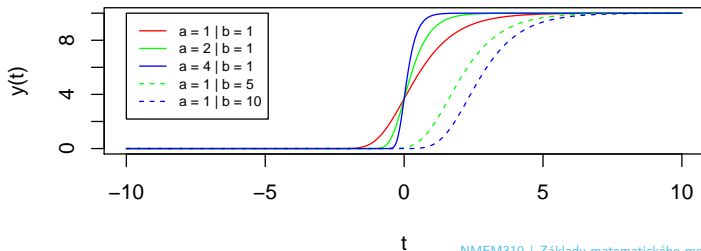


Modely Gompertzové křivky

□ $k = 1 \mid a > 0, b > 0;$



□ $k = 10 \mid a > 0, b > 0;$



Modely růstu – aplikace

❑ Model exponenciálního růstu

- ❑ model neomezeného růstu při neomezených zdrojích;
- ❑ aplikovatelný pouze v krátkodobem časovém horizontu;
- ❑ v praxi většinou nedostupnost zdrojů při určitém stavu populace;

❑ Model logistického růstu

- ❑ model s korekcí pro saturovanou hodnotu – parametr $k > 0$;
- ❑ inflexní bod pro $t_0 = \frac{\ln b}{a}$, kde $y(t_0) = k/2$ (symetrie vzhledem k t_0);
- ❑ pro celkový stav populace vždy platí, že $0 < y(t) < k$ pro $t \in \mathbb{R}$;
- ❑ hodnota $(1 - y/k)$ omezuje nové přírůstky pro velkou populaci (málo zdrojů) – jedná se o tzv. sigmoidální křivku (sigmoid function);

❑ Gompertzová křivka

- ❑ zbecněná sigmoidální křivka (prudký nárůst, pomalejší saturace);
- ❑ inflexní bod pro $t \in \mathbb{R}$, kde $y(t) = k/e$ (ale není symetrická);
- ❑ častá aplikace např. pro tabulky úmrtnosti, růst nádorů, počet mobilních telefonů v populaci, a pod.;

Odhady parametrů pro modely růstu

Základný problém spočíva v tom, že funkce, které chceme prokládat daty, nejsou lineární funkcí hledaných (neznámých) parametrů – koeficientů.

Nelze proto přímo aplikovat metodu nejmenších čtverců.

Řešení:

- ❑ preparametrizování modelu do lineárního tvaru;
- ❑ aproximace modelu a aplikovat iterativní postupy;
- ❑ numerické (aproximativní) řešení pomocí počítačů;

Odhady parametrů pro modely růstu

Základný problém spočíva v tom, že funkce, které chceme prokládat daty, nejsou lineární funkcí hledaných (neznámých) parametrů – koeficientů.

Nelze proto přímo aplikovat metodu nejmenších čtverců.

Řešení:

- preparametrizování modelu do lineárního tvaru;
- aproximace modelu a aplikovat iterativní postupy;
- numerické (aproximativní) řešení pomocí počítačů;

Aplikace na data:

$$\begin{array}{c|cccccc} \mathbf{t} & t_1 & t_2 & t_3 & \dots & t_n \\ \mathbf{y} & y(t_1) & y(t_2) & y(t_3) & \dots & y(t_n) \end{array}$$

Odhad parametrů pro exponenciální růst

- základní diferenciální rovnice a příslušné řešení:

$$\frac{dy}{dt} = a \cdot y \quad \text{a} \quad y(t) = be^{at},$$

pro nějaké neznáme parametry $a, b > 0$;

- rovnici lze logaritmovat a vyjádřit ve tvaru

$$\log(y(t)) = \log(b) + at;$$

- následně lze metodu nejmenších čtverců aplikovat na data

$$(t_1, \log(y(t_1)))^\top, \dots, (t_n, \log(y(t_n)))^\top,$$

a odhadnout neznáme parametry $a, b \in \mathbb{R}$

Samostatný úkol

Uvažujte jednoduchý exponenciální růst a nájděte řešení pro odhad parametrů $\log(b) \in \mathbb{R}$ a $a > 0$. Vyjádřete příslušnou matici \mathbb{F} a spočtěte také projekční matici \mathbb{H} . Nájděte vhodné odhady pro $a, b > 0$.

Odhad parametrů pro logistický růst

- základní diferenciální rovnice a příslušné řešení:

$$\frac{dy}{dt} = a \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{k}\right) \quad \text{a} \quad y(t) = \frac{k}{1 + be^{-at}};$$

pro nějaké neznáme parametry $a, b > 0$;

- diferenciální rovnici lze aproximovat pomocí diferenční rovnice

$$\frac{\Delta y_{t_i}}{\Delta t_i} = a y_{t_i} \left(1 - \frac{y_{t_i}}{k}\right)$$

- následně lze metodu nejmenších čtverců aplikovat na data

$$\left(y_{t_2}, \frac{\Delta y_{t_2}}{\Delta t_2 y_{t_2}}\right)^\top, \dots, \left(y_{t_n}, \frac{\Delta y_{t_n}}{\Delta t_n y_{t_n}}\right)^\top; \quad (3)$$

pro parametre a a a/k . Parametr $b > 0$ pak vyjádřit z rovnice pro řešení.

Samostatný úkol

Uvažujte jednoduchý logistický růst a nájděte řešení pro odhad parametrů $a, k > 0$. Nájděte také vhodný odhad pro parametr $b > 0$.

Vylepšení odhadů pro logistický růst

Odhady parametrů $a, b, k > 0$ získané v předchozím kroku jsou hodně hrubé jelikož jsme diferenciální rovnici diskretizovali – t.j. aproximovali pomocí diferenční rovnice. Získané odhady ale lze vylepšit – opět pomocí metody nejmenších čtverců.

- ☐ řešení diferenciální rovnice lze také parametrizovat jako

$$y(t) = \frac{k}{1 + be^{-at}} = \frac{d}{c + e^{-(\hat{a}_1 + \epsilon)t}},$$

pro $a = \hat{a}_1 + \epsilon$, $b = \frac{1}{c}$ a $k = \frac{d}{c}$ (kde \hat{a}_1 je odhad z předchozího kroku).

- ☐ pro hodnoty ϵt hodně malé, lze použít Taylorov rozvoj

$$e^{-\epsilon t} \approx 1 - \epsilon t;$$

- ☐ následně dostaneme aproximaci pro y_{t_i} ve tvaru

$$y_{t_i} \approx \frac{d}{c + e^{-\hat{a}_1 t_i} (1 - \epsilon t_i)}, \quad i = 1, \dots, n;$$

- ☐ metodu nejmenších čtverců následně aplikovat na model

$$y_{t_i} e^{-\hat{a}_1 t_i} \approx d - c y_{t_i} + \epsilon t_i y_{t_i} e^{-\hat{a}_1 t_i}, \quad i = 1, \dots, n;$$

Vylepšení odhadů pro logistický růst

Samostatný úkol

Uvažujte logistický model růstu a navrhněte, jak by měla vypadat matice \mathbb{F} pro vylepšení odhadu parametrů $a, b, k > 0$ pomoci nové parametrizace

$$y(t) = \frac{k}{1 + be^{-at}} = \frac{d}{c + e^{-(\hat{a}_1 + \epsilon)t}},$$

pro $a = \hat{a}_1 + \epsilon$, $b = \frac{1}{c}$ a $k = \frac{d}{c}$, kde \hat{a}_1 je odhad získaný metodou nejmenších čtverců, aplikovaných na data v (3). Nайдěte soustavu lineárních rovnic pro odhad neznámých parametrů d, c a ϵ .

- ❑ dosazením odhadů \hat{d} , \hat{c} a $\hat{\epsilon}$ do vyjádření původních parametrů a, b a k dostaneme vylepšené odhady \hat{a} , \hat{b} a \hat{k} ;
- ❑ tenhle postup lze iterativně opakovat a získat ještě přesnější odhady;

Zhrnutí předchozí přednášky/opakování

- ❑ **Diferenciální modely a modely růstu** jako vhodné a užitečné nástroje pro modelování růstu populací v závislosti na jejich velikosti.
- ❑ Jedná se o **nelineární parametrické modely**, přičemž na odhad neznámých parametrů nelze přímo aplikovat metodu nejmenších čtverců.
 - ❑ **Model exponenciálního růstu** – jednoduchý model ale aplikovatelný pouze v krátkodobem časovém horizontu (předpoklad neomezeného (lineárního) růstů při neomezených zdrojích);
 - ❑ **Model logistického růstu** – modifikace předchozího modelu pomocí dodatečného parametru – tzv. saturační hladiny pro maximální úroveň modelované populace;
 - ❑ **Model Gompertzovej křivky** – rozšíření modelu logistického růstu pro případy s nesymetickým počátečním nárůstem a konečnou saturací – model asymetrický kolem inflexního bodu;
- ❑ **Odhady neznámých parametrů** v těchto modelech pomocí iterativních postupů, aproximací, nebo přeparametrizování původních rovnic, tak aby bylo možné aplikovat **metodu nejmenších čtverců**;

Newton-Raphson: Algoritmus

IDEA: Odhad neznámých parametrů přímo pomocí minimalizace součtu čtverců – hledáme ale **argument minima nelineární funkce**.

Napr. pro logistickou křivku řešíme

$$S(a, b, k) = \underset{a, b, k > 0}{\text{Argmin}} \sum_{i=1}^n \left(y_{t_i} - \frac{k}{1 + be^{-at_i}} \right)^2,$$

kde předpokládáme, že máme pozorování y_{t_1}, \dots, y_{t_n} v časech t_1, \dots, t_n ;

- předpokládáme, že existují nějaké **počátečné hodnoty** $a_0, b_0, k_0 > 0$, které jsou dostatečně blízko skutečným (neznámým) hodnotám, pro které je dosaženo minimum;
- **Newton-Raphsonová metoda** pak spočívá v aproximaci $S(a, b, k)$ pomocí Taylorovej řady v okolí bodu $(a_0, b_0, k_0)^T$;
- opakovaným postupem – **iteracemi** – získáme finální řešení;
(finální řešení je pouze aproximace skutečného řešení... dokonalost aproximace závisí od volby počátečných hodnot $a_0, b_0, k_0 > 0$ a také od celkového počtu uskutečněných iterací)

Newton-Raphson: Teoretické odvození

- Taylorov rozvoj pro $S(a, b, k)$ v bodě (a_0, b_0, k_0) :

$$\begin{aligned} S(a, b, k) &= S(a_0, b_0, k_0) + \nabla S(a_0, b_0, k_0)^\top (a - a_0, b - b_0, k - k_0)^\top \\ &\quad + \frac{1}{2} (a - a_0, b - b_0, k - k_0) \nabla^2 S(a_0, b_0, k_0) (a - a_0, b - b_0, k - k_0)^\top \\ &\quad + R(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{k}); \end{aligned}$$

- hledáme bod, pro který $\nabla S(a, b, k) = 0$, teda

$$\nabla S(a_0, b_0, k_0) = (-1) \cdot \nabla^2 S(a_0, b_0, k_0) (a - a_0, b - b_0, k - k_0)^\top$$

a řešíme jako soustavu rovnic pro neznáme parametry $a, b, k \in \mathbb{R}$;

- pro iterovaný postup definujeme obecně **krok** $\ell \in \mathbb{N}$ následovně:

$$\nabla S(a_{\ell-1}, b_{\ell-1}, k_{\ell-1}) = -\nabla^2 S(a_{\ell-1}, b_{\ell-1}, k_{\ell-1}) (a_\ell - a_{\ell-1}, b_\ell - b_{\ell-1}, k_\ell - k_{\ell-1})^\top;$$

- postup opakujeme, až kým nedosáhneme požadovanou přesnost, t.j.
 $|a_\ell - a_{\ell-1}| < \epsilon$, $|b_\ell - b_{\ell-1}| < \epsilon$ a $|k_\ell - k_{\ell-1}| < \epsilon$, pro nějaké malé $\epsilon > 0$;

Příklad: Růst českého strakatého skota

Príklad

Modelování dynamiky růstu hospodářských zvířat

- ❑ výhodné z ekonomického i hospodářského hlediska;
- ❑ chov na maso: rychlý růst (fiziologický), vysoká hmotnost;
- ❑ jednoduché modelovat v krátkodobem horizontu;
- ❑ nutné použít několik modelů od narození až po dospělost;
- ❑ býky českého strakatého skota mezi 30 až 1470 dnů:

$$y(t) = 926.07 \exp\{-2.548e^{-0.0032t}\} \quad (\text{Nešetřilová, ČZU});$$

- ❑ odhady parametrů $a, b, k > 0$ pomocí Newton-Raphson metody;
- ❑ později vylepšení pomocí modelu dvou logistických křivek;

Kapitola 3

Teorie Lineární Regulace

Modely lineární regulace

- jedná se o modely, kde **vstupné data** – t.j. posloupnost u_0, u_1, u_2, \dots , je převáděná na **výstupne data** – posloupnost y_0, y_1, y_2, \dots , a to pomocí specifické lineární transformace – tzv. **lineární regulace**;
- **model lineární regulace** lze formálně zapsát jako

$$y_t = \sum_{j=0}^t h_j u_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty} h_j u_{t-j},$$

pro $t \in \mathbb{Z}$ a $y_{-j} = u_{-j} = 0$ pro $j = 1, 2, \dots$.

- neznáme **parametre** h_j pro $j = 0, 1, \dots$, určíj konkrétní tvar modelu lineární regulace;
- vliv posloupnosti u_0, u_1, u_2, \dots na y_0, y_1, y_2, \dots nemusí být přímý, ale napr. prostřednictvím dalších stavov systému – tzv. **lineární soustavy**;

Model jednotkového impulzu

Definice: Model jednotkového impulzu

Vstupní posloupnost je ve tvaru $u_0 = 1, u_1 = 0, u_2 = 0, \dots$, nazýváme **jednotkovým impulzem**. Odezvou systému lineární regulace na tento impulz je pak posloupnost h_0, h_1, h_2, \dots , která se nazývá **impulzní charakteristika soustavy** lineární regulace.

Samostatný úkol

Z definice modelu lineární regulace lze okamžitě ověřit, že platí:

- pro $t = 0$: $y_0 = h_0 u_0 = h_0$;
- pro $t = 1$: $y_1 = h_0 u_1 + h_1 u_0 = h_1$;
- pro $t = 2$: $y_2 = h_0 u_2 + h_1 u_1 + h_2 u_0 = h_2$;
- pro $t \in \mathbb{N}$: $y_t = h_0 u_t + \dots + h_t u_0 = h_t$;
- pro $t \in \mathbb{N}$: $y_{-t} = u_{-t} = 0$;

Model jednotkového skoku

Definice: Model jednotkového skoku

Vstupní posloupnost ve tvaru $u_t = 1$ pro $t = 0, 1, 2, \dots$ nazýváme **jednotkový skokem** (v čase $t = 0$ se totiž hodnoty u_t změny z 0 na 1). Odezvou systému lineární regulace na tento skok je pak posloupnost, která se nazývá **přechodová charakteristika soustavy lineární regulace** a platí, že

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} h_j u_{t-j} = \sum_{j=0}^t h_j u_{t-j} = \sum_{j=0}^t h_j.$$

K analýze lineárních soustav se obecně hodí používat tzv. vytvořující funkce pro číselné posloupnosti a speciálně tzv. **z-transformace**.

Z-transformace

Z-transformace se obecně používá pro vyjádření signálu s diskretním časem (t.j. posloupnosti reálných, nebo komplexních čísel) pomocí reprezentace v rámci **komplexnej frekvenčnej domény**. Jedná se o diskretní verzi **Laplacovej transformácie**.

Definice: Z-transformace (jednostranná)

Pro libovolnou posloupnost reálných čísel $\{a_k; k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ definujeme její **z-transformaci** jako funkci

$$A(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^{-j}, \quad \text{obecně pro } z \in \mathbb{C}.$$

- V teorii se také používá tzv. **bilaterální (oboustranná) z-transformace**;
Pro oboustrannou z-transformaci platí $A(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j z^{-j}$;

Definice značení pro z-transformaci

Samostatný úkol

- ❑ Nekonečná řada $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^{-j}$ konverguje pro $|z| > z_0$ a diverguje pro $|z| < z_0$, pro nějaké $z_0 \in [0, \infty]$;
 - ❑ Množina $\{z \in \mathbb{C}; |A(z)| < \infty\}$ se často v literatuře značí jako ROC (tzv. "Region Of Convergence");
 - ❑ na kružnici $|z| = z_0$ se řada může chovat libovolně (konvergovat pro některé body a divergovat pro jiné);
-
- ❑ pro **posloupnost vstupů** $\{u_t; t \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ budeme značit příslušnou z-transformaci jako funkci $U(z)$;
 - ❑ pro **posloupnost výstupů** $\{y_t; t \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ budeme značit příslušnou z-transformaci jako funkci $Y(z)$;
 - ❑ pro **impulzní charakteristiku** $\{h_t; t \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ budeme značit příslušnou z-transformaci jako funkci $H(z)$;

Impulzní přenosová funkce soustavy

Definice: Impulzní přenosová funkce

Funkce

$$H(z) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j z^{-j}$$

se nazývá impulzní přenosová funkce soustavy.

Samostatný úkol

Ukážte, že pro impulzní přenosovou funkci soustav platí

$$Y(z) = H(z) \cdot U(z),$$

pro taková $z \in \mathbb{C}$, že $H(z)$ a $U(z)$ konvergují.

Impulzní přenosová funkce soustavy

Definice: Impulzní přenosová funkce

Funkce

$$H(z) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j z^{-j}$$

se nazývá impulzní přenosová funkce soustavy.

Samostatný úkol

Ukážte, že pro impulzní přenosovou funkci soustav platí

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} y_j z^{-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} h_{\ell} u_{j-\ell} \right) z^{-j} = \sum_{\ell=0}^{\infty} h_{\ell} z^{-\ell} \left(\sum_{j=0}^{\infty} u_{j-\ell} z^{-(j-\ell)} \right) \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} h_{\ell} z^{-\ell} \cdot \sum_{j=-\ell}^{\infty} u_j z^{-j} = \sum_{\ell=0}^{\infty} h_{\ell} z^{-\ell} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} u_j z^{-j} = H(z) \cdot U(z), \end{aligned}$$

pro taková $z \in \mathbb{C}$, že $H(z)$ a $U(z)$ konvergují.

Příklad: Bakaláři na australských univerzitách

Príklad

Chceme zjistovat závislost počtu bakalářských promoci na počtu studentů zapsaných v předchozích letech do prvního ročníka.

- ❑ počet studentů zapsaných do studia v roce t : u_t ;
(do prvního ročníku teda nastoupí v roce $t + 1$)
- ❑ počet studentů v i -tém ročníku v roce t : $x_t^{(i)}$ pro $i = 1, \dots, 4$;
- ❑ podíl studentů, kteří přejdou z i -tého do j -tého ročníka v následujícím školním roce: p_{ij} ;
- ❑ podíl studentů, kteří skončí v i -tém ročníku: q_i ;
- ❑ zřejmě platí, že $p_{ii} + p_{i(i+1)} + q_i = 1$ pro všechny $i = 1, 2, 3, 4$;

Bakalářský titul lze získat v třetím roce (Pass Degree), nebo pokračovat ve čtvrtém roce a získat Honours Degree.

