NMFM301 – Statistika pro finanční matematiky

Metoda maximální věrohodnosti a momentová metoda.

Podrobné riešenie príkladov zo 4. cvičenia

A Příklady na cvičení

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení s hustotou $f(x|\theta_X) \in \mathcal{F} = \{f(x|\theta),\ \theta \in \Theta\}$.

A1. *[Procvičovací]* Momentovou metodou najděte odhad $\widetilde{\theta}_n$ parametru $\theta_X > 23$ v modelu $\mathcal{F}$, kde

$$f(x|\theta_X) = \frac{\theta_X}{x^{\theta_X+1}} \mathbb{I}_{(1,\infty)}(x), \qquad \text{(Paretovo rozdělení)}.$$

Určete asymptotické rozdělení $\widetilde{\theta}_n$.
[Použijte vztahy $\mathsf{E}\, X_i = \frac{\theta_X}{\theta_X - 1}$, $\mathsf{var}\, X_i = \frac{\theta_X}{(\theta_X-1)^2(\theta_X-2)}$.]

Řešení:
Momentová metóda odhadovania je založena na existencii konkrétneho vzťahu (vzťahoch) ktorý(é) existuje(ú) medzi neznámym parametrom (resp. neznámymi parametrami) a niektorým teoretickým momentom (prípadne viacerými momentami). Stredná hodnota náhodnej veličiny je prvým momentom a spolu s druhým centrovaným momentom (t.j., rozptyl náhodnej veličiny) sa jedná o dva najčastejšie využívane momenty v momentovej metóde odhadovania (samozrejme nie jediné).

Využijeme nápovedu, že stredná hodnota a rozptyl náhodnej veličiny s Paretovým rozdelením s parametrom $\theta_X > 2$ (parametrizácia hustoty ako v zadaní), sú určené vzťahmi

$$\mu_X = \mathsf{E}\, X_i = \frac{\theta_X}{\theta_X - 1} \qquad \text{a} \qquad \sigma_X^2 = \mathsf{var}\, X_i = \frac{\theta_X}{(\theta_X - 1)^2(\theta_X - 2)}.$$

Z prvého vzťahu jednoduchými úpravami vyjadríme neznámy parameter ako

$$\theta_X = \frac{\mu_X}{\mu_X - 1}$$

a preto príslušný odhad $\widetilde{\theta}_n$ neznámeho parametru θ_X získame nahradením teoretickej strednej hodnoty μ_X jej empirickým protejškem – výberovou strednou hodnotou, resp. priemerom $\overline{X}_n$. Momentový odhad preto je

$$\widetilde{\theta}_n = \frac{\overline{X}_n}{\overline{X}_n - 1}.$$

Pre určenie asymptotického rozdelenia tohto odhadu použijeme centrálnu limitnú vetu (CLV) a vhodnú transformáciu. Vieme, že z CLV platí, že

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu_X) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma_X^2), \qquad \text{pre } n \to \infty.$$

Pripomeňme, že sa jedná o tzv. konvergenciu v distribúcii. Tento vzťah popisuje asymptotické rozdelenie výberového priemeru $\overline{X}_n$, t.j., odhadu neznámeho parametru strednej hodnoty μ_X. Nás ale zaujíma iný parameter, parameter θ_X, ktorý ale lze jednoducho vyjadriť pomocou μ_X.

Pripomeňme vzťah $\theta_X = \mu_X/(\mu_X - 1)$. Príslušná transformácia, ktorá prevedie parameter μ_X na θ_X má tvar

$$h(x) = \frac{x}{x-1}, \text{pričom pre deriváciu zároveň platí } h'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}.$$

Zároveň vieme, že pre transformovaný parameter, resp. jeho empirický odhad (v zmysle obecnej transformácie h) môžeme vyjadriť asymptotické rozdelenie odhadu transformovaného parametru pomocou vzťahu (t.j., aproximácia Taylorovým rozvojom, resp. tzv. delta metóda)

$$\sqrt{n}(h(\overline{X}_n) - h(\mu_X)) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma_X^2 \cdot [h'(\mu_X)]^2), \qquad \text{opäť pre } n \to \infty.$$

Jednoduchým dostadením dostaneme, že $h(\mu_X) = \theta_X$ a tiež

$$|h'(\mu_X)| = \frac{1}{(\mu_X - 1)^2} = (\theta_X - 1)^2.$$

Z nápovedy v zadaní zároveň vieme, že

$$\sigma_X^2 = \mathsf{var}\, X_i = \frac{\theta_X}{(\theta_X - 1)^2(\theta_X - 2)}.$$

