NMFM301 – Statistika pro finanční matematiky

Pravděpodobnostní rozdělení a pořádkové statistiky

Podrobné riešenie príkladov z 1. cvičenia

A Vzorové príklady s podrobným řešením

A1. Nechť X_i má distribuční funkci F pro všechna $i = 1, \dots, n$.

- Určete distribuční funkce $X_{(1)}$ a $X_{(n)}$.

  Řešení:
  Nech $F_{(1)}(x)$ je distribučná funkcia $X_{(1)}$. Potom platí, že:

  $$\begin{aligned} F_{(1)}(x) &= P[X_{(1)} \leq x] = 1 - P[X_{(1)} > x] = 1 - P[X_1 > x, \dots, X_n > x] \\ &\overset{(1)}{=} 1 - \prod_{i=1}^{n} P[X_i > x] \overset{(2)}{=} 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - F(x)] = 1 - (1 - F(x))^n, \end{aligned}$$

  kde rovnosť (1) plynie z nezávislosti náhodných veličín X_1 až X_n a rovnosť (2) z definície distribučnej funkcie $F(x) = P[X_i \leq x]$ a faktu, že náhodné veličiny $X_1, \dots, X_n$ sú rovnako rozdelené (pretože sa jedná o náhodný výber).

  Nech $F_{(n)}(x)$ je distribučná funkcia $X_{(n)}$. Potom analogický platí, že:

  $$F_{(n)}(x) = P[X_{(n)} \leq x] = P[X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x] = \prod_{i=1}^{n} P[X_i \leq x] = [F(x)]^n,$$

  kde sa v posledných dvoch rovnostiach opäť využila vlastnosť nezávislosti a rovnakého rozdelenia náhodných veličín $X_1, \dots, X_n$.

- Nechť X_i má hustotu f vzhledem k Lebesguově míře. Najděte hustoty $X_{(1)}$ a $X_{(n)}$.
  Řešení:
  Keďže X_i má hustotu f vzhledem k Lebesguově míře, tak platí, že $f(x) = F'(x)$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$. Zároveň aj pre hustoty $f_{(1)}$ a $f_{(n)}$ náhodných veličín $X_{(1)}$ a $X_{(n)}$ platí, že $f_{(1)}(x) = F'_{(1)}(x)$ a $f_{(n)}(x) = F'_{(n)}(x)$. Preto:

  $$\begin{aligned} f_{(1)}(x) &= \frac{\partial}{\partial x} F_{(1)}(x) = \frac{\partial}{\partial x}[1 - (1 - F(x))^n] = n(1 - F(x))^{n-1} \cdot \frac{\partial}{\partial x} F(x) \\ &= n f(x)[1 - F(x)]^{n-1} \qquad \forall x \in \mathbb{R}; \\ f_{(n)}(x) &= \frac{\partial}{\partial x} F_{(n)}(x) = \frac{\partial}{\partial x}[F(x)]^n = n f(x)[F(x)]^{n-1} \qquad \forall x \in \mathbb{R}; \end{aligned}$$

- Uveďte hustoty $X_{(1)}$ a $X_{(n)}$, když X_i má eponenciální rozdělení s parametrem $\lambda > 0$.

  Řešení:
  Vzhledem k tomu, že přesná parametrizace hustoty není uvedená, můžeme předpokládat, že hustota náhodné veličiny X_i je ve tvaru
  $$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},$$
  pro $x \geq 0$ a hustota je nulová jinak. Příslušná distribuční funkcie je
  $$F(x) = (1 - e^{-\lambda x}) \cdot \mathbb{I}_{\{x \geq 0\}}.$$
  Přímym dosazením do $f_{(1)}(x)$ a $f_{(n)}(x)$ dostaneme
  $$\begin{aligned} f_{(1)}(x) &= n\lambda e^{-n\lambda x} \cdot \mathbb{I}_{\{x\geq 0\}}, \\ f_{(n)}(x) &= n\lambda e^{-\lambda x}\Big[1 - e^{-\lambda x}\Big]^{n-1} \cdot \mathbb{I}_{\{x\geq 0\}}. \end{aligned}$$

A2. Nechť X_i má distribuční funkci F pro všechna $i = 1, \ldots, n$.

- Určete sdruženou distribuční funkci $X_{(1)}$ a $X_{(n)}$.