Příklad: Bakaláři na australských univerzitách

Príklad

- nechť y_t značí počet promujících bakalářů v roce t ;
- pak lze psát, že

$$y_t = c_3 x_t^{(3)} + c_4 x_t^{(4)},$$

pro $c_3, c_4 \in (0, 1)$ proporce studentu, kteří v třetím a čtvrtém roce promují.

- zřejmě také platí následující:

$$x_{t+1}^{(1)} = u_t + p_{11} x_t^{(1)}; \quad (4)$$

$$x_{t+1}^{(i+1)} = p_{i(i+1)} x_t^{(i)} + p_{(i+1)(i+1)} x_t^{(i+1)}, \quad \text{pro } i = 1, 2, 3; \quad (5)$$

- proporce odhadnuté pomoci historických statistik na univerzitách:
 $p_{12} = 0.61; p_{23} = 0.71; p_{34} = 0.16; c_3 = 0.81; c_4 = 0.91;$
 $p_{11} = 0.15; p_{22} = 0.11; p_{33} = 0.10; p_{44} = 0.05;$

Jak teda závisí y_t na hodnotách u_{t-j} ?

Príklad

- Obecně můžeme pro $x_t^{(i)}$ psát, že

$$x_t^{(i)} = \sum_{j=0}^{\infty} f_j^{(i)} u_{t-j}, \quad (6)$$

kde $f_j^{(i)}$ je podíl těch, co se zapsali před j lety a teď jsou v i -tém ročníku a platí, že $f_0^{(i)} = 0$ pro všechny $i = 1, 2, 3, 4$;

- Prímým dosazením do (4) dostaneme

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_j^{(1)} u_{t+1-j} = u_t + p_{11} \sum_{j=0}^{\infty} f_j^{(1)} u_{t-j};$$

- Porovnáním koeficientu dostaneme:

$$f_1^{(1)} = 1, f_2^{(1)} = p_{11} f_1^{(1)} = p_{11}, f_3^{(1)} = p_{11} f_2^{(1)} = p_{11}^2, \dots, f_n^{(1)} = p_{11}^{n-1};$$

Příklad: Bakaláři na australských univerzitách

Príklad

- celkový počet studentů v prvním ročníku v roce t lze vyjádřit jako součet nově zapsaných a recyklovaných studentů:

$$x_t^{(1)} = u_{t-1} + \sum_{j=2}^{\infty} (p_{11})^{j-1} u_{t-j};$$

- Následně dosadíme (6) do (5):

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_j^{(i+1)} u_{t+1-j} = p_{i(i+1)} \sum_{j=0}^{\infty} f_j^{(i)} u_{t-j} + p_{(i+1)(i+1)} \sum_{j=0}^{\infty} f_j^{(i+1)} u_{t-j};$$

- Zjednodušení:** obecně předpokládáme, že $f_j^{(i)} = 0$, pro $j < i$;

Příklad: Bakaláři na australských univerzitách

Príklad

- Postupně dostaneme:

$$f_2^{(2)} = p_{12}f_1^{(1)} + p_{22}f_{12} = p_{12}$$

$$f_3^{(3)} = p_{23}f_2^{(2)} + p_{33}f_2^{(3)} = p_{23}f_2^{(2)} = p_{12}p_{23}$$

a obecně:

$$f_{j+1}^{(i+1)} = p_{i(i+1)}f_j^{(i)} + p_{(i+1)(i+1)}f_j^{(i+1)}$$

- Celkově pro y_t teda máme:

$$y_t = c_3x_t^{(3)} + c_4x_t^{(4)} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(c_3f_j^{(3)} + c_4f_j^{(4)} \right) u_{t-j}$$

$$= 0.3508u_{t-3} + 0.1901u_{t-4} + 0.0567u_{t-5} + 0.0131u_{t-6} + \dots$$

Maticový zápis | Stavový model

- Příklad o bakalářích na austrálských univerzitách lze také zapsát i pomocí alternativního maticového zápisu (více kompaktně);
- Necht' $\mathbf{x}_t = (x_t^{(1)}, \dots, x_t^{(4)})^\top$. Pak lze problém zapsat jako

$$\mathbf{x}_{t+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} p_{11} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{22} & 0 & 0 \\ 0 & p_{23} & p_{33} & 0 \\ 0 & 0 & p_{34} & p_{44} \end{pmatrix}}_A \mathbf{x}_t + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_b u_t;$$

$$y_t = \underbrace{(0, 0, c_3, c_4)}_c \cdot \mathbf{x}_t + \underbrace{0}_d \cdot u_t.$$

- Uveděný zápis definuje **lineární stavovou soustavu**;
(vstupní posloupnost u_t , stavy systému \mathbf{x}_t , výstupná posloupnost y_t)

Zhrnutí předchozí přednášky/opakování

□ Modely lineární regulace

↪ posloupnost výstupných dat je vyjádřena jako specifická lineární funkce vstupných dat, t.j. $y_t = h_0 u_t + \dots + h_t u_0$, pro $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a vhodně zvolené parametry $h_0, \dots, h_t \in \mathbb{R}$;

□ Z-transformace a impulzní přenosová funkce;

↪ impulzní přenosová funkce $Y(z) = H(z)U(z)$ jako nástroj pro reprezentaci výstupnej posloupnosti $\{y_t\}$ vo frekvenčnej doméně pomoci z-transformace vstupu $\{u_t\}$ a parametru $\{h_t\}$:
 $U(z) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j z^{-j}$ a $H(z) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j z^{-j}$;

□ Lineární soustavy;

↪ komplexný systém lineární regulace, kde mezi vstupní a výstupní posloupnosti existuje množina stavov $\mathbf{x}_t = (x_t^{(1)}, \dots, x_t^{(r)})^T$;

□ Obecný zápis lineární soustavy

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{b}u_t;$$

$$y_t = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}_t + d \cdot u_t,$$

pro matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, vektory $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^r$ a skalár $d \in \mathbb{R}$;

Stavový model – formálně

- uvažujeme systém, jehož stav lze popsat vektorem $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r$;
- vývoj systému pak definujeme pomocí posloupnosti $\{\mathbf{x}_t; t \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$;
- předpokládáme, že stav systému v čase $t = 0$ je $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^r$;
- následující stavy systému v čase $t + 1$ jsou popsány pomocí modelu

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbb{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{b}u_t,$$

pro nějakou čtvercovou matici $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ a vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^r$;

- nepozorujeme ale přímo stav systému, ale pouze výstup y_t ve tvaru

$$y_t = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_t + du_t,$$

pro nějaký vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^r$ a skalár $d \in \mathbb{R}$;

- Jak získat z tohoto modelu přímou závislost výstupní posloupnosti y_t na vstupních datech u_t ve tvaru $y_t = \sum_{j=0}^{\infty} h_j u_{t-j}$?

Stavový model a stavové rovnice

- namísto původního systému rovnic

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{t+1} &= \mathbb{A} \mathbf{x}_t + \mathbf{b} u_t \\ y_t &= \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_t + d u_t \end{aligned}$$

- budeme uvažovat systém rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{x}_{t+1} z^{-t} &= \mathbb{A} \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{x}_t z^{-t}}_{\mathbf{X}(z)} + \mathbf{b} \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} u_t z^{-t}}_{U(z)} \\ \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} y_t z^{-t}}_{Y(z)} &= \mathbf{c}^\top \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{x}_t z^{-t}}_{\mathbf{X}(z)} + d \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} u_t z^{-t}}_{U(z)} \end{aligned}$$

↪ kde jsme původní rovnice postupně vynásobili faktorem z^{-t} a pak sečetli přes všechny hodnoty pro $t = 0, 1, 2, \dots$;

Stavový model a stavové rovnice

- namísto původního systému rovnic

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{t+1} &= \mathbb{A} \mathbf{x}_t + \mathbf{b} u_t \\ y_t &= \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_t + d u_t \end{aligned}$$

- budeme uvažovat systém rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} z \sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{x}_{t+1} z^{-t-1} &= \mathbb{A} \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{x}_t z^{-t}}_{\mathbf{X}(z)} + \mathbf{b} \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} u_t z^{-t}}_{U(z)} \\ \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} y_t z^{-t}}_{Y(z)} &= \mathbf{c}^\top \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{x}_t z^{-t}}_{\mathbf{X}(z)} + d \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} u_t z^{-t}}_{U(z)} \end{aligned}$$

↪ kde jsme původní rovnice postupně vynásobili faktorem z^{-t} a pak sečetli přes všechny hodnoty pro $t = 0, 1, 2, \dots$;

Stavový model a stavové rovnice

- namísto původního systému rovnic

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{t+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{b}u_t \\ y_t &= \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_t + du_t \end{aligned}$$

- budeme uvažovat systém rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} z \sum_{t=-1}^{\infty} \mathbf{x}_{t+1} z^{-t-1} &= \mathbf{A} \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{x}_t z^{-t}}_{\mathbf{X}(z)} + \mathbf{b} \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} u_t z^{-t}}_{U(z)} \\ \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} y_t z^{-t}}_{Y(z)} &= \mathbf{c}^\top \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{x}_t z^{-t}}_{\mathbf{X}(z)} + d \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} u_t z^{-t}}_{U(z)} \end{aligned}$$

↪ kde jsme původní rovnice postupně vynásobili faktorem z^{-t} a pak sečetli přes všechny hodnoty pro $t = 0, 1, 2, \dots$;

Stavový model a stavové rovnice

- namísto původního systému rovnic

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{t+1} &= \mathbb{A} \mathbf{x}_t + \mathbf{b} u_t \\ y_t &= \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_t + d u_t \end{aligned}$$

- budeme uvažovat systém rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} z \underbrace{\sum_{t=-1}^{\infty} \mathbf{x}_{t+1} z^{-t-1}}_{\mathbf{X}(z)} &= \mathbb{A} \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{x}_t z^{-t}}_{\mathbf{X}(z)} + \mathbf{b} \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} u_t z^{-t}}_{U(z)} \\ \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} y_t z^{-t}}_{Y(z)} &= \mathbf{c}^\top \sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{x}_t z^{-t} + d \sum_{t=0}^{\infty} u_t z^{-t} \end{aligned}$$

↪ kde jsme původní rovnice postupně vynásobili faktorem z^{-t} a pak sečetli přes všechny hodnoty pro $t = 0, 1, 2, \dots$;

Stavový model – řešení

- systém rovnic v maticovém zápisu:

$$z\mathbf{X}(z) = \mathbb{A}\mathbf{X}(z) + \mathbf{b}U(z)$$

$$Y(z) = \mathbf{c}^T \mathbf{X}(z) + dU(z)$$

- pokud existuje inverze $(z\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}$, lze řešení pro $\mathbf{X}(z)$ získat jako:

$$z\mathbf{X}(z) - \mathbb{A}\mathbf{X}(z) = \mathbf{b}U(z)$$

$$(z\mathbb{I} - \mathbb{A})\mathbf{X}(z) = \mathbf{b}U(z)$$

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} \cdot \mathbf{b}U(z)$$

- následně pak pro $Y(z)$ získáme řešení ve tvaru:

$$Y(z) = \mathbf{c}^T \mathbf{X}(z) + dU(z)$$

$$= [\mathbf{c}^T \cdot (z\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} \mathbf{b} + d] U(z)$$

Přenosová funkce soustavy

Definice: Přenosová funkce soustavy

Funkce $H(z) = [\mathbf{c}^T \cdot (z\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} \mathbf{b} + d]$ se nazývá přenosová funkce soustavy a platí, že

$$Y(z) = H(z)U(z),$$

pro každé $z \in \mathbb{C}$, pro které funkce $Y(z)$ a $U(z)$ konvergují.

Samostatný úkol

Ověřte, že pro libovolnou matici $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, vektory $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^r$ a reální číslo $d \in \mathbb{R}$, takové, že inverzní matice $(z\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}$ existuje, je funkce $H(z)$ funkcí z \mathbb{R} do \mathbb{R} , pro $z \in \mathbb{R}$ (tzn., ověřte příslušné rozměry v zápisu funkce H).

Přenosová funkce soustavy – vyjádření

Samostatný úkol

Přenosovou funkci soustavy lze vyjádřit jako podíl dvou polynomů stupně nejvýše r . Platí, že

$$\begin{aligned} H(z) &= \left[\mathbf{c}^T \cdot (z\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} \mathbf{b} + d \right] = \frac{\mathbf{c}^T \text{Adj}(z\mathbb{I} - \mathbb{A}) \mathbf{b} + d \cdot \det(z\mathbb{I} - \mathbb{A})}{\det(z\mathbb{I} - \mathbb{A})} \\ &= \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{n_0 z^r + \dots + n_r}{d_0 z^r + \dots + d_r} = \frac{n_0 + \dots + n_r z^{-r}}{d_0 + \dots + d_r z^{-r}}, \end{aligned}$$

kde $N(z)$ a $D(z)$ jsou příslušné z -transformace polynomů $n_0 + \dots + n_r z^{-r}$ a $d_0 + \dots + d_r z^{-r}$.

Příklad: Bakaláři na australských univerzitách

Príklad

- pro model s bakaláři na australských univerzitách máme

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{22} & 0 & 0 \\ 0 & p_{23} & p_{33} & 0 \\ 0 & 0 & p_{34} & p_{44} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (1, 0, 0, 0)^T,$$
$$\mathbf{c} = (0, 0, c_3, c_4)^T, \quad b = 0;$$

- pro matici $(z\mathbb{I} - \mathbb{A})$ dostaneme vyjádření ve tvaru

$$(z\mathbb{I} - \mathbb{A}) = \begin{pmatrix} z - p_{11} & 0 & 0 & 0 \\ -p_{12} & z - p_{22} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{23} & z - p_{33} & 0 \\ 0 & 0 & -p_{34} & z - p_{44} \end{pmatrix};$$

- a pro determinant matice $(z\mathbb{I} - \mathbb{A})$ dostaneme

$$\det(z\mathbb{I} - \mathbb{A}) = (z - p_{11})(z - p_{22})(z - p_{33})(z - p_{44});$$

Příklad: Bakaláři na australských univerzitách

Příklad

- vzhledem k tvaru vektorů $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^r$ stačí pro adjungovanou matici spočítat prvky na pozici $[3,1]$ a $[4,1]$;
- pro **přenosovou funkci soustavy** pak přímo dostaneme

$$H(z) = \frac{c_3 p_{12} p_{23} (z - p_{44}) + c_3 p_{12} p_{23} p_{34}}{(z - p_{11})(z - p_{22})(z - p_{33})(z - p_{44})}$$

- pomocí přenosové funkce soustavy $H(z)$ dostaneme přímo vyjádření počtu promujících bakalářů na počte zapsaných studentů (prostřednictvím spektrální domény) – bez explicitné přítomnosti stavů systému;

Obecný model

- v praxi je výhodnější uvažovat obecnou situaci, kdy výstup v čase t závisí také na předchozích výstupech, t.j., uvažujeme rovnici

$$d_0 y_t + \dots + d_r y_{t-r} = n_0 u_t + \dots + n_r u_{t-r}, \quad (7)$$

pro $d_0 \neq 0$;

- co lze také ekvivalentně přepsát jako

$$y_t = \underbrace{-\frac{d_1}{d_0} y_{t-1} - \dots - \frac{d_r}{d_0} y_{t-r}}_{\text{autoregresní část soustavy}} + \underbrace{\frac{n_0}{d_0} u_t + \dots + \frac{n_r}{d_0} u_{t-r}}_{\text{regresní část soustavy}}$$

pro $d_0 \neq 0$;

- délky pro autoregresní a regresní část mohou být obecně různé ($k \neq l$);
 \hookrightarrow některé koeficienty $d_1, \dots, d_k, n_0, \dots, n_l$ mohou být nulové;
- **IDEA:** Opět chceme najít vyjádření ve tvaru $y_t = \sum_{k=0}^{\infty} h_k y_{t-k}$;

Obecný model

- analogickým postupem (vynásobíme členem z^{-t} a sečteme přes všechny hodnoty t) dostaneme vyjádření (7) ve tvaru

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty} (d_0 z^{-0} y_t z^{-t} + \dots + d_r z^{-r} y_{t-r} z^{-(t-r)}) \\ = \sum_{t=0}^{\infty} (n_0 z^0 u_t z^{-t} + \dots + n_r z^{-r} u_{t-r} z^{-(t-r)}) \end{aligned}$$

- díky zavedenému značení $u_{-t} = y_{-t} = 0$ pro $t \in \mathbb{N}$ můžeme psát

$$(d_0 z^{-0} + \dots + d_r z^{-r}) \sum_{t=0}^{\infty} y_t z^{-t} = (n_0 z^{-0} + \dots + n_r z^{-r}) \sum_{t=0}^{\infty} u_t z^{-t};$$

- co lze také přepsat do obecného tvaru lineárního modelu jako

$$d(z^{-1})Y(z) = n(z^{-1})U(z)$$

pro $d(x) = d_0 + d_1 x + \dots + d_r x^r$ a $n(x) = n_0 + n_1 x + \dots + n_r x^r$;

Obecný model – některé vlastnosti

- obecně i zde platí, že $Y(z) = H(z)U(z)$, pro takové $z \in \mathbb{C}$, že $H(z)$ a $U(z)$ konvergují;
- dostazením tedy dostaneme, že

$$d(z^{-1})Y(z) = d(z^{-1})H(z)U(z) = n(z^{-1})U(z),$$

pro takové $z \in \mathbb{C}$, že pravá strana konverguje;

- pro přenosovou funkci soustavy máme

$$H(z) = \frac{n(z^{-1})}{d(z^{-1})} = \frac{n_0 + \dots + n_r z^{-r}}{d_0 + \dots + d_r z^{-r}};$$

- rovnice (7) se někdy zapisuje ve tvaru

$$(d_0 + \dots + d_r z^{-r})y_t = (n_0 + \dots + n_r z^{-r})u_t$$

nebo zjednodušene $d(z^{-1})y_t = n(z^{-1})u_t$, kde z se interpretuje jako operátor posunutí, t.j., $zx_t = x_{t+1}$ a z^{-1} jako operátor zpětného posunutí, t.j., $z^{-1}x_t = x_{t-1}$;

Obecný model – příklad

Příklad

Předpokládáme jednoduchý model lineárního systému ve tvaru

$$y_{t+1} - ay_t = u_t \quad \text{resp.} \quad (1 - az^{-1})y_t = u_t.$$

- pro přenosovou funkci soustavy dostaneme

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a};$$

- lze jednoduše rozvinout jako

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k};$$

- pro impulzní charakteristiku soustavy tedy máme $y_t = h_t = a^t$;
- pro přechodovou charakteristiku soustavy máme $y_t = \sum_{k=0}^t h_k$;

Stabilita lineární soustavy

□ Stabilita soustavy

Jedná se o základní vlastnost, která se u lineárních soustav zkoumá.

