
NMFM301 – Statistika pro finanční matematiky

Cvičení 4. Metoda maximální věrohodnosti a momentová metoda.

A Příklady na cvičení

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rozdělení s hustotou $f(x|\theta_X) \in \mathcal{F} = \{f(x|\theta), \theta \in \Theta\}$.

A1. [Procvičovací] Momentovou metodou najděte odhad $\tilde{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu \mathcal{F} , kde

$$f(x|\theta) = \frac{\theta}{x^{\theta+1}} \mathbb{I}_{(1,\infty)}(x), \quad \theta > 2 \quad (\text{Paretovo rozdělení}).$$

Určete asymptotické rozdělení $\tilde{\theta}_n$.

[Použijte vztahy $E X_i = \frac{\theta_X}{\theta_X - 1}$, $\text{var } X_i = \frac{\theta_X}{(\theta_X - 1)^2(\theta_X - 2)}$.]

A2. [Procvičovací] Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\hat{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu z předchozího příkladu. Určete asymptotické rozdělení $\hat{\theta}_n$ a porovnejte asymptotický rozptyl maximálně věrohodného odhadu $\hat{\theta}_n$ a momentového odhadu $\tilde{\theta}_n$.

A3. [Procvičovací] Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\hat{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu \mathcal{F} , kde

$$f(x|\theta) = \frac{\theta}{1-\theta} x^{(2\theta-1)/(1-\theta)} \mathbb{I}_{(0,1)}(x), \quad \theta \in (0, 1).$$

Určete asymptotické rozdělení $\hat{\theta}_n$.

A4. [Procvičovací] Momentovou metodou najděte odhad $\tilde{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu z předchozího příkladu. Určete asymptotické rozdělení $\tilde{\theta}_n$ a porovnejte asymptotický rozptyl maximálně věrohodného odhadu $\hat{\theta}_n$ a momentového odhadu $\tilde{\theta}_n$.

B Doplnující příklady (nahrazování, procvičování)

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rozdělení s hustotou $f(x|\theta_X) \in \mathcal{F} = \{f(x|\theta), \theta \in \Theta\}$.

B1. Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\hat{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu

$$f(x; \theta) = \theta(\theta + 1)x^{\theta-1}(1-x)1_{(0,1)}(x), \theta > 0.$$

Určete asymptotické rozdělení $\hat{\theta}_n$.

B2. Momentovou metodou najděte odhad $\tilde{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu \mathcal{F} , kde

$$f(x; \theta) = \theta(\theta + 1)x^{\theta-1}(1-x)1_{(0,1)}(x), \theta > 0.$$

Určete asymptotické rozdělení $\tilde{\theta}_n$.

B3. Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\hat{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu

$$f(x; \theta) = \frac{2x}{\theta^2} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^2\right\} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

Určete asymptotické rozdělení $\hat{\theta}_n$.

B4. Momentovou metodou najděte odhad $\tilde{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu \mathcal{F} , kde

$$f(x; \theta) = \frac{2x}{\theta^2} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^2\right\} \mathbb{I}_{(0, \infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

Určete asymptotické rozdělení $\tilde{\theta}_n$.

B5. Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\hat{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \exp\left\{-\frac{(x-\theta)^2}{2\theta^2}\right\}, \quad \theta > 0.$$

Určete asymptotické rozdělení $\hat{\theta}_n$.

B6. Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\hat{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu

$$f(x|\theta) = \frac{x}{\theta^2} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\theta^2}\right\} \mathbb{I}_{(0, \infty)}(x), \quad \theta > 0 \quad (\text{Rayleighovo rozdělení}).$$

Určete asymptotické rozdělení $\hat{\theta}_n$.

[Použijte vztah $E X_i^2 = 2\theta_X^2$.]

B7. Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\hat{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu

$$f(x|\theta) = \sqrt{\frac{\theta}{2\pi x^3}} \exp\left\{-\frac{\theta(x-1)^2}{2x}\right\} \mathbb{I}_{(0, \infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

Určete asymptotické rozdělení $\hat{\theta}_n$.

B8. Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\hat{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu

$$f(x|\theta) = \sqrt{\frac{1}{\pi x^3}} \exp\left\{-\frac{(x-\theta)^2}{\theta^2 x}\right\} \mathbb{I}_{(0, \infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

Určete asymptotické rozdělení $\hat{\theta}_n$.

B9. Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\hat{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu

$$f(x|\theta) = \frac{\theta}{x^2} \exp\left\{-\frac{\theta}{x}\right\} \mathbb{I}_{(0, \infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

Určete asymptotické rozdělení $\hat{\theta}_n$.