  Řešení:
  Nech $G : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$ označuje združenú distribučnú funkciu náhodného vektoru $(X_{(1)}, X_{(n)})^\top$. Potom (z definície združenej distribučnej funkcie) plynie, že
  $$\begin{aligned} G(x, y) &= P[X_{(1)} \leq x \wedge X_{(n)} \leq y] = P[\exists i :\ X_i \leq x \wedge X_1 \leq y, \ldots, X_n \leq y] \\ &= \begin{cases} P[X_1 \leq y, \ldots, X_n \leq y] = [F(y)]^n & \text{pre } x \geq y; \\ P[\{X_1 \leq x \cup \cdots \cup X_n \leq x\} \cap \{X_1 \leq y\} \cap \cdots \cap \{X_n \leq y\}] & \text{pre } x < y; \end{cases} \end{aligned}$$
  Totíž, ak $x \geq y$ a chceme aby minimum z $X_1, \ldots, X_n$ bolo menšie ako x a zároveň maximum z $X_1, \ldots, X_n$ bolo menšie ako y, tak stačí, aby všetky náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ boli menšie, ako y. Na druhú stranu, ak $x < y$, tak minimálne jedna hodnota z $X_1, \ldots, X_n$ musí byť menšia, ako x a zároveň všetky hodnoty musia byť menšie, ako y.

  Združená distribučná funcia pre prípad $x \geq y$ je preto zrejmá, a platí, že
  $$G(x, y) = [F(y)]^n \qquad \text{pre } x \geq y.$$
  Pre prípad $x < y$ zavedieme náhodné javy $A_i = \{X_i \leq x \wedge X_1 \leq y \wedge \cdots \wedge X_n \leq y\}$, t.j. náhodný jav A_i značí skutečnost, že náhodná veličina X_i je menšia než x a všetky náhodné veličiny (samozrejme vrátane X_i) sú menšie, než y. Premyslieť, že náhodný jav A_i môže znamenať aj to, že všetky náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ sú menšie, než x (t.j. náhodné javy A_i nejsou neslúčitelne).

  Následne môžeme vyjadriť pravdepodobnosti:
  $$\begin{aligned} P(A_i) &= F(x) \cdot [F(y)]^{n-1} \\ P(A_i \cap A_j) &= [F(x)]^2 \cdot [F(y)]^{n-2} \quad \text{pre } i \neq j \\ P(A_i \cap A_j \cap A_k) &= [F(x)]^3 \cdot [F(y)]^{n-3} \quad \text{pre } i \neq j \neq k \\ &\cdots \\ P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) &= [F(x)]^n \end{aligned}$$

Opäť premysliet, že náhodný jav, napr. $\{A_i \cap A_j \cap A_k\}$, znamená, že náhodné veličiny X_i, X_j a X_k sú menšie, než x a zároveň všetky veličiny $X_1, \ldots, X_n$ sú menšie, než y. Samozrejme to opäť zahŕňa aj situáciu, že všetky náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ sú menšie, než x.

Pre prípad $x < y$ môžeme preto pomocou princípu inkluze a exkluze vyjádriť distribučnú funkciu $G(x, y)$ ako

$$
\begin{aligned}
G(x,y) = P(\cup_{i=1}^n A_i) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum\sum_{i\neq j} P(A_i \cap A_j) + \sum\sum\sum_{i\neq j\neq k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots \\
&\cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \\
&= nF(x)[F(y)]^{n-1} - \binom{n}{2}[F(x)^2] \cdot [F(y)]^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}[F(x)]^n.
\end{aligned}
$$

Do výrazu na poslednom riadku vhodne pripočítame nulu, a to v nasledujúcom tvare:

$$0 = [F(y)]^n - [F(y)]^n = [F(y)]^n - \binom{n}{0}[F(x)]^0[F(y)]^n$$

Binomickou vetou a jednoduchou úpravou potom dostaneme

$$G(x,y) = [F(y)]^n - \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}[-F(x)]^j[F(y)]^{n-j} = [F(y)]^n - [F(y) - F(x)]^n \qquad \text{pre } x < y.$$

Dohromady teda, združená distribučná funkcia náhodného vektoru $(X_{(1)}, X_{(n)})^\top$ je pre všetky $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ daná predpisom

$$G(x,y) = \begin{cases} [F(y)]^n & \text{pre } x \geq y; \\ [F(y)]^n - [F(y) - F(x)]^n & \text{pre } x < y. \end{cases}$$

- Nechť X_i má hustotu f vzhledem k Lebesguově míře. Najděte sdruženou hustotu $X_{(1)}$ a $X_{(n)}$.