Definice: Stabilita lineární soustavy

Řekneme, že lineární soustava je stabilní, pokud platí, že

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_t = 0. \quad (8)$$

- Alternativně lze říct, že odezva soustavy na jednotkový impuls se postupně vytrácí, pokud je soustava stabilní;
- (8) je zároveň nutná podmínka k tomu, aby přechodová charakteristika soustavy, tedy řada $\sum_{k=0}^{\infty} h_k$, byla konvergentní (ale ne postačující);

Stabilita lineární soustavy

Věta: Stabilita lineární soustavy

Soustava odpovídající obecnému modelu s přenosovou funkcí ve tvaru

$$H(z) = \frac{n(z^{-1})}{d(z^{-1})} = \frac{N(z)}{D(z)},$$

kde $N(z) = n_0z^r + \dots + n_rz^0$ a $D(z) = d_0z^r + \dots + d_rz^0$ jsou nesoudělné polynomy, je stabilní právě tehdy, když se všechny kořeny polynomu $D(z)$ nacházejí uvnitř jednotkového kruhu v komplexní rovině.

Príklad

Jeli $h_k = a^k$, pak je soustava stabilní právě tehdy, když je $|a| < 1$.

Stabilita stavového modelu

- pro stavový model obecně platí: $D(z) = \det(z\mathbb{I} - \mathbb{A})$;
- kořeny $D(z)$ jsou právě všechna vlastní čísla matice \mathbb{A} a jsou v absolutní hodnotě menší než hodnota 1;

Príklad

Uvažujme nějakou stabilní soustavu a jednotkový skok $1 = u_0 = u_1 = \dots$, jako vstup. Pak pro přechodovou charakteristiku soustavy, posloupnost y_t dostaneme

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_t = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^t h_k y_{t-k} = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^t h_k = \sum_{k=0}^{\infty} h_k = y_{\infty}$$

a soustava se tedy v nekonečném horizontu ustálí na nové úrovni. Obecně tedy předpoklad $h_t \rightarrow 0$ není postačující k tomu, aby řada $\sum_{k=0}^{\infty} h_k$ byla konvergentní.

- Pokud jsou ale kořeny $D(z)$ v jednotkovém kruhu (podmínka stability), pak také řada $\sum_{k=0}^{\infty} h_k$ konverguje absolutně.

Příklad: Bakaláři na US univerzitách

Příklad

- ❑ kořeny polynomu $D(z) = \det(z\mathbb{I} - \mathbb{A})$ jsou jednoduché; (s násobností jedna): pravděpodobnosti $p_{11}, p_{22}, p_{33}, p_{44}$;
- ❑ stabilitu teda dostaneme pro $p_{ii} < 1$ pro $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$; (teda postup do vyššího ročníku, resp. ukončení studia v poslednom ročníku, je možný s kladnou pravděpodobností)

Zhrnutí předchozí přednášky/opakování

□ Modely lineární regulace & lineární soustavy

↪ modely, které posloupnost výstupných dat $\{y_t\}$ modelují jako lineární funkci vstupných dat $\{u_t\}$, t.j. $y_t = h_0 u_t + \dots + h_t u_0$, pro $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;

□ Obecný maticový zápis systému se stavy $\mathbf{x}_t = (x_{t1}, \dots, x_{tr})^T$

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbb{A} \mathbf{x}_t + \mathbf{b} u_t;$$

$$y_t = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}_t + d \cdot u_t,$$

pro nějakou matici $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, vektory $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^r$ a skalár $d \in \mathbb{R}$;

□ Řešení pomocí přenosové funkce soustavy

↪ cílem je najít vyjádření závislosti výstupné posloupnosti na vstupních datech prostřednictvím tzv. přenosové funkce soustavy: $Y(z) = H(z)U(z)$;

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k} = [\mathbf{c}^T \cdot (z\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} \mathbf{b} + d] = N(z)/D(z)$$

□ Základní vlastnosti/charakteristiky lineární soustavy

□ impulzní charakteristika: $y_t \equiv h_t$ (stabilita pro $h_t \rightarrow 0$);

□ přechodová charakteristika: $y_t \equiv \sum_{k=0}^t h_k$ (ustálení pro $\sum_k^{\infty} h_k < \infty$);

Kapitola 4

Markovské řetězce

Deterministické data \Rightarrow Stochastické data

- v **deterministických modelech** je výstup (reakce) jednoznačně definovaný pomocí vstupu (akce) – napr. **model lineární soustavy**;
- v **stochastických modelech** je přítomen náhodný element, který přináší do výstupu jistou míru neurčitosti – napr. **náhodná procházka**;

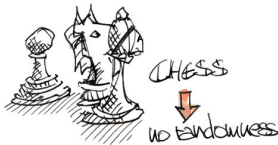


vs.



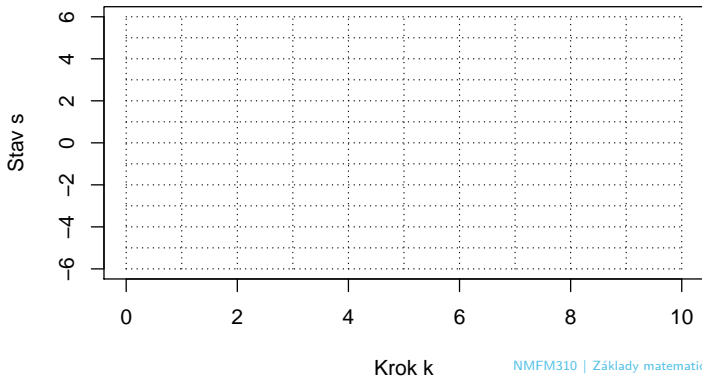
AGENT'S ACTIONS
UNIQUELY DETERMINE
THE OUTCOME

SOME RANDOMNESS
INVOLVED



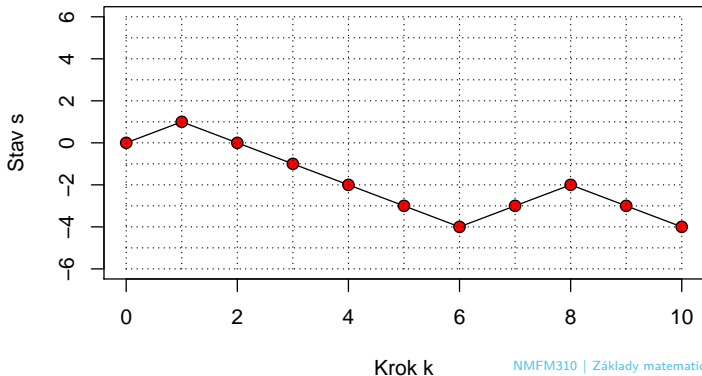
Náhodná procházka na přímce

- ❑ házíme **symetrickou minci** (pravděpodobnost, že padne hlava je $1/2$);
- ❑ začínáme v počátku, t.j. **počátečný stav je v bodě nula**;
- ❑ když padne **hlava**, posuneme se na ose **napravo**, když **líce**, tak **nalevo**;



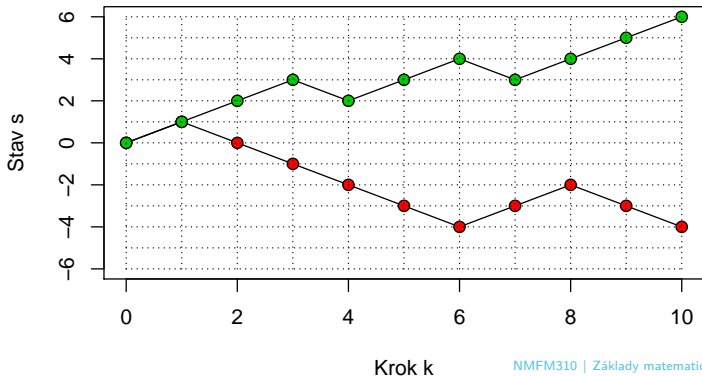
Náhodná procházka na přímce

- ❑ házíme **symetrickou minci** (pravděpodobnost, že padne hlava je $1/2$);
- ❑ začínáme v počátku, t.j. **počáteční stav je v bodě nula**;
- ❑ když padne **hlava**, posuneme se na ose **napravo**, když **líce**, tak **nalevo**;



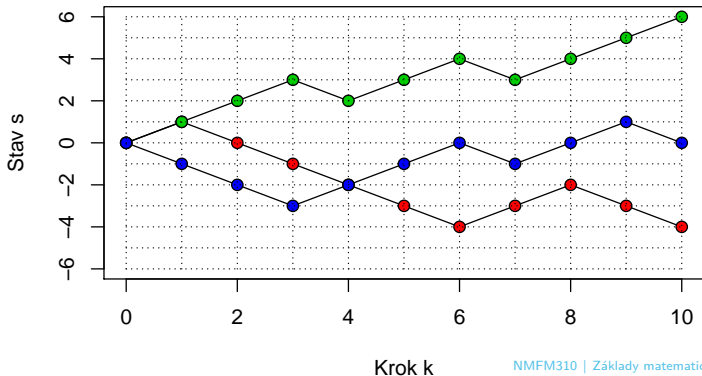
Náhodná procházka na přímce

- ❑ házíme **symetrickou minci** (pravděpodobnost, že padne hlava je $1/2$);
- ❑ začínáme v počátku, t.j. **počátečný stav je v bodě nula**;
- ❑ když padne **hlava**, posuneme se na ose **napravo**, když **líce**, tak **nalevo**;



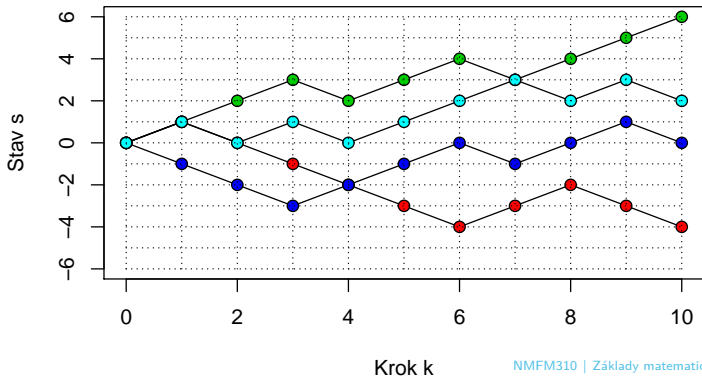
Náhodná procházka na přímce

- ❑ házíme **symetrickou minci** (pravděpodobnost, že padne hlava je $1/2$);
- ❑ začínáme v počátku, t.j. **počáteční stav je v bodě nula**;
- ❑ když padne **hlava**, posuneme se na ose **napravo**, když **líce**, tak **nalevo**;



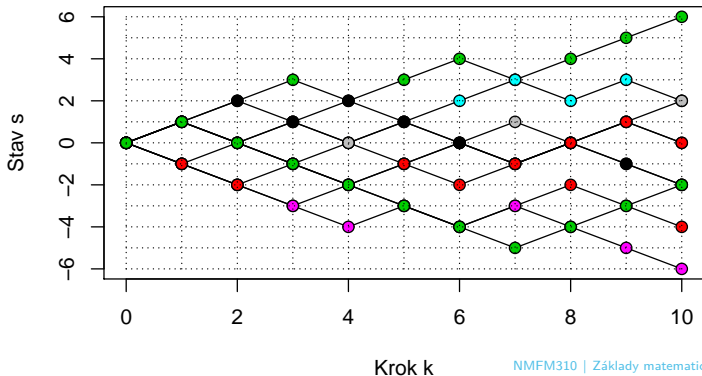
Náhodná procházka na přímce

- ❑ házíme **symetrickou minci** (pravděpodobnost, že padne hlava je $1/2$);
- ❑ začínáme v počátku, t.j. **počáteční stav je v bodě nula**;
- ❑ když padne **hlava**, posuneme se na ose **napravo**, když **líce**, tak **nalevo**;



Náhodná procházka na přímce

- ❑ házíme **symetrickou minci** (pravděpodobnost, že padne hlava je $1/2$);
- ❑ začínáme v počátku, t.j. **počáteční stav je v bodě nula**;
- ❑ když padne **hlava**, posuneme se na ose **napravo**, když **líce**, tak **nalevo**;



Stochastické celočíselné posloupnosti

- ❑ uvažujme nějakou posloupnost $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$, která nabývá pouze **celočíselné hodnoty** (konečně, nebo spočetně mnoho);
- ❑ hodnoty $n \in \mathbb{N}$ interpretujeme jako **časové okamžiky**, ve kterých posloupnost $\{X_n\}$ nabývá své hodnoty;
- ❑ množina $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{Z}$ všech možných stavů posloupnosti $\{X_n\}$, které může posloupnost hypoteticky nabývat, se nazývá **stavový prostor**;
- ❑ hodnoty $s \in \mathcal{S}$, které může posloupnost $\{X_n\}$ hypoteticky (ale ne nutně) nabývat, nazýváme **stavy**;
- ❑ budeme uvažovat pouze diskrétní časové okamžiky a posloupnosti, kde \mathcal{S} je **nejvýše spočetná** množina;
- ❑ stav posloupnosti $\{X_n\}$ v nějakem konkrétním čase $n \in \mathbb{N}$ závisí na předchozích stavech, ale **závislost není deterministická**;
- ❑ stav posloupnosti $\{X_n\}$ v čase $n \in \mathbb{N}$ je vyjádřen prostřednictvím **pravděpodobnostního modelu** (zahrnuje v sobě míru neurčitosti);

Markovský řetězec a markovská vlastnost

Definice: Markovův řetězec

Řekneme, že posloupnost celočíselných náhodných veličin $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ se nazývá **Markovův řetězec** (markovský řetězec), jestliže platí, že

$$P[X_{n+1} = j | X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0] = P[X_{n+1} = j | X_n = i_n],$$

pro každé $n \geq 0$ a každé $i_0, \dots, i_n \in \mathbb{Z}$ takové, že

$$P[X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0] > 0.$$

Množina všech stavů je v tomto případě množina \mathbb{Z} , t.j., $\mathcal{S} \equiv \mathbb{Z}$.

Markovskou vlastností nazýváme fakt, že výsledek v čase $n + 1$ závisí pouze na stavu daného řetězce v čase n (tudíž na stave v předchozím kroku, neboli v přítomnosti), nikoli na minulosti, t.j. na posloupnosti realizovaných stavů před časem n .

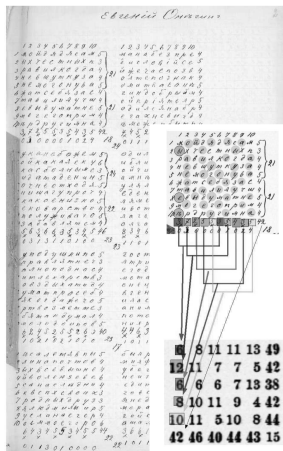
Markovský řetězec a markovská vlastnost



Příklady aplikace Markovských řetězců

- ❑ **První aplikace:** Andrei A. Markov použil Markovský řetězec na analýzu 20.000 listů z Pushkinovej básne Eugeny Onegin a studoval pravděpodobnosti výskytu samohlásek a souhlasek na základě předchozího výskytu (samohlásek a souhlasek);
- ❑ **Teória informací:** striktně povedané, každý proces pri ktorom zdroj prenáša nějaké informace, je markovský řetězec (Shannonova teorie);
- ❑ **Informatika (IT):** aplikácia pre vyhľadavacie algoritmy (napr. Google), hodnotenie web stránok (PageRank), computer performance evaluation;
- ❑ **Marketing:** systémy hromadné obsluhy, modelování správania zákazníkov/klientov a modelování změn ich preferencí;
- ❑ **Finance a business:** modelování různých finančných trhů, změny různých stavů, jejích chování a pod.
- ❑ **Matematika:** simulačné metody, rozhodovací algoritmy, analýza a spracování dat, atd'.

Markovský řetězec a Eugeny Onegin



- prvních 800 písmen z celkových 20.000 listů v Pushkinovom Eugeny Oneginovi;
- výskyt jednotlivých písmen zapsán pomocí 40 čtvercových matic typu 10×10 ;
- spodní matice typu 6×6 zobrazuje frekvenční výskyt některých písmen v 500 případech;
- na základě této analýzy sa ukázalo, že není žádný matematický rozdíl mezi kostkou, kterou hodíme 1000 krát a 1000 kostkami, které hodíme pouze jednou, ale všechny naraz;

Hilgers, P. and Langville, A. (2006). The Five Greatest Applications of Markov Chains. MAM 2006: Markov Anniversary Meeting . Raleigh 2006.

Pravděpodobnosti přechodu

Definice: Pravděpodobnost přechodu

Pravděpodobnost $p_{ij}(n, n + 1) \in [0, 1]$, pro $i, j \in \mathcal{S}$, definovanou jako

$$p_{ij}(n, n + 1) = P[X_{n+1} = j | X_n = i],$$

nazýváme **pravděpodobnost přechodu** ze stavu i v čase n do stavu j v čase $n + 1$;

- je intuitivně zřejmé, že pro nějaký konkrétní stav $i \in \mathcal{S}$ a čas $n \in \mathbb{N}$ dostaneme posloupnost $\{p_{is}(n, n + 1)\}_{s \in \mathcal{S}}$, která definuje **rozdělení pravděpodobnosti** na množině stavů \mathcal{S} ;
- vyjádřeno matematicky:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall i \in \mathcal{S} \quad \sum_{s \in \mathcal{S}} p_{is}(n, n + 1) = 1$$

Homogenita Markovského řetězce

Definice: Homogenní Markovský řetězec

Markovský řetězec se nazývá homogenní, jestliže platí, že

$$p_{ij} = p_{ij}(n, n + 1),$$

pro všechny $i, j \in \mathcal{S}$, tudíž pravděpodobnosti přechodů ze stavu i do stavu j nezávisí na čase n .

- pro konkrétny stav $i \in \mathcal{S}$ dostaneme opět **rozdělení pravděpodobnosti** $\{p_{is}\}_{s \in \mathcal{S}}$ na množině stavů \mathcal{S} ;

Počáteční rozdělení řetězce

Definice: Počáteční rozdělení

Pravděpodobnosti $p_i \in [0, 1]$, pro $i \in \mathcal{S}$, které jsou definovány jako

$$p_i = P[X_0 = i],$$

pro $i \in \mathcal{S}$, nazýváme **počáteční rozdělení řetězce**.

