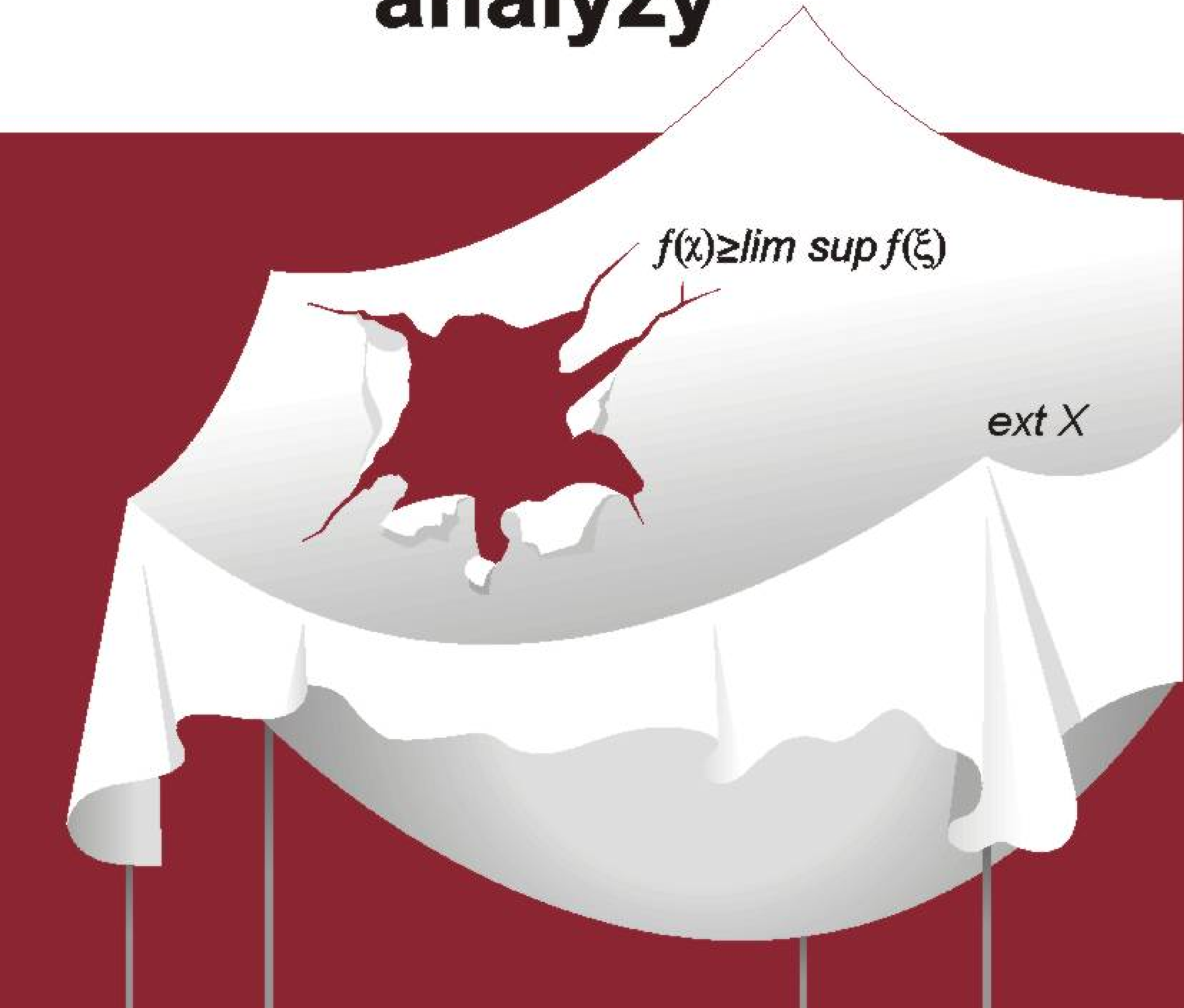
JAROSLAV LUKEŠ

Zápisky z funkcionální analýzy



(Misto pro logo)

Motto: Od žádného vědce po padesátce se už nedá čekat nějaký originální přínos.
P.D. JAMESOVÁ, VRAŽDA POD MIKROSKOPEM

ÚVOD

Funkcionální analýzu jsem přednášel na MFF UK řadu let. Za tu dobu jsem nashromáždil mnoho poznámek a materiálů. Na to, abych vydal dobrá skripta či dokonce knihu, bych potřeboval dlouhou dobu a rozhodně by mi to dalo obrovskou práci. Proto jsem se rozhodl vzít poznámky, které mám, trochu je uspořádat a ve formě ZÁPISKŮ je vydat.

V první části jsem se snažil relativně stručně osvětlit základní partie celé přednášky, do druhé, „ohvězdičkované", jsem pak přidal, víceméně bez ladu a skladu, doplňky, vysvětlení, komentáře, cvičení, přehledy nových výsledků a pár zajímavostí. Byl bych rád, kdyby jejich další studium podnítilo zájem čtenářů hlouběji se zamyslet nad různými problémy funkcionální analýzy a naučilo je pracovat s literaturou.

Čtenáře možná překvapí, že některé pojmy jsou definovány anebo připomenuty na více místech. To je způsobeno pouze snahou, aby se text četl pokud možno plynule bez zbytečného listování. Leckdy chci též čtenáři usnadnit práci, uvádím proto pro pohodlí některé poznámky, zejména z poslední doby, místo toho, abych odkazoval na příslušné partie v literatuře. Ta nemusí být vždy snadno dostupná.

Kapitoly 1–5 pokrývají a leckde i rozšiřují syllabus úvodní přednášky z funkcionální analýzy. Možná že by se hodilo v budoucnu sepsat méně obsažný, zato však mnohem podrobnější text, rozšířený o řešené typické příklady.

Další neohvězdičkovaná část by pak měla obsahovat látku podstatně pokrývající požadavky kladené na posluchače, kteří se rozhodnou skládat státní zkoušku na specializaci matematická analýza. Tato část je psána již stručněji, mnohé důkazy jsou jen naznačeny. To by mělo přimět studenty se zájmem o danou partii, aby se snažili, a to třeba i za použití další literatury, do detailů promýšlet nadhozené myšlenky. Krom toho jsem do Zápisků zahrnul oblasti, které se mi líbí. Je mi jasné, že jiný autor by vybral další doplňky podle své chuti. Snad ani nelze zpracovat veškerý materiál z funkcionální analýzy, kterou raději dnes nazývám moderní analýzou. Její hranice jsou neurčité a každým dnem se dále rozšiřují. Mnohou problematiku jsem ošidil, řadu krásných partií nezařadil. Kupříkladu variační počet, teorii monotonních operátorů, prostory funkcí, konvexní analýzu, Banachovy svazy, diferenciální rovnice v Banachových prostorech a další a další. Kromě toho jsou některá překrývající se témata zahrnuta do skript o míře a integrálu, která jsme nedávno s kolegou Malým vydali.

Upozorňuji, že je mnoho pěkných učebnic funkcionální analýzy. Nechci žádnou zvláště vyzdvihovat, každý máme jiný vkus. Výčet některých z nich je uveden v seznamu literatury. Jejich studiem by si měl každý své vědomosti prohlubovat.

Zápisky jsem si psal sám, jsem tedy zodpovědný nejen za faktickou stránku, ale i za veškeré typografické chyby. Uvítám jakékoliv připomínky, které by mohly někdy v budoucnu přispět k jejich zlepšení. To se týká nejen odborné, ale i jazykové stránky. Řadu odborných termínů, které znám z cizojazyčné matematické literatury, jsem totiž musel podle svého nějakým způsobem převést do českého jazyka. Nevím, jestli právě nejšťastněji.

V průběhu let, kdy jsem skriptum připravoval, mi pomáhalo mnoho lidí. Všem bych chtěl upřímně poděkovat. Patří mezi ně na prvním místě studenti, z jejichž reakcí na provizorní texty jsem značně těžil. Jmenuji-li někoho, vždy se obávám, že na mnohé zapomenu. Nicméně bych chtěl alespoň vyzvednout Václava Zizlera, který mi dodal mnohé inspirace zejména z oblasti teorie Banachových prostorů. Nová skripta, jejichž je spoluautorem, obsahují další materiál k této moderní partii. Mnoho podnětů a neklasických řešení řady problémů vznikalo diskusemi při nezanedbatelném množství šálků čaje s Janem Malým. Největší kus práce odvedl Ondřej Kalenda, který pečlivě přečetl skoro celý text a výrazně přispěl ke zlepšení celého rukopisu. S mnoha dotazy okolo správné české gramatiky mi pomohl přítel Vladimír Novák. Konečně typografickou úpravu zejména v souvislosti s uspořádáním rejstříku a se zařazením portrétů některých matematiků si vzal za své Michal Beneš. Autorem převážné většiny snímků současných matematiků v textu jsem sám.

Jsem si vědom toho, že sepisování textu bych mohl věnovat libovolně dlouhou dobu. Stále by bylo co vylepšovat, co přidávat. Třeba rozšířit cvičení, dodat poznámky o historických souvislostech či další odkazy na studium vhodné literatury. Když jsem nedávno četl Vaculíkův „Český snář“, narazil jsem na větu: „Žádné dílo není nikdy nejdokonalejší, jednou je však nutno je za hotové prohlásit“. Tím jsem se pak řídil při rozhodování, kdy Zápisky ukončit.

Text vznikl za částečné podpory grantu GAUK 186/96.

Praha – Athény – Desná, 1993–97 Jaroslav Lukeš

V druhém vydání těchto skript jsem opravil pouze drobné chyby a překlepy. Všem, kdož mě na ně upozornili, upřímně děkuji. Jinak text Zápisků zůstal nezměněn. Musím ovšem dodat, že návrhů jak na další zlepšení, tak i k větším opravám jsem dostal mnohem více. Neustále by bylo co vylepšovat. A také třeba doplnit novou literaturu. Protože se převážně jedná o větší zásah do textu, nechtěl jsem v tomto dotisku již nic přidávat. Snad příště ...

Praha, červenec 2001 JL

... žádné další se nekonalo. Náklad skript byl rychle rozebrán a já jsem byl požádán o dodání předlohy, aniž bych měl čas rozmýšlet o dalších vylepšeních. Snad příště ...

Praha, září 2003 JL

... protože skripta jsou již delší doby vyprodána, byl jsem opět požádán o dotisk. V něm jsem opravil pouze pár překlepů.

Praha, duben 2012 JL

Obsah

A. Elementy funkcionální analýzy

1. Banachovy a Hilbertovy prostory

1.1. Normované lineární prostory. Symbolem $\mathbf{F}$ budeme označovat buďto těleso reálných čísel $\mathbf{R}$ či komplexních čísel $\mathbf{C}$ a jeho prvky nazývat *skaláry*. *Normovaným lineárním prostorem* rozumíme každý vektorový prostor W nad tělesem $\mathbf{F}$ vybavený ještě *normou* $\|.\|$, což je nezáporná funkce na W splňující požadavky:

(a) $\|x\| \geq 0$, přičemž $\|x\| = 0$, právě když $x = 0$,
(b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$,
(c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

pro každé $x, y \in W$ a $\lambda \in \mathbf{F}$. Je-li $\mathbf{F} = \mathbf{R}$, nazýváme někdy pro přesnost W *reálným* normovaným lineárním prostorem, v případě kdy $\mathbf{F} = \mathbf{C}$ mluvíme též o *komplexních* prostorech. Nerovnosti v (c) se samozřejmě říká *trojúhelníková nerovnost*.

Skoro ihned je vidět, že funkce $\varrho(x, y) := \|x - y\|$ je metrika na W.

Banachovým prostorem rozumíme každý normovaný lineární prostor, který je v příslušné metrice ϱ úplný. Někdy též budeme říkat, že $\|.\|$ na prostoru X je *úplná norma*, jestliže $(X, \|.\|)$ je Banachův prostor.

Začněme zlehka s nenápadnou, leč velice důležitou větičkou.

1.2. Větička. *Buď E normovaný lineární prostor. Potom norma $\|.\| : x \mapsto \|x\|$ je na E (dokonce stejnoměrně) spojitá funkce.*

Důkaz. Z nerovnosti $|\, \|x\| - \|y\| \,| \leq \|x - y\|$ (která se odvodí z trojúhelníkové nerovnosti a vztahu $x = (x - y) + y$), plyne okamžitě tvrzení. ■

1.3. Poznámky. (a) V každém normovaném lineárním prostoru určuje tedy příslušná metrika soustavu otevřených množin. Tuto kolekci otevřených množin nazýváme *topologií* danou uvažovanou normou. Připomeňme pouze, že tato topologie, tedy soustava otevřených množin, je uzavřena na konečné průniky a libovolná sjednocení. Může se stát, že více různých norem na daném prostoru určuje tutéž topologii. V tom případě budeme říkat, že příslušné normy jsou *ekvivalentní*. Blíže viz hned následující odstavec 1.4.

(b) Připomeňme, že posloupnost $\{x_n\}$ prvků normovaného lineárního prostoru *konverguje* k prvku x, což symbolicky zapisujeme $x_n \to x$, jestliže $\|x_n - x\| \to 0$. Pokud toto nastane, říkáme též, že posloupnost $\{x_n\}$ konverguje k x *silně* či *v normě*.

(c) *Pseudonormou* na vektorovém prostoru W rozumíme každou nezápornou funkci na W, která splňuje požadavky (b) a (c) z 1.1 a která nulovému prvku přiřadí 0. Pokud p je pseudonorma a $p(x) = 0$, nemusí být ještě $x = 0$.

1.4. Ekvivalentní normy. Řekneme, že normy $\|.\|_1$ a $\|.\|_2$ na vektorovém prostoru E jsou *ekvivalentní*, existují-li takové kladné konstanty α, β, že

$$\alpha \, \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \, \|x\|_1 \quad \text{pro každé} \quad x \in E\,.$$

Lehko se přesvědčíte, že se jedná skutečně o vztah ekvivalence. Platí následující důležité tvrzení.

1.5. Věta. *Dvě normy na vektorovém prostoru E jsou ekvivalentní, právě když topologie jimi generované na E splývají.*

Důkaz. Samozřejmě dvě ekvivalentní normy $\|.\|_1$ a $\|.\|_2$ na E určují stejné kolekce otevřených množin. Stačí si jen vzpomenout na definici otevřené množiny (množina je *otevřená*, obsahuje-li s každým bodem z i nějakou kouli okolo z) a uvědomit si, že koule $\{x \in E : \|x - z\|_2 < \varepsilon\}$ obsahuje kouli $\{x \in E : \|x - z\|_1 < \frac{\varepsilon}{\beta}\}$ a je obsažena v $\{x \in E : \|x - z\|_1 < \frac{\varepsilon}{\alpha}\}$.

Nechť naopak prostory $(E, \|.\|_1)$ a $(E, \|.\|_2)$ mají stejné systémy otevřených množin. Protože koule $\{x \in E : \|x\|_2 < 1\}$ je otevřená v $(E, \|.\|_2)$, je otevřená i v $(E, \|.\|_1)$ a musí existovat $\varepsilon > 0$ tak, že $\{x \in E : \|x\|_1 < \varepsilon\} \subset \{x \in E : \|x\|_2 < 1\}$. Odtud pak plyne, že $\varepsilon \|y\|_2 \leq \|y\|_1$ pro každé $y \in E$. Ze symetrie pak již lehko vyplyne, že normy $\|.\|_1$ a $\|.\|_2$ jsou ekvivalentní. ■

1.6. Poznámka. Dvě normy na E jsou ekvivalentní, mají-li také stejné konvergentní posloupnosti (nebo jen stejné posloupnosti konvergující k nule) či také, mají-li shodné cauchyovské posloupnosti. Upozorněme však ihned, že na (metrickém prostoru) $\mathbf{R}$ existují dvě metriky mající stejné konvergentní, nikoliv však stejné cauchyovské posloupnosti.

1.7. Věta. *Všechny normy na konečně dimenzionálním vektorovém prostoru E jsou (navzájem) ekvivalentní.*

Důkaz. Nechť $\{e_1, \dots, e_n\}$ je nějaká báze E a $\|.\|$ je norma na E. Pokud $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$, položme $\|x\|_\infty := \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$. Především je třeba ukázat, že $\|.\|_\infty$ je skutečně normou na E. To je vcelku rutinní záležitost. K dokončení důkazu si pak stačí rozmyslet, že normy $\|.\|_\infty$ a $\|.\|$ jsou ekvivalentní. Na jedné straně ale máme $\|x\| = \|\sum_i \lambda_i e_i\| \le \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\} \sum_i \|e_i\| = \|x\|_\infty \sum_i \|e_i\|$.

Označíme-li nyní $S_E := \{x \in E : \|x\|_\infty = 1\}$, je S_E kompaktní podmnožina $(E, \|.\|_\infty)$ podle známé věty z analýzy.

(Osvěžme si myšlenku důkazu. Volíme-li $x_k = \lambda_1^k e_1 + \dots + \lambda_n^k e_n \in S_E$, zjistíme, že číselné posloupnosti $\{\lambda_j^k\}_k$ jsou omezené pro každé $j = 1, \dots, n$. Podle Bolzano-Weierstrassovy věty z nich lze vybrat konvergentní posloupnosti. Musíme je ovšem vybrat šikovně — postupně. Bude potom existovat posloupnost indexů $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ a $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tak, že $\lim\limits_{i \to \infty} \lambda_j^{k_i} = \lambda_j$ pro každé $j = 1, \dots, n$. Položíme-li $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$, zbývá ukázat, že $x \in S_E$ a $x_{k_i} \to x$.)