Dohromady dostaneme, že asymptotické rozdelenie momentového odhadu $\widetilde{\theta}_n$ je

$$\sqrt{n}(\widetilde{\theta}_n - \theta_X) \xrightarrow{\mathcal{D}} N\Big(0, \underbrace{\frac{\theta_X(\theta_X - 1)^2}{\theta_X - 2}}_{\sigma^2_{MM}}\Big), \qquad \text{pre } n \to \infty.$$

A2. *[Procvičovací]* Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\widehat{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu z předchozího příkladu. Určete asymptotické rozdělení $\widehat{\theta}_n$ a porovnejte asymptotický rozptyl maximálně věrohodného odhadu $\widehat{\theta}_n$ a momentového odhadu $\widetilde{\theta}_n$.

Řešení:
Opäť nás zaujíma odhad toho istého parametru $\theta_X > 2$, ale príslušný odhad chceme zostrojiť tentokrát pomocou metódy maximálnej vierohodnosti. Vierohodnostná funkcia pre Paretovo rozdelenie a náhodný výber $X_1, \ldots, X_n$ z tohto rozdelenia, je daná predpisom

$$L(\theta_X, \boldsymbol{X}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta_X}{X_i^{\theta_X + 1}} \cdot \mathbb{I}_{\{(1,\infty)\}}(X_i) = \theta_X^n \Big(\prod_{i=1}^{n} X_i\Big)^{-(\theta_X+1)},$$

pričom sa jedná o funkciu neznámeho parametru θ_X, vyčíslednú v náhodnom výbere $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$. Príslušnú logaritmickú vierohodnosť získame logaritmovaním

$$l(\theta_X, \boldsymbol{X}) = \log\Big(L(\theta_X, \boldsymbol{X})\Big) = n \log \theta_X - (\theta_X + 1) \sum_{i=1}^{n} \log X_i$$

a skórovú funkciu získame derivovaním logaritmickej vierohodnosti podľa argumentu θ_X, teda

$$U(\theta_X, \boldsymbol{X}) = \frac{\partial}{\partial \theta_X} l(\theta_X, \boldsymbol{X}) = \frac{n}{\theta_X} - \sum_{i=1}^{n} \log X_i.$$

Odhad metódou maximálnej vierohodnosti získame tak, že skórovú rovnicu položíme rovnú hodnote nula a hľadáme riešenie vzhľadom k $\theta > 2$. To znamená, že riešime rovnicu

$$\frac{n}{\theta_X} - \sum_{i=1}^{n} \log X_i = 0,$$

ktorej explicitné riešenie (a zároveň maximálne vierohodný odhad) je v tvare

$$\widehat{\theta}_n = \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log X_i\Big)^{-1}.$$

K overeniu, že sa naozaj jedná o maximum (a nie napr. lokálne minimum), je potrebné overiť, že v danom bode je funkcia konkávná. Zároveň potrebujeme spočítať asymptotické rozdelenie odhadu $\widehat{\theta}_n$, ktoré je dané predpisom

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta_X) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \boldsymbol{I}^{-1}(\theta_X)), \qquad \text{pre } n \to \infty,$$

kde $\boldsymbol{I}(\theta_X)$ je Fisherova informácia o neznámom parametre θ_X obsažená v náhodnej veličine X_i. Fisherová informácia o parametru θ_X obsažená v celom náhodnom výbere $X_1, \ldots, X_n$ je definovaná výrazom

$$\boldsymbol{I}_n(\theta_X) = -E\Big[\frac{\partial^2}{\partial\theta_X^2} l(\theta_X, \boldsymbol{X})\Big] = -E\Big[\frac{\partial}{\partial\theta_X} U(\theta_X, \boldsymbol{X})\Big] = -E\Big[\frac{-n}{\theta_X^2}\Big] = \frac{n}{\theta_X^2}.$$

Zároveň vidíme, že druhá derivácia logaritmickej vierohodnosti je záporná a teda naozaj sa jedná o maximum. Taktiež platí (pretože náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ sú nezávislé), že

$$\boldsymbol{I}_n(\theta_X) = n \cdot \boldsymbol{I}(\theta_X).$$

Dosadením dostaneme, že asymtotické rozdelenie maximálne vierohodného odhadu $\widehat{\theta}_n$, neznámeho parametru $\theta_X > 1$ je