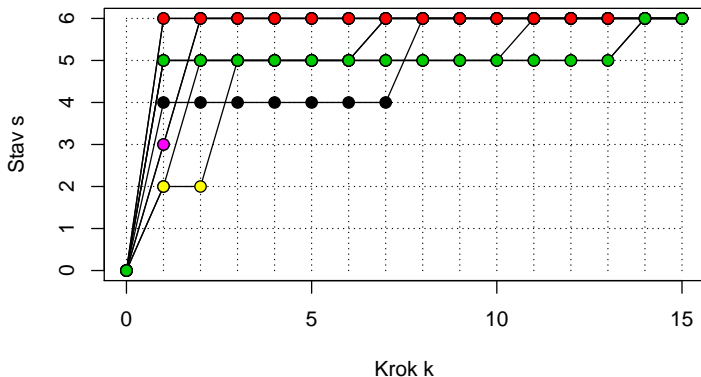
- v případě homogenních Markovských řetězců se obvykle přechodové pravděpodobnosti zapisují v maticovém tvaru – tzv. **matici přechodových pravděpodobností** (resp. přechodová matice): $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j \in \mathcal{S}}$;
- **matice přechodových pravděpodobností** se také (obecně) nazývá aj **stochastická matice**, protože součet prvků v každém řádku je roven hodnotě jedna (každý řádek definuje rozdělení pravděpodobnosti na \mathcal{S});
- **počáteční rozdělení** $\{p_i\}_{i \in \mathcal{S}}$ Markovského řetězce se zapisuje pomocí vektoru pravděpodobnosti počátečního rozdělení: $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{|\mathcal{S}|})^\top$;

Matice přechodových pravděpodobnosti

- ❑ matice přechodových pravděpodobnosti je definována jako $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j=1}^{|\mathcal{S}|}$; (pro nejvýše spočetný stavový prostor \mathcal{S} a stavy $i, j \in \mathcal{S}$)
- ❑ matice přechodových pravděpodobnosti může být **obecně nekonečná**; (pro nekonečnou, ale nejvýše spočetnou množinu stavů \mathcal{S})
- ❑ matice přechodových pravděpodobnosti je **stochastická matice**; (z každého stavu se někde musíme v dalším kroku dostat, nebo zůstat)
- ❑ vektor počátečního rozdělení řetězce má **součet jedna**; (v nějakom stavu $s \in \mathcal{S}$ musí řetězec začít)
- ❑ obecně řádky přechodové matice $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j=1}^{|\mathcal{S}|}$ značí výchozí stav $i \in \mathcal{S}$ a v sloupcích matice se uvádějí koncové stavy $j \in \mathcal{S}$;

Příklad: Dosažené maximum na hrací kostce

- obecně v n -tém tahu sledujeme dosažené maximum v n hodech;
- minimální hodnota (stav) je jedna, maximální (stav) je hodnota 6;



Příklad: Dosažené maximum na hrací kostce

Příklad

Házíme spravedlivou hrací kostkou a sledujeme dosažené maximum v $n \in \mathbb{N}$ hodech. Množina stavů je $\mathcal{S} = \{1, \dots, 6\}$ a matici přechodových pravděpodobností pak můžeme zapsát jako

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

kde p_{ij} značí pravděpodobnost přechodu ze stavu i (řádek) do stavu j (sloupec), pro libovolné $i, j \in \mathcal{S}$.

Existence cesty v Markovském řetězci

- v souvislosti s Markovskými řetězci je někdy důležité vyšetřit existenci cesty z nějakého stavu $i \in \mathcal{S}$ do nějakého jiného stavu $j \in \mathcal{S}$;

Věta: Existence cesty v Markovském řetězci

Nechť $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ je homogenní Markovský řetězec s nejvýše spočetnou množinou stavů \mathcal{S} , počátečním rozdělením $(p_i; i \in \mathcal{S})$ a maticou přechodových pravděpodobností $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j \in \mathcal{S}}$.

Pak platí, že

$$P[X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n] = p_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n},$$

pro libovolné stavy $i_0, \dots, i_n \in \mathcal{S}$.

Pravděpodobnosti přechodů vyšších řádů

- existence cesty ze stavu $i \in \mathcal{S}$ do stavu $j \in \mathcal{S}$ v n krocích souvisí s přechodovými pravděpodobnostmi vyšších řádů – pravděpodobnostmi $p_{ij}^{(n)}$;

Definice: Pravděpodobnost přechodu v n krocích

Nechť $p_{ij}^{(0)} = \mathbb{I}_{\{i=j\}}$ a $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$. Pak pravděpodobnost

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k \in \mathcal{S}} p_{ik}^{(n)} p_{kj}$$

se nazývá pravděpodobnost přechodu ze stavu i do stavu j po $(n + 1)$ krocích (resp. $p_{ik}^{(n)}$ je pravděpodobnost přechodu n -tého řádu ze stavu i do stavu k).

- pro matici přechodových pravděpodobností n -tého řádu pak používáme značení $\mathbb{P}^{(n)} = (p_{ij}^{(n)})_{i,j \in \mathcal{S}}$;

Pravděpodobnost přechodu n -tého řádu

Věta: Pravděpodobnost přechodu v n -tém kroku

Nechť $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $i, j \in \mathcal{S}$. Pak platí, že

$$P[X_{m+n} = j | X_m = i] = p_{ij}^{(n)}.$$

Pro matici přechodových pravděpodobností n -tého řádu zároveň platí, že

$$\mathbb{P}^{(n)} = \mathbb{P}^n.$$

- stejně jako matice \mathbb{P} aj matice přechodových pravděpodobností vyšších řádů $\mathbb{P}^{(m)}$, jsou **stochastické matice**, t.j. součet prvků v každém řádku je roven hodnotě jedna;

Příklad: Dosažené maximum na hrací kostce

Príklad

Házíme spravedlivou hrací kostkou a sledujeme dosažené maximum v $n \in \mathbb{N}$ hodech. Množina stavů je $\mathcal{S} = \{1, \dots, 6\}$ a matici přechodových pravděpodobností pak můžeme zapsat jako v (9).

Pro přechodové pravděpodobnosti vyšších řádů máme

$$p_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{pro } i > 0; \\ \left(\frac{j}{6}\right)^n & \text{pro } i = j; \\ \left(\frac{j}{6}\right)^n - \left(\frac{j-1}{6}\right)^n & \text{pro } j > i; \end{cases}$$

Samostatný úkol

Spočítejte matici přechodových pravděpodobností pro dosažené maximum na hrací kostce po $n = 2$ a $n = 3$ hodech.

Chapman-Kolmogorova věta

Věta: Chapman-Kolmogorov

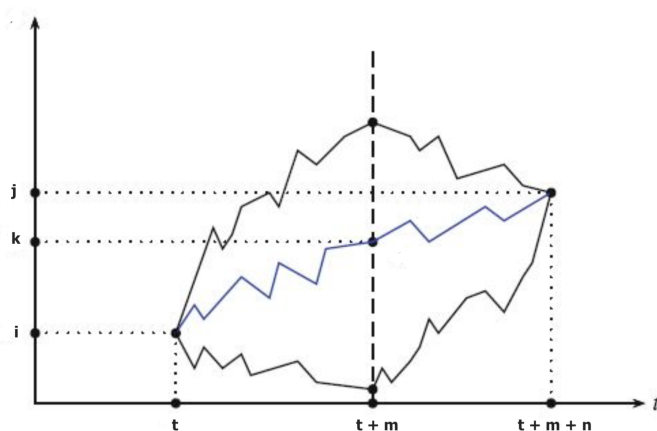
Nechť $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ je homogenní Markovský řetězec. Pak pro libovolná $n, m \in \mathbb{N}$ platí, že

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}.$$

□ IDEA:

Pro pravděpodobnost cesty ze stavu $i \in S$ do stavu $j \in S$ v $n+m$ krocích, se stačí podívat na všechny možné dosažitelné stavy $k \in S$ po n krocích a pak všechny možné cesty ze stavu $k \in S$ do stavu $j \in S$ v m krocích.

Chapman-Kolmogorova věta



Zhrnutí předchozí přednášky/opakování

□ Markovské řetězce

- Posloupnosti celočíselných náhodných veličin: $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$; (uvažujeme pouze diskrétní čas a diskrétní stavy);
- Množina stavů \mathcal{S} je nejvýše spočetná (např. $\mathcal{S} \equiv \mathbb{Z}$);
- Platí Markovská vlastnost: $P[X_{n+1} = j | X_n, \dots, X_1] = P[X_{n+1} = j | X_n]$;
- **Homogenita**: nezávislost přechodů mezi stavy na čase $n \in \mathbb{N}$;

□ Pravděpodobnosti přechodů a počáteční rozdělení

- Pravděpodobnost přechodu ze stavu i do stavu j :

$$p_{ij} = P[X_{n+1} = j | X_n = i]$$

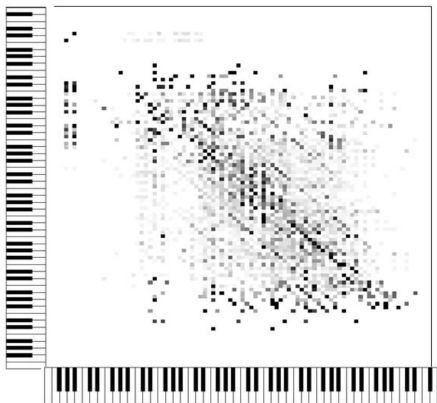
- Pravděpodobnost přechodu ze stavu i do j n -tého řádku:

$$p_{ij}^{(n)} = P[X_{m+n} = j | X_m = i]$$

- Počáteční rozdělení Markovského řetězce pro stavy $i \in \mathcal{S}$:

$$p_i = P[X_0 = i]$$

Reprezentace Markovského řetězce



I. Stravinsky "The Fire-bird" suite melody

- pomoci matice přechodových pravděpodobnosti $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j \in S}$;
- případně matice přechodových pravděpodobnosti vyšších řádů $\mathbb{P}^{(n)}$;
- orientovaný graf s vrcholy pro stavy a váhami pro jednotlivé hrany;
- obrázek ilustrující matici přechodových pravděpodobnosti;

Klasifikace stavů Markovského řetězce

Definice: Dosažitelnost stavu v Markovském řetězci

Řekneme, že nějaký stav $j \in \mathcal{S}$ je **dosažitelný** ze stavu $i \in \mathcal{S}$, pokud existuje číslo $n \in \mathbb{N}$ takové, že $p_{ij}^{(n)} > 0$.

- pro vyjádření faktu, že stav j je dosažitelný ze stavu i (ne nutně v jednom kroku), používáme značení $i \longrightarrow j$;

Definice: Nerozložitelnost Markovského řetězce

Řekneme, že Markovský řetězec je **nerozložitelný**, pokud každý stav je dosažitelný z každého stavu.

- dosažitelnost stavů v Markovském řetězci a nerozložitelnost řetězce nemusí být patrná pouze z pohledu na samotnou matici \mathbb{P} ;

Rozložitelnost a nerozložitelnost řetězce

příklad

Uvažujme Markovský řetězec se čtyřprvkovou množinou stavů S a maticou přechodových pravděpodobnosti

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ❑ jedná se o rozložitelný Markovský řetězec protože stav 1 nelze dosáhnout ze žádného jiného stavu 2,3 a 4;
- ❑ pro nerozložitelnost řetězce by stačilo umožnit přechod ze stavu 2 do stavu 1, t.j., definovat $p_{21} > 0$;

Samostatný úkol

Reprezentujte Markovský řetězec z příkladu pomocí vhodného grafu.

Uzavřená množina stavů

Definice: Množna uzavřených stavů

Řekneme, že neprázdná množina stavů $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ je **uzavřená množina**, pokud každý stav vně množiny \mathcal{C} není dosažitelný z žádného stavu množiny \mathcal{C} .

❑ IDEA:

Jakmile řetězec jednou vejde do nějakého stavu $s \in \mathcal{C}$, pak již nemůže řetězec nabýt žádného jiného stavu, kromě stavů v množině \mathcal{C} .

- ❑ uzavřenost ve zmyslu *nemůžeme ven, ale pořád můžeme dovnitř*;

Věta: Nerozložitelnost řetězce I

Markovský řetězec je nerozložitelný právě tehdy, když neexistuje žádná uzavřená množina $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$, taková, že $\mathcal{C} \neq \mathcal{S}$.

Rozložitelnost a nerozložitelnost řetězce

Věta: Uzavřená množina stavů

Množina stavů $C \subset S$, taková, že $C \neq S$ je uzavřená právě tehdy, když platí, že

$$p_{jk} = 0 \quad \text{pro} \quad \forall j \in C \quad \text{a} \quad \forall k \notin C.$$

Věta: Nerozložitelnost řetězce II

Řetězec je rozložitelný právě tehdy, když po vhodném přechíslování stavů řetězce (a teda příslušnou permutaci řádků a sloupců matice \mathbb{P}) je matice přechodových pravděpodobností ve tvaru

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbb{Q} & \mathbb{R} \end{pmatrix},$$

kde \mathbb{P}_1 a \mathbb{R} jsou čtvercové matice a \mathbb{P}_1 je navíc stochastická.

Doba prvního vstupu (návratu) do stavu

Definice: Doba prvního vstupu

Pro libovolný stav $i \in \mathcal{S}$ definujeme

$$\nu_i = \inf\{n \in \mathbb{N}; X_n = i\}$$

jako čas prvního vstupu (resp. doba prvního návratu) řetězce $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ do stavu $i \in \mathcal{S}$, t.j., záleží na počátečním rozdělení).

- analogicky lze definovat i obecný čas k -tého vstupu (návratu) řetězce do stavu $i \in \mathcal{S}$ jako

$$\nu_i(k) = \inf\{n > \nu_i(k-1); X_n = i\},$$

kde definujeme $\nu_i(1) \equiv \nu_i$, pro $i \in \mathcal{S}$;

Doba mezi návraty do stavu

Pro doby, které Markovský řetězec stráví mezi jednotlivými návraty do daného stavu $i \in \mathcal{S}$ se obecně zavádí značení

- $T_i(1) = \nu_i = \nu_i(1)$: doba do prvního návratu/vstupu do stavu $j \in \mathcal{S}$;
 - $T_i(2) = \nu_i(2) - \nu_i(1)$: doba mezi prvním a druhým návratem/vstupem;
 - $T_i(k) = \nu_i(k) - \nu_i(k-1)$: doba mezi k -tým a $(k-1)$ -vým návratem;
- Samozřejmě platí, že

$$\nu_i(k) = T_i(1) + T_i(2) + \cdots + T_i(k);$$

Poznámka:

Je vhodné rozlišovat **návrat do stavu** $i \in \mathcal{S}$ (pokud již řetězec v tomto stavu v minulosti byl) a **vstup do stavu** $i \in \mathcal{S}$ (pokud řetězec v daném stavu ještě nebyl). V praxi (ovšem ne nutně vždy a všude) se obecně používá vyjádření o prvním vstupu do stavu $i \in \mathcal{S}$ ("nultý" návrat) a pak o k -tém návratu (t.j., $(k+1)$ -ní vstup).

Trvalý a přechodný stav v Markovském řetězci

Definice: Trvalý stav

Stav $i \in \mathcal{S}$ takový, že platí

$$P_i[\nu_i < \infty] = P[\nu_i < \infty | X_0 = i] = 1,$$

se nazývá **trvalý stav** řetězce $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$.

Definice: Přechodný stav

Stav $i \in \mathcal{S}$ takový, že platí

$$P_i[\nu_i = \infty] = P[\nu_i = \infty | X_0 = i] > 0,$$

se nazývá **přechodný (transientní) stav** řetězce $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$.

Přechodný a trvalý nulový a nenulový stav

- ❑ **Trvalý stav** je teda takový, že řetězec, který vychází ze stavu $i \in \mathcal{S}$ (proto podmínka, že $X_0 = i$), se v konečně mnoha krocích do tohoto stavu **vrátí s pravděpodobností 1**;
- ❑ V opačném případě (t.j., existuje kladná pravděpodobnost, že řetězec, který začal ve stavu $i \in \mathcal{S}$, se již nikdy do tohoto stavu nevrátí) řekneme, že **stav je přechodný**.

Definice: Trvalý nulový a nenulový stav

- ❑ Trvalý stav $i \in \mathcal{S}$ takový, že $E_i \nu_i = \infty$, se nazývá **nulový stav**;
- ❑ Trvalý stav $i \in \mathcal{S}$ takový, že $E_i \nu_i < \infty$, se nazývá **nenulový stav**;

Střední hodnoty v definici jsou definované vzhledem k pravděpodobnostní míře $P_i[\cdot] = P[\cdot | X_0 = i]$ (t.j., záleží na počátečním rozdělení);

Klasifikace stavů v Markovském řetězci

- ❑ Do trvalého stavu se Markovský řetězec vrátí nekonečně mnoho krát s pravděpodobností 1.
- ❑ Do přehodného stavu se Markovský řetězec vrátí nekonečně mnoho krát s pravděpodobností nula.
- ❑ Necht' $f_i^{(n)} = P_i[\nu_i = n]$ (první návrat v čase n) a necht' $f_i^{(0)} = 0$. Pak je zřejmé, že stav $i \in \mathcal{S}$ je trvalý, právě tehdy, když platí, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_i^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} f_i^{(n)} = 1;$$

- ❑ Pro střední hodnotu $E_i \nu_i$ platí: $E_i \nu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n P_i[\nu_i = n] = \sum_{n=1}^{\infty} n f_i^{(n)}$;
- ❑ Obecně pro $n \geq 1$ platí, že $p_{ij}^{(n)} = P_i[X_n = j] = \sum_{k=1}^n f_i^{(k)} p_{ij}^{(n-k)}$;
- ❑ Obecně pro $n \geq 0$ a $i \neq j$ platí $p_{ij}^{(n)} = P_i[X_n = j] = \sum_{k=1}^n f_{ij}^{(k)} p_{ij}^{(n-k)}$,
kde $f_{ij}^{(n)} = P_i[\nu_j = n] = P[\nu_j = n | X_0 = i]$ (první vstup v čase n);

Periodický a neperiodický stav

Definice: Periodický stav

Stav $i \in \mathcal{S}$ v homogénním Markovském řetězci $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ se nazývá **periodický s periodou** $d \in \mathbb{N}$, pokud platí, že

$$d = NSD(n > 0; p_{ii}^{(n)} > 0) > 1,$$

teda největší společný dělitel pro čas návratu do stavu i je větší jako jedna.

- Pokud platí, že $NSD = 1$, pak řekneme, že stav $i \in \mathbb{N}$ je **aperiodický** neboli **neperiodický**.

Stavy stejného typu

Definice: Stavy stejného typu

Řekneme, že dva stavy jsou stejného typu, pokud platí, že oba stavy jsou **trvalé/přechodné**, **nulové/nenulové** a **periodické/neperiodické**, so stejnou periodou $d > 1$.

Príklad

- Ověřte, že v Markovském řetězci s přechodovou maticí

$$\mathbb{P} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & (1-p) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

jsou všechny stavy periodické, s periodou $d = 3$ pro $p \in (0, 1)$.

- Co se stane, když do procesu přidáme jednu smyčku typu $p_{ii} > 0$?

Klasifikace stavů v Markovském řetězci I

Věta: Trvalý a trvalý nulový stav

- ❑ Stav $i \in \mathcal{S}$ je **trvalý** $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$;
- ❑ Stav $i \in \mathcal{S}$ je **přechodný** $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$;
- ❑ Trvalý stav $i \in \mathcal{S}$ je **nulový** $\Leftrightarrow p_{ii}^{(n)} \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow \infty$;

Věta: Trvalé vs. předchodné stavy

V nerozložitelném Markovském řetězci s $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \dots\}$ jsou všechny stavy trvalé tehdy a jen tehdy, když jediné řešení soustavy

$$x_i = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

v intervalu $[0, 1]$ je triviální, t.j. $x_i = 0$ pro všechny $i = 1, 2, \dots$.
Všechny stavy jsou přechodné \Leftrightarrow existuje netriviální řešení (10).