Potom ovšem S_E je kompaktní i v prostoru $(E, \|.\|)$. To plyne z toho, že $\|x\| \le \beta \|x\|_\infty$ (neboť potom každá množina, která je otevřená v $(E, \|.\|)$, je otevřená i v $(E, \|.\|_\infty)$ anebo, chceme-li, každá konvergentní posloupnost v $\|.\|_\infty$ je konvergentní i v $\|.\|$). Protože norma je podle 1.2 vždy spojitá funkce, nabývá $\|.\|$ svého minima na kompaktní množině S_E. Existuje tedy $\delta > 0$ tak, že $\|z\| \ge \delta$ pro každé $z \in S_E$. Ovšemže $\delta > 0$, neboť $0 \notin S_E$. Je-li nyní $x \in E$ libovolné (nenulové), je $y := \frac{x}{\|x\|_\infty} \in S_E$. Tudíž $\|y\| \ge \delta$. Tím dostáváme i druhou nerovnost $\|x\|_\infty \le \frac{1}{\delta}\|x\|$. Tato nerovnost samozřejmě platí i pro $x = 0$. ∎

1.8. Důsledek. *Každý konečně rozměrný normovaný lineární prostor je Banachův.*

Důkaz. Nechť $\{e_1, \dots, e_n\}$ je báze našeho prostoru, označme ho E. Položíme-li, obdobně jako v předchozím důkazu, $\|x\|_\infty := \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$, pokud $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$, je E v této normě úplný. Důkaz by probíhal podobně jako v předchozí větě, kde jsme dokazovali kompaktnost jednotkové koule. Podstatné je, že posloupnosti „koeficientů" cauchyovské posloupnosti v $(E, \|.\|_\infty)$ jsou číselné cauchyovské posloupnosti, a jsou tudíž konvergentní. Protože původní norma na E je podle předchozí věty 1.7 ekvivalentní úplné normě $\|.\|_\infty$, je i E v ní úplný. To je snadné si z definic odvodit. ∎

1.9. Důsledek. *Každý konečně rozměrný podprostor normovaného lineárního prostoru je uzavřený.*

Důkaz. Stačí použít předchozí 1.8. Je-li totiž M konečně dimenzionální podprostor normovaného lineárního prostoru a $\{x_n\}$ posloupnost prvků z M konvergující k x, je posloupnost $\{x_n\}$ cauchyovská. Podle 1.8 má tedy limitu v M a tou limitou musí být samozřejmě bod x. ∎

1.10. Příklady prostorů. (a) `Prostory` $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^n$, l_n^1 `a` l_n^∞. Prostory $\mathbf{R}^n$ či $\mathbf{C}^n$ jsou tvořeny všemi n-ticemi reálných či komplexních čísel. Normu takové n-tice bychom mohli definovat různým způsobem. My položíme

$$\|x\| := \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}\,,$$

pokud $x = (x_1, \dots, x_n)$ a této normě budeme říkat *eukleidovská*. Podle důsledku 1.8 jsou prostory $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{C}^n$ opatřeny touto normou Banachovy.

Do prostoru všech n-tic lze zavést i další normy. Abychom vyjádřili závislost prostoru na normě, budeme značit symbolem l_n^1 prostor všech n-tic (reálných anebo komplexních) čísel opatřený normou

$$\|x\|_1 = \|(x_1, \dots, x_n)\|_1 := |x_1| + \dots + |x_n|$$

a symbolem l_n^∞ prostor všech n-tic s normou

$$\|x\|_\infty = \|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty := \max(|x_1|, \dots, |x_n|)\,.$$

Prostory l_n^1 a l_n^∞ jsou opět úplné.

Samozřejmě, pro libovolné $p \in [1, \infty)$ bychom mohli uvažovat prostor l_n^p s normou $\|x\|_p := (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$. Všechny tyto prostory jsou speciálními případy Banachových prostorů $L^p(X, \mathcal{S}, \mu)$, kde za X volíme množinu $\{1, 2, \ldots, n\}$, za $\mathcal{S}$ systém všech podmnožin X a za μ aritmetickou míru. Prostor l_n^∞ můžeme také chápat jako prostor všech spojitých funkcí $\mathcal{C}(K)$ na množině $K = \{1, 2, \ldots, n\}$ opatřené diskrétní topologií.

Poznamenejme, že topologie generované všemi těmito normami jsou stejné. To není nikterak překvapující, ukázali jsme si v 1.7, že všechny normy na daném vektorovém prostoru konečné dimenze jsou navzájem ekvivalentní.

(b) `Prostory` $\mathcal{C}([0,1])$ `a` $\mathcal{C}(K)$. Vektorový prostor všech (reálných či komplexních) funkcí na intervalu $[0,1]$ budeme uvažovat vždy s normou

$$\|f\| = \max\{|f(t)| : t \in [0,1]\} \quad \text{pro} \quad f \in \mathcal{C}([0,1])\,.$$

Je lehkým cvičením ověřit, že se jedná skutečně o normu. Ze základních vět analýzy také vyplývá, že konvergence posloupnosti funkcí v této normě je vlastně stejnoměrnou konvergencí. Navíc $\mathcal{C}([0,1])$ je v této normě úplný. To plyne z toho, že cauchyovské posloupnosti v prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ jsou „stejnoměrně cauchyovské posloupnosti“, které jsou, jak známo, stejnoměrně konvergentní.

Do prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ lze zavést i jiné normy. Uvažujeme-li integrální normu

$$\|f\|_i = \int_0^1 |f(t)|\, dt \quad \text{pro} \quad f \in \mathcal{C}([0,1])\,,$$

tvoří opět $(\mathcal{C}([0,1]), \|.\|_i)$ normovaný lineární prostor. Ten však již není úplný. Třeba posloupnost funkcí $\{f_n\}$, kde f_n jsou spojité na $[0,1]$, rovny 0 na intervalu $[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n},]$, rovny 1 na $[\frac{1}{2}, 1]$ a lineární na $[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}]$, je v něm cauchyovská (to není těžké nahlédnout, stačí si namalovat obrázek a ujasnit geometrický význam normy $\|f\|_i$), nikoliv však konvergentní. To odůvodníme takto. Kdyby posloupnost $\{f_n\}$ konvergovala v integrální normě, limitní funkce, která by byla spojitá, by musela být rovna 0 na intervalu $[0, \frac{1}{2})$ a rovna 1 na $(\frac{1}{2}, 1]$. To proto, že konvergence v integrální normě je vlastně konvergencí v prostoru L^1, a tam víme, že z posloupnosti $\{f_n\}$ lze vybrat podposloupnost, která konverguje skoro všude (viz třeba [LM], věta 12.4).

Můžeme také argumentovat elementárněji. Je-li f libovolná spojitá funkce na $[0,1]$, máme pro každé n

$$\|f_n - f\|_i = \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} |f| + \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} |f_n - f| + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f - 1|\,.$$

Pokud tedy $\|f_n - f\|_i \to 0$, musí být vzhledem ke spojitosti f nutně $f = 0$ na $[0, \frac{1}{2})$ a $f = 1$ na $(\frac{1}{2}, 1]$.

Navíc normy $\|.\|$ a $\|.\|_i$ již nejsou na prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ ekvivalentní. Není těžké si představit posloupnost $\{f_n\}$ nezáporných spojitých funkcí na $[0,1]$, která nekonverguje stejnoměrně k nule, ale pro niž přesto integrály $\int_0^1 f_n$ konvergují k nule. Konečně, můžete se též podívat na cvičení 4.22.l, kde nám pomůže věta o otevřeném zobrazení.

Nahradíme-li interval $[0,1]$ libovolným kompaktním topologickým prostorem K, budeme vždy Banachův prostor spojitých funkcí na K uvažovat s „max-normou“ $\|f\| := \max\{|f(t)| : t \in K\}$.

(c) `Prostory` c `a` c_0. Vektorový prostor c tvoří množina všech konvergentních posloupností, ať již reálných nebo komplexních čísel, opatřený normou

$$\|\{x_n\}\| := \sup\,\{|x_n| : n \in \mathbf{N}\}\,.$$

Posloupnost prvků $\{z_n\}$ konverguje v prostoru c k prvku z, jestliže k němu konverguje stejnoměrně na $\mathbf{N}$ (nezapomeňte, že každé z_n je posloupnost na $\mathbf{N}$). Prostor c je úplný. Jeho podprostor tvořený všemi posloupnostmi konvergujícími k 0 budeme značit symbolem c_0. Protože c_0 je dokonce uzavřený podprostor c (důkaz připomíná Osgoodovo lemma o záměně limit známé z analýzy), tvoří c_0 Banachův prostor.

Poznámka. Předběhneme-li trochu, můžeme ukázat uzavřenost c_0 v prostoru c následovně. Především si uvědomíme, že zobrazení $P : \{x_n\} \mapsto \lim x_n$ je omezený lineární funkcionál na c. Protože $c_0 = \{x \in c : Px = 0\}$ je jeho jádro, musí být c_0 uzavřenou podmnožinou c.

(d) `Prostor` l^∞. Prostor l^∞ je tvořen všemi omezenými posloupnostmi. Pro $x = \{x_n\} \in l^\infty$ položme

$$\|x\| = \sup\{|x_n| : n \in \mathbf{N}\}.$$

Zřejmě l^∞ obsahuje c jako svůj vlastní (uzavřený) podprostor. Také prostor l^∞ je úplný, je totiž speciálním případem mnohem obecnějších Banachových prostorů, které nyní popíšeme. Důkazy a další jejich vlastnosti jsou uvedeny v [LM].

(e) `Prostory` L^p `a` L^∞. Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou. Symbolem $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{S}, \mu)$ značíme množinu všech μ-měřitelných funkcí na X, pro něž existuje konstanta M tak, že

$$|f(x)| \le M \qquad \text{pro } \mu\text{-skoro všechna } x \in X.$$

Nejmenší konstanta M s takovou vlastností se nazývá L^∞-*normou* funkce f a značí se $\|f\|_\infty$. Rozdíl mezi $\|f\|_\infty$ a $\sup_X |f|$ spočívá, zhruba řečeno, v tom, že funkce $f \to \|f\|_\infty$ zanedbává hodnoty f na množinách míry nula.

Nechť $p \in [1, \infty)$. Symbolem $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(X, \mathcal{S}, \mu)$ značíme množinu všech μ-měřitelných funkcí na X, pro něž $\int_X |f|^p \, d\mu < \infty$. Číslo

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

se nazývá L^p-*norma* funkce z $\mathcal{L}^p$. Funkce $\|.\|_\infty$ a $\|.\|_p$ mají všechny důležité vlastnosti normy až na jednu „maličkost“. Mohou existovat nenulové funkce mající nulovou normu. Abychom mohli pracovat v teorii normovaných lineárních prostorů, přiřaďme každé funkci $f \in \mathcal{L}^p$ (nechť nyní $1 \le p \le \infty$) třídu funkcí

$$[f] = \{g \in \mathcal{L}^p \colon g = f \ \mu\text{-skoro všude na } X\}$$

a definujme $L^p = L^p(X, \mathcal{S}, \mu) = \{[f] : f \in \mathcal{L}^p\}$. Potom L^p je lineární prostor, vybavený operacemi

$$[f] + [g] := [f + g], \quad \alpha[f] := [\alpha f]$$

($\alpha \in \mathbf{R}$) a normou

$$\|\,[f]\,\|_p := \|f\|_p.$$

Snadno nahlédneme, že uvedené definice jsou korektní (tj. nezávislé na výběru reprezentantů).

V matematické literatuře je běžné nerozlišovat funkce a třídy funkcí, leckdy ani $\mathcal{L}^p$ a L^p. Říkáme například, že $\{f_j\}$ je cauchyovská posloupnost v L^p, a myslíme tím, že f_j jsou funkce a $\{[f_j]\}$ je cauchyovská posloupnost v L^p.

Prostory L^p jsou úplné. Je-li totiž $\{f_j\}$ cauchyovská posloupnost v L^p, potom $\{f_j\}$ je konvergentní v L^p, tj. existuje $f \in \mathcal{L}^p$ tak, že

$$\int_X |f - f_j|^p \, d\mu \to 0 \quad \text{pro} \quad p \in [1, \infty)$$

či

$$\|f - f_j\|_\infty \to 0 \quad \text{v případě} \quad p = \infty.$$

(f) `Prostory` l^p `a` l^∞. V případě, že μ je *aritmetická míra* na množině X (někdo též užívá názvu *sčítací míra*, je to prostě míra, která množinám přiřazuje počet jejich prvků), značíme $l^p(X) = L^p(X, \mathcal{P}(X), \mu)$. Tak dostaneme pro $X = \mathbf{N}$ prostory posloupností:

- prostor l^p, $1 \le p < \infty$, všech posloupností $x = \{x_n\}$, pro něž $\|x\|_p := \big(\sum_n |x_n|^p\big)^{1/p} < \infty$,
- prostor l^∞ všech omezených posloupností $x = \{x_n\}$ zavedený výše s normou $\|x\|_\infty := \sup_n |x_n|$.

(g) `Sobolevovy prostory.` Sobolevovy prostory hrají důležitou roli zejména v teorii parciálních diferenciálních rovnic. Lze je definovat více způsoby, o některých se stručně zmíníme v *1.3.

Pro ty, kteří neznají teorii distribucí, zadefinujeme nejdříve zobecněné derivace. Předpokládejme tedy, že Ω je otevřená podmnožina $\mathbf{R}^n$ a $i = 1, \ldots, n$ je index. Symbolem $\mathcal{D}(\Omega)$ značme vektorový prostor všech nekonečně diferencovatelných funkcí majících kompaktní nosič v Ω a $\mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ pak prostor všech lokálně integrovatelných funkcí na Ω (veškerou integraci vztahujeme vždy k Lebesgueově míře v $\mathbf{R}^n$). Řekneme, že funkce $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ má *slabou derivaci* podle i-té proměnné, existuje-li funkce $g^i \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ tak, že

$$\text{(PP)} \qquad \int_\Omega g^i \, \varphi = - \int_\Omega f \, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

pro každou „testovací“ funkci $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ (s existencí integrálů nejsou problémy, uvědomte si, že φ má kompaktní nosič a spojité derivace).

Pokud funkce f má slabou derivaci podle i-té proměnné, funkce g^i splňující uvedenou rovnost (PP) je určena jednoznačně jakožto prvek prostoru $L^1_{loc}(\Omega)$. V tom případě značíme g^i také jako $D^i f$.

(Jestliže totiž funkce h z prostoru $\mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ splňuje rovnost $\int_\Omega h\varphi = 0$ pro všechny funkce $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, je nutně podle věty D.7 $h = 0$ skoro všude.)

Má-li f slabé derivace podle všech proměnných, řekneme, že f je na Ω *slabě diferencovatelná* mající na Ω *slabou derivaci* $\nabla f := (D^1 f, \ldots, D^n f)$.

Má-li funkce f spojité parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ na Ω, je rovnost (PP) splněna pro funkce $g^i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ a ∇f je „klasickým“ gradientem $\operatorname{grad} f := (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$ funkce f.

Rovnost (PP) zapisujeme stručně ve tvaru $\int_\Omega \nabla f \, \varphi = - \int_\Omega f \operatorname{grad} \varphi$.

Pro ty, kteří se seznámili s distribucemi, pouze uveďme, že slabé derivace nejsou nic jiného než distributivní derivace. Má-li funkce f slabou derivaci, je tato i její distributivní derivací. O jejich vztahu se lze dočíst v *1.4.

Buď $p \in [1, \infty]$. Řekneme, že funkce $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ leží v *Sobolevově prostoru* $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$, jestliže pro každé $i = 1, \ldots, n$ existuje slabá derivace $D^i f$ a $D^i f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$.

V jazyce teorií distribucí je $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ prostor těch funkcí z $\mathcal{L}^p(\Omega)$, jejichž všechny distributivní parciální derivace 1-řádu leží v $\mathcal{L}^p(\Omega)$.

Není třeba zvláště zdůrazňovat, že bychom měli opět spíše mluvit o Sobolevově prostoru $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$, jehož prvky jsou třídy navzájem ekvivalentních funkcí z prostoru $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$.

Uvažujeme-li jednodimenzionální případ a omezený interval (a, b), leží každá absolutně spojitá funkce u na $[a, b]$ v prostoru $\mathcal{W}^{1,1}((a, b))$. Její derivace u', která existuje skoro všude na (a, b) a je tam integrovatelná, je slabou derivací funkce u. Naopak, prvky prostoru $\mathbf{W}^{1,1}((a, b))$ mají také pěkné reprezentanty. Je-li totiž $f \in \mathcal{W}^{1,1}((a, b))$, existuje absolutně spojitá funkce v na $[a, b]$ tak, že $f = v$ skoro všude. Samozřejmě potom v' je slabou derivací funkce f. O tom se lze dočíst v [LM], 32.5.

Situace ve vícedimenzionálním případě je komplikovanější, nicméně i zde, pokud $p > n$, lze funkce z $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ identifikovat se spojitými funkcemi: Je-li $f \in \mathbf{W}^{1,p}(\mathbf{R}^n)$, kde $p > n$, existuje spojitý reprezentant funkce f, tedy taková funkce $u \in \mathcal{C}(\Omega)$, že $f = u$ skoro všude.

Pokud $1 \le p < \infty$, definujeme „normu“ funkce $f \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ jakožto

$$\|f\|_{1,p} = \left(\int_\Omega (|f|^p + |\nabla f|^p) \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Dále položíme

$$\|f\|_{1,\infty} = \max\left(\|f\|_\infty, \|\nabla f\|_\infty\right)$$

pro $f \in \mathcal{W}^{1,\infty}(\Omega)$.

Sobolevovy prostory $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ jsou Banachovými prostory. Není obtížné ověřit, že $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ tvoří vektorový prostor a $\|.\|_{1,p}$ je norma na něm. K důkazu úplnosti předpokládejme, že $\{f_k\}$ je cauchyovská posloupnost ve $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$. Potom $\{f_k\}$ a $\{D^i f_k\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ jsou cauchyovské posloupnosti v prostoru $L^p(\Omega)$. Existují tedy $f, g^1, \ldots, g^n \in L^p(\Omega)$ tak, že $f_k \to f$ a $D^i f_k \to g^i$

v $L^p(\Omega)$. Ukážeme-li, že $(g^1,\dots,g^n)$ je slabá derivace f, bude $f\in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ a $f_k\to f$ ve $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$. Volme tedy $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$ a $i\in\{1,\dots,n\}$. Označíme-li ještě Lim limitu v prostoru $L^p(\Omega)$, máme

$$\int_\Omega \varphi\, D^i f = \int_\Omega \varphi \operatorname{Lim} D^i f_k = \lim \int_\Omega \varphi\, D^i f_k = -\lim\int_\Omega f_k \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \\ = -\int_\Omega \operatorname{Lim} f_k \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega f\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$$

(zde jsme použili Hölderovu nerovnost k odůvodnění limitních přechodů: pokud $h_n\in L^p(\Omega)$ a $h_n\to h$ v $L^p(\Omega)$, potom $\int h_n\,\varphi\to\int h\,\varphi$ pro každé $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$).

Důkaz úplnosti pro $p=\infty$ je ještě jednodušší.

(h) `Prostor Radonových měr.` Pro osvěžení proveďme krátkou úvodní exkurzi do problematiky Radonových měr. Pokud čtenáře zajímají detaily, lze je nalézt například v [LM].

Nechť K je kompaktní prostor. *Radonovou mírou* na K rozumíme každou konečnou nezápornou σ-aditivní množinovou funkci μ, která je definovaná na systému všech borelovských podmnožin prostoru K a má následující vlastnosti:

(a) $\mu B=\inf\{\mu G : G\supset B, G \text{ otevřená}\}$ pro každou borelovskou množinu $B\subset K$,
(b) $\mu G=\sup\{\mu T : T\subset G, T \text{ kompaktní}\}$ pro každou otevřenou množinu $G\subset K$.