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta_X) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \underbrace{\theta_X^2}_{\sigma_{ML^2}}), \qquad \text{opäť pre } n \to \infty.$$

Nakoniec chceme porovnať asymptotické rozptyly oboch odhadov. Jednoduchou úpravou dostaneme, že

$$\sigma_{MM}^2 = \frac{\theta_X(\theta_X - 1)^2}{\theta_X - 2} = \theta_X^2 \cdot \frac{\theta_X^2 - 2\theta_X + 1}{\theta_X^2 - 2\theta_X} > \theta_X^2 = \sigma_{ML}^2.$$

A3. *[Procvičovací]* Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\widehat{\theta}_n$ parametru θ v modelu $\mathcal{F}$, kde

$$f(x|\theta) = \frac{\theta}{1-\theta}\, x^{(2\theta-1)/(1-\theta)} \mathbb{I}_{(0,1)}(x), \quad \theta \in (0,1).$$

Určete asymptotické rozdělení $\widehat{\theta}_n$.

Řešení:
Vierohodnostná funkcia je daná predpisom

$$L(\theta, \boldsymbol{X}) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i|\theta) = \Big(\frac{\theta}{1-\theta}\Big)^n \cdot \Big(\prod_{i=1}^{n} X_i\Big)^{\frac{2\theta-1}{1-\theta}}.$$

Opäť sa jedná o funkciu argumentu $\theta \in (0,1)$, vyhodnotenú v náhodnom výbere $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$. Príslušná logaritmická vierohodnosť má tvar

$$l(\theta, \boldsymbol{X}) = \log(L(\theta, \boldsymbol{X})) = n[\log\theta - \log(1-\theta)] + \frac{2\theta - 1}{1-\theta}\sum_{i=1}^{n} \log X_i.$$

Skórovú funkciu získame derivovaním logaritmickej vierohodnosti podľa argumentu θ, teda

$$U(\theta, \boldsymbol{X}) = \frac{\partial}{\partial\theta} l(\theta, \boldsymbol{X}) = \frac{n}{\theta} + \frac{n}{1-\theta} + \frac{1}{(1-\theta)^2}\sum_{i=1}^{n} \log X_i := 0.$$

Riešením skórovej rovnice (ktorú sme položili rovnú hodnote nula) je maximálne vierohodný odhad:

$$\begin{aligned}
\frac{n}{\theta(1-\theta)} + \frac{1}{(1-\theta)^2}\sum_{i=1}^{n} \log X_i &= 0 \\
(1-\theta) + \theta_X \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log X_i &= 0 \\
\theta(1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log X_i) &= 1 \\
\widehat{\theta}_n &= \frac{1}{1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log X_i}.
\end{aligned}$$

Opäť je nutné overiť, že sa jedná o maximálne vierohodný odhad (maximum) – resp. že vierohodnostná funkcia je konkávna. Urobíme to vrámci výpočtu Fisherovej informácie nutnej k asymptitickému rozdelniu.

Pre Fisherovu informáciu $\boldsymbol{I}_n(\theta)$ o parametre θ obsaženou v náhodnom výbere $X_1 \ldots, X_n$ platí, že

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{I}_n(\theta) &= -E\Big[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} l(\theta, \boldsymbol{X})\Big] = -E\Big[\frac{\partial}{\partial\theta} U(\theta, \boldsymbol{X})\Big] = -E\Big[\frac{-n}{\theta^2} + \frac{n}{(1-\theta)^2} + \frac{2}{(1-\theta)^3}\sum_{i=1}^{n} \log X_i\Big] \\
&= \frac{n}{\theta^2} - \frac{n}{(1-\theta)^2} - \frac{2}{(1-\theta)^3}\sum_{i=1}^{n} E[\log X_i]. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Zostáva spočítať strednú hodnotu $E[\log X_i]$, k čomu využijeme vhodnú transformáciu. Definujme náhodnú veličinu Z_i pomocou transformácie t, ako $Z_i = t(X_i) = -\log X_i$, pre $i = 1, \ldots, n$. Inverzná transformácia t^{-1} je definovaná ako $X_i = t^{-1}(Z_i) = e^{-Z_i}$.