Klasifikace stavů v Markovském řetězci II

Věta: Řetězec s konečně mnoho stavů

- ❑ V Markovském řetězci s konečnou množinou stavů S nemohou být všechny stavy přechodné.
- ❑ V Markovském řetězci s konečnou množinou stavů S neexistují stavy trvalé nulové.

Věta: Stavy stejného typu

Uvažujme Markovský řetězec s množinou stavů S .

- ❑ Když pro libovolné dva stavy $i, j \in S$ existuje cesta $i \rightarrow j \rightarrow i$, pak jsou oba stavy i a j stejného typu.
- ❑ Pokud $i \rightarrow j \not\rightarrow i$, pak stav i je přechodný.
- ❑ V nerozložitelném řetězci jsou všechny stavy stejného typu.

Absorbčné a ergodické stavy

- V případě Markovských procesů je užitečné ještě definovat tzv. absorbční stav a ergodický stav procesu.

Definice: Absorbční stav

Stav, ze kterého není dosažitelný žádný jiný stav, se nazývá **absorbční**.

Definice: Ergodický stav

Stav, který je trvalý, nenulový a neperiodický, se nazývá **ergodický**.

Příklad: Dosažené maximum na hrací kostce

Príklad

- ❑ stav $i \in \mathcal{S}$ je trvalý $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$, pro $i = 1, \dots, 6$;
 - ❑ v našem případě platí: $p_{ii}^{(n)} = \left(\frac{i}{6}\right)^n$;
 - ❑ pro $i = 1, \dots, 5$ je řada konvergentní;
 - ❑ pro $i = 6$ je suma divergentní;
- ❑ stav $i = 6$ je proto trvalý, stavy $i = 1, \dots, 5$ jsou přechodné;
- ❑ je stav $i = 6$ nulový nebo nenulový?
 - ❑ podle definice: $E_i \nu_i = 1 \cdot 1 = 1 < \infty$;
 - ❑ stav $i = 6$ je proto trvalý nenulový;
 - ❑ střední doba návratu do stavu $i = 6$ je 1 ($\nu_6 = 1$);
 - ❑ množina stavů $\{6\}$ je uzavřená, a stav je absorbční;

Příklad: Náhodná procházka

Príklad

- ❑ otázka zní, jak se chovají pravděpodobnosti $p_{ii}^{(n)}$?
- ❑ z povahy řetězce je zřejmé, že $p_{ii}^{(n)} = 0$ pro $n \in \mathbb{N}$ liché;
- ❑ pro pravděpodobnosti $p_{ii}^{(2n)}$ pak dostaneme:

$$p_{ii}^{(2n)} = \binom{2n}{n} 2^{-2n} = \frac{(2n)! 2^{-2n}}{(n!)^2} \approx \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n} 2^{-2n}}{n^{2n} e^{-2n} 2\pi n} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \rightarrow 0,$$

kde jsme využili Stirlingovou aproximaci $n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$;

- ❑ tudíž platí, že $p_{ii}^{(n)} \rightarrow 0$, pro $n \rightarrow \infty$;
- ❑ zároveň platí, že $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$;
- ❑ všechny stavy jsou proto trvale nulové;

Příklad: Človeče nezlob se!

Samostatný úkol

Uvažujte hru Človeče nezlob se, kde hrací plocha má pouze 15 stanovišť. Hráč se posune o tolik kroků dopředu, kolik hodil bodů na kostce. Když hodí hodnotu šest, háže opět a posune se o počet kroků daný součtem bodů v jednotlivých hodech. Hra končí, když se hráč vrátí spátky na startovací pozici – t.j. políčko č. 15.

Jak vypadá matice přechodových pravděpodobností? Klasifikujte stavy Markovského procesu.



Zhrnutí předchozí přednášky/opakování

- ❑ Homogénní Markovské řetězce s diskrétným časem $n \in \mathbb{N}$ a nejvýše spočetnou množinou stavů S ;
- ❑ Klasifikace stavů v Markovském řetězci:
 - ❑ Trvalé nulové a nenulové stavy;
 - ❑ Přejídné stavy;
 - ❑ Neperiodické a periodické stavy s periodou $d > 1$;
 - ❑ Absorbční a ergodické stavy;
- ❑ Rozložitelnost a nerozložitelnost řetězce:
 - ❑ Dosažitelnost stavů (existence cesty $i \rightarrow j \rightarrow i$);
 - ❑ Existence uzavřené podmnožiny stavů \Rightarrow rozložitelnost řetězce;
- ❑ Zavedené veličiny a značení:
 - ❑ Počáteční a přechodové pravděpodobnosti: $p_i, p_{ij}, p_{ij}^{(n)}$ pro $i, j \in S$;
 - ❑ Čas prvního (obecně k -tého) návratu/vstupu do stavu $i \in S$: $\nu_i(k)$;
 - ❑ Čas mezi k -tým a $(k-1)$ -ním vstupem do stavu $i \in S$: $T_i(k)$;
 - ❑ Podmíněná pravděpodobnost počátečním stavem: $P_i[\cdot] = P[\cdot | X_0 = i]$;
 - ❑ Pravděpodobnost návratu/vstupu do stavu $i \in S$ v čase $n \in \mathbb{N}$: $f_i^{(n)}, f_{\ell i}^{(n)}$;

Chování Markovských řetězců

- ❑ Homogénní Markovský řetězec $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ s diskrétním časem a nejvýše spočetnou množinou stavů S ;
- ❑ Zajímá nás dlouhodobé chování Markovských řetězců, t.j., pro $n \rightarrow \infty$;
- ❑ Jaké je marginální rozdělení náhodnej veličiny X_n , pro $n \rightarrow \infty$;
- ❑ Obecně, náhodné veličiny X_n mají různé rozdělení pro různá $n \in \mathbb{N}$;

Chování Markovských řetězců

- ❑ Homogénní Markovský řetězec $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ s diskrétním časem a nejvýše spočetnou množinou stavů \mathcal{S} ;
- ❑ Zajímá nás dlouhodobé chování Markovských řetězců, t.j., pro $n \rightarrow \infty$;
- ❑ Jaké je marginální rozdělení náhodnej veličiny X_n , pro $n \rightarrow \infty$;
- ❑ Obecně, náhodné veličiny X_n mají různé rozdělení pro různá $n \in \mathbb{N}$;

- ❑ **Otázka:** Lze něco obecně říct o rozdělení X_n , pro $n \rightarrow \infty$?
 - ❑ např., rozdělení je stejné pro všechny $n \geq n_0$, pro nějaké vhodně zvolené $n \in \mathbb{N}$;
 - ❑ nebo rozdělení náhodne veličiny X_n konverguje k nějakému limitnímu rozdělení pro $n \rightarrow \infty$;
 - ❑ nebo existuje nějaké rozdělení Markovského řetězce, které určitou nějakou "stabilitu" řetězce;

Stacionární rozdělení Markovského řetězce

Definice: Stacionární rozdělení Markovského řetězce

Řekneme, že pravděpodobnostné rozdělení $\pi = (\pi_i; i \in \mathcal{S})$ na množině stavů \mathcal{S} je **stacionární rozdělení Markovského řetězce**, pokud platí, že

$$\pi_j = \sum_{i \in \mathcal{S}} \pi_i p_{ij},$$

pro všechny $j \in \mathcal{S}$. Maticově lze také zapsat jako

$$\pi^T = \pi^T \mathbb{P},$$

pro matici přechodových pravděpodobností $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j \in \mathcal{S}}$.

Samostatný úkol

Vysvětlete, co znamená, že $\pi = (\pi_i; i \in \mathcal{S})$ je pravděpodobnostné rozdělení na množině stavů \mathcal{S} .

Limitní rozdělení Markovského řetězce

Definice: Limitní rozdělení Markovského řetězce

Řekneme, že pravděpodobnostné rozdělení $\mathcal{P} = (p_i; i \in \mathcal{S})$ na množině stavů \mathcal{S} je **limitní rozdělení Markovského řetězce**, pokud platí, že

$$p_i = \lim_{n \rightarrow \infty} p_i(n),$$

kde $p_i(n) = P[X_n = i]$, pro $i \in \mathcal{S}$.

Samostatný úkol

Ukážte, že pro Markovský řetězec s maticou přechodových pravděpodobnosti

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

neexistuje limitní rozdělení.

Limitní vs. stacionární rozdělení

- ❑ **Stacionární rozdělení** Markovského řetězce se vztahuje pouze k pravděpodobnostem přechodu p_{ij} , pro $i, j \in \mathcal{S}$. **Nezávisí teda na počátečním rozdělení Markovského řetězce.**
- ❑ **Limitní rozdělení** se vztahuje k rozdělení celého Markovského řetězce. Je tedy ovlivněno i počátečním rozdělením Markovského řetězce.
- ❑ Snadno lze nahlédnout, že pokud je počáteční rozdělení řetězce rovno stacionárnímu rozdělení π , pak je i rozdělení řetězce ve všech dalších časech $n \in \mathbb{N}$, t.j. rozdělení $(p_i(n); i \in \mathcal{S})$, **rovné rozdělení π .**

Věta: Stritně stacionární proces

V případě, že počáteční rozdělení řetězce je stejné jako stacionární rozdělení, pak pro libovolnou posloupnost i_0, \dots, i_k stavů z \mathcal{S} a libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí

$$P[X_0 = i_0, \dots, X_k = i_k] = P[X_n = i_0, \dots, X_{n+k} = i_k].$$

Takový řetězec se nazývá **striktně stacionární**.

Limitní rozdělení \Rightarrow stacionární rozdělení

Věta: Limitní rozdělení a stacionární rozdělení

Nechť existuje limitní rozdělení $\mathcal{P} = (p_i; i \in \mathcal{S})$ Markovského řetězce $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$. Pak je toto rozdělení zároveň stacionárním rozdělením Markovského řetězce a tudíž platí, že

$$\mathcal{P} = \pi.$$

- Opačná implikace samozřejmě obecně neplatí: není pravda, že existence stacionárního rozdělení by byla postačující podmínka pro existenci limitního rozdělení Markovského řetězce;

Nerozložitelnost a stacionární rozdělení

Věta: Nerozložitelnost a existence stacionárního rozdělení

Nechť $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ je nerozložitelný Markovský řetězec s množinou stavů \mathcal{S} . Pak **stacionární rozdělení existuje** právě když všechny stavy jsou trvalé nulové.

- Jsou-li navíc všechny stavy neperiodické, je **stacionární rozdělení i limitním rozdělením** a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_j(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j = \frac{1}{E_j \nu_j},$$

- Jsou-li všechny stavy periodické, pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_j(k) = \frac{1}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n p_{ij}^{(k)} = \pi_j.$$

Příklad: Nehodové pojištění s bonusem

- ❑ V konečném nerozložitelném řetězci stacionární rozdělení vždy existuje. *(všechny stavy jsou totiž trvalé nenulové)*
- ❑ Stacionární rozdělení nerozložitelného řetězce nepopisuje pouze limity absolutních pravděpodobností jednotlivých stavů, ale popisuje také četnosti návratu do jednotlivých stavů, čas který daný Markovský řetězec v jednotlivých stavech stráví.

Príklad

Uvažujeme nehodové pojištění se třemi různými úrovněmi:

- ❑ základní sazba (stav 1);
- ❑ sazba s bonusem 30 % (stav 2);
- ❑ sazba s bonusem 50 % (stav 3);

Rok bez pojistní události znamená postup do lepší pojistní kategorie pro příští rok (když taková možnost existuje). Jedná pojistní událost v průběhu roka znamená posun o jednu kategorii níž (pokud to lze) pro další rok. V případě většího počtu události posun do základní kategorie.

Příklad: Nehodové pojištění s bonusem

Príklad

- ❑ situaci chceme modelovat pomocí Markovského řetězce;
- ❑ počet pojistných událostí Y_n v daném roce $n \in \mathbb{N}$ má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda > 0$;
- ❑ náhodná veličina X_{n+1} je definovaná následovně:

$$X_{n+1} = \begin{cases} \min(X_n + 1, 2) & \text{pro } Y_n = 0 \\ \max(X_n - 1, 0) & \text{pro } Y_n = 1 \\ 0 & \text{pro } Y_n > 1 \end{cases}$$

- ❑ ukážete, že $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ je Markovský řetězec;
- ❑ nájděte matici přechodových pravděpodobností \mathbb{P} ;
- ❑ nájděte soustavu rovnic pro nalezení stacionárního rozdělení;

Počet přechodů stavem $j \in \mathcal{S}$

Definice: Počet přechodů daným stavem

Náhodná veličina

$$N_j(n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{\{X_k=j\}},$$

se nazývá **počet přechodů stavem $j \in \mathcal{S}$ v prvních $n \in \mathbb{N}$ krocích** (resp. počet návratů do stavu $j \in \mathcal{S}$).

- počet návratů do stavu j (náhodná veličina $N_j(n)$) úzce souvisí s časy návratu do stavu $j \in \mathcal{S}$;

Počet přechodů, časy návratů a klasifikace

- Limitním přechodem získáme celkový počet návratu do stavu $j \in S$ jako

$$N_j = \lim_{n \rightarrow \infty} N_j(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{\{X_k=j\}}.$$

- Snadno se nahlédne, že platí následující:
 - $N_j \geq k \Leftrightarrow \nu_j(k) < \infty$;
 - $N_j = k \Leftrightarrow \nu_j(k) < \infty \wedge \nu_j(k+1) = \infty$;

Věta: 0 – 1 zákon

- ak je stav $j \in S$ trvalý, pak $P_j[N_j = \infty] = 1$;
- ak je stav $j \in S$ přechodný, pak $P_j[N_j = \infty] = 0$;

Počet přechodů $N_j(n)$ a stacionární rozdělení

Věta: Stacionární rozdělení v řetězci s trvalými nenulovými stavy

V nerozložitelném Markovském řetězci s trvalými nenulovými a neperiodickými stavy platí s pravděpodobností jedna, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_j(n)}{n} = \pi_j,$$

pro všechny stavy $j \in \mathcal{S}$.

Příklad: Stacionární rozdělení

Príklad

Uvažujme Markovský řetězec s množinou stavů $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \dots\}$ a maticou přechodových pravděpodobností

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & p & 0 & \dots \\ 0 & q & 0 & p & \dots \\ 0 & 0 & q & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

pro nějaké vhodně zvolené $p > 0$ a $q > 0$, takové, že $p + q = 1$.

- Najděte stacionární rozdělení pro daný Markovský řetězec.

Zhrnutí předchozí přednášky/opakování

- ❑ Homogénní Markovské řetězce s diskrétným časem $n \in \mathbb{N}$ a nejvýše spočetnou množinou stavů \mathcal{S} ;
- ❑ Rozložitelnost a nerozložitelnost řetězce:
 - ❑ Konečné vs. nekonečná množina stavů;
 - ❑ Existence cesty: dosažitelnost stavů (stavy stejného typu);
 - ❑ Uzavřené podmnožiny stavů \Rightarrow rozložitelnost řetězce;
 - ❑ Počty a časy přechodu, návratu a vstupu do daného stavu;
- ❑ Klasifikace stavů v Markovském řetězci:
 - ❑ Trvalé nulové a trvalé nenulové stavy;
 - ❑ Přechodné stavy;
 - ❑ Neperiodické/periodické stavy (s periodou $d > 1$);
 - ❑ Absorbční stavy a ergodické stavy;
- ❑ Limitní a stacionární rozdělení Markovského řetězce
 - ❑ Limitní rozdělení - popisuje chování celého Markovského řetězce včetně počátečního rozdělení;
 - ❑ Stacionární rozdělení - vyjadřuje určitou stabilitu řetězce vzhledem k pravděpodobnostem přechodu;

Kapitola 5

Časové řady

Nádodné procesy vs. časové řady

□ Stochastický/náhodný proces

↪ posloupnost (reálných) náhodných veličin $\{X_t; t \in T\}$ definovaných na stejném pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{A}, P) ;

□ Časová řada (proces)

↪ stochastický proces indexovaný celočíselnou množinou T ($T \equiv \mathbb{N}$, nebo $T \equiv \mathbb{Z}$) (resp. stochastický proces s diskrétnym časom);

- v niektorých literárnych zdrojoch sa pod pojmom **časová řada** rozumí již nějaká konkrétní **realizace náhodného procesu** $\{X_t; t \in T\}$, t.j., posloupnost konkrétních hodnot X_1, X_2, \dots , neboli x_1, x_2, \dots ;

Bílý šum

Definice: Bílý šum

Posloupnost centrovaných a **nekorelovaných** náhodných veličin $\{X_t; t \in T\}$ s kladným konečným rozptylem se nazývá **bílý šum**.

Definice: Striktní bílý šum

Posloupnost **nezávislých, stejně rozdělených**, nedegenerovaných náhodných veličin $\{X_t; t \in T\}$ s nulovou střední hodnotou (centrovaných) se nazývá **striktní bílý šum**.

- v podstatě je bílý šum náhodný **signál s rovnoměrnou spektrální hustotou**; *(analógie s bílým světlem, které obsahuje všechny ostatné frekvence)*

Příklad: Bílý šum a striktní bílý šum

Príklad

- ❑ posloupnost nezávislých náhodných veličin z rozdělení $N(0, 1)$ je **bílý šum** a zároveň aj **striktní bílý šum** (obecně $N(0, \sigma^2)$);
 - ❑ posloupnost nezávislých náhodných veličin z rozdělení $C(0, 1)$ je **striktní bílý šum**, ale není to **bílý šum** – neexistuje totiž ani střední hodnota, ani konečný rozptyl;
 - ❑ posloupnost nekorelovaných náhodných veličin z nějakého obecného rozdělení F je **bílý šum**, pokud jsou veličiny centrované (t.j. s nulovou střední hodnotou) a s konečným rozptylem; Pokud navíc je rozdělení F normální, pak se jedná o **striktní bílý šum**;
-
- ❑ **Striktní bílý šum** a **bílý šum** jsou obecně časové řady s nejjednodušší závislostní strukturou – nekorelované, neboli dokonce nezávislé. Zároveň v sobě nenesou žádnou informaci, jedna se pouze o náhodné chyby, stochastické fluktuače.