Znaménkovou mírou na K rozumíme reálnou σ-aditivní množinovou funkci definovanou na σ-algebře všech borelovských podmnožin K, pro niž $\mu\emptyset=0$. Každou znaménkovou míru μ lze pak psát jako rozdíl dvou nezáporných měr $\mu=\mu^+-\mu^-$, kde

$$\mu^+(S):=\sup\{\mu B : B\subset S, B \text{ borelovská }\}\quad \text{a}\quad \mu^-(S):=\sup\{-\mu B : B\subset S, B \text{ borelovská }\}$$

pro každou borelovskou množinu $S\subset K$. Položíme-li ještě $|\mu|:=\mu^++\mu^-$, je $|\mu|$ nezáporná míra nazývaná též *totální variací* míry μ.

Lze ukázat, že

$$|\mu|(S)=\sup\Big\{\sum_{k=1}^n|\mu B_k| : B_k \text{ borelovská},\ \bigcup_{k=1}^n B_k=B, B_i\cap B_j=\emptyset \text{ pro } i\neq j\Big\}$$

pro každou $S\subset K$ borelovskou.

Je-li konečně μ *komplexní míra*, tedy komplexní σ-aditivní míra definovaná na borelovských podmnožinách K anulující se na prázdné množině, můžeme definovat i její totální variaci pomocí právě uvedené rovnosti.

Řekneme pak, že znaménková míra μ je *Radonova*, pokud (nezáporné) míry μ^+ i μ^- jsou Radonovy. *Komplexní Radonovou mírou* pak rozumíme takovou míru, jejíž reálná a imaginární část jsou Radonovy míry.

Komplexní (či konečná znaménková) míra μ definována na σ-algebře všech borelovských podmnožin K je Radonova, právě když její totální variace $|\mu|$ je Radonova, a to je, právě když

$$|\mu|(B)=\sup\{|\mu|K : K \text{ je kompaktní podmnožina } B\}$$

pro každou borelovskou množinu $B\subset K$.

Prostor $\mathcal{M}(K)$ všech (ať již reálných či komplexních) Radonových měr na K s přirozeně definovaným sčítáním a násobením skalárem a opatřený normou $\|\mu\|:=|\mu|(K)$ tvoří Banachův prostor.

1.11. Prostor se skalárním součinem. *Prostorem se skalárním součinem* rozumíme každý vektorový prostor H (nad $\mathbf{R}$ či $\mathbf{C}$), v němž pro každé dva prvky x,y je definován *skalární součin* (x,y) jakožto prvek $\mathbf{R}$ či $\mathbf{C}$ splňující požadavky

(a) $(x,x)\ge 0$, přičemž $(x,x)=0$, právě když $x=0$,
(b) $(x,y)=\overline{(y,x)}$,
(c) $(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$, $(x,\lambda y)=\overline{\lambda}(x,y)$ a $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$.

Položíme-li nyní $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$ pro $x \in H$, má zobrazení $x \mapsto \|x\|$ všechny vlastnosti normy. To jistě dokážete sami. Žádnou potíž nečiní ukázat, že $\|x\| = 0$, právě když $x = 0$ a že $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$. Pokud jde o trojúhelníkovou nerovnost, po elementárním roznásobením máme

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + (x,y) + (y,x) + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x,y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|(x,y)| + \|y\|^2 .$$

A k dokončení důkazu již jen stačí použít následující základní nerovnost.

1.12. Schwarzova nerovnost. *Pro libovolné prvky x, y prostoru se skalárním součinem H platí nerovnost*

$$|(x,y)| \leq \|x\|\,\|y\| .$$

Důkaz. Ježto pro libovolné λ platí

$$0 \leq (x - \lambda y, x - \lambda y) = \|x\|^2 - 2\lambda(x,y) + \lambda^2 \|y\|^2 ,$$

musí být diskriminant této kvadratické formy nekladný.

Tak mohl probíhat důkaz, pokud H byl prostor nad reálnými čísly. Pokud by H byl komplexní prostor, musíme důkaz trochu upravit. V tom případě totiž

$$0 \leq (x - \lambda y, x - \lambda y) = \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}(x, \lambda y) + |\lambda|^2 \|y\|^2 .$$

Stačí tedy, v případě $(x,y) \neq 0$, volit ještě $t \in \mathbf{C}$ tak, aby $|t| = 1$ a $|(x,y)| = (x, ty)$. Potom opět dostáváme pro $\lambda \in \mathbf{R}$

$$0 \leq \|x - t\lambda y\|^2 = \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}(x, t\lambda y) + \lambda^2 \|y\|^2 = \|x\|^2 - 2\lambda|(x,y)| + \lambda^2 \|y\|^2$$

a důkaz dokončíme stejně jako v reálném případě. ■

1.13. Hilbertův prostor. *Hilbertův prostor* je každý prostor se skalárním součinem, který je v zavedené normě $x \mapsto \sqrt{(x,x)}$ úplný.

1.14. Poznámka. Lze říci (ekvivalentně), že Hilbertův prostor tvoří každý Banachův prostor nad $\mathbf{R}$ či $\mathbf{C}$, kde příslušná norma splňuje pro každou dvojici x, y *rovnoběžníkové pravidlo*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) .$$

Není těžké si rozmyslet, že v každém prostoru se skalárním součinem platí rovnoběžníkové pravidlo. Naopak, platí-li v Banachově či normovaném lineárním prostoru pro jeho normu rovnoběžníkové pravidlo, je norma již odvozena ze skalárního součinu. V reálném případě stačí položit

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) ,$$

pokud jde o prostory nad komplexními čísly, je vzoreček poněkud složitější

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2) .$$

1.15. Příklady. (a) Vrátíme-li se k příkladům Banachových prostorů z 1.10, tak $\mathbf{R}^n$ či $\mathbf{C}^n$ s eukleidovskou normou tvoří Hilbertův prostor. Zde tedy skalární součin dvou prvků $x = (x_1, \ldots, x_n)$ a $y = (y_1, \ldots, y_n)$ je definován jako

$$(x,y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

v reálném případě, a jako

$$(x,y) = x_1 \overline{y_1} + \cdots + x_n \overline{y_n} ,$$

pokud uvažujeme prostor $\mathbf{C}^n$.

(b) Podíváme-li se na prostory L^p, tak pouze pro $p = 2$ jsou Hilbertovy. Samozřejmě skalární součin dvou funkcí $f, g \in \mathcal{L}^2$ je

$$(f,g) = \int_X f\,\overline{g}\,d\mu .$$

Speciálně, prostor posloupností l^2 je Hilbertův prostor.

(c) Prostor $l^2(\Gamma)$, kde Γ je libovolná množina, je Hilbertův prostor všech reálných funkcí f na Γ, které jsou nenulové pouze na spočetné množině a pro něž $\sum_{\gamma\in\Gamma} |f(\gamma)|^2 < \infty$ opatřený skalárním součinem $(f,g) := \sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma)g(\gamma)$ (toto je samozřejmě speciální případ předchozího příkladu pro aritmetickou míru μ na Γ).

Čtenáře možná překvapilo, že sčítáme řady, které mohou mít třeba i nespočetně mnoho sčítanců. Proto stručně připomeňme definici. Je-li Γ libovolná (indexová) množina a f reálná funkce na Γ, definujeme

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma) = \sup\{\sum_{\gamma\in F} f(\gamma) : F \subset \Gamma \text{ je konečná množina}\},$$

pokud funkce f je nezáporná.

Není těžké si rozmyslet, že $\{\gamma\in\Gamma : f(\gamma)\neq 0\}$ je spočetná, jestliže $\sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma) < \infty$.

Obecně pak položíme

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma) := \sum_{\gamma\in\Gamma} f^+(\gamma) - \sum_{\gamma\in\Gamma} f^-(\gamma)\,,$$

má-li rozdíl vpravo smysl.

V případě, že $\Gamma = \mathbf{N}$ je množina přirozených čísel, máme definovány dva součty: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ jako limitu posloupnosti částečných součtů, a právě definovaný součet $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}} f(n)$. Dobře si uvědomte, jaký je mezi oběma symboly rozdíl. K tomu se postačí zamyslet nad příkladem součtů $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ a $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}} \frac{(-1)^n}{n}$. Vlastně můžete též porovnat s 1.31.

(d) Nechť H je množina všech reálných absolutně spojitých funkcí f na $[0,1]$ takových, že $f(0)=0$ a $f'\in\mathcal{L}^2([0,1])$ (připomeňme, že každá absolutně spojitá funkce na $[0,1]$ má vlastní derivaci skoro všude a tato derivace vždy leží v $\mathcal{L}^1([0,1])$). Položíme-li $(f,g) = \int_0^1 f'\,g'$ pro $f,g\in H$ (s existencí integrálu není problém, přihlédneme-li k Hölderově nerovnosti), je H Hilbertův prostor.

(e) Sobolevův prostor $\mathbf{W}^{1,2}(\Omega)$ je Hilbertův, kde skalární součin je definován jako

$$(f,g) = \int_\Omega (fg + \nabla f\,\nabla g)\,.$$

Porovnejte tento příklad s jednorozměrným případem z (d).

1.16. Ortogonální prvky a množiny. Dva prvky Hilbertova prostoru H nazveme *ortogonální* nebo *kolmé*, jestliže jejich skalární součin je roven 0. Obecněji, dvě podmnožiny P,Q jsou ortogonální, jestliže $(p,q)=0$ pro každou dvojici $p\in P$ a $q\in Q$. Pro dva ortogonální prvky budeme používat symbol $x\perp y$. Význam symbolů $x\perp M$ či $P\perp Q$ je snad zřejmý.

Je-li M podmnožina H, značme její *ortogonální doplněk* symbolem $M^\perp$. Tedy $M^\perp := \{x\in H : (x,m)=0 \text{ pro každé } m\in M\}$.

Není těžké ukázat, že $M^\perp$ je vždy uzavřený podprostor H. Samozřejmě, $M^\perp$ je lineární podprostor H. Že je uzavřený, plyne z předešlé Schwarzovy nerovnosti (nebo, chceme-li, ze spojitosti skalárního součinu). Jestliže totiž $x_n\to x$ a $h\in H$, potom z odhadu $|(x_n,h)-(x,h)| = |(x_n-x,h)| \le \|x_n-x\|\,\|h\|$ plyne $(x_n,h)\to(x,h)$.

1.17. Existence nejbližšího prvku. *Nechť M je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H. Potom ke každému $x\in H$ existuje právě jedno $m_o\in M$ tak, že $\|x-m_o\| = \operatorname{dist}(x,M)$.*

Důkaz. K důkazu existence. Pokud $x\in M$, stačí volit $m_o=x$. Předpokládejme tedy, že $x\in H\setminus M$. Protože $\operatorname{dist}(0,x-M)=\operatorname{dist}(x,M)$, stačí v množině $C := x-M$ nalézt prvek s nejmenší normou. Označme tedy $\delta := \operatorname{dist}(0,C)$. Jelikož $0\notin C$, je $\delta>0$. Podle definice vzdálenosti existuje posloupnost $y_n\in C$ tak, že $\|y_n\|\to\delta$. Ukážeme-li, že posloupnost $\{y_n\}$ je cauchyovská, bude existovat limita $\lim y_n =: y$ ležící v C, a protože norma je spojitá funkce, bude $\|y\| = \lim\|y_n\| = \delta$.

Důkaz tvrzení, že $\{y_n\}$ je cauchyovská, je vcelku snadný. Stačí použít rovnoběžníkové pravidlo a uvědomit si, že $\frac{1}{2}(y_n+y_k)\in C$, abychom dostali odhad

$$\|y_n-y_k\|^2 = 2(\|y_n\|^2+\|y_k\|^2) - \|y_n+y_k\|^2 \le 2(\|y_n\|^2+\|y_k\|^2) - 4\delta^2\,,$$

který spolu s limitním přechodem dá tvrzení.
Důkaz jednoznačnosti je ještě jednodušší. Jsou-li $y, z \in C$, $\|y\| = \|z\| = \delta$, plyne opět z rovnoběžníkového pravidla, že

$$\|y - z\|^2 \leq 2(\delta^2 + \delta^2) - 4\delta^2 = 0\,.$$

■

Prvek m_o, jehož existenci a jednoznačnost jsme právě dokázali, lze také charakterizovat geometricky. To je obsahem následujícího tvrzení.

1.18. Věta. *Nechť Z je podprostor Hilbertova prostoru H, $x \in H$ a $z_o \in Z$. Potom $\|x - z_o\| = \operatorname{dist}(x, Z)$, právě když $x - z_o \perp Z$.*

Důkaz. Pokud $x - z_o \in Z^\perp$ a $z \in Z$, máme

$$\|x - z\|^2 = \|(x - z_o) + (z_o - z)\|^2 = \|x - z_o\|^2 + \|z_o - z\|^2 \geq \|x - z_o\|^2$$

(zde jsme využili toho, že prvky $x - z_o$ a $z_o - z$ jsou na sebe kolmé), tudíž $\|x - z_o\| = \operatorname{dist}(x, Z)$.

Nechť nyní H je reálný Hilbertův prostor a $\|x - z_o\| = \operatorname{dist}(x, Z)$. Chceme ukázat, že $x - z_o \in Z^\perp$. Volme tedy $z \in Z$. Je-li ε reálné číslo, je

$$\|x - z_o\|^2 \leq \|x - (z_o + \varepsilon z)\|^2 = \|x - z_o\|^2 - 2\varepsilon(x - z_o, z) + \varepsilon^2\|z\|^2\,.$$

Tudíž $2\varepsilon(x - z_o, z) \leq \varepsilon^2\|z\|^2$. Je-li $\varepsilon > 0$, máme $2(x - z_o, z) \leq \varepsilon\|z\|^2$. Protože ε jsme volili zcela libovolně, musí být $(x - z_o, z) \leq 0$. Podobnou úvahou pro $\varepsilon < 0$ dostaneme opačnou nerovnost.

Uvažujeme-li H nad tělesem komplexních čísel, musíme důkaz opět trochu modifikovat. Pokud $(x - z_o, z) = 0$, není co řešit. Jinak ještě navíc zvolíme $t \in \mathbf{C}$ tak, aby $(x - z_o, tz) = -|(x - z_o, z)|$ a $|t| = 1$. Potom opět

$$\|x - z_o\|^2 \leq \|x - (z_o + \varepsilon tz)\|^2 = \|x - z_o\|^2 - 2\varepsilon|(x - z_o, z)| + \varepsilon^2\|z\|^2$$

a důkaz dokončíme jako v případě reálného Hilbertova prostoru.

Jiná idea důkazu. Pro důkaz poslední implikace můžeme použít také následující myšlenku. Předpokládáme, že $\|x - z_o\| = \operatorname{dist}(x, Z)$ a $z \in Z$. Cílem je dokázat, že $(x - z_0, z) = 0$. Můžeme se omezit na případ, kdy $\|z\| = 1$. Je-li α libovolný skalár, máme

$$\|x - z_0\|^2 \leq \|x - (z_0 + \alpha z)\|^2 = \|x - z_0\|^2 - \alpha(z, x - z_0) - \overline{\alpha}(x - z_0, z) + |\alpha|^2\,.$$

Volba $\alpha = (x - z_0, z)$ dá nerovnost $0 \leq -|\alpha|^2$ (vzpomeňte si, že $\alpha\overline{\alpha} = \overline{\alpha}\alpha = |\alpha|^2$), tudíž $(x - z_0, z) = 0$. ■

1.19. Promítání na uzavřené podprostory v Hilbertově prostoru. Nechť M je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H. Pro každé $x \in H$ označme Px takový prvek z M, pro nějž $\|x - Px\| = \operatorname{dist}(x, M)$. Jeho existence i jednoznačnost je zaručena předchozí větou 1.17. Zobrazení $P : x \mapsto Px$ nazýváme *projekcí* H na M. Jeho základní vlastnosti shrnuje následující věta.

1.20. Věta. *Buď $M \subset\subset H$ uzavřený podprostor, P projekce H na M a $\ker P := \{x \in H : Px = 0\}$. Potom P je lineární zobrazení, $P(Px) = Px$ a $\|Px\| \leq \|x\|$ pro každé $x \in H$, $P(H) = M$ a $\ker P = M^\perp$.*

Důkaz. Pro důkaz linearity použijeme charakteristiku z věty 1.18 a jednoznačnost nejbližšího prvku. Jsou-li totiž $x, y \in H$ a $m \in M$, máme

$$(x + y - (Px + Py), m) = (x - Px, m) + (y - Py, m) = 0\,,$$

čili $P(x + y) = Px + Py$. Obdobnou úvahu můžeme provést pro násobek.

Buď $x \in H$. Evidentně $P(Px) = Px$ (uvědomte si, že vždy $Px \in M$ a P je identita na M). Protože $x = (x - Px) + Px$ a $Px \perp x - Px$, je $\|x\|^2 = \|x - Px\|^2 + \|Px\|^2 \geq \|Px\|^2$.

Samozřejmě oborem hodnot projekce P je M. Je-li $Px = 0$, je $x = x - Px \in M^\perp$. Naopak, je-li $x \in M^\perp$, je $x - 0 \perp M$, tudíž podle věty 1.18 musí být $Px = 0$. ■

1.21. Důsledek. *Projekce Hilbertova prostoru H na jeho uzavřený podprostor je spojité zobrazení.*

Důkaz. Podle předchozí věty využitím linearity P dostáváme $\|Px-Py\| = \|P(x-y)\| \le \|x-y\|$. ■

1.22. Poznámka. Projekce Hilbertova prostoru H na jeho uzavřený podprostor je tedy neexpanzivní zobrazení. Abychom nemuseli pátrat, zobrazení f je *neexpanzivní*, jestliže $\|f(x)-f(y)\| \le \|x-y\|$ pro všechna $x, y \in H$.

1.23. Algebraický součet a doplněk. Řekneme, že vektorový prostor W je *algebraickým součtem* podprostorů A, B, což zapisujeme $W = A \oplus B$, jestliže

$$A \cap B = \{0\} \quad \text{a} \quad W = A + B\,,$$

přičemž součtem $A + B$ rozumíme množinu $\{a+b : a \in A\,, b \in B\}$.

Tudíž, každý prvek $w \in W$ lze napsat jednoznačně (!) jako součet $w_A + w_B$, kde $w_A \in A$ a $w_B \in B$.

Je-li tedy $W = A \oplus B$, lze definovat *projekce* P_A a P_B předpisem

$$P_A(w) = w_A\,, \quad P_B(w) = w_B\,, \quad \text{pokud} \quad w = w_A + w_B\,, w_A \in A\,, w_B \in B\,.$$

Zdůrazněme, že projekce P_A závisí jak na podprostoru A, tak i na B.