  Řešení:

  Združenu hustotu náhodného vektoru $(X_{(1)}, X_{(n)})^\top$ získame parciálnym derivovaním združenej distribučnej funkcie, podľa oboch premenných:

  $$g(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} G(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \geq y; \\ n(n-1)f(x)f(y)[F(y) - F(x)]^{n-2} & \text{pre } x < y; \end{cases}$$

  Pamätať, že združená hustota je takto definovaná pre všetky body $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

A3. Nechť X_i má spojité rozdělení s distribuční funkcí F a hustotou f.

- Určete sdruženou hustotu rozmezí W_n a minima $X_{(1)}$.

  Řešení:

  Využijeme výsledok predchádzajúceho príkladu—t.j., združené rozdelenie (distribučná funkcia, resp. hustota) náhodného vektoru $(X_{(1)}, X_{(n)})^\top$ je dané funkciou $G(x, y)$, resp. $g(x, y)$ (pre ľubovolné $(x, y) \in \mathbb{R}^2$). Keďže v zadaní sa požaduje pouze združená hustota, postačí vyšetrovať prípad pre $x < y$, pretože $g(x,y) = 0$ pre $x \geq y$. Následne použijeme vetu o transformácii náhodného vektoru s transformačnou funkciou $t: \mathbb{R}^2 \to [0,\infty) \times \mathbb{R}$ definovanou následovne:

$$t(x,y) = \begin{pmatrix} y - x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}.$$

Príslušné inverzné zobrazenie (keďže $w = y - x$ a $z = x$) je

$$t^{-1}(w,z) = \begin{pmatrix} z \\ w + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Keďže $x < y$, tak máme $z < z + w$ a teda $w > 0$. Pre Jakobián inverzného zobrazenia t^{-1} sa ľahko overí, že platí $|J_{t^{-1}}| = 1$ a preto pre združenú hustotu náhodného vektoru $(W_n, X_{(1)})^\top$ dostaneme z vety o transformácii:

$$h(w,z) = g(z, z+w) = n(n-1)f(z)f(z+w)[F(z+w) - F(z)]^{n-2}, \qquad \text{pre } z \in \mathbb{R} \text{ a } w > 0,$$

a $h(w,z) = 0$ jinak (pozor na tento 'nulový' prípad, hustota je totiž definovaná pre všetky body $(w,z) \in \mathbb{R}^2$, takže nestačí pouze zmieniť prípady, pre ktoré je hustota nenulová).

- Nechť X_i má exponenciální rozdělení. Ukažte, že W_n a $X_{(1)}$ jsou nezávislé. Určete rozdělení náhodné veličiny $\exp\{-\lambda W_n\}$.

Řešení:

Nech $X_i \sim Exp(\lambda)$ pre nejaký parameter $\lambda > 0$, tak, že príslušná hustota je $f(x) = \lambda \exp\{-\lambda x\}$ pre $x \geq 0$ a $f(x) = 0$ pre $x < 0$ (t.j. $EX = 1/\lambda$). Príslušná distribučná funkcia je

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{pre } x \geq 0; \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Hustotu $f(x)$ je možné zapísať aj v tvare $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{I}_{\{x \geq 0\}}$, kde $\mathbb{I}_{\{.\}}$ je identifikátorová funkcia, ktorá vráti hodnotu jedna, ak je podmienka v argumente splnená a vráti hodnotu nula, ak podmienka splnená nie je. Analogicky aj pre distribučnú funkciu môžeme použiť kompaktnejší zápis $F(x) = (1 - e^{-\lambda x}) \cdot \mathbb{I}_{\{x \geq 0\}}$.

Priamým dosadením do hustoty $h(w,z)$ dostaneme, že

$$\begin{aligned} h(w,z) &= n(n-1)f(z)f(z+w)[F(z+w) - F(z)]^{n-2} \\ &= n(n-1) \cdot \lambda e^{-\lambda z} \mathbb{I}_{\{z \geq 0\}} \cdot \lambda e^{-\lambda(z+w)} \mathbb{I}_{\{z+w \geq 0\}} \cdot [e^{-\lambda z} - e^{-\lambda(z+w)}]^{n-2} \cdot \mathbb{I}_{\{w > 0\}} \\ &= n(n-1)\lambda^2 e^{-n\lambda z} e^{-\lambda w} [1 - e^{-\lambda w}]^{n-2} \mathbb{I}_{\{z \geq 0\}} \mathbb{I}_{\{w > 0\}} \\ &= \underbrace{n\lambda e^{-n\lambda z} \mathbb{I}_{\{z \geq 0\}}}_{Exp(n\lambda)} \cdot \underbrace{(n-1)\lambda e^{-\lambda w} [1 - e^{-\lambda w}]^{n-2} \mathbb{I}_{\{w > 0\}}}_{f_{W_n}(w)}. \end{aligned}$$