Silná stacionarita

Definice: Silná stacionarita

Řekneme, že posloupnost náhodných veličin $\{X_t; t \in T\}$ je **striktně stacionární** (resp. silně stacionární), pokud pro $l \in \mathbb{N}$, libovolné $k_1, \dots, k_l \in T$ a každé $h > 0$ takové, že $k_1 + h, \dots, k_l + h \in T$ platí, že

$$\mathcal{L}(X_{k_1}, \dots, X_{k_l}) = \mathcal{L}(X_{k_1+h}, \dots, X_{k_l+h}).$$

- **Silná stacionarita** znamená, že libovolná l -tice náhodných veličin je stejně rozdělená v libovolném časovém okamžiku;
- Z definice samozřejmě plyne, že pro silně stacionární posloupnost $\{X_t; t \in T\}$ jsou náhodné veličiny X_t **stejně rozdělené** pro všechny $t \in T$;

Slabá stacionarita

Definice: Slabá stacionarita

Řekneme, že posloupnost náhodných veličin $\{X_t; t \in T\}$ je **slabě stacionární**, pokud platí:

- ❑ $EX_t = \mu$ pro všechna $t \in T$ (t.j., nezávisí na t);
- ❑ $R(k) = E[(X_{t+k} - \mu)(X_t - \mu)]$ (t.j., nezávisí na $t \in T$);

- ❑ funkce $R(k)$ se nazývá **autokovarianční funkce** posloupnosti;
- ❑ hodnota $R(0) = E(X - \mu)^2$ je rozptyl posloupnosti (konstantní v čase);
- ❑ funkce $r(k) = R(k)/R(0)$ se nazývá **autokorelační funkce** posloupnosti;
- ❑ samozřejmě platí, že $R(k) = R(-k)$ pro libovolné $k \in \mathbb{N}$;

Příklad: Bílý šum a striktní bílý šum

Príklad

- ❑ pokud má silně stacionární posoupnost konečné druhé momenty, pak je zřejmě slabě stacionární;
- ❑ pokud je posoupnost náhodných veličin gausovská (t.j. všechny konečně-rozměrná rozdělení jsou normální) a slabě stacionární, pak je také silně stacionární;
- ❑ striktní bílý šum je silně (striktně) stacionární (nezávislé a stejně rozdělené náhodné veličiny);
- ❑ bílý šum je obecně slabě stacionární (centrované a nekorelované náhodné veličiny);

Klouzavé průměry řádu $q \in \mathbb{N}$

Definice: $MA(q)$ proces

Nechť posloupnost $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ je bílý šum s konečným rozptylem $\sigma^2 < \infty$. Pak náhodnou posloupnost

$$X_t = a_0\varepsilon_t + a_1\varepsilon_{t-1} + \cdots + a_q\varepsilon_{t-q}, \quad \text{pro } t \in \mathbb{Z},$$

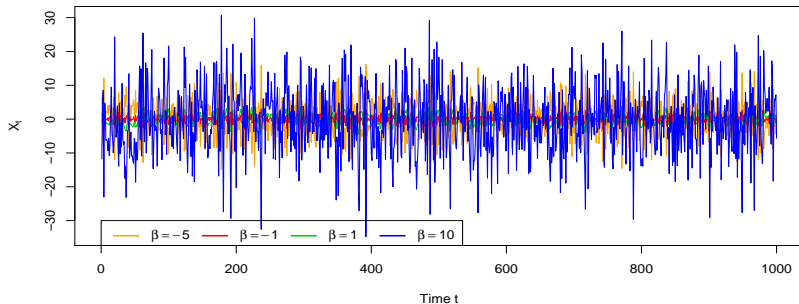
a pro nějaké koeficienty $a_0, \dots, a_q \in \mathbb{R}$, takové, že $a_0 \neq 0 \neq a_q$, nazýváme **posloupnost klouzavých průměrů řádu q** .

- obecně mají $MA(q)$ procesy složitější korelační strukturu než bílý šum, avšak složky X_t a X_{t+k} jsou nekorelované pro $k > q$.

Příklad: $MA(1)$ proces

Příklad

- ❑ necht' $X_t = \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1}$, pro $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ bílý šum;
- ❑ Pro jaké hodnoty $\beta \in \mathbb{R}$ je $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ stacionární?
- ❑ Jak je definovaná autokovarianční a autokorelační funkce?



Autoregresní model řádu $p \in \mathbb{N}$

Definice: $AR(p)$ proces

Nechť posloupnost $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ je bílý šum s konečným rozptylem $\sigma^2 < \infty$. Pak náhodnou posloupnost

$$d_0 X_t + d_1 X_{t-1} + \dots + d_p X_{t-p} = \varepsilon_t, \quad \text{pro } t \in \mathbb{Z}, \quad (11)$$

pro nějaké koeficienty $d_0, \dots, d_p \in \mathbb{R}$, takové, že $d_0 \neq 0 \neq d_p$, nazýváme **autoregresní posloupnost řádu p** .

- Ekvivalentně lze model přepsát pomocí rovnice $X_t = \tilde{d}_1 X_{t-1} + \dots + \tilde{d}_p X_{t-p} + \tilde{\varepsilon}_t$, kde $\text{Var} \tilde{\varepsilon}_t = \frac{1}{d_0^2} \text{Var} \varepsilon_t$ a $\tilde{d}_j = -d_j/d_0$;
- Obecně jsou pro tyto modely **autokorelace nenulové** a jednotlivé složky se navzájem ovlivňují i když jsou libovolně daleko od sebe.
- Pokud je posloupnost stacionární, pak **závislost mezi složkami se vzrůstajícím rozdílem v čase nutně slabne**;

Stacionarita autoregresní posloupnosti

Věta: Stacionarita autoregresní posloupnosti

Nechť $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ je autoregresní posloupnost p -tého řádu definovaný rovnicí (11) a necht' bez ujmy na obecnosti $d_0 = 1$. Necht' jsou všechny kořeny polynomu

$$d(z) = 1 + d_1z + \dots + d_pz^p$$

vně jednotkového kruhu v komplexní rovině. Pak je proces $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ slabě stacionární a náhodná veličina ε_t je nekorelovaná se všemi náhodnými veličinami X_{t-1}, X_{t-2}, \dots

Centrovanost a kauzálnost AR posloupnosti

- za platnosti podmínek předchozí věty je posloupnost $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ také **centrovaná**, protože ze slabé stacionarity také automaticky plyne, že

$$0 = E\varepsilon_t = d_0 EX_t + \dots d_p EX_{t-p} = \mu \left(\sum_{i=1}^p d_i \right),$$

a tudíž $\mu = 0$. Ak by $\sum_{i=1}^p d_i = 0$, pak by to znamenalo, že 1 je také kořenem polynomu $d(z)$, což je spor s předpokladem uvedené věty;

- za platnosti podmínek předchozí věty také platí, že posloupnost $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ lze vyjádřit v **kauzálním tvare**, t.j. existuje vyjádření

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varepsilon_{t-k},$$

kde koeficienty c_k jsou určeny vztahem $c(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \frac{1}{d(z)}$,
pro $|z| \leq 1$.

Příklad: $AR(1)$ proces

Příklad

- ❑ necht' $X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t$, pro $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ bílý šum;
- ❑ polynom $d(z) = 1 - az$ má kořen v bodě $z = 1/a$;
- ❑ kořen je vně jednotkového kruhu $\Leftrightarrow |a| > 1$;
- ❑ potom platí, že

$$X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t = a(aX_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = \dots = a^k X_{t-k} + \sum_{\ell=0}^{k-1} a^\ell \varepsilon_{t-\ell};$$

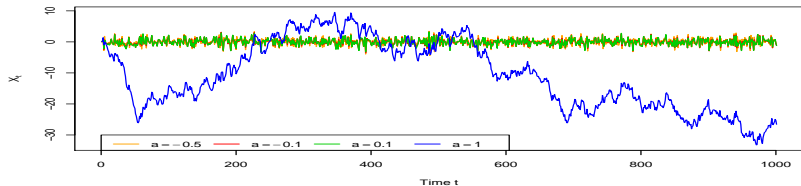
- ❑ a náhodnou veličinu X_t lze (limitním přechodem) vyjádřit kauzálně jako

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \varepsilon_{t-k}$$

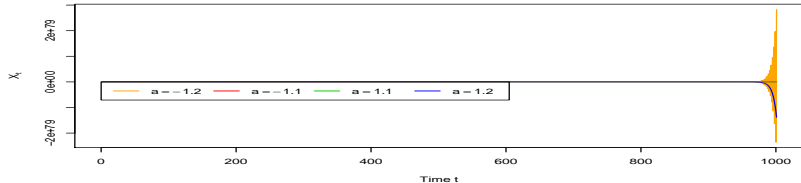
(t.j. lineární kombinaci minulosti posloupnosti $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$)

Příklad: $AR(1)$ proces

□ pro parametr $|a| \leq 1$



□ pro parametr $|a| > 1$



Příklad: $AR(1)$ proces

- Rozptyl procesu lze spočítat i pomocí soustavy rovnic:

$$EX_t X_{t-1} = aEX_{t-1}^2 + E\varepsilon_t X_{t-1}$$

$$EX_t \varepsilon_t = aEX_{t-1} \varepsilon_t + E\varepsilon_t^2$$

- pak kvůli nekorelovanosti ε_t a X_{t-1} máme $EX_{t-1} \varepsilon_t = 0$ a tudíž

$$\begin{aligned}\sigma^2 = E\varepsilon_t^2 &= EX_t \varepsilon_t = EX_t (X_t - aX_{t-1}) = R(0) - aR(1) \\ &= R(0)[1 - ar(1)]\end{aligned}$$

- z první rovnice pak dostaneme

$$R(1) = aR(0) \quad \Leftrightarrow \quad a = R(1)/R(0) = r(1)$$

- pro rozptyl $R(0)$ procesu $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ dostaneme

$$R(0) = \frac{\sigma^2}{1 - a^2} = \frac{\sigma^2}{1 - (r(1))^2};$$

Yule-Walkerovy rovnice

Za předpokladu, že ε_t je nekorelované s $X_{t-1}, X_{t-2}, X_{t-3} \dots$ (vid' také předchozí věta o stacionaritě autoregresní posloupnosti), lze analogicky postup aplikovat i pro obecný autoregresní proces řádu p ;

- uvažujme obecný autoregresní proces

$$X_t = a_1 X_{t-1} + \dots + a_p X_{t-p} + \varepsilon_t \quad (12)$$

- rovnici autoregresního procesu vynásobíme postupně veličinami $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p}$ a aplikujeme operátor středné hodnoty:

$$EX_t X_{t-1} = a_1 EX_{t-1}^2 + \dots + a_p EX_{t-p} X_{t-1} + E\varepsilon_t X_{t-1}$$

$$EX_t X_{t-2} = a_1 EX_{t-1} X_{t-2} + \dots + a_p EX_{t-p} X_{t-2} + E\varepsilon_t X_{t-2}$$

.....

$$EX_t X_{t-p} = a_1 EX_{t-1} X_{t-p} + \dots + a_p EX_{t-p}^2 + E\varepsilon_t X_{t-p}$$

Yule-Walkerovy rovnice

- soustavu rovnic lze ekvivalentně přepsát v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} R(0) & \dots & R(p-1) \\ \dots & \dots & \dots \\ R(p-1) & \dots & R(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(1) \\ \vdots \\ R(p) \end{pmatrix}$$

- neboli také pomocí autokorelační funkce $r(\cdot)$ jako

$$\begin{pmatrix} r(0) & \dots & r(p-1) \\ \dots & \dots & \dots \\ r(p-1) & \dots & r(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(1) \\ \vdots \\ r(p) \end{pmatrix}$$

- pomocí této soustavy lze spočítat hodnoty autokorelační funkce v časech $1, 2, \dots, p$. Pro hodnoty $r(k)$, kde $k > p$ lze využít diferenční rovnici

$$r(k) - a_1 r(k-1) - \dots - a_p r(k-p) = 0,$$

kteřou získáme vynásobením rovnice (12) veličinou X_{t-k} a aplikováním operátoru střední hodnoty;

Výpočet rozptylu pro $AR(p)$

- pro výpočet rozptylu $R(0)$ stačí vynásobit rovnici (12) veličinou ε_t a opět aplikovat operátor střední hodnoty;
- přímočaře dostaneme vyjádření

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E\varepsilon_t^2 = EX_t\varepsilon_t = EX_t(X_t - a_1X_{t-1} - \dots - a_pX_{t-p}) \\ &= R(0)[1 - a_1r(1) - \dots - a_pr(p)];\end{aligned}$$

- pro rozptyl $AR(p)$ procesu teda platí, že

$$\text{Var}X_t = R(0) = \frac{\sigma^2}{1 - a_1r(1) - \dots - a_pr(p)};$$

AR(2) Příklad

Príklad

Nechť posloupnost $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ je bílý šum s jednotkovým rozptylem, $\sigma^2 = 1$.
Definujme AR(2) proces jako

$$X_t - 0.5X_{t-1} + 0.6X_{t-2} = \varepsilon_t.$$

- Spočtete střední hodnotu a rozptyl;
- Určete, zda je proces $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ stacionární;
- Pomocí Yule-Walkerových rovnic spočítejte autokorelační funkci;

Odhad neznámých parametrů

- ❑ Yule-Walkerove rovnice lze aplikovat i obráceným způsobem: použít data z procesu a **odhadnout neznáme parametry** a_1, \dots, a_p v $AR(p)$ procesu;
- ❑ pomocí dat (konkrétní realizace procesu $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$) lze **odhadnout hodnoty autokovarianční funkce** $\hat{R}(0), \dots, \hat{R}(p)$;
- ❑ hodnoty odhadov autokovarianční funkce v daných bodech **dosadit do Yule-Walkerových rovnic** a řešit pro neznáme parametry a_1, \dots, a_p ;
- ❑ otázka pouze zůstává, jak správně nebo vhodně určit příslušný řád autokovariančního procesu, parametr $p \in \mathbb{N}$;
(existují různá kritéria, tzv. "rules-of-thumb", nebo lze použít tzv. "expert judgement", nebo hlubší statistickou analýzu a formální statistické testy)

Zhrnutí předchozí přednášky/opakování

- ❑ Lineární (stochastické) modely časových řád (*MA* a *AR* procesy);
- ❑ *MA(1)*: Posloupnost klouzavých průměrů řádu $q \in \mathbb{N}$
 - ❑ závislost mezi X_t a X_{t-k} mizne pro $k > q$;
 - ❑ obecně je *MA(q)* proces stacionární (slabě);
 - ❑ charakterizace pomocí autokovarianční a autokorelační funkce;
- ❑ *AR(p)*: Autoregresní posloupnost řádu $p \in \mathbb{N}$:
 - ❑ nenulová autokorelace a mnohem složitější závislostní struktúra;
 - ❑ stacionarita pouze pro některé speciální případy (kořeny charakteristického polynomu vně jednotkového kruhu);
 - ❑ možnost vyjádřit stacionární *AR* proces v kauzální formě;
- ❑ Yule-Walkerové rovnice
 - ❑ výpočetný nástroj pro vyjádření autokovarianční a autokorelační funkce (charakterizace) procesu (časové řady);
 - ❑ inverzní využití Yule-Walkerových rovnic pro odhad neznámých parametrů v *AR(p)* procesu (za použití odhadů autokovariační/autokorelační funkce);

Konzistence odhadu parametrů

Věta: Konzistence odhadu parametrů v $AR(p)$ procesu

Nechť $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ je autoregresní posloupnost řádu $p \in \mathbb{N}$ generovaná modelem

$$X_t = a_1 X_{t-1} + \dots + a_p X_{t-p} + \varepsilon_t,$$

kde $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ je posloupnost nezávislých, stejně rozdělených n.v. se střední hodnotou nula a konečným rozptylem $\sigma^2 < \infty$. Nechť všechny kořeny polynomu $d(z) = 1 - a_1 z - \dots - a_p z^p$ leží vně jednotkového kruhu v komplexní rovině. Nechť $\hat{\mathbf{a}}_n$ je odhad parametrů $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p)^\top$ pomoci Yule-Walkerových rovnic, založený na pozorováních X_1, \dots, X_n a odhadech $\hat{R}(k)$ a $\hat{r}(k)$, pro $k \geq 0$. Pak platí, že

$$\sqrt{n}(\hat{\mathbf{a}}_n - \mathbf{a}) \xrightarrow{\mathcal{D}} N_p(\mathbf{0}, \sigma^2 \Gamma^{-1}),$$

kde $\Gamma = (R(i-j))_{ij}$.

Asymptotické rozdělení odhadů parametrů

- konvergence $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ v předchozí větě značí **konvergenci v distribuci**;
- ekvivalentně je možné také napsat, že platí

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p} \left| P(\sqrt{n}(\hat{a}_1 - a_1) \leq x_1, \dots, \sqrt{n}(\hat{a}_p - a_p) \leq x_p) - F(x_1, \dots, x_p) \right| \rightarrow 0,$$

pro $n \rightarrow \infty$, kde $F : \mathbb{R}^p \rightarrow [0, 1]$ značí združenou distribuční funkci mnohorozměrného normálního rozdělení $N_p(\mathbf{0}, \sigma^2 \Gamma^{-1})$;

- hustota mnohorozměrného normálního rozdělení $N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ je definována:

$$f(x_1, \dots, x_p) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} |\Sigma|} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\},$$

pro $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)^\top \in \mathbb{R}^p$, kde $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_p)^\top \in \mathbb{R}^p$ je vektor středních hodnot a Σ pozitivně definitní, symetrická varianční matice;

Odhad autokovarianční/autokorelační funkce

- ❑ máme k dispozici konkrétní **realizaci časové řady** $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ až do nějakého času $n \in \mathbb{N}$ (např. posloupnost $\{x_i; i = 1, \dots, n\}$);
- ❑ to znamená, že máme k dispozici pozorované hodnoty (realizace) náhodných veličin X_n, X_{n-1}, \dots, X_1 ;
- ❑ dále také předpokládáme, že proces $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ je generovaný rovnicí

$$X_t = a_1 X_{t-1} + \dots + a_p X_{t-p} + \varepsilon_t;$$

- ❑ parametre $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}$ jsou neznáme;
- ❑ **Jak pomoci empirických dat odhadnout parametry a_1, \dots, a_p ?**

Odhad autokovarianční/autokorelační funkce

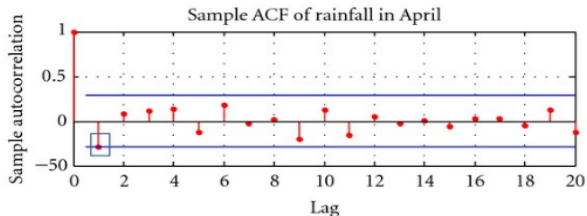
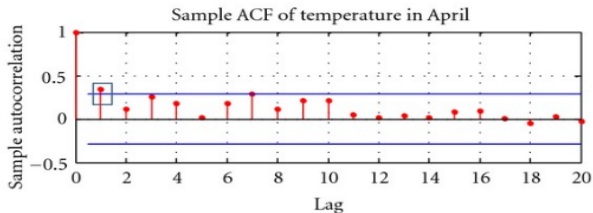
- v praktických případech je k dispozici **pouze konečná história** (realizace) časové řady $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$, t.j., pozorování X_1, \dots, X_n (nebo x_1, \dots, x_n);
- odhad autokovarianční funkce $R(k)$ pro libovolné $k \in \{0, n-1\}$ získáme pomocí vztahu

$$\widehat{R}(k) = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k} \left(X_{i+k} - \frac{1}{n-k} \sum_{j=1}^{n-k} X_{j+k} \right) \left(X_i - \frac{1}{n-k} \sum_{j=1}^{n-k} X_j \right)$$

- odhad příslušné autokorelační funkce $r(k)$ pro libovolné $k \in \{0, n-1\}$ pak získáme jako

$$\widehat{r}(k) = \frac{\widehat{R}(k)}{\widehat{R}(0)}.$$

Příklad: autokovarianční/autokorelační funkce



Neúplnost odhadů $\widehat{R}(k)$ a $\widehat{r}(k)$

- ❑ odhad autokovarianční funkce $R(k)$ nějaké posloupnosti se nazývá **výběrová autokovarianční funkce** – používáme značení $\widehat{R}(k)$;
- ❑ odhad autokorelační funkce $r(k)$ nějaké posloupnosti se nazývá **výběrová autokorelační funkce** – používáme značení $\widehat{r}(k)$;
- ❑ pro necentrovanou posloupnost $\{X_t; t \in \{1, \dots, n\}\}$ odhadujeme střední hodnotu $\mu \in \mathbb{R}$ pomocí **výběrové střední hodnoty** definované

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i;$$

- ❑ **výběrová autokovariační/autokorelační funkce** spočtená na základě realizace X_1, \dots, X_n poskytuje **pouze omezenou informaci** o celkové kovarianční/korelační struktúře posloupnosti;
- ❑ na základě realizace X_1, \dots, X_n totiž není možné spočítat hodnoty pro $\widehat{R}(k)$ a $\widehat{r}(k)$, kde $k \geq n$;

Modely $ARMA(p, q)$

- posloupnosti klouzavých průměrů a autoregresních posloupností lze vzájemně kombinovat do tzv. **ARMA modelů**;

Definice: $ARMA(p, q)$ proces

Nechť posloupnost $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ je bílý šum s konečným rozptylem $\sigma^2 < \infty$. Pak náhodnou posloupnost

$$d_0 X_t + d_1 X_{t-1} + \dots + d_p X_{t-p} = a_0 \varepsilon_t + \dots + a_q \varepsilon_{t-q}, \quad (13)$$

pro $t \in \mathbb{Z}$ a nějaké koeficienty $d_0, \dots, d_p, a_0, \dots, a_q \in \mathbb{R}$, takové, že $d_0, d_p, a_0, a_q \neq 0$, nazýváme **ARMA(p, q) model**.