Je-li A libovolný podprostor vektorového prostoru W, existuje vždy podprostor A^d tak, že $W = A \oplus A^d$ (stačí uvažovat Hamelovu bázi A a doplnit ji na bázi W). Každý podprostor B splňující $W = A \oplus B$ (ten není určen jednoznačně) nazýváme *algebraickým doplňkem* A ve W.

Poznamenejme ještě, že všechny algebraické doplňky daného podprostoru $A \subset\subset W$ jsou izomorfní (a jsou izomorfní faktorprostoru W/A) a jejich dimenze se nazývá *kodimenzí* A ve W.

Má-li nyní prostor $W = A \oplus B$ navíc topologickou strukturu, můžeme se ptát, zda příslušné projekce jsou spojité. To nás vede k následující definici.

1.24. Topologický součet a doplněk. Řekneme, že normovaný lineární prostor E je *topologickým součtem* podprostorů M a N, píšeme symbolicky $E = M \oplus_t N$, jestliže $E = M \oplus N$ a projekce P_M a P_N jsou spojité.

Není těžké si rozmyslet, že projekce P_M je spojitá, právě když P_N je spojitá; lze tedy v definici požadovat spojitost pouze jedné z projekcí.

Je-li $E = M \oplus_t N$, jsou podprostory M i N uzavřené (uvědomte si, že $M = P_N^{-1}(0)$). Naopak, je-li Banachův prostor E algebraickým součtem M a N a oba podprostory M a N jsou uzavřené, je $E = M \oplus_t N$ (to vyplyne snadno z věty o uzavřeném grafu, viz 4.20). Lze tedy říci, že Banachův prostor je topologickým součtem M a N, právě když je jejich algebraickým součtem a M i N jsou uzavřené.

Nechť nyní M je uzavřený podprostor Banachova prostoru X. Ptáme se, zda existuje podprostor M^d tak, aby $X = M \oplus_t M^d$. Každý takový prostor pak nazveme *topologickým doplňkem* M v X. Na rozdíl od algebraického výsledku je nyní odpověď obecně záporná. Kupříkladu c_0 je uzavřený podprostor l^∞, který nemá žádný topologický doplněk (viz *2.6.e). Ve větě 2.27 ukážeme, že každý konečně dimenzionální podprostor má topologický doplněk. Rovněž v Hilbertových prostorech má každý uzavřený podprostor topologický doplněk. To dokážeme v následující větě.

Poznamenejme pouze, že Hilbertovy prostory jsou touto vlastností dokonce charakterizovány: Má-li každý uzavřený podprostor Banachova prostoru X topologický doplněk, je již X izomorfní s Hilbertovým prostorem (porovnej s *1.15).

1.25. Věta. *Je-li M uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H, potom $H = M \oplus_t M^\perp$. Speciálně, pokud navíc $M \neq H$, potom $M^\perp \neq \{0\}$.*

Důkaz. Zřejmě $M \cap M^\perp = \{0\}$, volme tedy $x \in H$. Máme $x = Px + (x - Px)$, kde P je projekce H na M. Protože $Px \in M$ a $x - Px \in M^\perp$ podle 1.18, dostáváme, že H je algebraickým součtem M a $M^\perp$. Důsledek 1.21 nám pak zaručuje, že projekce $P : H \to M$ je spojitá. ■

Poznámka. Protože podprostory M i $M^{\perp}$ jsou uzavřené a H je jejich algebraickým součtem, plyne z důsledku 4.20 věty o uzavřeném grafu, že H je jejich topologickým součtem. To jen na okraj.

1.26. Promítání na konvexní množiny. Připomeňme, že *konvexní množiny* ve vektorových prostorech jsou ty, které s každými dvěma body obsahují i úsečku je spojující. Mírným zobecněním věty 1.17 dojdeme k následujícímu tvrzení.

Věta. *Je-li C uzavřená konvexní podmnožina Hilbertova prostoru H a $x \in H$, existuje právě jedno $y_0 \in C$ tak, že $\|x - y_0\| = \operatorname{dist}(x, C)$.*

Důkaz. Důkaz tvrzení probíhá skoro stejně jako důkaz uvedené věty 1.17. Tam jsme využili z vlastností podprostoru M pouze to, že $\frac{1}{2}(y_n + y_k) \in M$, pokud $y_n, y_k \in M$. ■

Můžeme tedy každému prvku $x \in H$ přiřadit jednoznačným způsobem nejbližší prvek z C, označme ho $P_C(x)$. Je-li C dokonce uzavřený podprostor H, splývá právě definované P_C s projekcí na C, jak jsme ji definovali dříve. Projekce na C nemusí být lineární, ale je vždy spojitá. O některých jejích vlastnostech se lze dočíst v *2.3.

1.27. Promítání v Banachových prostorech. Uvažujme nyní c_0 jako uzavřený podprostor Banachova prostoru c a prvek $x = (\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots) \in c$. Není těžké ukázat, že $\operatorname{dist}(x, c_0) = 1$, a že neexistuje jednoznačně určený prvek $y_0 \in c_0$ tak, aby $\operatorname{dist}(x, c_0) = \|x - y_0\|$ (za y_0 lze třeba vzít $(0, 0, \dots)$ či $(\frac{2}{3}, 0, 0, \dots)$).

Není tedy nikde zaručeno, že by k danému prvku nemohlo v dané uzavřené konvexní množině existovat více nejbližších prvků.

Rovněž s existencí jsou problémy. Uvažujme opět prostor c_0, jeho uzavřený podprostor $M := \{\{z_n\} \in c_0 : \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{2^n} = 0\}$ a $x = \{\frac{1}{2^n}\} \in c_0$. Potom $\operatorname{dist}(x, M) = \frac{1}{3}$, zatímco $\|x - z\| > \frac{1}{3}$ pro každé $z \in M$.

Vidíme tedy, že v Banachových prostorech nelze obecně promítat na uzavřené konvexní množiny. Později vydělíme jistou třídu Banachových prostorů, budeme je nazývat uniformně konvexními, kde lze již na uzavřené konvexní množiny promítat. O tom vypovídá věta 21.15. Jednoznačnost promítání pak zaručí striktní konvexita daného prostoru.

1.28. Ortonormální soustavy a báze. *Ortonormální soustavou* v Hilbertově prostoru rozumíme takovou podmnožinu jeho prvků, z nichž každé dva různé jsou ortogonální a každý z nichž má normu rovnou 1.

Podotkněme, že každá konečná podmnožina prvků libovolné ortonormální soustavy je lineárně nezávislá (důkaz je lehounkým cvičením). Tedy každá ortonormální soustava je lineárně nezávislá.

Ortonormální báze Hilbertova prostoru je každá maximální ortonormální soustava (tedy taková ortonormální soustava, k níž již nelze přidat žádný jiný prvek tak, aby stále ještě zůstávala ortonormální soustavou).

1.29. Věta. *V každém Hilbertově prostoru existuje ortonormální báze.*

Důkaz. Mlčky předpokládáme, že H je netriviální prostor. Existuje tedy v H nějaká ortonormální soustava (kupříkladu $\{\frac{x}{\|x\|}\}$, kde x je nenulový prvek prostoru H, je určitě ortonormální soustava). Z Zornova lemmatu lehce vyplyne, že každá ortonormální soustava je obsažena v nějaké ortonormální bázi. Vskutku, nechť $\mathcal{M}$ je množina všech ortonormálních soustav daného Hilbertova prostoru H obsahující danou ortonormální soustavu, která je uspořádána inkluzí. Je-li $\mathcal{R}$ řetězec v $\mathcal{M}$, potom sjednocení všech ortonormálních soustav z $\mathcal{R}$ je horní závorou $\mathcal{R}$. Podle Zornova lemmatu v C.5 má množina $\mathcal{M}$ maximální prvek. Označme ho $\mathcal{F}$. Zbývá ukázat, že $\mathcal{F}$ je ortonormální bází H. Ale to je samozřejmé přímo z definice. ■

1.30. Poznámky. (a) Důkaz existence ortonormální báze založený na Zornově lemmatu je nekonstruktivní. Je-li H separabilní Hilbertův prostor, lze jeho (spočetnou) ortonormální bázi získat *Gram-Schmidtovým ortogonalizačním procesem*. Uveďme detaily.

Nechť tedy $\{x_n\}$ je spočetná hustá podmnožina H. Postupným vyškrtáváním jednotlivých prvků z ní můžeme vybrat podposloupnost $\{z_n\}$ lineárně nezávislých prvků tak, že lineární obaly obou posloupností splývají. Pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu, který vzápětí popíšeme, získáme z posloupnosti $\{z_n\}$ ortonormální posloupnost $\{e_n\}$ s vlastností, že opět lineární obaly $\{e_n\}$ a $\{z_n\}$ splývají. Lze postupovat následovně. Položíme

$e_1 := \frac{z_1}{\|z_1\|}$. Jsou-li $e_1, \dots, e_n$ již sestrojeny tak, že tvoří ortonormální soustavu a lineární obaly $\{z_1, \dots, z_n\}$ a $\{e_1, \dots, e_n\}$ se shodují, položíme nejdříve

$$z_{n+1}^* := z_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} (z_{n+1}, e_j) e_j \,.$$

Potom prvek z_{n+1}^* je kolmý na $\{e_1, \dots, e_n\}$. Také nemůže být $z_{n+1}^* = 0$. Stačí nyní položit $e_{n+1} := \frac{z_{n+1}^*}{\|z_{n+1}^*\|}$. Podle (iii) ve větě 1.34 již lehko odvodíme, že $\{e_n\}$ je ortonormální bází H

(c) Nepleťte pojem ortonormální báze Hilbertova prostoru s pojmem *algebraické* neboli *Hamelovy báze* vektorového prostoru (viz A.1). Ortonormální báze nekonečně dimenzionálního Hilbertova prostoru nikdy nemůže být jeho Hamelovou bází (viz *1.13.b).

Než přejdeme k dalšímu výkladu, potřebujeme něco vědět o součtech prvků v Banachových prostorech. Čtenář zajímající se pouze o separabilní Hilbertovy prostory může následující odstavec vynechat.

1.31. Nekonečné součty v Banachových prostorech. Mějme množinu prvků $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ v normovaném lineárním prostoru E. Jak definovat součet $\sum\{x_\alpha : \alpha \in A\}$, což budeme značit také jako $\sum_{\alpha \in A} x_\alpha$, třeba i v případě, kdy A je dokonce nespočetná množina?

Označme symbolem $\mathcal{F}$ kolekci všech konečných podmnožin množiny A a pro $F \in \mathcal{F}$ položme $x_F = \sum\{x_\alpha : \alpha \in F\}$. Protože se jedná o konečný součet, je x_F dobře definovaný prvek prostoru E. Řekneme, že $\sum_{\alpha \in A} x_\alpha$ *konverguje* k prvku $x \in E$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ lze nalézt konečnou množinu $F_0 \in \mathcal{F}$ tak, že

$$\|x - x_F\| < \varepsilon \quad \text{pro každou množinu} \quad F \in \mathcal{F}\,,\ F \supset F_0 \,.$$

Pokud víme něco o zobecněných posloupnostech (viz Appendix C.6), potom $\sum_{\alpha \in A} x_\alpha$ konverguje k x, jestliže zobecněná posloupnost $\{x_F : F \in \mathcal{F}\}$, kde $\mathcal{F}$ uspořádáme inkluzí, konverguje k x.

Speciální pozornost je třeba věnovat případu, kdy za E vezmeme $\mathbf{R}$ či $\mathbf{C}$. Pokud x_α jsou nezáporná reálná čísla, je

$$\sum_{\alpha \in A} x_\alpha = \sup\Big\{ \sum_{\alpha \in F} x_\alpha : F \in \mathcal{F} \Big\}$$

a $\sum_{\alpha \in A} x_\alpha$ konverguje podle naší definice, je-li uvedené supremum konečné. O tom se lehko přesvědčíme. Jsou-li všechna x_α reálná, potom $\sum_{\alpha \in A} x_\alpha$ konverguje, právě když konvergují řady z kladných i záporných částí x_α, přičemž

$$\sum_{\alpha \in A} x_\alpha = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha^+ - \sum_{\alpha \in A} x_\alpha^- \,.$$

V případě komplexních čísel řada $\sum_{\alpha \in A} x_\alpha$ konverguje, konvergují-li její reálné a imaginární části.

Jestliže $A = \mathbf{N}$, jedná se o posloupnost prvků $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, a my máme navíc definován součet $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ jako $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} x_i$. Platí následující:

(a) jestliže $\{x_n\}$ je posloupnost prvků normovaného lineárního prostoru E a $\sum_{n \in \mathbf{N}} x_n$ konverguje k x podle naší definice, potom $x = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} x_i$; opak obecně neplatí,

(b) jestliže x_n jsou prvky úplného prostoru E a $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, potom $\sum_{n \in \mathbf{N}} x_n$ konverguje,

(c) je-li $\{x_n\}$ posloupnost reálných či komplexních čísel, potom $\sum_{n \in \mathbf{N}} x_n$ konverguje podle naší definice, právě když řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje absolutně, a to je právě v případě, kdy řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ konverguje pro každou permutaci π přirozených čísel (bezpodmínečná konvergence).

1.32. Besselova nerovnost. *Je-li $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ortonormální soustava v Hilbertově prostoru H a $x \in H$, je*

$$\sum_{\alpha \in A} |(x, e_\alpha)|^2 \le \|x\|^2 \,.$$

Důkaz. Nechť F je konečná podmnožina A a $x \in H$. Položíme-li $x_F := x - \sum_{\alpha\in F}(x,e_\alpha)e_\alpha$, lehkým výpočtem zjistíme, že x_F je kolmé na všechna e_α pro $\alpha \in F$. Tudíž

$$\sum_{\alpha\in F}|(x,e_\alpha)|^2 \le \sum_{\alpha\in F}|(x,e_\alpha)|^2 + \|x_F\|^2 = \Big\|\sum_{\alpha\in F}(x,e_\alpha)e_\alpha\Big\|^2 + \|x_F\|^2 = \|x\|^2 .$$

Přechodem k supremu získáme kýženou nerovnost. ∎

1.33. Uzavřený lineární obal. Je-li A podmnožina vektorového prostoru W (nad $\mathbf{F}$), definuje se její *lineární obal* $\operatorname{lin} A$ jako průnik všech podprostorů obsahujících A. Není těžké dokázat, že lineární obal A je roven množině $\{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j a_j : \text{kde}\, n \ge 1, \lambda_j \in \mathbf{F}, a_j \in A\}$.

Pokud A je podmnožina normovaného lineárního prostoru E, definujeme její *uzavřený lineární obal* $\overline{\operatorname{lin}}A$ jako průnik všech uzavřených lineárních podprostorů obsahujících A. Je tedy $\overline{\operatorname{lin}}A$ nejmenší uzavřený podprostor E obsahující množinu A. Není těžké dokázat, že $\overline{\operatorname{lin}}A$ je roven uzávěru množiny $\operatorname{lin} A$.

1.34. Věta. *Nechť $E := \{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ je ortonormální soustava prvků v Hilbertově prostoru H. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) *E je báze H,*

(ii) *jedině nulový prvek H je ortogonální ke všem prvkům z E,*

(iii) *uzavřený lineární obal E je roven H,*

(iv) $\|x\|^2 = \sum_{\alpha\in A}|(x,e_\alpha)|^2$ *pro každé $x \in H$,*

(v) $x = \sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha$ *pro každé $x \in H$,*

(vi) $(x,y) = \sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)\overline{(y,e_\alpha)}$ *pro každou dvojici $x, y \in H$.*

Poznámka. Podmínka (v) říká, že prvek x lze rozvést ve *Fourierovu řadu* (v Hilbertově prostoru!), *Parsevalova rovnost* v (iv) pak připomíná Pythagorovu větu.

Důkaz. (i) ⇒ (ii). Jestliže $z \in H$ je nenulový prvek ortogonální k E, potom $E \cup \{\frac{z}{\|z\|}\}$ je ortonormální soustava obsahující E jako vlastní podmnožinu.

(ii) ⇒ (iii). Nechť M je uzavřený lineární obal E. Jestliže $M \ne H$, potom podle věty 1.25 existuje $z \in M^\perp$, $z \ne 0$. Tudíž z je nenulový prvek H kolmý na všechny prvky E, což je ve sporu s předpokladem (ii).

(iii) ⇒ (iv). Volme $x \in H$ a $\varepsilon > 0$. Podle předpokladu existují $e_1, \dots, e_n \in E$ a $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{F}$ tak, že $\left\|x - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i\right\| < \varepsilon$. Nejprve ukážeme, že

$$\Big\|x - \sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i\Big\| \le \Big\|x - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i\Big\|$$

(funkce $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \mapsto \left\|x - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i\right\|$ nabývá svého minima v bodě $((x,e_1),\dots,(x,e_n))$). To je okamžitě vidět z výrazu

$$0 \le \Big\|x - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i\Big\|^2 = \Big(\|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n}|(x,e_i)|^2\Big) + \sum_{i=1}^{n}((x,e_i)-\lambda_i)\overline{((x,e_i)-\lambda_i)}$$

(lze též použít větu 1.18). Odtud dostáváme

$$(\|x\| - \varepsilon)^2 \le \Big\|\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i\Big\|^2 = \sum_{i=1}^{n}|(x,e_i)|^2 \le \sum_{\alpha\in A}|(x,e_\alpha)|^2 .$$

Jelikož ε bylo libovolné, dostáváme jednu nerovnost. Tou druhou je pak Besselova nerovnost.

(iv) $\Rightarrow$ (v). Buď $x \in H$. Stejně jako v důkazu Besselovy nerovnosti 1.32 dostáváme, že množina $\{e_\alpha : (x, e_\alpha) \neq 0\}$ je spočetná, seřaďme ji do posloupnosti $\{e_1, e_2, \dots\}$. Nyní s využitím (iv) dostáváme pro každé n

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |(x, e_i)|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} |(x, e_i)|^2 .$$

Tudíž limitním přechodem máme $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} (x, e_i) e_i = \sum\limits_{\alpha \in A} (x, e_\alpha) e_\alpha$.

(v) $\Rightarrow$ (vi). Především poznamenejme, že skalární součin je spojitou funkcí na $H \times H$, jak ihned plyne ze Schwarzovy nerovnosti. Tím dostaneme důkaz uvedené implikace již snadno.