Hustotu $h(w,z)$ je teda možné faktorizovať na súčin dvoch členov, pričom oba členy závisia iba na jednej premennej. Prvý člen je evidentne hustota náhodnej veličiny s exponenciálnym rozdelením s parametrom $n\lambda > 0$ (t.j. hustota náhodnej veličiny $X_{(1)}$) a druhý člen nezávisí na $z \in \mathbb{R}$ a jedná sa teda o hustotu náhodnej veličiny W_n. Vďaka tejto faktorizácii vieme, že náhodné veličiny $X_{(1)}$ a W_n sú vzájomne nezávislé (pripomeňte si ekvivalenčný vzťah, ktorý dáva do súvislosti práve takúto faktorizáciu hustory s nezávislosťou príslušných náhodných veličín).

Na záver, rozdelenie náhodnej veličiny $Y = \exp\{-\lambda W_n\}$ získame opäť pomocou vety o transformácii (tentokrát postačí len ´jednorozmerná varianta).

Transformácia: $t:\ w \to e^{-\lambda w}$, t.j. náhodná veličina $Y = t(W_n) = e^{-\lambda W_n}$;
Inv. transformácia: $t^{-1}:\ y \to -\frac{1}{\lambda}\log y$, t.j. náhodná veličina $W_n = t^{-1}(Y) = -\frac{1}{\lambda}\log(e^{-\lambda W_n})$;
(zároveň pre $w > 0$ dostávame, že $y \in (0,1)$)

Podľa vety o transformácii náhodnej veličiny máme pre hustotu náhodnej veličiny Y nasledujúci vzťah:

$$\begin{aligned} f_Y(y) = f_{W_n}\left(-\frac{1}{\lambda}\log y\right) \cdot \left|\frac{\partial t^{-1}(y)}{\partial y}\right| &= (n-1)\lambda e^{\log y}[1 - e^{\log y}]^{n-2} \cdot \frac{1}{\lambda y} \\ &= (n-1)(1-y)^{n-2}, \qquad \text{pre } y \in (0,1), \end{aligned}$$

a samozrejme $f_Y(y) = 0$ jinak. Zároveň sa jedná o hustotu náhodnej veličiny s beta rozdelením s parametrami 1 a $n-1$ (t.j. $Y \sim Beta(1, n-1)$).

A4. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení $\mathsf{R}(0,1)$. Spočítejte hustotu W_n, $\mathsf{E}\,W_n$ a $\mathsf{var}\,W_n$.

Řešení:

Pre združenú hustotu náhodných veličín W_n a $X_{(1)}$ už máme hustotu v tvare:

$$h(w,z) = n(n-1)f(z)f(z+w)[F(z+w) - F(z))]^{n-2} \quad \text{pre } z \in \mathbb{R} \text{ a } w > 0,$$

a $h(w,z) = 0$ jinak. Keďže náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ majú rovnomerné rozdelenie na intervale $(0,1)$, tak poznáme tvar hustoty $f(x)$ aj distribučnej funkcie $F(x)$. Platí, že:

$$\begin{aligned} &f(x) = \mathbb{I}_{\{x \in (0,1)\}} \\ &\text{a tiež} \\ &F(x) = x \quad \text{pre } x \in (0,1), \end{aligned}$$

pričom $F(x) = 0$ pre $x < 0$ a $F(x) = 1$ pre $x > 1$. Po dosadení preto dostaneme združenú hustotu

$$\begin{aligned} h(w,z) &= n(n-1)\mathbb{I}_{\{x \in (0,1)\}}\mathbb{I}_{\{z+w \in (0,1)\}}[z + w - z]^{n-2}\mathbb{I}_{\{w>0\}} \\ &= n(n-1)\mathbb{I}_{\{z \in (0,1-w)\}}w^{n-2}\mathbb{I}_{\{w \in (0,1)\}}. \end{aligned}$$