- podobně jako v předchozích případech nás zajíma, za akých předpokladů bude **ARMA(p, q) posloupnost splňovat definici stacionarity (slabě)**;
- ekvivaletní zápis **ARMA(p, q) modelu** lze vyjádřit pomocí vztahu

$$X_t = \tilde{d}_1 X_{t-1} + \dots + \tilde{d}_p X_{t-p} + \tilde{a}_0 \varepsilon_t + \dots + \tilde{a}_q \varepsilon_{t-q};$$

Stacionarita $ARMA(p, q)$ procesů

□ předpokládejme, že v rovnici (13) je $d_0 = a_0 = 1$ a definujeme polynomy

$$d(z) = 1 + d_1z + \cdots + d_pz^p, \quad n(z) = 1 + a_1z + \cdots + a_qz^q; \quad (14)$$

Věta: Stacionarita $ARMA(p, q)$ modelů

Nechť všechny kořeny polynomu $d(z)$ leží vně jednotkového kruhu v komplexní rovině a navíc, nechť jsou polynomy $d(z)$ a $n(z)$ nesoudělné, t.j. nemají společné kořeny. Pak je posloupnost definovaná rovnicí (13) slabě stacionární, s nulovou střední hodnotou, a navíc, lze proces $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ vyjádřit v kauzálním tvaru, t.j.

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varepsilon_{t-k},$$

kde c_k jsou určeny vztahem $c(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \frac{n(z)}{d(z)}$,
pro $|z| \leq 1$.

Autokovariance/autokorelace ARMA procesů

- pokud by polynomy $d(z)$ a $n(z)$ měly společné kořeny, potom by polynom $c(z) = n(z)/d(z)$ určoval $ARMA(m, n)$ proces, pro $m < p$ a $n < q$;
- autokovarianční funkce stejně tak jako autokorelační funkce obecného $ARMA(p, q)$ procesu se spočte analogicky, jako v případě $AR(p)$ procesů, pomocí Yule-Walkerových rovnic.

Samostatný úkol

Uvažujte obecný $ARMA(1, 1)$ proces, definovaný předpisem

$$X_t + aX_{t-1} = \varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1},$$

pro $t \in \mathbb{Z}$, kde $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ je bílý šum.

- definujte podmínky pro které je posloupnost $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ slabě stacionární;
- nájděte autokovarianční a autokorelační funkci posloupnosti $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$;
- pokud existuje, nájděte kauzální vyjádření procesu $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$;

Lineární filtrace

Definice: Lineární filtrace

Nechť $\{\varepsilon; t \in \mathbb{Z}\}$ je centrovaná, slabě stacionární posloupnost a $\{\xi_k; k \in \mathbb{Z}\}$ je posloupnost koeficientů takových, že $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\xi_k| < \infty$. Pak řekneme, že posloupnost

$$X_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k \varepsilon_{t-k}$$

vznikla **lineární filtraci** z posloupnosti $\{\varepsilon; t \in \mathbb{Z}\}$. Posloupnost koeficientů $\{\xi_k; k \in \mathbb{Z}\}$ se nazývá **lineární filtr**.

Definice: Kauzální filtr

Nechť $\{\xi_k; k \in \mathbb{Z}\}$ je lineární filtr. Pokud platí, že $\xi_k = 0$ pro $k < 0$, pak je filtr **kauzální**, t.j. fyzikálně uskutečnitelný.

Lineární modely, procesy, systémy...

Definice: Lineární proces

Náhodnou posloupnost $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ nazýváme **lineárním procesem**, pokud existuje posloupnost nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin ε_t , pro $t \in \mathbb{Z}$, s nulovou střední hodnotou a konečným rozptylem a lineární filtr $\{\xi_k; k \in \mathbb{Z}\}$ takový, že

$$X_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k \varepsilon_{t-k}.$$

Lineární proces je navíc kauzální, pokud je příslušný filtr kauzální.

- **ARMA**(p, q) model je ekvivalentní s obecnou rovnicí lineárního systému (vid' Kapitola 3). Rovnice ARMA modelu ale určuje vztah nikoli mezi nenáhodnými (deterministickými) posloupnostmi vstupů a výstupu, ale mezi náhodnými posloupnostmi bílého šumu a ARMA procesem $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$.

Invertibilita *ARMA* posloupnosti

Definice: Invertibilita *ARMA* posloupnosti

Stacionární *ARMA*(p, q) posloupnost $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ vzniklá z bílého šumu $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$, se nazývá **invertibilní**, jestliže existuje posloupnost konstant $\{\psi_k; k \in \mathbb{Z}\}$ taková, že $\sum_{k=0}^{\infty} |\psi_k| < \infty$ a platí, že

$$\varepsilon_t = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k X_{t-k}.$$

- z pohledu posloupnosti $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ by se dalo říct, že se jedná o kauzální posloupnost vzhledem k posloupnosti $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$;

Příklad: Striktná versus slabá stacionarita

Samostatný úkol

Nechť je posloupnost $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ definovaná předpisem

$$X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t,$$

pro $|\rho| < 1$ a posloupnost $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ je daná předpisem

$$\varepsilon_t = \begin{cases} Z_t & t = 2k, k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(Z_t^2 - 1) & t = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

kde $\{Z_t; t \in \mathbb{Z}\}$ je posloupnost nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin s normovaným normálním rozdělením $N(0, 1)$.

- Rozhodněte, zda je posloupnost $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ striktně stacionární.
- Rozhodněte, zda je posloupnost $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ slabě stacionární.
- Spočtete autokovarianční funkci posloupnosti $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$.

Invertibilita *ARMA* posloupnosti

Věta: Invertibilita *ARMA* procesů

Nechť $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ je stacionární $ARMA(p, q)$ posloupnost, definovaná rovnicí (13), pro $d_0 = a_1 = 1$. Nechť polynomy $d(z)$ a $n(z)$ definované vztahy (14) nemají společné kořeny a navíc, nechť kořeny polynomu $n(z)$ leží vně jednotkového komplexního kruhu. Pak je posloupnost $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ **invertibilní** a lze psát

$$\varepsilon_t = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k X_{t-k},$$

pro $k \in \mathbb{Z}$, kde koeficienty ψ_k jsou určeny vztahem

$$\Psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k z^k = \frac{d(z)}{n(z)},$$

pro $|z| \leq 1$.

Lineární predikce v časových řadách

- ❑ pomerně častý praktický problém v časových řadách: **predikce**;
- ❑ predikce/předpověď budoucích hodnot na základě pozorované realizace;
- ❑ z teoretického hlediska se jedná o pomerně náročnou úlohu, která vede na podmíněné střední hodnoty...
- ❑ **Jak to ale funguje v praktických problémech?**

Lineární predikce v časových řadách

- ❑ pomerně častý praktický problém v časových řadách: **predikce**;
- ❑ predikce/předpověď budoucích hodnot na základě pozorované realizace;
- ❑ z teoretického hlediska se jedná o pomerně náročnou úlohu, která vede na podmíněné střední hodnoty...
- ❑ **Jak to ale funguje v praktických problémech?**

- ❑ **Jednoduchý příklad:** predikce pozorování X_{t+1} na základě realizace X_t (předpověď o jeden krok dopředu na základě jediného pozorování);
- ❑ požadovaná predikce pro X_{t+1} je lineární: $\hat{X}_{t+1} = a + bX_t$;
- ❑ navíc předpokládáme, že $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ je slabě stacionární;
- ❑ kvalita predikce pomoci střední kvadratické chyby mezi X_{t+1} a \hat{X}_{t+1} ;

Predikce X_{t+1} formálně

- z formálního matematického hlediska řešíme minimalizační problém

$$\min_{a,b \in \mathbb{R}} E [X_{t+1} - (a + bX_t)]^2 = \min_{a,b \in \mathbb{R}} E [X_{t+1} - \mu - \tilde{a} - b(X_t - \mu)]^2,$$

kde $\tilde{a} = a + \mu(b - 1)$;

- derivováním podle \tilde{a} a b (a formální záměna integrálu a derivace):

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{a}} : -2E [X_{t+1} - \mu - \tilde{a} - b(X_t - \mu)] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial b} : -2E [X_{t+1} - \mu - \tilde{a} - b(X_t - \mu)](X_t - \mu) = 0$$

- z první rovnice dostaneme okamžitě, že $\tilde{a} = 0$;
- z druhé rovnice pak dostaneme, že

$$b = \frac{R(1)}{R(0)} = r(1);$$

- Predikce: $\hat{X}_{t+1} = a + bX_t = \mu + b(X_t - \mu) = \mu + r(1)(X_t - \mu)$;

Predikce X_{t+1} formálně

- ❑ kvalita predikce se posuzuje pomocí střední kvadratické chyby/odchýlky jako

$$\begin{aligned}MSE &= E(X_{t+1} - \widehat{X}_{t+1})^2 = E[X_{t+1} - \mu - r(1)(X_t - \mu)]^2 \\ &= R(0) [1 + r(1)^2 - 2r(1)^2] = R(0)(1 - r(1)^2); \end{aligned}$$

- ❑ čím silnější je lineární závislost mezi X_t a X_{t+1} , tím menší je chyba predikce (t.j., přesnější předpověď);
- ❑ obecně lze postup zobecnit na úlohu najít predikci pro X_{t+1} , na základě pozorování $X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-p}$;
- ❑ následně je samozřejmě možné použít predikci \widehat{X}_{t+1} a spočítat další predikci pro následující krok X_{t+2} ;

Příklad: predikce na základě X_t a X_{t-1}

Samostatný úkol

Předpokládejme, že posloupnost $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ je slabě stacionární.

- spočtete obecný vztah pro predikci pozorování X_{t+1} na základě hodnot X_t a X_{t-1} ;
- jako kritérium kvality predikce použijte střední kvadratickou chybu/odchýlku;

Samostatný úkol

- Uvažujte model $ARMA(2, 1)$ daný předpisem

$$X_t - 0.5X_{t-1} + 0.04X_{t-2} = \varepsilon_t + 0.25\varepsilon_{t-1},$$

pro $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ bílý šum. Nайдěte autokovarianční a autokorelační funkci procesu a jeho kauzální vyjádření.

Kauzalita a invertibilita *ARMA* procesů

Samostatný úkol

Nechť $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ je *ARMA*(2, 1) posloupnost definovaná rovnicí

$$X_t - (a + b)X_{t-1} + abX_{t-2} = \varepsilon_t - a\varepsilon_{t-1},$$

kde $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ je bílý šum. Diskutujte podmínky kauzality a invertibility vzhledem k neznámým parametrům $a, b \in \mathbb{R}$.

Spočtěte autokovarianční a autokorelační funkci posloupnosti $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$.

Zhrnutí předchozí přednášky/opakování

- ❑ Lineární (stochastické) modely časových řád: *MA*, *AR* a *ARMA* procesy; (náhodné procesy vytvořené z bílého šumu, indexovaný nejvýše spočetnou množinou indexů T - napr. množinou celých čísel \mathbb{Z})
- ❑ Základná charakterizace procesů:
 - ❑ střední hodnota procesu $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$: $\mu_t = EX_t$;
 - ❑ rozptyl procesu $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$: $\sigma^2(t) \equiv R(0, t)$;
 - ❑ autokovarianční a autokorelační funkce $R(k, t)$ a $r(k, t)$;
- ❑ Další vlastnosti modelů časových řád:
 - ❑ silná (striktní) a slabá stacionarita $(\mu, \sigma^2, R(k), r(k))$;
 - ❑ kauzálnost a invertibilita procesu;
 - ❑ lineární filtrace;
- ❑ Využití v praktických (reálných úlohách):
 - ❑ modelování procesů a odhadování koeficientu pomoci Yule-Walkerových rovnic (konzistentní odhady);
 - ❑ lineární predikce v časových řadách (předpověď následujících pozorování na základě tých předchozích);

Kapitola 6

Poissonův proces

Náhodné procesy se spojitým časem

□ Stochastický (náhodný) proces

↪ posloupnost (systém) reálných náhodných veličin $\{X_t; t \in T\}$ definovaných na stejném pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{A}, P) ;

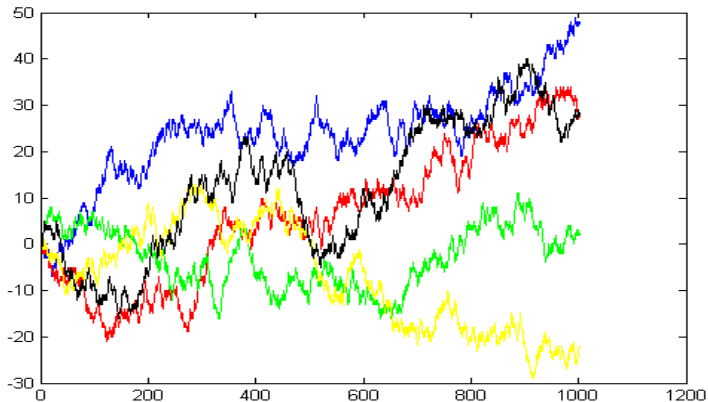
□ Proces so spojitým časem

↪ v případě, že $T \subseteq \mathbb{R}$, pak říkáme, že se jedná o proces se spojitým časem, t.j., hodnota procesu $\{X_t; t \in T\}$ je definována v každém časovém okamžiku;

□ Trajektórie procesu

↪ pro konkrétné $\omega \in \Omega$ (elementární jev) je $X_t(\omega) \equiv X(\omega)(t)$ funkce definována na $T \subset \mathbb{R}$ (t.j., trajektórie procesu – jedna konkrétní realizace);

Trajektorie procesu



Čítací proces

Definice: Čítací proces

Řekneme, že náhodný proces $\{N_t; t \geq 0\}$ (proces se spojitím časem) je **čítací proces**, pokud nabývá celočíselných nezáporných hodnot a zároveň platí, že

$$\text{pokud } s \leq t \quad \implies \quad N(s) \leq N(t).$$

- Hodnotu $N(t)$ interpretujeme jako počet událostí, které nastaly do času t .
- Ekvivalentně lze proces $\{N_t; t \geq 0\}$ definovat jako proces, který má zprava spojitě a neklesající trajektorie, nabývá pouze celočíselných hodnot, a začíná z nezáporné hodnoty, t.j. $N(0) \geq 0$;

Proces s nezávislými přírůstky

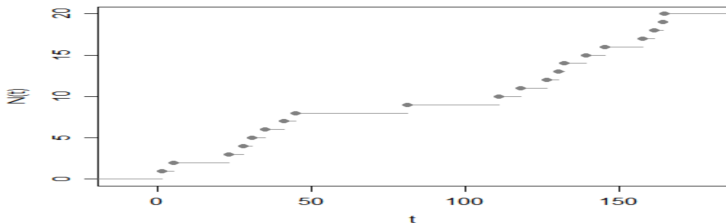
Definice: Nezávislé přírůstky

Řekneme, že proces $\{N(t); t \geq 0\}$ má **nezávislé přírůstky**, pokud pro každé $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, $n \in \mathbb{N}$ a $t_i \in \mathcal{T}$ pro $i = 1, \dots, n$ platí, že $N(t_n) - N(t_{n-1}), \dots, N(t_1) - N(t_0)$ jsou **nezávislé náhodné veličiny**.

Proces s nezávislými přírůstky

Definice: Nezávislé přírůstky

Řekneme, že proces $\{N(t); t \geq 0\}$ má **nezávislé přírůstky**, pokud pro každé $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, $n \in \mathbb{N}$ a $t_i \in T$ pro $i = 1, \dots, n$ platí, že $N(t_n) - N(t_{n-1}), \dots, N(t_1) - N(t_0)$ jsou **nezávislé náhodné veličiny**.



Poissonův proces

Definice: Poissonův proces

Náhodný proces $\{N(t); t \geq 0\}$ se nazývá **homogenní Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$** , pokud platí:

- ❑ $N(0) = 0$;
 - ❑ proces má nezávislé přírůstky;
 - ❑ přírůstky $N(t+h) - N(t)$ mají Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda \cdot h$;
-
- ❑ nezávislé přírůstky Poissonovho procesu mají Poissonovo rozdělení s parametrem, který je přímo úměrný délce časového intervalu;
 - ❑ parameter intenzity, $\lambda > 0$ je střední počet události za jednotku času;
 - ❑ souvislost Poissonovho rozdělení s limitním binomickým rozdělením;

Poissonův proces

- ❑ Poissonův proces je často interpretován jako náhodný **bodový proces** na reální přímce (půlpřímce);
- ❑ Na reální přímce je Poissonův proces speciálním případem Markovského procesu se spojeným časem (Markovská vlastnost);
- ❑ Hodně často používaný náhodný proces s využitím pro modelování náhodných (a na sobě nezávislých) událostí v čase;
 - ❑ pojišťovnictví, systémy obsluhy, atd'.
 - ❑ chování zákazníků, modelování chyb a poruch, atd'.
- ❑ Existuje mnoho různých a užitečných zobecnění Poissonova procesu;
 - ❑ Poissonův proces s variabilní intenzitou $\lambda(t)$;
 - ❑ prostorový Poissonův proces (mnohorozměrná zobecnění);
 - ❑ procesy obnovy a zrodu a zániku (tzv. renewal a birth-death procesy);
 - ❑ mnohé další...