(vi) $\Rightarrow$ (i). Předpokládejme, že E netvoří ortonormální bázi H. Existuje tedy nenulový prvek $z \in H$ kolmý na E. Potom ovšem použitím (vi) dostáváme $0 \neq \|z\|^2 = \sum_{\alpha \in A} (z, e_\alpha) \overline{(z, e_\alpha)} = 0$. ■

1.35. Věta. *Hilbertův prostor je separabilní, právě když v něm existuje spočetná ortonormální báze.*

Důkaz. Má-li Hilbertův prostor H spočetnou ortonormální bázi, musí být separabilní, neboť všemožné konečné lineární kombinace prvků této báze s racionálními koeficienty jsou husté v H.

Má-li prostor H nespočetnou ortonormální bázi (a nějakou ortonormální bázi mít musí podle věty 1.29), nemůže být separabilní. To proto, že $\|e_n - e_k\| = \sqrt{2}$ pro každé dva různé prvky e_n, e_k této báze. ■

Poznámky. (a) V poznámce 1.30.a jsme pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu konstruktivně vyrobili z libovolné husté spočetné podmnožiny separabilního Hilbertova jeho (spočetnou) ortonormální bázi.

(b) V předchozí větě jsme vlastně dokázali více. Je-li Hilbertův prostor separabilní, je každá jeho ortonormální báze spočetná.

1.36. Příklady ortonormálních soustav a bází. (a) Trigonometrický systém tvořený funkcemi systému $\mathcal{E} := \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx : n \in \mathbf{N} \right\}$ je ortonormální soustavou Hilbertova prostoru $L^2([0, 2\pi])$. Trochu práce dá ukázat pomocí integrace per partes, že libovolné dvě různé funkce z $\mathcal{E}$ jsou na sebe kolmé a že každá z nich má normu 1. Systém $\mathcal{E}$ však dokonce tvoří ortonormální bázi $L^2([0, 2\pi])$. To už je trochu těžší nahlédnout. Podstatnou ingrediencí důkazu je hustota trigonometrických polynomů v prostoru $\mathcal{T} := \{f \in \mathcal{C}([0, 2\pi] : f(0) = f(2\pi)\}$ uvažovaného s max-normou (viz D.4). Tudíž lineární obal $\mathcal{E}$, což je právě množina všech trigonometrických polynomů na $[0, 2\pi]$, je hustý v $\mathcal{T}$. Odtud ale plyne, že $\operatorname{lin} \mathcal{E}$ je hustý v $\mathcal{T}$ v L^2-normě. A protože $\mathcal{T}$ je hustá podmnožina $L^2([0, 2\pi])$, jsme s odůvodněním hotovi.

(b) Soustava funkcí $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} : n \in \mathbf{Z} \right\}$ je ortonormální bází komplexního Hilbertova prostoru $L^2([0, 2\pi])$.

(c) Nechť $e_n := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ jsou „jednotkové“ vektory prostoru l^2. Potom $\mathcal{E} := \{e_n : n = 1, 2, \dots\}$ je ortonormální bází l^2. To nahlédneme snadno. Je-li $x = \{x_n\} \in l^2$ kolmý na všechny prvky $\mathcal{E}$, je nutně $0 = x_1 = x_2 = \dots$.

(d) Uvažujeme-li (neseparabilní) Hilbertův prostor $l^2((0, 1))$, tvoří systém $\{e_t : t \in (0, 1)\}$ jeho ortonormální bázi. Zde e_t znamená charakteristickou funkci jednobodové množiny $\{t\}$.

(e) Jako netriviální příklad uveďme, že soustava Rademacherových funkcí $\{r_n\}$ z *10.5 tvoří ortonormální soustavu prostoru $L^2([0, 1])$, nikoliv však jeho bázi.

1.37. Izomorfní a izometrická zobrazení. Připomeňme, že dva vektorové prostory V, W se nazývají *izomorfní*, jestliže existuje prosté lineární zobrazení V na W. *Lineární zobrazení* je samozřejmě takové, které zachovává vektorové operace (sčítání a násobení skalárem).

Jsou-li $(E_1, \|.\|_1)$ a $(E_2, \|.\|_2)$ normované lineární prostory a f zobrazení E_1 do E_2, řekneme, že f je *izometrie*, jestliže $\|x\|_1 = \|f(x)\|_2$ pro každé $x \in E_1$.

Každé lineární a izometrické zobrazení je prosté.

Normované lineární prostory E_1 a E_2 nazveme *izometricky-izomorfní*, jestliže existuje izomorfní zobrazení E_1 na E_2, které je navíc izometrické (zachovává tedy jak algebraické operace, tak i normy prvků). Pokud E_1 a E_2 jsou dokonce Hilbertovy prostory a f izometricky-izomorfní zobrazení E_1 na E_2, zachovává f i skalární součin. To plyne ze vzorečku v 1.11.

1.38. Riesz-Fischerova věta. Buď nyní $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ortonormální báze H. Z Besselovy nerovnosti lehce plyne, že

$$T : x \mapsto \{(x, e_\alpha)\}_{\alpha\in A}\,,$$

je zobrazení H do $l^2(A)$. Samozřejmě toto zobrazení je lineární (a též omezené). Navíc, protože $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ je ortonormální báze H, Parsevalova rovnost ve větě 1.34.iv říká, že

$$\|x\|_H = \Big(\sum_\alpha |(x, e_\alpha)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \|\{(x, e_\alpha)\}\|_{l^2(A)} = \|Tx\|_{l^2(A)}$$

pro každé $x \in H$. Je tedy zobrazení T lineární a izometrické, speciálně je tedy prosté.

Následující věta říká, že T je dokonce na (a tedy izomorfní).

`Riesz-Fischerova věta.` *Nechť $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ je ortonormální báze Hilbertova prostoru H a nechť $\{a_\alpha\}_{\alpha\in A} \in l^2(A)$. Potom existuje právě jedno $x \in H$ tak, že $(x, e_\alpha) = a_\alpha$ pro každé $\alpha \in A$. Tudíž H je izometricky-izomorfní s $l^2(A)$.*

Speciálně, každý separabilní nekonečně rozměrný Hilbertův prostor je izometricky-izomorfní prostoru l^2.

Důkaz. Definujme zobrazení $T : H \to l^2(A)$ jako výše. Není těžké si uvědomit, že $T(H)$ je hustá podmnožina $l^2(A)$, neboť zajisté obsahuje všechny prvky $f \in l^2(A)$ takové, že až na konečně mnoho $h \in H$ je $f(h) = 0$. Protože však T je izometrie, je $T(H)$ také uzavřená podmnožina $l^2(A)$. Tudíž musí být $T(H) = l^2(A)$. ■

1.39. Elementární cvičení. (a) Nechť $M := \{f \in \mathcal{C}([0,1]) : f(0) = 0\}$. Ukažte, že M je uzavřený podprostor $\mathcal{C}([0,1])$. Dále ukažte, že M má topologický doplněk v $\mathcal{C}([0,1])$.

Návod. Povšimněte si, že $f = (f - f(0)) + f(0)$. ♣

Z předchozího plyne, že faktorprostor $\mathcal{C}([0,1])/M$ je izomorfní s $\mathbf{R}$ a že kodimenze M v $\mathcal{C}([0,1])$ je 1.

(b) Nechť $p \in [1,\infty]$ a $M_p := \Big\{\{x_n\} \in l^p : \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = 0\Big\}$. Zřejmě M_p je vždy podprostor l^p.

(b1) Ukažte, že M_1 je uzavřený v l^1.

(b2) Ukažte, že M_2 není uzavřený podprostor l^2. Dokonce, M_2 je hustý podprostor l^2.

(b3) Také M_∞ není uzavřený podprostor l^∞.

(c) Uvažujme l^1 jako podmnožinu Banachova prostoru l^∞. Ukažte, že uzávěr l^1 je roven c_0.

Návod. Inkluze $c_0 \subset \overline{l^1}$ je skoro zřejmá, souřadnice prvku z c_0 nahradíme od hodně velkého indexu nulami. Opačná inkluze plyne z toho, že konvergence v l^∞ je „stejnoměrná“ (připomeňte si Moore-Osgoodovo lemma o záměně limit). ♣

(d) Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost mající na n-tém místě číslo $1 + \frac{1}{n}$ a jinde samé nuly. Ukažte, že množina $M := \{\{x_n\} : n \in \mathbf{N}\}$ je uzavřená v l^2.

(e) Nechť M je podprostor Hilbertova prostoru H a $x \in H$. Ukažte, že $x \perp M$, právě když $\|x\| \le \|x - m\|$ pro každé $m \in M$.

(f) Nechť $M := \{f \in \mathcal{C}([0,1]) : f(0) = 0\}$, $g = 1$ na $[0,1]$. Ve cvičení (a) jste měli ukázat, že M je uzavřený podprostor $\mathcal{C}([0,1])$. Teď máte nalézt všechny funkce $h \in M$ tak, aby $\|g - h\| = \operatorname{dist}(g, M)$.

(g) Nechť $M := \{f \in \mathcal{L}^2(0,1) : \int_0^1 f = 0\}$, $g(t) = t^2$. Nalezněte $\operatorname{dist}(g, M)$ a prvek $h \in M$ tak, aby $\|g - h\| = \operatorname{dist}(g, M)$.

(h) Nechť $M := \{f \in \mathcal{L}^2(0,1) : f(t) = at + b, a, b \in \mathbf{R}\}$, $g(t) = t^3$. Nalezněte projekci g na M.

(i) Nechť $M_k := \{\{x_n\} \in l^2 : x_1 + x_2 + \cdots + x_k = 0\}$. Nalezněte vzdálenost prvku $y = (1, 0, 0, 0, \dots)$ od M_k a spočtěte $\lim_k \operatorname{dist}(y, M_k)$.

(j) Pro $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ položte

$$\|(x,y)\|_h := \max\Big(|y|, \Big|x + \frac{y}{\sqrt{3}}\Big|, \Big|x - \frac{y}{\sqrt{3}}\Big|\Big)\,.$$

Ukažte, že $\|.\|_h$ je norma a načrtněte tvar jednotkové sféry.

(k) Nechť E je normovaný lineární prostor a $f : x \mapsto \frac{1}{2}\|x\|^2$ pro $x \in E$. Ukažte, že f je konvexní funkce na E, $f(0) = 0$ a $f(\lambda x) = |\lambda|^2 f(x)$ pro každé $x \in E$ a každý skalár λ.

(Funkce f je na E *konvexní*, jestliže $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ pro každou dvojici $x,y\in E$ a každé $\lambda\in[0,1]$.)

(l) Nechť f je konvexní funkce na vektorovém prostoru W splňující podmínku $f(\lambda x)=|\lambda|^2 f(x)$ pro každé $x\in W$ a každý skalár λ. Nechť ještě $f(x)=0$, právě když $x=0$. Potom $f>0$ na $W\setminus\{0\}$ a $\|.\|:x\mapsto\sqrt{2f(x)}$ definuje normu na W.

(m) Nechť $Y:=\Big\{f\in\mathcal{C}([-1,1]):\int\limits_{-1}^{0}f=\int\limits_{0}^{1}f\Big\}$. Ukažte, že Y je uzavřený podprostor $\mathcal{C}([-1,1])$ a neexistuje $F\in\mathcal{C}([-1,1])$ tak, aby $\|F\|=1$ a $\operatorname{dist}(F,Y)=1$.

(n) Nechť $A\subset\mathbf{Z}$ je daná množina a $M:=\big\{f\in\mathcal{L}^2([0,2\pi]):c_n(f)=0 \text{ pro } n\in\mathbf{Z}\setminus A\big\}$ ($c_n(f)$ jsou Fourierovy koeficienty funkce f). Popište $M^\perp$ a ortogonální projekci $\mathcal{L}^2([0,2\pi])$ na M.

(o) Nechť $M:=\{f\in\mathcal{L}^2([0,1]):f \text{ je polynom stupně } \le 2\}$. Najděte ortogonální průmět funkce e^x na M.

(p) Nechť $F\subset\mathbf{R}$ je měřitelná množina a $M:=\{f\in\mathcal{L}^2(\mathbf{R}):f=0 \text{ skoro všude na } \mathbf{R}\setminus F\}$. Najděte $M^\perp$ a popište ortogonální projekci $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ na M.

(q) Je-li C uzavřená konvexní podmnožina reálného Hilbertova prostoru H, $x\in H$ a $x_0\in C$, potom $\|x-x_0\|=\operatorname{dist}(x,C)$, právě když $(x-x_0,c-x_0)\le 0$ pro každé $c\in C$ (použitím kosinové věty si uvědomte, co vlastně uvedená podmínka říká o úhlu vektorů $x-x_0$ a $c-x_0$).

Návod. Jestliže $(x-x_0,c-x_0)\le 0$ pro každé $c\in C$, z odhadu

$$\|x_0-c\|^2=\|(x-x_0)+(x_0-c)\|^2=\|x-x_0\|^2+2(x-x_0,x_0-c)+\|x_0-c\|^2\ge\|x-x_0\|^2$$

plyne $\|x-x_0\|=\operatorname{dist}(x,C)$.

Pokud naopak $\|x-x_0\|=\operatorname{dist}(x,C)$, $c\in C$ a $\lambda\in[0,1]$, potom

$$\|x-x_0\|^2\le\|x-((1-\lambda)x_0+\lambda c)\|^2=\|x-x_0\|^2+2\lambda(x-x_0,x_0-c)+\lambda^2\|x_0-c\|^2\,.$$

Odtud $2(x-x_0,c-x_0)\le\lambda\|x_0-c\|^2$ pro každé $\lambda\in(0,1]$. ♣

Otázka. Lze formulovat obdobné tvrzení i pro případ komplexního Hilbertova prostoru?

(r) Do prostoru $AC([0,\frac{\pi}{2}])$ všech absolutně spojitých funkcí na $[0,\frac{\pi}{2}]$ zaveďme normu

$$\|f\|=\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(xf^2(x)+2|f'(x)|^2\big)\,dx\Big)^{\frac12}.$$

Ověřte, že $\|.\|$ je skutečně norma a $AC([0,\frac{\pi}{2}])$ s ní je Hilbertův prostor. Spočtěte hodnotu skalárného součinu $(x^3,\sin x)$.

(s) Na Banachově prostoru c_0 uvažujte normu $|||\{x_n\}|||:=\sum_n\frac{|x_n|}{2^n}$. Ukažte, že c_0 s novou normou $|||.|||$ není úplný. Může být norma $|||.|||$ ekvivalentní původní normě prostoru c_0?

2. Lineární zobrazení a operátory

V této kapitole začneme vyšetřovat lineární zobrazení mezi normovanými lineárními prostory M a N. Normu v prostoru X budeme též někdy značit symbolem $\|.\|_X$, většinou však bude jasné, v jakém prostoru se pohybujeme a index jednoduše vynecháme. Je-li N pole skalárů $\mathbf{R}$ nebo $\mathbf{C}$, mluvíme často o *funkcionálech* na M. Začněme definicí.

2.1. Omezené množiny a zobrazení. Podmnožina A normovaného lineárního prostoru je *omezená*, má-li konečný *průměr* $\operatorname{diam}A:=\sup\{\|x-y\|:x,y\in A\}$. Lze říci, že množina A je omezená, právě když se vejde do nějaké koule, anebo dokonce do koule se středem v počátku.

Lineární zobrazení L prostoru M do N se nazve *omezené*, zobrazuje-li omezené množiny v M na množiny omezené v N. Není těžké si uvědomit, že zobrazení L je omezené, je-li omezené na jednotkové kouli $B_M:=\{x\in M:\|x\|\le 1\}$. Přesně, existuje-li $K>0$ tak, že $\|Lx\|\le K$ pro všechna $x\in M$, $\|x\|\le 1$.

2.2. Věta. *Nechť L je lineární zobrazení M do N. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) *L je spojité,*

(ii) *L je spojité v 0,*

(iii) *L je omezené .*

Důkaz. Je-li L spojité v 0, jistě existuje $\delta > 0$ tak, že $\|Lx\| \le 1$, pokud $\|x\| \le \delta$. Pro libovolné $z \in B_M$ pak dostáváme $\|Lz\| = \frac{1}{\delta}\|L(\delta z)\| \le \frac{1}{\delta}$.

Nechť $\|Lx\| \le K$ pro $x \in B_M$. Volíme-li $\varepsilon > 0$ a položíme-li $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$, dostáváme pro y splňující $\|x - y\| < \delta$ nerovnost $\|Lx - Ly\| \le \varepsilon$. ■

2.3. Prostory lineárních zobrazení a norma lineárního zobrazení. Je-li L omezené lineární zobrazení mezi normovanými lineárními prostory M a N, definujeme jeho *normu* vztahem

$$\|L\| = \sup\{\|Lx\|_N : \|x\|_M \le 1\}\,.$$

Symbolem $\mathcal{L}(M,N)$ značíme prostor všech omezených lineárních zobrazení M do N, přičemž na něm uvažujeme právě definovanou normu.

V případě, kdy $M = N$, píšeme krátce $\mathcal{L}(M)$ místo $\mathcal{L}(M,M)$. Prostor *operátorů* $\mathcal{L}(M)$ tvoří nejen vektorový prostor, ale s operací *skládání* $L_1 \circ L_2 : x \mapsto L_1(L_2(x))$ dokonce *algebru*. K ní se vrátíme podrobněji v dalších kapitolách.

Je-li N pole skalárů $\mathbf{R}$ či $\mathbf{C}$, píšeme místo $\mathcal{L}(M,N)$ krátce M^*. Prostor M^* nazýváme pak *(topologickým) duálem* prostoru M.

O tom, že se jedná skutečně o prostory a normu, svědčí následující věta.

2.4. Věta. *Buďte M, N normované lineární prostory. Potom $\mathcal{L}(M,N)$ s právě definovanou normou je také normovaný lineární prostor. Je-li N dokonce Banachův, je i prostor $\mathcal{L}(M,N)$ Banachův. Speciálně, každý duál M^* je Banachův prostor.*

Pro $L \in \mathcal{L}(M,N)$ a $x \in M$ platí odhad

$$\|Lx\|_N \le \|L\|\,\|x\|_M\,.$$

Jsou-li M, N, P normované lineární prostory, $L \in \mathcal{L}(M,N)$, $T \in \mathcal{L}(N,P)$, potom je $T \circ L \in \mathcal{L}(M,P)$ a $\|T \circ L\| \le \|T\|\,\|L\|$.

Důkaz. Žádnou potíž nečiní ukázat, že $\mathcal{L}(M,N)$ tvoří vektorový prostor. Z nerovností

$$\|(L+T)(x)\| \le \|Lx\| + \|Tx\| \le \|L\| + \|T\|\,,$$

platných pro každé $\|x\| \le 1$ a $L, T \in \mathcal{L}(M,N)$, plyne okamžitě trojúhelníková nerovnost pro normu lineárních zobrazení. Ostatní vlastnosti normy jsou očividné.