Potrebujeme totíž, aby

$$\begin{aligned} 0 < z + w < 1 \\ -w < z < 1 - w \end{aligned}$$

ale zároveň aj $z > 0$ a $0 < w < 1$. Preto identifikátorové funkcie v danom tvare. Pre hustotu náhodnej veličiny W_n (a príslušné charakteristiky strednej hodnoty a rozptylu) stačí integrovať združenú hustotu vzhľadom k premennej $z \in \mathbb{R}$. Dostaneme:

$$\begin{aligned} f_{w_n}(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(w,z)\mathrm{d}z = n(n-1)w^{n-2}\int_0^{1-w} 1\mathrm{d}z \\ &= n(n-1)w^{n-2}(1-w) \quad \text{pre } w \in (0,1) \end{aligned}$$

a $f_{w_n}(w) = 0$ inak. Teraz je užitočné uvedomiť si, že sa jedná o hustotu náhodnej veličiny, ktorá ma Beta rozdelenie, s parametrami $\alpha = n - 1$ a $\beta = 2$. To znamená, že

$$W_n \sim Beta(\alpha, \beta) \equiv Beta(n-1, 2),$$

pričom z vlastnosti Beta rozdelenia vieme, že pre strednú hodnotu a rozptyl platia nasledujúce vzťahy:

$$EW_n = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{n-1}{n+1} \quad Var(W_n) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} = \frac{2(n-1)}{(n+2)(n+1)^2}.$$

A5. Náhodné veličiny X, Y jsou nezávislé. X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $[-1, 1]$ a Y má rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0, 1]$. Spočtěte podmíněné střední hodnoty:

- $\mathsf{E}\left[X^2 + Y|Y\right]$.

  Řešení:
  Z linearity podmienenej strednej hodnoty plynie úprava

  $$\mathsf{E}\left[X^2 + Y|Y\right] = \mathsf{E}\left[X^2|Y\right] + \mathsf{E}\left[Y|Y\right]$$

  a nezávislosti X a Y a definície podmienej strednej hodnoty (t.j., merateľnosti náhodných veličín X a Y) tiež

  $$\mathsf{E}\left[X^2|Y\right] = \mathsf{E}\,X^2 \qquad \text{a} \qquad \mathsf{E}\left[Y|Y\right] = Y.$$

  Preto dostaneme $\mathsf{E}\left[X^2 + Y|Y\right] = \mathsf{E}\,X^2 + Y = 1/3 + Y$.

- $\mathsf{E}\left[X|X + Y\right]$.

  Řešení:
  V prvom rade, súčet $W = X + Y$ má rozdelenie s hustotou (overte samostatne)

  $$f_W(w) = \begin{cases} \frac{1}{2}(w+1), & \text{pre } w \in (-1, 0]; \\ \frac{1}{2}, & \text{pre } w \in [0, 1]; \\ \frac{1}{2}(-w+2), & \text{pre } w \in [1, 2); \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

  Združené rozdelenie náhodného vektoru $(X, W)^\top$ získame zo združeného rozdelenia náhodného vektoru $(X, Y)^\top$ použitím vety o transformácii. Rozdelenie náhodného vektoru $(X, Y)^\top$ je (z nezávislosti X a Y) dané hustotou

  $$f(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{I}_{\{x \in [-1,1]\}} \cdot \mathbb{I}_{\{y \in [0,1]\}}, \qquad \text{pre } (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

  Definujme transformciu

  $$t : (X, Y)^\top \longrightarrow (U, W)^\top \equiv (X, X + Y)^\top$$

  a príslušné inverzné zobrazenie

  $$\tau : (U, W)^\top \longrightarrow (U, W - U)^\top.$$

  Je zrejmé, že Jakobián inverzného zobrazenia je $|J_\tau| = 1$ a preto združené rozdelenie náhodného vektoru $(U, W)^\top$ resp. náhodného vektoru $(X, X + Y)^\top$ (a tiež platí, že $f_{(U,W)} \equiv f_{(X,X+Y)} \equiv f_{(X,W)}$) je dané hustotou

  $$f_{(U,W)}(u, w) = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{I}_{\{u \in [-1,1]\}} \cdot \mathbb{I}_{\{w-u \in [0,1]\}}, \qquad \text{pre } (u, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Požadovanú podmienenú strednú hodnotu spočítame (z definície) podľa vzťahu

$$\mathsf{E}\,[X|X+Y=w] \equiv \mathsf{E}\,[X|W=w] = \frac{1}{f_W(w)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{(X,W)}(x,w)\mathrm{d}x$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\frac{1}{2}(w+1)} \cdot \int_{-1}^{w} \frac{1}{2}x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(w-1) & \text{ak } w \in (-1,0]; \\ \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \int_{w-1}^{w} \frac{1}{2}x\mathrm{d}x = w - \frac{1}{2} & \text{ak } w \in [0,1]; \\ \frac{1}{\frac{1}{2}(2-w)} \cdot \int_{w-1}^{1} \frac{1}{2}x\mathrm{d}x = \frac{w}{2} & \text{ak } w \in [1,2). \end{cases}$$

- $\mathsf{E}\left[X^2+Y|X+Y\right]$.

  Řešení:
  Analogickým spôsobom, ako predchádzajúci príklad.