Příklad: Poissonův proces

Príklad

Telefonní ústředna a počet hovorů

Jednotlivé přichodící volání jsou na sobě nezávislá. Potenciálně je ale velký počet lidí, kteří mohou zavolat, ale u každého jednotlivce se jedná pouze o hodně malou pravděpodobnost, že skutečně zavolá na ústřednu. Z historických dat např. víme, že na telefonní ústřednu přijde v průměru 5 hovorů za minutu.

- ❑ Jaká je pravděpodobnost, že za půl minuty nepřijde žádné volání?
- ❑ Jaká je pravděpodobnost, že během pět sekund přijde alespoň 2 volání?

- ❑ pro Poissonův proces obecně platí, že $N(0) = 0$, proto také platí, že

$$N(t) - N(s) \sim Po(\lambda(t-s))$$

a proto také platí, že

$$P[N(t) = k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad \text{pro } k = 0, 1, \dots$$

Doby mezi událostmi v Poissonovém procesu

Věta: Doby mezi událostmi v Poissonovém procesu

Nechť $\{N(t); t \geq 0\}$ je Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$ a necht' $\{\xi_n; n \in \mathbb{N}\}$ je posloupnost náhodných veličin definovaná předpisem

$$\xi_n = \inf\{t > 0; N(t) = n\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Pak náhodné veličiny $T_n = \xi_n - \xi_{n-1}$, pro $n = 1, 2, \dots$, pro $\xi_0 = 0$, jsou **nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s parametrem $\lambda > 0$** a nazývají se **doby mezi událostmi v Poissonovém procesu $\{N(t); t \geq 0\}$** .

Exponenciální a Erlangovo rozdělení

- náhodná veličina ξ_n pro $n \in \mathbb{N}$ se nazývá **doba do n -té události**;
- náhodná veličina ξ_n pro $n \in \mathbb{N}$ má **Erlangovo rozdělení** s hustotou

$$f_n(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, \quad \text{pro } x \geq 0.$$

- **Erlangovo rozdělení** s parametry $\lambda > 0$ a $n \in \mathbb{N}$ je rozdělení součtu n nezávislých náhodných veličin s exponenciálním rozdělením s parametrem $\lambda > 0$ a jedná se o speciální případ **Gamma rozdělení**;
- exponenciální rozdělení s parametrem $\lambda > 0$ je **rozdělení bez paměti**, t.j., pro $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ platí, že

$$P[X > s + h | X > s] = P[X > h].$$

Poissonův proces a exponenciální rozdělení

Věta: Náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením a Poissonův proces

Nechť T_1, T_2, \dots , je posloupnost nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin s exponenciálním rozdělením s parametrem $\lambda > 0$. Nechť $\xi_n = \sum_{k=1}^n T_k$. Pak

$$N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{I}_{\{\xi_k \leq t\}}$$

definuje Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$.

- pokud záme počet události do nějakého času $T > 0$, pak je výskyt události v intervalu $[0, T]$ tzv. “binomický“, t.j., časy událostí jsou nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na intervalu $[0, T]$;

Příklad: Binomická vlastnost

Príklad

Nechť $\{N(t); t \geq 0\}$ je Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$ a necht' $N(T) = n$ a $s \in (0, T)$. Pak jednoduchým výpočtem dostaneme

$$\begin{aligned} P[N(s) = k | N(T) = n] &= \frac{P[N(s) = k, N(T) = n]}{P[N(T) = n]} \\ &= \frac{P[N(s) = k, N(T) - N(s) = n - k]}{P[N(T) = n]} \\ &= \frac{P[N(s) = k] \cdot P[N(T) - N(s) = n - k]}{P[N(T) = n]} \\ &= \binom{n}{k} \left(\frac{s}{T}\right)^k \left(1 - \frac{s}{T}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

- Žádná část intervalu $[0, T]$ není preferována a každý podinterval má rovnakou šanci (**úměrnou své délce**), že do něj padne událost. Body jsou do intervalu $[0, T]$ umisťovány nezávisle na sobě.

Poissonův proces s konstantní intenzitou

- Pro obecný Poissonův proces $\{N(t); t \geq 0\}$ s konstantní intenzitou $\lambda > 0$ také platí následující:
 - $P[N(t+h) = n+1 | N(t) = n] = \lambda h + o(h)$
 - $P[N(t+h) = n | N(t) = n] = 1 - \lambda h + o(h)$
 - $P[N(t+h) > n+1 | N(t) = n] = o(h)$

pro funkci $o(h)$ takovou, že

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{o(h)}{h} \rightarrow 0.$$

Samostatný úkol

Ověřte, že uvedené vlastnosti skutečně platí pro obecný Poissonův proces s konstantní intenzitou $\lambda > 0$.

Příklad: Škody v neživotnem pojištění

Příklad

Předpokládáme, že okamžiky pojistných události v čase tvoří Poissonův proces $\{N(t); t \geq 0\}$ s konstantní intenzitou $\lambda > 0$ a výše škod Y_k pro $k \in \mathbb{N}$ jsou nezávislé, stejně rozdělené náhodné veličiny se střední hodnotou $EY_k = \mu$.

- $S(t) = \sum_{k=0}^{N(t)} Y_k$, pro $t \geq 0$ a $Y_0 = 0$ je tzv. **složený Poissonův proces**;
- veličina $S(t)$ udává **celkovou výši škod** do času $t \geq 0$ a platí

$$\begin{aligned} ES(t) &= E \left[E[S(t)|N(t)] \right] = E \left[E \left[\sum_{k=0}^{N(t)} Y_k | N(t) \right] \right] \\ &= E \left[N(t) \cdot EY_k \right] = EY_k \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} ne^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \right) = \lambda t \mu; \end{aligned}$$

K úhradě škodních nákladů by pojišťovna měla dostávat od pojištěných klientů pojistné ve výši $\lambda \mu$ za jednotku času.

Příklad: Systém obslužní linky

Príklad

Uvažujme obslužní linku, která poskytuje určitou službu (např., poladna v obchodě, telefonní linka, ...). Chceme modelovat chování takového systému.

- ❑ předpokládáme, že příchody zákazníků do systému tvoří Poissonův proces s konstantní intenzitou $\lambda > 0$;
- ❑ když je linka obsazená, tvoří se fronta;
- ❑ doby obsluhy jednotlivých zákazníků jsou navzájem nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s parametrem $\mu > 0$;
- ❑ veličina $X(t)$ značí počet zákazníků v systému (ve frontě a při obsluhu);
- ❑ označme $p_k(t) = P[X(t) = k]$, pro $k = 0, 1, \dots$;
- ❑ předpokládáme, že také platí následující:

$$P(X(t+h) = k+1 | X(t) = k) = \lambda h + o(h)$$

$$P(X(t+h) = k | X(t) = k) = 1 - \lambda h + o(h)$$

$$P(X(t+k) > k+1 | X(t) = k) = o(h)$$

Příklad: Systém obslužní linky

Příklad

- pro doby obsluhy pak platí: $T \sim Exp(\mu)$ a proto také platí:

$$P(\text{obsluha skončí v čase } (t, t + h] | \text{zákazník je obsluhován v čase } t) = \mu h + o(h)$$

$$P(\text{obsluha neskončí v čase } (t, t + h] | \text{zákazník je obsluhován v čase } t) = 1 - \mu h + o(h)$$

$$P(\text{více zákazníku obsluženo v } (t, t + h] | \text{zákazník je obsluhován v čase } t) = o(h)$$

$$P(\text{přijde a odejde stejný počet v } (t, t + h] | \text{zákazník je obsluhován v čase } t) = o(h)$$

Samostatný úkol

Použijte vlastnosti exponenciálního rozdělení s parametrem $\mu > 0$, aplikujte Tayloův rozvoj a odvoďte vztahy uvedené v příkladu nahoře.

Zhrnutí předchozí přednášky/opakování

❑ Poissonov proces;

- ❑ stochastický proces se spojitým časem a diskrétnými stavy;
- ❑ čítací proces (počet události) s počátkem v bodě nula;
- ❑ nezávislé přírůstky s Poissonovým rozdělením;
(pouze homogénní Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$)

❑ Doby mezi událostmi v Poissonovém procesu

- ❑ nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením;
- ❑ souvislost mezi Poissonovým a exponenciálním rozdělením;
- ❑ exponenciální rozdělení, Erlangovo rozdělení, Gamma rozdělení;

❑ Široké využití v praxi

- ❑ modelování různých systému obsluhy;
(intenzita příchodu zákazníků a intenzita obsluhy zákazníků)
- ❑ pojistné modely, modelování škodových událostí;
(modelování výskytu pojistných událostí, vyplácení pojistného plnění)
- ❑ využití v komplexných pravděpodobnostných modelech; (napr. prostorové Poissonové modely, složené modely, atd'.)

Příklad: Systém obslužní linky

Príklad

- obecně můžeme psát, že v systému obslužní linky (model pro příchod a obsluhu zákazníku) nastane v intervalu $(t, t + h)$ jedna změna (t.j. přijede jeden zákazník nebo odejde jeden zákazník) s pravděpodobností

$$\mu h + \lambda h + o(h);$$

- pravděpodobnost, že v takomto systému nenastane v časovém intervalu $(t, t + h)$ žádná změna (nový zákazník nepřijde a žádný nebude obslužen) je

$$1 - (\mu h + \lambda h) + o(h);$$

- pravděpodobnost, že v systému dojde v časovém intervalu $(t, t + h)$ k nějaké jiné změně (např. přijede více zákazníků, nebo více zákazníků bude obsluženo, nebo zároveň alespoň jeden přijede a alespoň jeden bude obslužen) je zanedbatelná, t.j. řádu $o(h)$;

Příklad: Systém obslužní linky

Příklad

- ❑ zajíma nás limitní chování pravděpodobnosti

$$p_k(t) = P[X(t) = k],$$

pro $t \rightarrow \infty$;

- ❑ Jaké je limitní rozdělení zákazníků v systému?
(*hromadí se zákazníci ve frontě, nebo je systém prázdný?*)

- ❑ Příklad lze řešit pomocí soustavy diferenciálních rovnic...
- ❑ ... budeme uvažovat samostatně případ pro $k = 0$ a $k = 1, 2, \dots$;

Řešení pomoci diferenciálních rovnic

□ pro $k = 0$ dostaneme:

$$p_0(t+h) = p_0(t)(1 - \lambda h + o(h)) + p_1(t)(\mu h + o(h)) + \sum_{j=2}^{\infty} p_j(t)o(h)$$

Řešení pomoci diferenciálních rovnic

□ pro $k = 0$ dostaneme:

$$p_0(t+h) = p_0(t)(1 - \lambda h + o(h)) + p_1(t)(\mu h + o(h)) + \sum_{j=2}^{\infty} p_j(t)o(h)$$

□ pro $k = 1, 2, \dots$ dostaneme:

$$\begin{aligned} p_k(t+h) &= \sum_{j=0}^{k-2} p_j(t)o(h) + p_{k-1}(t)(\lambda h + o(h)) \\ &\quad + p_k(t)(1 - \lambda h - \mu h + o(h)) \\ &\quad + p_{k+1}(t)(\mu h + o(h)) + \sum_{j=k+2}^{\infty} p_j(t)o(h) \end{aligned}$$

Řešení pomoci diferenciálních rovnic

- algebraickou úpravou a limitním přechodem pro $h \rightarrow 0_+$ dostaneme diferenciální rovnici pro $k = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial t} p_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t)$$

Řešení pomoci diferenciálních rovnic

- algebraickou úpravou a limitním přechodem pro $h \rightarrow 0_+$ dostaneme diferenciální rovnici pro $k = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial t} p_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t)$$

- algebraickou úpravou a limitním přechodem pro $h \rightarrow 0_+$ dostaneme diferenciální rovnice pro $k = 1, 2, \dots$:

$$\frac{\partial}{\partial t} p_k(t) = \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda + \mu) p_k(t) + \mu p_{k+1}(t)$$

Řešení pomocí diferenciálních rovnic

- Pokud existuje limita $\lim_{t \rightarrow \infty} p_k(t)$, pak musí platit

$$0 = -\lambda p_0(\infty) + \mu p_1(\infty)$$

$$0 = \lambda p_{k-1}(\infty) - (\lambda + \mu) p_k(\infty) + \mu p_{k+1}(\infty)$$

- Soustava rovnic, jejíž řešením je

$$p_k(\infty) = \rho^k p_0(\infty),$$

kde $\rho = \lambda/\mu$;

- Zároveň musí platit, že

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(\infty) = 1,$$

jelikož se jedná o pravděpodobnostní rozdělení na množině $\{0, 1, 2, \dots\}$;
(limitné rozdělení teda existuje pro $\rho < 1$ a jde o geometrické rozdělení s
parametrem $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$)

Sjednocení nezávislých Poissonových procesů

- Generická vlastnost Poissonového rozdělení:

$$N_1 \sim \text{Poiss}(\lambda_1) \wedge N_2 \sim \text{Poiss}(\lambda_2) \implies N_1 + N_2 \sim \text{Poiss}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

- Analogický aj pro Poissonov proces

Pro $\{N_1(t); t \geq 0\}$ a $\{N_2(t); t \geq 0\}$ dva nezávislé homogénní Poissonové procesy s intenzitou $\lambda_1 > 0$ a $\lambda_2 > 0$, pak aj

$$\{N_1(t) + N_2(t); t \geq 0\}$$

je homogénní Poissonov proces s příslušnou intenzitou $\lambda_1 + \lambda_2$;

Samostatný úkol

Ukážte, že Poissonov proces $\{N_1(t) + N_2(t); t \geq 0\}$ definovaný jako součet dvou vzájemně nezávislých homogénních Poissonových procesů s intenzitami $\lambda_1 > 0$ a $\lambda_2 > 0$ splňuje vlastnosti Poissonového procesu.

Zobecnění pro více procesů

- Zjednocení dvou nezávislých Poissonových procesů lze zobecnit na více než dva procesy;
- Obecně, pro $m \in \mathbb{N}$ nezávislých homogenních Poissonových procesů $\{N_1(t); t \geq 0\}, \dots, \{N_m(t); t \geq 0\}$ s intenzitami $\lambda_j > 0$ pro $j = 1, \dots, m$ platí, že

$$N(t) = N_1(t) + \dots + N_m(t)$$

je opět Poissonov proces s příslušnou intenzitou

$$\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_m.$$

Samostatný úkol

Ukážte, že Poissonov proces $\{N_1(t) + \dots + N_m(t); t \geq 0\}$ definovaný jako součet m vzájemně nezávislých homogenních Poissonových procesů s intenzitami $\lambda_j > 0$ pro $j = 1, \dots, m$, splňuje vlastnosti Poissonového procesu.

Nezávislost a podmíněná závislost

- ❑ Necht' $\{N(t); t \geq 0\}$ je Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$;
- ❑ Události v procesu náhodně označíme dvěma různými nálepkami...
- ❑ S pravděpodobnosti $p \in (0, 1)$ označíme událost nálepkou A ;
(výskyt události typu A tvoří čítací proces $\{N_1(t); t \geq 0\}$)
- ❑ S pravděpodobnosti $(1 - p)$ označíme událost nálepkou B ;
(výskyt události typu B tvoří čítací proces $\{N_2(t); t \geq 0\}$)

Věta: Nezávislost rozděleného Poissonového procesu

Čítací procesy $\{N_1(t); t \geq 0\}$ a $\{N_2(t); t \geq 0\}$ jsou vzájemně nezávislé homogénní Poissonové procesy s příslušnými intenzitami $\lambda_1 = \lambda p$ a $\lambda_2 = \lambda(1 - p)$.

Nezávislost a podmíněná závislost

- Poissonové procesy $\{N_1(t); t \geq 0\}$ a $\{N_2(t); t \geq 0\}$ jsou dle předchozí věty **združeně nezávislé**;
- **Podmíněně**, při daném stavu procesu $\{N(t); t \geq 0\}$, jsou ale procesy $\{N_1(t); t \geq 0\}$ a $\{N_2(t); t \geq 0\}$ **vzájemně závislé**;

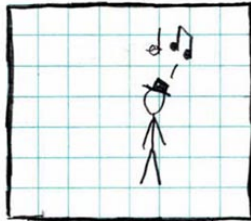
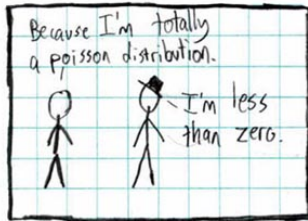
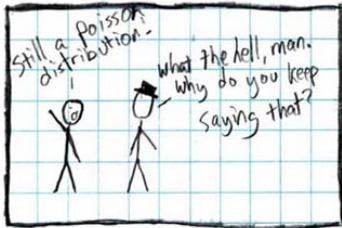
Samostatný úkol

Ukážte, proč jsou procesy $\{N_1(t); t \geq 0\}$ a $\{N_2(t); t \geq 0\}$ při daném $N \in \mathbb{N}$ podmíněně závislé. Dokonca jeden proces zcela určuje ten druhý.

Různá zobecnění Poissonového procesu

- ❑ zobecnění Poissonového procesu v neeuklidovských prostorech;
(*fundamentální nástroj v pravděpodobnosti, teorii míri a topologii*)
- ❑ dvojité stochastický Poissonův proces (Coxův proces);
(*Poissonův proces s náhodnou intenzitou Λ*)
- ❑ složený Poissonův proces (tzv. marked process);
(*událost v čase má vlastní náhodnou hodnotu*)
- ❑ tzv. compound Poissonův proces;
(*Poissonův proces jako součet několika složených Poissonových procesů*)
- ❑ mnohé další zobecnění a speciální případy;
(*užitečný nástroj pro pravděpodobnostní teorii a stochastické modelování*)

Poisonous Poisson



To conclude...

Závěrečné zkoušky

Zkouškové termíny

Závěrečná zkouška pozostáva z dvou častí:

- ❑ **První část zkoušky**

↔ samostatná písemná práce, teoretické a praktické úlohy v rozsahu odprednášanej látky;

- ❑ **Druhá část zkoušky**

↔ ústní zkouška pouze v případě vypracování písemné části na úrovni alespoň 60 %;

Zkouškové termíny

- ❑ **1. Termín:** Uterí | 28.05.2019
(Posluchárna K11 | 9:00)
- ❑ **2. Termín:** Uterí | 11.06.2019
(Posluchárna K8 | 9:00)
- ❑ **3. Termín:** Uterí | 18.06.2019
(Posluchárna K11 | 9:00)
- ❑ **4. Termín:** September 2019
(dodatečně bude upřesněno)

Na konkrétný zkouškový termín je nutný zápis prostřednictvím elektronického systému SIS! Zápočet je podmínkou k přihlášení se na zkoušku!