Protože $\frac{x}{\|x\|} \in B_M$ pro každé nenulové $x \in M$, dostáváme pro $L \in \mathcal{L}(M,N)$ nerovnost $|L(\frac{x}{\|x\|})| \le \|L\|$, a tudíž i $\|Lx\| \le \|L\|\,\|x\|$, kterážto nerovnost platí automaticky i pro $x = 0$.

Nechť konečně N je úplný a $\{L_n\}$ je cauchyovská posloupnost v $\mathcal{L}(M,N)$. Z nerovnosti

$$\|L_n x - L_k x\| \le \|L_n - L_k\|\,\|x\|$$

plyne, že posloupnost $\{L_n x\}$ je cauchyovská v N pro každé $x \in M$. Existuje tedy $\lim L_n x$, označme ji Lx. Zbývá ukázat, že $L \in \mathcal{L}(M,N)$ a $L_n \to L$ v normě prostoru $\mathcal{L}(M,N)$. Ale ani to není těžké. Protože

$$L(\lambda x + \mu y) = \lim L_n(\lambda x + \mu y) = \lambda \lim L_n x + \mu \lim L_n y = \lambda Lx + \mu Ly\,,$$

pro každé $x, y \in M$ a libovolné skaláry λ, μ, vidíme že L je lineární. Protože $\big|\,\|L_n\| - \|L_k\|\,\big| \le \|L_n - L_k\|$, je posloupnost $\{\|L_n\|\}$ cauchyovská, a tedy omezená. Existuje $\beta > 0$ tak,že

$$\|L_n x\| \le \|L_n\|\,\|x\| \le \beta\|x\|$$

pro každé $x \in M$. Ze spojitosti normy dostáváme $\|Lx\| \le \beta\|x\|$ pro každé x a vidíme, že L je omezený. Musíme ještě dokázat, že $\|L_n - L\| \to 0$. Volme tedy $\varepsilon > 0$ a $x \in B_M$. Nalezněme p tak, aby $\|L_n - L_k\| < \varepsilon$ pro $n, k \ge p$. Potom ovšem $\|L_n x - L_k x\| \le \|L_n - L_k\|\,\|x\| < \varepsilon$. Odtud plyne, že $\|L_n x - Lx\| < \varepsilon$ (limitní přechod $k \to \infty$) a konečně i $\|L_n - L\| \le \varepsilon$.

Důkaz posledního tvrzení plyne snadno z odhadu $\|T \circ Lx\| = \|T(Lx)\| \le \|T\|\,\|L\|\,\|x\|$. ■

2.5. Tvrzení. *Libovolný lineární funkcionál na normovaném lineárním prostoru konečné dimenze je spojitý. Obecněji, je-li F konečně dimenzionální a E libovolný normovaný lineární prostor, je každý lineární operátor $L : F \to E$ spojitý*

Důkaz. Protože spojitost je topologický pojem (závisí pouze na otevřených množinách), nezáleží na tom, jakou normu si na F zvolíme (podle 1.7 jsou všechny normy na F ekvivalentní). Je-li tedy $\{e_1, \dots, e_n\}$ báze F a $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$, položme $\|x\| := |\lambda_1| + \dots + |\lambda_n|$. Potom při stejném označení máme

$$\|Tx\| = \|\lambda_1 Te_1 + \dots + \lambda_n Te_n\| \le \max\bigl\{\|Te_1\|, \dots, \|Te_n\|\bigr\}\, \|x\| .$$

■

2.6. Poznámky. (a) Uvědomte si, že

$$\|L\| = \sup\{\|Lx\| : \|x\| = 1\} .$$

To proto, že $\|Lx\| \le \frac{1}{\|x\|}\|Lx\| = \|L(\frac{x}{\|x\|})\|$, pokud $0 < \|x\| \le 1$.

(b) Jaká je situace v prostorech konečné dimenze? Nechť tedy M je konečně dimenzionální (Banachův) prostor. Protože každý lineární funkcionál na M je spojitý, protože norma je též spojitá funkce, a protože v těchto prostorech je uzavřená jednotkové koule kompaktní, v definici normy $\|L\|$ se suprema dokonce nabývá. To již nemusí platit v nekonečně dimenzionálních prostorech, viz třeba cvičení 2.55.i. Později ukážeme, že norma každého spojitého lineárního funkcionálu nabývá na uzavřené jednotkové kouli B_M svého maxima, právě když prostor M je reflexivní (viz 16.15).

(c) Platí dokonce i takovéto tvrzení: *Pokud každý lineární funkcionál na M je omezený, je již* $\dim M < \infty$. Jestliže totiž $\dim M = \infty$, vyberme z nějaké Hamelovy báze prostoru M její spočetnou podmnožinu $\{e_1, e_2, \dots\}$, přičemž předpokládejme, že $\|e_n\| = 1$. Definujeme-li T tak, aby $Te_n = n$ a $T = 0$ na zbytku báze, lze T (jednoznačně) rozšířit na lineární zobrazení na celém prostoru M. Tento rozšířený funkcionál není evidentně omezený.

(d) Jak jsme se právě zmínili, norma ne každého spojitého lineárního funkcionálu na Banachově prostoru X musí nabývat svého maxima na uzavřené jednotkové kouli. Je otázkou, kolik takových funkcionálů může být. Bishop-Phelpsova věta v *16.3 říká, že množina těch funkcionálů z X^*, jejichž norma nabývá svého maxima na uzavřené jednotkové kouli, je hustá v prostoru X^*.

(e) Je-li M normovaný lineární prostor, potom normu na jeho duálu M^* nazýváme někdy také *duální normou*.

Uveďme nyní některé příklady na výpočet norem lineárních zobrazení. Další příklady na různé typy lineárních operátorů a funkcionálů lze pak nalézt v 2.49 a 2.55.

2.7. Příklady. (a) Na prostoru $\mathcal{C}([-1,1])$ uvažujme funkcionál

$$Tf := 7f(-1) - 2f(0) + f(\tfrac{1}{2}) .$$

Je-li $\|f\| \le 1$, máme $|Tf| \le |7f(-1) - 2f(0) + f(\frac{1}{2})| \le 10$, odkud $\|T\| \le 10$. Není žádný problém zkonstruovat funkci $g \in \mathcal{C}([0,1])$, jejíž funkční hodnoty leží v intervalu $[-1,1]$ a pro niž $g(-1) = 1$, $g(0) = -1$ a $g(\frac{1}{2}) = 1$. Pro ni je $Tg = 10$. Tudíž $\|T\| = 10$.

(b) Uvažujme další příklad opět v prostoru $\mathcal{C}([-1,1])$, kde definujeme $F : f \mapsto \int_{-1}^{1} \operatorname{sign} x\, f(x)\, dx$ pro $f \in \mathcal{C}([-1,1])$. Protože $|F(f)| \le \int_{-1}^{1} |f| \le \max\{|f(t)| : t \in [-1,1]\} \int_{-1}^{1} 1 = 2\,\|f\|$, je zřejmě $\|F\| \le 2$. Tady se nám asi nepodaří najít funkci $g \in \mathcal{C}([-1,1])$ tak, aby $\|g\| \le 1$ a $F(g) = 2$ (anebo podaří?). Volte tedy $\varepsilon > 0$ a položte $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}x$ pro $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ a $f_\varepsilon(x) = \operatorname{sign} x$ pro ostatní x z intervalu $[-1,1]$. Potom $\|f_\varepsilon\| = 1$ a $|F(f_\varepsilon)| = |2 - \varepsilon|$. Odtud je vidět, že musí být $\|F\| = 2$.

Jak vyjde norma funkcionálu F, uvažujeme-li na prostoru $\mathcal{C}([-1,1])$ integrální normu?

(c) Definujme funkcionál L na prostoru c_0 předpisem $L : \{x_n\} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$. Potom

$$|L\{x_n\}| \le \sup\{|x_n|\} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \|\{x_n\}\| ,$$

tedy $\|L\| \le 1$. Volíme-li však $z_k := (1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots) \in c_0$, je $Lz_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n} \to 1$. Takže $\|L\| = 1$.

2.8. Lineární formy na $\mathbf{R}^n$. Nesmírně důležitou otázkou je umět popsat spojité lineární formy na jednotlivých konkrétních Banachových prostorech. Začněme zprvu s Hilbertovými prostory.

Z algebry si zajisté dobře pamatujete větu, která říká, že (algebraickým) duálem k $\mathbf{R}^n$ je opět $\mathbf{R}^n$. Přesněji — je-li $a \in \mathbf{R}^n$ a definujeme-li $L_a : x \mapsto (x, a)$, je L_a lineární (spojitá) forma na $\mathbf{R}^n$. A obráceně, každá lineární forma je takto dána skalárním součinem: *Je-li L lineární forma na $\mathbf{R}^n$, existuje právě jedno $a \in \mathbf{R}^n$ tak, že $L = L_a$.* Zobrazení $\Psi : L \mapsto a$ je „izomorfním" zobrazením (algebraického) duálu $(\mathbf{R}^n)^\#$ na $\mathbf{R}^n$. Přesněji, ježto Ψ zachovává algebraické operace, je Ψ „algebraickým izomorfizmem".

Mnozí autoři pak prvkům $\mathbf{R}^n$ říkají vektory, zatímco prvky duálu $(\mathbf{R}^n)^\#$ nazývají kovektory. Více je ovšem těch, kteří oba (různé) prostory zcela ztotožňují. Aniž někdy vědí proč.

Je-li nyní H Hilbertův prostor a $a \in H$, je zobrazení $x \mapsto (x, a)$ spojitá lineární forma na H (linearita je zřejmá a omezenost plyne ze Schwarzovy nerovnosti). Následující důležitá věta říká, že každá spojitá lineární forma na H je tohoto tvaru.

2.9. Fréchet-Rieszova věta. *Nechť L je spojitá lineární forma na Hilbertově prostoru H. Potom existuje právě jedno $a \in H$ tak, že $L(x) = (x, a)$ pro každé $x \in H$. Navíc, $\|L\| = \|a\|$.*

Důkaz. V otázce jednoznačnosti není žádný problém. Splňují-li $a, b \in H$ rovnost $(x, a) = (x, b)$ pro každé $x \in H$, potom zřejmě $a = b$ (uvědomte si, že pak $(x, a - b) = 0$ i pro $x = a - b$).

K existenční otázce. Je-li L nulová forma, stačí volit $a = 0$. Jinak jádro $M := \{x \in H : Lx = 0\}$ tvoří uzavřený vlastní (!) podprostor H a podle věty 1.25 existuje $b \in M^\perp$, $\|b\| = 1$. Volme $x \in H$ libovolně. Protože prvek $b\,Lx - x\,Lb$ leží v M, musí být

$$0 = (b\,Lx - x\,Lb, b) = (b\,Lx, b) - (x\,Lb, b) = Lx - (x, b\,\overline{Lb})\,.$$

Vidíme, že prvek $a := b\,\overline{Lb}$ splňuje rovnost $Lx = (x, a)$.

Zřejmě $\|L\| \le \|a\|$. Na druhé straně (pokud L není nulová) prvek $z := \frac{a}{\|a\|}$ leží v jednotkové kouli a $Lz = \|a\|$. ∎

2.10. O různých -izmech. V různých odvětvích matematiky se vyskytují endomorfizmy, homomorfizmy, homeomorfizmy, epimorfizmy, monomorfizmy, izomorfizmy, unimorfizmy, automorfizmy, morfizmy, … . Obecně lze říci, že morfizmy zachovávají strukturu na uvažovaných množinách — algebraické operace, spojitost, uspořádání a podobně.

Je vždy zapotřebí velice pečlivě zvážit, k jaké kategorii prostorů se definice různých morfizmů váží. Zda k vektorovým prostorům, grupám, svazům, okruhům, topologickým prostorům, Hilbertovým či Banachovým prostorům. Z toho pohledu se dívejme i na následující definice. Ostatně, již v 1.17 jsme uvedli první definici.

Začněme s Banachovými prostory. *Izomorfním zobrazením* mezi Banachovými prostory X a Y rozumíme každé prosté, lineární a spojité zobrazení X na Y. Později v 4.14 ukážeme, že každé takové zobrazení má již spojitou inverzi. Lze také říci, že $f : X \to Y$ je izomorfní, pokud f je invertibilní prvek prostoru $\mathcal{L}(X, Y)$. Prostory X a Y pak nazveme *izomorfními*, existuje-li izomorfní zobrazení X na Y.

Izomorfním zobrazením mezi normovanými lineárními prostory M a N rozumíme každé prosté, lineární a spojité zobrazení M na N, pro něž také inverzní zobrazení je spojité.

Někdy se též vyskytuje termín *lineárně homeomorfní* místo izomorfní.

Říká se, že Banachovy prostory X a Y jsou *izometrické*, existuje-li invertibilní zobrazení $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ tak, že $\|f\| = \|f^{-1}\| = 1$. Jinými slovy, existuje-li lineární a izometrické zobrazení X na Y. V této definici je již skryta linearita, izometrii je obecně však možno definovat i v metrických prostorech, kde žádná lineární struktura nemusí být. Podotkněme při této příležitosti, že každá lineární izometrie je již homeomorfizmem (prostým, spojitým zobrazením, pro něž i inverzní zobrazení je spojité), a že podle Mazur-Ulamovy věty *2.16 je dokonce každá (obecná) izometrie již „skoro" lineární. My budeme v dalším používat raději termínu *izometricko-izomorfní* prostory, pokud existuje izomorfní a izometrické zobrazení jednoho na druhý.

Pokud H_1 a H_2 jsou Hilbertovy prostory, měli bychom říkat, že jsou izomorfní, existuje-li lineární zobrazení f prostoru H_1 na H_2, které zachovává skalární součin — $(f(x), f(y)) = (x, y)$ pro $x, y \in H_1$. Každé takové zobrazení je pak automaticky izometrií. (Poznamenejme ještě, že někteří autoři používají místo izomorfizmu též termínu *unitární operátor*. Ten my striktně vyhradíme případu, kdy $H_1 = H_2$.) *Izomorfizmem* mezi Hilbertovými prostory H_1 a H_2 rozumíme každé prosté lineární spojité zobrazení H_1 na H_2. Abychom se však drželi tradice, budeme říkat, že Hilbertovy prostory jsou *izometricky-izomorfní*, existuje-li lineární zobrazení jednoho na druhý, které zachovává skalární součin.

A poslední poznámka: Každé lineární izometrické zobrazení mezi Hilbertovými prostory již zachovává skalární součin.

Někdy se říká, že duál k Hilbertovu prostoru H je „izometricky-izomorfní" s H. Uvědomme si však, a také zapamatujme, že zobrazení $\Phi : L \mapsto a$, které realizuje uvedený „izomorfizmus" a které je popsáno Fréchet-Rieszovou větou, je (v komplexním případě) *sdruženě-lineární*: $\Phi(\lambda L) = \overline{\lambda}\Phi(L)$. Vyslovme toto tvrzení přeci jen jako samostatnou větu.

2.11. Duál k Hilbertovu prostoru. *Buď H Hilbertův prostor. Zobrazení $\Phi : H^* \to H$, které spojité lineární formě L na H přiřadí prvek $a \in H$ takovým způsobem, že $Lx = (x, a)$ pro každé $x \in H$, má následující vlastnosti: Zobrazení Φ je prosté a na, je izometrické, $\Phi(L_1 + L_2) = \Phi(L_1) + \Phi(L_2)$ a $\Phi(\lambda L) = \overline{\lambda}\Phi(L)$. V reálném případě je tedy Φ izometricky-izomorfním zobrazením H^* na H.*

2.12. Poznámka. Je-li H Hilbertův prostor, máme na jeho duálu H^* definovánu normu podle 2.3. Není ale vůbec jasné, je-li H^* s touto normou Hilbertův prostor. Za přispění předchozí věty si zkuste rozmyslet, že norma na H^* splňuje rovnoběžníkové pravidlo a že $(f, g)_{H^*} = \big(\Phi(f), \Phi(g)\big)_H$, kde Φ je zobrazení H^* na H z 2.11.

2.13. Popis duálu. Nyní přikročíme k popisu duálů dalších prostorů. Tím myslíme následující úlohu: Je-li X Banachův prostor, potom jeho duál X^* je izomorfní či izometricky-izomorfní s Banachovým prostorem Z. Jinými slovy, existuje izomorfní a izometrické zobrazení Φ prostoru X^* na prostor Z. Je nutné si uvědomit, že v této úloze nemusí být prostor Z jednoznačně určen, může existovat více (konkrétních) prostorů, s kterými je X^* izometricky-izomorfní (viz 2.14.e).

A ještě velice důležitá poznámka — je dobré si pamatovat, že duál X^* je izometricky-izomorfní nějakému prostoru Z, ale podstatné je, a je to snad i důležitější, také umět dané zobrazení Φ popsat.

2.14. Popis dalších konkrétních duálů. (a) `Duál k` c_0. Nechť $\alpha = \{\alpha_n\} \in l^1$ a L_α je funkcionál na c_0 definovaný předpisem $L_\alpha : \{x_n\} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ pro $x := \{x_n\} \in c_0$. Potom $L_\alpha \in c_0^*$. Linearita L_α je jasná, omezenost plyne z odhadu $|L_\alpha x| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n\right| \le \|x\|_{c_0} \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| = \|x\|_{c_0} \|\alpha\|_{l^1}$.

Odtud též plyne, že $\|L_\alpha\| \le \|\alpha\|$. Položíme-li však $x = (\operatorname{sign}\alpha_1, \dots, \operatorname{sign}\alpha_k, 0, 0, \dots)$, je $x \in c_0$, $\|x\| \le 1$ a $L_\alpha x = |\alpha_1| + \dots + |\alpha_k|$. Tudíž dostáváme, že $\|L_\alpha\| = \|\alpha\|$.

Ukážeme nyní, že každá spojitá lineární forma na c_0 má tvar L_α pro vhodné $\alpha \in l^1$. Buď tedy $L \in c_0^*$. Položme $\alpha_n = Le_n$, kde $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ je prvek c_0 mající cifru 1 na n-tém místě, jinde samé 0. Pro každé k je $u_k := (\operatorname{sign}\alpha_1, \dots, \operatorname{sign}\alpha_k, 0, 0, \dots)$ prvek c_0, $\|u_k\| \le 1$. Tudíž $Lu_k = \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i| \le \|L\|$, a vidíme, že $\alpha := \{\alpha_n\} \in l^1$. Je-li $x = \{x_n\} \in c_0$, je $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$, jak se lehko přesvědčíme. Potom ovšem $Lx = \sum_{n=1}^{\infty} x_n Le_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \alpha_n = L_\alpha x$.

Závěr — zobrazení $\alpha \mapsto L_\alpha$ je izometrické a izomorfní zobrazení l^1 na c_0^*. Prostory c_0^* a l^1 jsou tedy izometricky-izomorfní.