Keďže pre hustotu transformovanej náhodnej veličiny platí, že

$$f_Z(z) = f_X(t^{-1}(z)) \cdot |(t^{-1})'(z)|,$$

kde f_Z a f_X sú hustoty náhodných veličín Z a X, tak po dostadení získame hustotu náhodnej veličiny $Z_i = -\log X_i$ v tvare

$$f_Z(z) = \frac{\theta}{1-\theta} e^{-z\frac{2\theta-1}{1-\theta}} = \frac{\theta}{1-\theta} e^{-z\frac{\theta}{1-\theta}}, \qquad \text{pre } \theta \in (0,1),$$

čo je vlastne hustota náhodnej veličiny s exponenciálnym rozdelením s parametrom $\lambda = \frac{\theta}{1-\theta} > 0$ (to znamená, že $EZ_i = \frac{1-\theta}{\theta}$). Po dosadení do Fisherovej informácie $\boldsymbol{I}_n(\theta)$ v (1) dostaneme

$$\boldsymbol{I}_n(\theta) = \frac{1}{\theta^2(1-\theta)^2}.$$

Asymptotické rozdelenie maximálne vierohodného odhadu je preto

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \underbrace{\theta^2(1-\theta)^2}_{\sigma^2_{ML}}), \qquad \text{pre } n \to \infty.$$

A4. *[Procvičovací]* Momentovou metodou najděte odhad $\widetilde{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu z předchozího příkladu. Určete asymptotické rozdělení $\widetilde{\theta}_n$ a porovnejte asymptotický rozptyl maximálně věrohodného odhadu $\widehat{\theta}_n$ a momentového odhadu $\widetilde{\theta}_n$.

Řešení:
Je dobré si uvedomiť, že v predchádzajúcom príklade sa jedná o hustotu Beta rozdelenia, ktoré má parametre $\alpha = \frac{2\theta-1}{1-\theta} + 1 = \frac{\theta}{1-\theta}$ a $\beta = 1$. Obecne totíž pre beta rozdelenie s parametrami $\alpha, \beta > 1$ platí, že hustota má tvar

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \qquad \text{pre } x \in (0,1)$$

a stredná hodnota a rozptyl sú určené vzťahmi

$$EX_i = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \qquad \text{a} \qquad \mathsf{var}\, X_i = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

Po dosadení dostaneme

$$EX_i = \frac{\frac{\theta}{1-\theta}}{\frac{\theta}{1-\theta}+1} = \theta$$

a tiež

$$\mathsf{var}\, X_i = \frac{\frac{\theta}{1-\theta}}{\left(\frac{1}{1-\theta}\right)^2\left(\frac{1}{1-\theta}+1\right)} = \frac{\theta(1-\theta)^2}{2-\theta}.$$

Na základe vzťahu pre strednú hodnotu je zrejmé, že momentový odhad pre parameter $\theta \in (0,1)$ je samotný výberový priemer $\overline{X}_n$ (t.j., $\widetilde{\theta}_n = \overline{X}_n$). Na základe centrálnej limitnej vety získame hneď asymptotické rozdelenie, ktoré je dané vzťahom

$$\sqrt{n}(\widetilde{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{D}} N\Big(0, \underbrace{\frac{\theta(1-\theta)^2}{2-\theta}}_{\sigma^2_{MM}}\Big).$$

Na záver chceme porovnať asymptotický rozptyl maximálne vierohodného odhadu $\widehat{\theta}_n$ s asymptotickým rozptylom momentového odhadu $\widetilde{\theta}_n$.

$$\sigma^2_{MM} = \frac{\theta(1-\theta)^2}{2-\theta} = \theta^2(1-\theta)^2 \cdot \frac{1}{\theta(2-\theta)} > \theta^2(1-\theta)^2 = \sigma^2_{ML},$$

pretože funkcia $g(\theta) = \theta(2-\theta)$ je rastúca na intervale $(0,1)$ (derivácia $g'(\theta) = 2 - 2\theta = 2(1-\theta)$ je kladná pre všetky $\theta \in (0,1)$) a zároveň platí, že $g(0) = 0$ a $g(1) = 1$. Preto platí, že $\frac{1}{g(\theta)} > 1$ pre všetky $\theta \in (0,1)$.

Pre malé hodnoty $\theta \in (0,1)$ je momentový odhad dokonca hodne špatny (príliš veľká variabilita), pretože $\frac{1}{g(\theta)} \to \infty$ pre $\theta \to_+ 0$.