NMFM301 – Statistika pro finanční matematiky

1. Pravděpodobnostní rozdělení a pořádkové statistiky

Nechť je $X_1, \dots, X_n$ náhodný výběr z nějakého rozdělení. Označme

$$X_{(1)} = \min\{X_1, \dots, X_n\} \quad \text{a} \quad X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$$

(nejmenší a největší pozorování ve výběru). Označme

$$W_n = X_{(n)} - X_{(1)}$$

rozmezí dat (*range*). Označme

$$M_n = \frac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2}$$

prostředek dat (*midpoint*).

A Příklady na cvičení

A1. *[Opakovací]* Nechť X_i má distribuční funkci F pro všechna $i = 1, \dots, n$.

- Určete distribuční funkce $X_{(1)}$ a $X_{(n)}$.
- Nechť X_i má hustotu f vzhledem k Lebesguově míře. Najděte hustoty $X_{(1)}$ a $X_{(n)}$.

A2. *[Instruktážní]* Nechť X_i má distribuční funkci F pro všechna $i = 1, \dots, n$.

- Určete sdruženou distribuční funkci $X_{(1)}$ a $X_{(n)}$.
- Nechť X_i má hustotu f vzhledem k Lebesguově míře. Najděte sdruženou hustotu $X_{(1)}$ a $X_{(n)}$.

A3. *[Procvičovací]* Nechť X_i má spojité rozdělení s distribuční funkcí F a hustotou f.

- Určete sdruženou hustotu rozmezí W_n a minima $X_{(1)}$.
- Nechť X_i má exponenciální rozdělení. Ukažte, že W_n a $X_{(1)}$ jsou nezávislé. Určete rozdělení náhodné veličny $\exp\{-\lambda W_n\}$.

A4. *[Procvičovací]* Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení $\mathsf{R}(0, 1)$. Spočítejte hustotu W_n, $\mathsf{E}\, W_n$ a $\mathsf{var}\, W_n$.

B Doplňující příklady (nahrazování, procvičování)

B1. Pro nezávislé veličiny $X \sim \mathsf{Exp}(\lambda)$ a $Y \sim \mathsf{Exp}(\nu)$

(a) určete rozdělení $Z = \min\{X, Y\}$,

(b) spočtěte $\mathsf{E}\, Z$,

(c) spočtěte $\mathrm{P}\,[X < Y]$.

B2. Nechť $F_{X,Y}$ je sdružená distribuční funkce náhodného vektoru $(X, Y)^{\mathsf{T}}$. Určete distribuční funkci $Z = \max(X, Y)$.

B3. Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z $\mathsf{R}(0, \theta)$, kde $\theta > 0$. Ukažte, že W_n/θ má beta rozdělení a určete jeho parametry.

B4. Pro nezávislé stejně rozdělené veličiny $X, Y \sim \mathsf{Exp}(\lambda)$ určete hustotu

$$U = \frac{\min\{X, Y\}}{\max\{X, Y\}}.$$

B5. Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z libovolného spojitého rozdělení s distribuční funkcí F a hustotou f. Dokažte, že prostředek dat M_n má distribuční funkci

$$H(x) = n \int_{-\infty}^{x} [F(2x - y) - F(y)]^{n-1} f(y)\, dy.$$

B6. Nechť $X_i \sim \mathsf{N}(0, 1)$, $i = 1, \dots, n$, jsou nezávislé. Ukažte, že pro $n = 2$ jest $\mathsf{E}\, W_n = \pi^{-1/2}$ a pro $n = 3$ jest $\mathsf{E}\, W_n = \frac{3}{2}\pi^{-1/2}$.

B7. Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr nezáporných spojitých náhodných veličin s distribuční funkcí F. Dokažte, že

$$\mathsf{E}\, W_n = \int_{0}^{\infty} \{1 - F^n(x) - [1 - F(x)]^n\}\, dx.$$

[Návod: Použijte vztah $\mathsf{E}\, X = \int_0^\infty [1 - F(x)]\, dx$, *který platí pro libovolnou spojitou náhodnou veličinu takovou, že* $\mathrm{P}\,[X \geq 0] = 1$.*]*

B8. *[Obtížnější]* Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z libovolného spojitého rozdělení s distribuční funkcí F. Zobecněte postup z předchozího příkladu a dokažte, že

$$\mathsf{E}\, W_n = \int_{-\infty}^{\infty} \{1 - F^n(x) - [1 - F(x)]^n\}\, dx.$$

B9. *[Obtížnější]* Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z $\mathsf{R}(0, \theta)$, kde $\theta > 0$. Ukažte, že

$$n \left[1 - \frac{W_n}{\theta}\right] \xrightarrow{\mathsf{D}} Y, \quad n \to \infty,$$

kde Y má gama rozdělení.