(b) `Duál k` L^p. Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou, $p \in [1, \infty]$ a $q = \frac{p}{p-1}$, pokud $1 < p < \infty$, $q = \infty$ pro $p = 1$ a $q = 1$ v případě $p = \infty$. Pišme zkráceně L^p místo $L^p(X, \mathcal{S}, \mu)$. Je-li $1 < p < \infty$, jsou prostory L^q a $(L^p)^*$ izometricky-izomorfní. Totiž, je-li $g \in \mathcal{L}^q$ a

$$T_g : f \mapsto \int_X f\,\overline{g}\,d\mu \quad \text{pro} \quad f \in \mathcal{L}^p\,,$$

je $T_g \in (L^p)^*$ a $\|T_g\| = \|g\|$. Naopak, každá spojitá lineární forma na L^p má tvar T_g pro vhodnou funkci $g \in \mathcal{L}^q$. Jednoduchý návod k důkazu tohoto tvrzení v případě σ-konečné míry μ využívající

Radon-Nikodýmovu větu lze nalézt v odstavci 13.17 z [LM], jinak lze konsultovat třeba podrobný rozbor v E. Hewitt and K. Stromberg [*1965].

Jaká je situace pro $p = 1$? Je-li $g \in \mathcal{L}^\infty$ a $T_g f = \int_X f\,\overline{g}\,d\mu$, je opět $T_g \in (L^1)^*$ a $\|T_g\| = \|g\|$. V případě, kdy míra μ je příliš „divoká", nemusí být již každá spojitá lineární forma tvaru T_g pro vhodnou funkci $g \in \mathcal{L}^\infty$. Je tomu však v případě, kdy míra μ je σ-konečná. Jestliže tedy μ je σ-konečná míra, jsou prostory L^∞ a $(L^1)^*$ izometricky-izomorfní. Je znám i jiný popis prostoru $(L^1)^*$, dokonce v případě obecných měr, lze jej nalézt v J. Schwartz [1951].

Konečně zbývá vyšetřit duál k L^∞. Zde je situace mnohem komplikovanější, prostor $(L^\infty)^*$ je izometricky-izomorfní prostoru omezených konečně aditivních měr na $\mathcal{S}$, zprostředkující zobrazení je dáno jako integrál vzhledem k těmto mírám. Je tedy třeba nejdříve definovat integrál pro konečně aditivní míry a odvodit větu analogickou k Rieszově větě o reprezentaci. Čtenář opět může nahlédnout do monografie E. Hewitt and K. Stromberg [*1965].

Již jsme řekli, že prostory l^p jsou speciálním případem prostorů $L^p(X, \mathcal{S}, \mu)$ pro aritmetickou míru μ. Tedy $(l^p)^*$ je izometricky-izomorfní prostoru l^q, pokud $1 < p < \infty$ a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Případ $p = 1$ popíšeme explicitně v následujícím odstavci.

(c) `Duál k` l^1. Duál k prostoru l^1 je izometricky-izomorfní prostoru l^∞. Je-li T libovolná spojitá lineární forma na l^1, existuje posloupnost $\{\alpha_n\} \in l^\infty$ tak, že $T(\{x_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ pro každé $\{x_n\} \in l^1$. Navíc $\|T\| = \|\{\alpha_n\}\| = \sup_n |\alpha_n|$.

(d) `Duál k` $\mathcal{C}(K)$. Nechť K je kompaktní topologický prostor. Je-li $\mu \in \mathcal{M}(K)$ (komplexní) Radonova míra, je zobrazení

$$L_\mu : f \mapsto \int_K f\,d\mu\,, \quad f \in \mathcal{C}(K)$$

spojitá lineární forma na $\mathcal{C}(K)$ a $\|L_\mu\| = \|\mu\|$. Rieszova věta o reprezentaci v D.5 pak říká, že ke každému $L \in (\mathcal{C}(K))^*$ existuje právě jedna Radonova míra $\mu \in \mathcal{M}(K)$ tak, že $L = L_\mu$.

(e) `Duál k` $\mathcal{C}([0,1])$. Podle předchozího víme, že duál k prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ lze ztotožnit s prostorem Radonových měr na $[0,1]$. Ukážeme ještě jiný popis duálu $\mathcal{C}([0,1])^*$.

K tomu účelu zavedeme Banachův prostor $NBV([0,1])$ všech normalizovaných funkcí konečné variace na $[0,1]$. Prostor $NBV([0,1])$ je tvořen všemi zprava spojitými funkcemi konečné variace na intervalu $[0,1]$, které se anulují v bodě 0. Norma $\|f\|$ takové funkce je definována jako variace f na $[0,1]$, tedy $\|f\| = \sup\{\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1\}$. $NBV([0,1])$ tvoří Banachův prostor. Je-li $\varphi \in NBV([0,1])$ a

$$L_\varphi : f \mapsto \int_0^1 f\,d\varphi \quad \text{pro} \quad f \in \mathcal{C}([0,1])$$

(jedná se o Riemann-Stieltjesův integrál), je $L_\varphi \in \mathcal{C}([0,1])^*$ a $\|L_\varphi\| = \|\varphi\|$. Jedna z mnoha Rieszových vět říká, že ke každé spojité lineární formě L na $\mathcal{C}([0,1])$ existuje právě jedna funkce $\varphi \in NBV([0,1])$ tak, že $L = L_\varphi$. Jsou tedy prostory $\mathcal{C}([0,1])^*$ a $NBV([0,1])$ izometricky-izomorfní.

Není těžké si rozmyslet, jaký je vztah mezi funkcí φ, která reprezentuje spojitou lineární formu L na $\mathcal{C}([0,1])$ a Radonovou mírou μ, která reprezentuje podle (d) tentýž funkcionál L.

2.15. Konvexní funkcionály a pseudonormy. Nechť p je reálná funkce na vektorovém prostoru W. Řekneme, že p je *konvexní funkcionál*, jestliže

(a) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ pro každé $\lambda \geq 0$ a $x \in W$,
(b) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ pro každé $x, y \in W$.

Pokud dokonce

(c) $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$ pro každé $\lambda \in \mathbf{F}$ a $x \in W$,

nazýváme p *pseudonormou*.

Poznamenejme, že libovolná pseudonorma je nezápornou funkcí. Je-li totiž $x \in W$, je

$$0 = p(0) \leq p(x) + p(-x) = 2p(x)\,.$$

Dostáváme se k jedné z nejdůležitějších vět funkcionální analýzy. Hahn-Banachova věta a její různé varianty tvoří skutečně pilíře, bez kterých bychom mohli těžko budovat nějaké teorie. Jak poznamenal jeden autor, Hahn-Banachovu větu používáme každý den. A v neděli dvakrát.

2.16. Algebraická verze Hahn-Banachovy věty. *Nechť p je konvexní funkcionál na (reálném) vektorovém prostoru W, $M \subset\subset W$ lineární podprostor W a f lineární forma na M, $f \leq p$ na M. Potom existuje lineární forma $F \in W^{\#}$ tak, že $F = f$ na M a $F \leq p$ na W.*

Předpokládáme-li, že p je dokonce pseudonorma, lze volit F tak, aby $|F| \leq p$ všude na W.

Důkaz. Použijeme Zornovo lemma z C.5. Uvažujme tedy množinu $\mathcal{Z}$ všech lineárních forem h definovaných na podprostorech $H_h \supset M$ takových, že $h = f$ na M a $h \leq p$ na H_h. Pro $h, g \in \mathcal{Z}$ definujeme $h \prec g$, pokud $H_h \subset H_g$ a $h = g$ na H_h. Ihned je vidět, že $(\mathcal{Z}, \prec)$ je uspořádaná množina.

Buď nyní $\mathcal{S} \subset \mathcal{Z}$ řetězec. Položme $\tilde{H} = \bigcup\{H_h : h \in \mathcal{S}\}$. Je-li $x \in \tilde{H}$ a $x \in H_h \cap H_g$, kde $h, g \in \mathcal{S}$, je $h(x) = g(x)$ ($\mathcal{S}$ je řetězec!). Existuje tedy lineární forma $\tilde{h}$ na $\tilde{H}$ tak, že $\tilde{h}(x) = h(x)$, pokud $h \in \mathcal{S}$ a $x \in H_h$. Evidentně $\tilde{h} = f$ na M a $\tilde{h} \leq p$ na $\tilde{H}$. Je tedy $\tilde{h}$ horní závorou $\mathcal{S}$.

Podle Zornova lemmatu existuje maximální prvek množiny $\mathcal{Z}$, označme ho F. Ukážeme-li, že $H_F = W$, jsme s důkazem, alespoň v případě konvexního funkcionálu p, hotovi.

Nechť tedy H_F je vlastní podprostor W. Volme $y \in W \setminus H_F$ a položme $H := \{x + \lambda y : x \in H_F, \lambda \in \mathbf{R}\}$. Evidentně H je podprostor W, $H \neq H_F$. Volme dále, zatím libovolně, $c \in \mathbf{R}$ a definujme $h : x + \lambda y \mapsto F(x) + \lambda c$ pro $x + \lambda y \in H$. Definice h je korektní, neboť pokud $x_1 + \lambda_1 y = x_2 + \lambda_2 y$, je $(\lambda_1 - \lambda_2)y = x_2 - x_1 \in H_F$, a tudíž $\lambda_1 = \lambda_2$ a $x_1 = x_2$. Zřejmě h je lineární forma na H, $h = f$ na M, $F \prec h$ a $h \neq F$. Ukážeme-li, že lze volit takové $c \in \mathbf{R}$, aby $h \leq p$ na H, dostaneme spor s maximalitou F.

Hledáme tedy takové c, aby $h(x + \lambda y) = F(x) + \lambda c \leq p(x + \lambda y)$ pro každé $x \in H_F$ a $\lambda \in \mathbf{R}$. K tomu stačí nalézt c tak, aby pro všechna $x \in H_F$ a $\lambda > 0$ platilo

$$F\Big(\frac{x}{\lambda}\Big) - p\Big(\frac{x}{\lambda} - y\Big) \leq c \leq p\Big(\frac{x}{\lambda} + y\Big) - F\Big(\frac{x}{\lambda}\Big).$$

Protože však pro všechna $u, v \in H_F$ platí

$$F(u) + F(v) = F(u + v) \leq p(u + v) \leq p(u - y) + p(v + y),$$

určitě existuje c tak, aby

$$F(u) - p(u - y) \leq c \leq p(v + y) - F(v)$$

pro všechna $u, v \in H_F$.

Je-li p pseudonorma a $x \in W$, máme $-p(x) = -p(-x) \leq -F(-x) = F(x) \leq p(x)$. ■

2.17. Poznámka. Často bývá užitečné použít následující speciální případ algebraické verze Hahn-Banachovy věty: *Je-li p konvexní funkcionál na reálném vektorovém prostoru W, existuje lineární forma $F \in W^{\#}$ tak, že $F \leq p$ na W.* Stačí totiž položit $f = 0$ na $M := \{0\}$ a odkázat na zmíněnou větu.

Je-li p nenulový funkcionál, lze volit i F tak, aby byla nenulová lineární forma. Zajisté. Není co řešit, pokud $p(x) < 0$ v nějakém bodě $x \in W$. Pokud $p(w) \geq 0$ pro všechna $w \in W$ a $p(x) > 0$ pro jisté $x \in W$, položme $M := \{\lambda x : \lambda \in \mathbf{R}\}$ a $f(\lambda x) := \lambda p(x)$ pro $\lambda x \in M$. Je-li $\lambda > 0$, je $f(\lambda x) = \lambda p(x) = p(\lambda x)$. Pokud $\lambda < 0$, je $f(\lambda x) = \lambda p(x) < 0 \leq p(\lambda x)$. Nyní stačít použít Hahn-Banachovu větu. Dostaneme $F \in W^{\#}$, $F \leq p$ na W a $F(x) = p(x) > 0$.

Další z mnoha možných variant Hahn-Banachovy věty jsou uvedeny v *2.9.

2.18. Hahn-Banachova věta. *Nechť f je spojitá lineární forma na podprostoru M reálného normovaného lineárního prostoru E. Potom existuje $F \in E^*$ tak, že $F = f$ na M a $\|F\|_E = \|f\|_M$.*

Důkaz. Položme $p(x) = \|f\|\,\|x\|$. Potom p je pseudonorma na E a $|f(x)| \leq p(x)$ pro $x \in M$. Podle předešlé algebraické verze Hahn-Banachovy věty existuje lineární forma F na E tak, že $F = f$ na M a $|F| \leq p$ na E. Odtud ihned plyne, že F je omezená a $\|F\| \leq \|f\|$. Opačná nerovnost $\|f\| \leq \|F\|$ však plyne přímo z definice normy funkcionálu. ■

2.19. Poznámka. Tvrzení věty 2.16 (samozřejmě pro případ pseudonormy p) a jejího důsledku 2.18 platí také pro normované lineární prostory nad komplexními čísly. Příslušné věty se někdy nazývají *Bohnenblust-Sobczykovy věty*. Naznačme stručně myšlenku důkazu algebraické verze Hahn-Banachovy věty pro komplexní případ. Z ní bude současně dobře vidět i přechod od komplexního případu k reálnému, či naopak.

Především, je-li F lineární forma na komplexním vektorovém prostoru W, $F = f + ig$, jsou f a g reálné lineární formy. Navíc, protože $F(ix) = iF(x)$, musí nutně být $g(x) = -f(ix)$. Naopak, je-li f reálná lineární forma na W a $F(x) = f(x) - if(ix)$, lehko se ověří, že F je komplexní lineární funkcionál na W.

Předpokládejme tedy, že máme dokázánu algebraickou verzi Hahn-Banachovy věty 2.18 pro reálný případ, že p je pseudonorma na vektorovém prostoru W a $f = f_1 + if_2$ lineární funkcionál na podprostoru $M \subset\subset W$, $|f| \le p$ na M. Protože $|f_1| \le |f| \le p$ na M, existuje reálný lineární funkcionál F_1 na W tak, že $f_1 = F_1$ na M a $|F_1| \le p$ všude na W. Položme $F(x) = F_1(x) - iF_1(ix)$ pro $x \in W$. Podle předchozího je $F(x) = f_1(x) - if_1(ix) = f(x)$, pokud $x \in M$. Zbývá ukázat, že $|F| \le p$ na W. Volme tedy $x \in W$. Existuje $t \in [0, 2\pi)$ tak, že $F(x) = |F(x)|\, e^{it}$. Potom (nezapomeňte, že $|F(x)|$ je reálné číslo a $F(z) = F_1(z)$ v případě, že $F(z) \in \mathbf{R}$)

$$|F(x)| = e^{-it}F(x) = F(e^{-it}x) = F_1(e^{-it}x) \le p(e^{-it}x) = |e^{-it}|p(x) = p(x)\,.$$

2.20. Důsledek Hahn-Banachovy věty. *Nechť x_0 je nenulový prvek normovaného lineárního prostoru E. Potom existuje $g \in E^*$ tak, že $\|g\| = 1$ a $g(x_0) = \|x_0\|$.*

Speciálně, jsou-li x, y dva různé body E, existuje $\varphi \in E^*$ tak, že $\varphi(x) \ne \varphi(y)$.

Důkaz. Položme $M := \{\lambda x_0 : \lambda \in \mathbf{F}\}$ a definujme $f(\lambda x_0) = \lambda\,\|x_0\|$ pro $\lambda \in \mathbf{F}$. Potom f je spojitá lineární forma na $M \subset\subset E$ a podle Hahn-Banachovy věty 2.18 (či v komplexním případě podle Bohnenblust-Sobczykovy věty v 2.19) existuje $g \in E^*$ tak, že $g = f$ na M a $\|g\| = \|f\|$. Zřejmě $\|f\| \le 1$. Protože však $\|x_0\| = f(x_0) = |f(x_0)| \le \|f\|\,\|x_0\|$, je $\|f\| = 1$. Dále, $x_0 \in M$, tudíž $g(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|$.

Je-li $x - y \ne 0$, existuje $\varphi \in E^*$ tak, že $\varphi(x - y) = \|x - y\| \ne 0$, odkud ihned plyne dovětek. ■

2.21. Poznámky. (a) Nechť $\mathcal{G}$ je systém funkcí na množině A. Říkáme, že $\mathcal{G}$ *odděluje body* A, jestliže ke každé dvojici $x, y \in A$, $x \ne y$ můžeme najít $g \in \mathcal{G}$ tak, že $g(x) \ne g(y)$. V tomto smyslu tedy prvky E^* oddělují body E.

(b) Důsledek Hahn-Banachovy věty říká, že v každém bodě x_0, který leží na sféře $S := \{x \in E : \|x\| = \|x_0\|\}$, můžeme sestrojit alespoň jednu „tečnou nadrovinu“: Existuje $g \in E^*$ tak, že $\|g\| = 1$ a označíme-li $M := \{x \in E : g(x) \le \|x_0\|\}$, leží celá uzavřená koule $B := \{x \in E : \|x\| \le \|x_0\|\}$ v M (je-li $x \in B$, potom $g(x) \le |g(x)| \le \|g\|\,\|x\| \le \|x_0\|$). Přitom x_0 leží v nadrovině $\{x \in E : g(x) = \|x_0\|\}$. Proto důsledku 2.20 můžeme říkat *věta o tečném funkcionálu* či krátce *věta o tečně*. Nikde není řečeno, že v daném bodě by nemohlo existovat ke sféře S takových „tečen“ více.

2.22. Důsledek Hahn-Banachovy věty. *Nechť M je uzavřený podprostor normovaného lineárního prostoru E a $x \in E \setminus M$. Potom existuje $\varphi \in E^*$ tak, že $\varphi = 0$ na M a $\varphi(x) \ne 0$.*

Poznámka. Vhodným vynásobením funkcionálu φ lze docílit, aby $\varphi(x) = 1$ či aby $\|\varphi\| = 1$.

Důkaz. Lze kopírovat důkaz 2.20 (viz *2.9). Jako cvičení si zkuste promyslet následující argument. Uvažujme kanonické zobrazení $q : E \to E/M$ (viz *1.11). Podle předpokladů $q(m) = 0$ pro $m \in M$ a $q(x) \ne 0$. Užitím předchozího důsledku Hahn-Banachovy věty 2.20 nalezněme $\Phi \in (E/M)^*$ tak, aby $\Phi(q(x)) \ne 0$. Nyní stačí uvažovat funkcionál $\Phi \circ q$. ■

2.23. Geometrické Hahn-Banachovy věty. Existují i další verze vět Hahn-Banachova typu. K nim patří věty udávající podmínky, za kterých dvě množiny lze oddělit nadrovinou. To samozřejmě není vždy možné, důležitou roli v nich hraje konvexita. Než se k těmto větám dostaneme, zopakujme napřed hlavní pojmy této oblasti. Začněme s jednoduchými tvrzeními.

(a) Větička. *Je-li f lineární forma na normovaném lineárním prostoru E, je f spojitá, právě když její jádro* $\ker f := \{x \in E : f(x) = 0\}$ *je množina uzavřená.*

Důkaz. Samozřejmě, jádro $\ker f$ je uzavřenou množinou pro každou spojitou funkci f na E.

Nechť naopak f je lineární forma, jejíž jádro $\ker f$ je uzavřená množina. Chceme ukázat, že f je spojitá. To je zřejmé pokud $f = 0$. Je-li f nenulová, volme $z \in E$, pro něž $f(z) = 1$. Jelikož $\ker f$ je uzavřená množina, existuje $\delta > 0$, tak že pro množinu $U := \{x \in E : \|x\| < \delta\}$ platí $(z + U) \cap \ker f = \emptyset$. Potom ovšem $U \subset \{x \in E : |f(x)| < 1\}$. Kdyby tomu tak nebylo, existovalo by takové $u \in U$, že $|f(u)| \ge 1$. V tom případě však $w := \frac{-u}{f(u)} \in U$, a protože $f(z + w) = 0$, dostali bychom $z + w \in (z + U) \cap \ker f$. Ukázali jsme tedy, že f je omezený funkcionál na jistém okolí 0, což nám již stačí k jeho spojitosti. ■

`(b) Větička.` *Nechť E je normovaný lineární prostor, $f \in E^*$ nenulová lineární forma a $G \subset E$ otevřená množina. Potom množina $f(G)$ je otevřená.*

Důkaz. Nechť $x \in G$. Určitě existuje takové $a \in E$, že $f(a) = 1$. Potom existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $x + ta \in G$, pokud $|t| < \varepsilon$. Tudíž $U\big(f(x), \varepsilon\big) \subset f(G)$. Je-li totiž $y \in U\big(f(x), \varepsilon\big)$ a $t = y - f(x)$, je $|t| < \varepsilon$ a $y = f(x) + t = f(x + ta) \in f(G)$. ∎

V dalším se omezíme pouze na reálné prostory.

`(c) Nadroviny.` *Nadrovinou* ve vektorovém prostoru W rozumíme každou množinu typu $\{w \in W : f(w) = \alpha\}$, kde f je nenulová lineární forma na W a $\alpha \in \mathbf{R}$. Ekvivalentně lze říci, že H je nadrovina ve W, existuje-li $x \in W$ a maximální vlastní podprostor $M \subset\subset W$ tak, že $H = x + M$. Čtenář může konsultovat Appendix A.4.

`(d) Uzavřené nadroviny.` *Uzavřenou nadrovinou* v normovaném lineárním prostoru je každá množina tvaru $x + M$, kde M je maximální uzavřený vlastní podprostor E. Podle předešlého je H uzavřená nadrovina, právě když existuje $f \in E^*$, $f \neq 0$ a $\alpha \in \mathbf{R}$ tak, že $H = \{x \in E : f(x) = \alpha\}$.

`(e) Konvexní množiny.` Podmnožina C vektorového prostoru W se nazývá *konvexní*, jestliže s každými dvěma body obsahuje i úsečku je spojující. Tedy C je konvexní, jestliže $\lambda x + (1 - \lambda) y \in C$, kdykoliv $x, y \in C$ a $\lambda \in [0, 1]$.

Než přikročíme k jedné z mnoha variant geometrické Hahn-Banachovy věty, uveďme následující tvrzení.

`(f) Mazurova věta.` *Nechť C je otevřená konvexní podmnožina normovaného lineárního prostoru E a $z \in E \setminus C$. Potom existuje uzavřená nadrovina $H \subset E$ tak, že $z \in H$ a $H \cap C = \emptyset$.*

Důkaz. Lze předpokládat, že $0 \notin C$ (posunutím bodu x do počátku). Nechť $G := \bigcup \{\lambda C : \lambda > 0\}$ (G je vlastně nejmenší „otevřený kužel“ obsahující C). Není těžké ověřit, že G je opět otevřená množina (uvědome si, že λC je otevřená množina). Položme

$$p(x) := \inf \{\|x + y\| : y \in G\} \quad \text{pro} \quad x \in E\,.$$

Evidentně p je konvexní funkcionál na G. Pro $x \in G$ je $p(x) > 0$. Jinak by totiž existovala posloupnost $\{y_n\} \subset G$ s vlastností $\|x + y_n\| \to 0$. Potom ovšem $-y_n \to x$ a z otevřenosti G by musel existovat index n_0, pro nějž $-y_{n_0} \in G$. To ovšem vede ke sporu, neboť potom by $0 = y_{n_0} + (-y_{n_0}) \in G$.

Podle algebraické verze Hahn-Banachovy věty, přesněji podle poznámky 2.17, existuje nenulová lineární forma $f \in E^{\#}$ tak, že $f \le p$ na E. Nechť $x \in G$. Potom $p(-x) = 0$ (z definice p, neboť $\|(-x) + x\| = 0$), a tudíž $f(-x) \le p(-x) = 0$. Vidíme, že $f \ge 0$ na G. Pokud by náhodou $f(z) = 0$ pro jisté $z \in G$, muselo by být i $f = 0$ na jistém okolí (otevřené) množiny G. A odtud by vyplynulo, že $f = 0$ na E.

Položíme-li $H := \ker f$, je H nadrovina v E, $0 \in H$ a $H \cap G = \emptyset$. Zbývá ještě ukázat, že f je spojitá. Je-li však $x \in E$ a $y \in G$, je $f(x) \le p(x) \le \|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$. Protože $\inf \{\|y\| : y \in G\} = 0$, je $f(x) \le \|x\|$. Potom ovšem i $-\|x\| = -\|-x\| \le -f(-x) = f(x) \le \|x\|$, odkud ihned plyne, že f je spojitá v 0. Protože f je lineární forma, je spojitá podle věty 2.2 všude na E. ∎

`(g) Poznámky.` (g1) Kde jsme vlastně v důkazu předchozí Mazurovy věty využili konvexity C?

(g2) Mazurovu větu lze přeformulovat takto. *Je-li C otevřená konvexní množina v normovaném lineárním prostoru E a $z \notin C$, existuje $\varphi \in E^*$ tak, že $\varphi(z) = 0$ a $\varphi > 0$ na C.*

(g3) *Kuželem V* ve vektorovém prostoru W rozumíme takovou množinu, že $V + V \subset V$ a $\lambda V \subset V$ pro každé $\lambda > 0$. Někteří autoři ještě požadují, aby $0 \in V$. Je-li A libovolná podmnožina W, definujme $k(A)$ jako průnik všech kuželů obsahujících A. Potom $k(A)$ je nejmenší kužel obsahující A. Nezapomeňte přitom, že průnik kuželů je vždy kužel a že W také tvoří kužel. Jako cvičení zkuste ověřit, že

$$k(A) = \{\alpha_1 x_1 + \ldots \alpha_n x_n : \alpha_1 > 0, \ldots, \alpha_n > 0\,,\, x_1, \ldots, x_n \in A\}\,.$$

Nyní je již jen krůček k následující geometrické verzi Hahn-Banachovy věty. K ní a jejím dalším variantám dokonce v lokálně konvexních prostorech se ještě vrátíme v *14.7. Tam též naznačíme jiný důkaz, a to využitím vlastností Minkowského funkcionálu.

`(h) Geometrická Hahn-Banachova věta.` *Nechť A, B jsou neprázdné disjunktní konvexní podmnožiny (reálného) normovaného lineárního prostoru E. Potom existuje (nenulová) $f \in E^*$ a $\alpha \in \mathbf{R}$ tak, že*

$$A \subset \{x \in E : f(x) > \alpha\} \quad a \quad B \subset \{x \in E : f(x) < \alpha\}\,,$$

pokud A i B jsou navíc otevřené, anebo jedna z nich je uzavřená a druhá kompaktní.

`Poznámka.` Než přejdeme k důkazu, řekněme si, že tato verze Hahn-Banachovy věty má skutečně geometrický charakter. Říká totiž, že dvě disjunktní konvexní množiny A, B za jistých předpokladů mohou být „odděleny“ či „separovány“ uzavřenou nadrovinou. Existuje uzavřená nadrovina H tak, že A leží v jednom „poloprostoru“ určeném H a množina B v tom druhém. Jak jsme již uvedli, existuje celá škála verzí geometrických vět i typů oddělování, pokud máte zájem, podívejte se na zmíněný odstavec *14.7.

Důkaz. Nechť obě množiny A i B jsou otevřené. Položme $C := A - B$. Snadno se ověří, že C je konvexní a $0 \notin C$. Protože $C = \bigcup \{A - b : b \in B\}$, je C také otevřená. Podle Mazurovy věty existuje $f \in E^*$ tak, že $f > 0$ na C. Takže je-li $a \in A$, $b \in B$, je $0 < f(a-b) = f(a) - f(b)$. Existuje tedy reálné α tak, že $\sup\{f(b) : b \in B\} \le \alpha \le \inf\{f(a) : a \in A\}$. Protože však množiny $f(A)$ i $f(B)$ jsou vlastně otevřené intervaly (podle (b) jsou to otevřené množiny, ale jsou také konvexní jakožto obrazy konvexních množin při lineárním zobrazení), musí být $f > \alpha$ na A a $f < \alpha$ na B.

Je-li jedna z množin A, B uzavřená a druhá kompaktní, mají kladnou vzdálenost. Řekněme, že $3d := \operatorname{dist}(A, B) > 0$. Položíme-li $G_A := \bigcup \{U(x, d) : x \in A\} = A + U(0, d)$ a $G_B := B + U(0, d)$, zjistíme, že A a B jsou disjunktní otevřené konvexní podmnožiny E. A stačí použít první část důkazu.

Pro důkaz lze také využít *14.6.d. ∎

`(k) Poznámka.` Někoho by mohla napadnout otázka, proč oddělujeme zrovna konvexní množiny. Odpověď je jednoduchá. Jsou-li A, B libovolné disjunktní množiny ve vektorovém prostoru, lze je oddělit nadrovinou, právě když lze oddělit nadrovinou jejich konvexní obaly.

Nyní uvedeme některé bezprostřední aplikace Hahn-Banachovy věty, které budeme v dalším potřebovat.

2.24. Duální vyjádření normy. *Je-li E normovaný lineární prostor a $x \in E$, potom*

$$\|x\| = \max\bigl\{|\varphi(x)| : \varphi \in E^*\,,\ \|\varphi\| \le 1\bigr\}\,.$$

Důkaz. Není co dokazovat v případě $x = 0$. Buď tedy $x \in E$, $x \neq 0$. Pokud $\varphi \in E^*$, $\|\varphi\| \le 1$, potom $|\varphi(x)| \le \|x\|$. Nyní stačí použít důsledek Hahn-Banachovy věty 2.20, podle něhož existuje $g \in E^*$ tak, že $\|g\| = 1$ a $g(x) = \|x\|$. ∎

2.25. Věta. *Nechť M je podprostor normovaného lineárního prostoru E. Jestliže jediná spojitá lineární forma z E^*, která je rovna 0 na M, je nulová, potom M je hustý v E.*

Důkaz. Protože $\overline{M}$ je také podprostorem E, je tvrzení bezprostředním důsledkem 2.22. ∎

2.26. Poznámka. V řeči anihilátorů, které zavedeme formálně až v 5.18, lze uvedenou větu vyslovit takto: *Je-li M podprostor E a $M^\perp = \{0\}$, je M hustý v E.*

2.27. Věta. *Nechť M je konečně dimenzionální podprostor Banachova prostoru X. Potom M má v X topologický doplněk.*

Důkaz. Má-li prvek $x \in M$ vyjádření v jisté bázi M jako $x = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ a položíme-li $\varphi_i(x) := \lambda_i$, jsou φ_i $(i = 1, \dots, n)$ spojité lineární funkcionály na M. Podle Hahn-Banachovy věty 2.18 existují $\Phi_i \in X^*$ tak, že $\Phi_i = \varphi_i$ na M. Potom $X = M \oplus_t \Bigl(\bigcap\limits_{i=1}^{n} \ker \Phi_i\Bigr)$.

Jiný důkaz. Nechť $\{e_1, \dots, e_n\}$ je báze M. Pro pevné $i = 1, \dots, n$ buď M_i lineární obal množiny $\{e_j : j \neq i\}$. Potom M_i je uzavřený podprostor X a $e_i \notin M_i$. Podle důsledku Hahn-Banachovy věty v 2.22 existuje $\varphi_i \in X^*$ tak, že $\varphi_i = 0$ na M_i a $\varphi_i(e_i) = 1$. Definujeme-li $Px = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i(x) e_i$ pro $x \in X$, je P projekce X na M. ∎

2.28. Poznámky. (a) Je-li $\{e_1, \dots, e_n\}$ báze M, všimněte si, že $\varphi_i(e_j) = 0$ pro $i \neq j$ a $\varphi_i(e_i) = 1$. Jinými slovy, $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ je *duální bází* k $\{e_1, \dots, e_n\}$ (viz *2.2).

(b) Ukážeme, že existuje projekce P, pro niž $\|P\| \le \dim M$. K tomu nejdříve zaveďme pojem Auerbachovy báze a dokažme následující tvrzení. Nechť E je normovaný lineární prostor, $\dim E = n$. Dvojici $\{e_i, \varphi_i\}_{i=1}^n$ nazveme *Auerbachovou bází* E, jestliže $\{e_1, \dots, e_n\}$ je bází E, $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ je bází E^*, $\|e_i\| = \|\varphi_i\| = 1 = \varphi_i(e_i)$ pro každé $i = 1, \dots, n$ a $\varphi_i(e_k) = 0$ pokud $i \neq k$.

Auerbachovo lemma. *V každém normovaném lineárním prostoru konečné dimenze existuje Auerbachova báze.*

Návod. Nechť $B := \{b_1, \dots, b_n\}$ je algebraická báze prostoru E. Pro $(v_1, \dots, v_n) \in E^n$ označme $\det(v_1, \dots, v_n)$ determinant matice, jejíž i-tý řádek je tvořen koeficienty prvku v_i v bázi B. Vzhledem k definici determinantu je zobrazení $(v_1, \dots, v_n) \mapsto |\det(v_1, \dots, v_n)|$ spojité. Nabývá tedy v nějakém bodě $(e_1, \dots, e_n)$ kompaktní množiny $\{(x_1, \dots, x_n) \in E^n : \|x_1\| = \dots = \|x_n\| = 1\}$ svého maxima. Vektory $e_1, \dots, e_n$ jsou lineárně nezávislé a $\|e_1\| = \dots = \|e_n\| = 1$. Položíme-li

$$\varphi_j : x \mapsto \frac{\det(e_1, \dots, e_{j-1}, x, e_{j+1}, \dots, e_n)}{\det(e_1, \dots, e_n)} \quad \text{pro} \quad x \in E \quad \text{a} \quad j = 1, \dots, n,$$

mají $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ všechny požadované vlastnosti. ♣

Nechť tedy M je n-dimenzionální podprostor normovaného lineárního prostoru E a $\{e_i, \varphi_i\}_{i=1}^n$ jeho Auerbachova báze. Podle Hahn-Banachovy věty 2.18 existují $\Phi_1, \dots, \Phi_n \in E^*$ tak, že $\Phi_j \restriction M = \varphi_j$ a $\|\Phi_j\| = \|\varphi_j\| = 1$ pro každé $j = 1, \dots, n$. Jestliže

$$P : x \mapsto \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(x) e_j \quad \text{pro} \quad x \in E,$$

je P projekce na E, $P(E) = M$ a $\|Px\| \le \sum_{j=1}^{n} |\Phi_j(x)| \|e_j\| \le n\|x\|$. Tudíž $\|P\| \le n$.

Poznamenejme ještě, že lze zvolit dokonce takovou projekci, pro niž $\|P\| \le \sqrt{n}$ (srovnejte s *2.1.c).

2.29. Kanonické vnoření X do X^{**}. Je-li X normovaný lineární prostor, označíme symbolem X^{**} duál k X^*. Je tedy *druhý duál* k X prostorem všech spojitých lineárních forem na (prvním) duálu X^*. Pro $x \in X$ definujme formu ε_x předpisem

$$\varepsilon_x : \varphi \mapsto \varphi(x), \quad \varphi \in X^*$$

a zobrazení ε jako

$$\varepsilon : x \mapsto \varepsilon_x, \quad x \in X.$$

Zřejmě ε_x je lineární forma na X^*, která je navíc omezená:

$$|\varepsilon_x(\varphi)| = |\varphi(x)| \le \|\varphi\| \, \|x\|.$$

Je tedy ε_x prvkem druhého duálu X^{**} a zobrazení ε budeme nazývat *kanonickým vnořením* X do X^{**}.

2.30. Vlastnosti kanonického vnoření. *Kanonické vnoření ε je prostým, izometrickým a izomorfním zobrazením X na $\varepsilon X \subset X^{**}$.*

Důkaz. Zobrazení ε je evidentně lineární a $\|\varepsilon(x)\| = \|\varepsilon_x\| \le \|x\|$ pro každé $x \in X$, jak plyne z odhadu v předchozím odstavci 2.29. Chtěli bychom nyní ukázat, že $\|\varepsilon_x\| \ge \|x\|$. Tato nerovnost je zřejmá v případě, kdy $x = 0$. Je-li $x \neq 0$, existuje podle důsledku Hahn-Banachovy věty 2.20 $g \in X^*$ tak, že $\|g\| = 1$ a $g(x) = \|x\|$. Odtud dostáváme

$$\|x\| = g(x) \le \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in X^*, \|\varphi\| \le 1\} = \|\varepsilon_x\|.$$

Je-li $x \neq y$, máme $\|\varepsilon_x - \varepsilon_y\| = \|\varepsilon_{x-y}\| = \|x - y\| \neq 0$, tudíž i $\varepsilon_x \neq \varepsilon_y$. (Ostatně, každá lineární izometrie je prostým zobrazením.) ■

2.31. Vnoření a kopie. Řekneme, že Banachův prostor X obsahuje *kopii* Banachova prostoru Y, anebo též že Y je *vnořen* do X, existuje-li izomorfní zobrazení T prostoru Y do X. Protože T je prosté zobrazení a jeho inverze $T^{-1} : TY \to X$ je též spojitá (zde se musíme odvolat na větu 4.16 a cvičení *1.17, z kterého plyne, že TY je uzavřený podprostor X), lze ekvivalentně říci, že Y je vnořen do X, existuje-li lineární zobrazení $L : Y \to X$ a kladné konstanty α, β tak, že

$\alpha\,\|y\| \le \|Ly\| \le \beta\,\|y\|$ pro každé $y \in Y$. Vezměme tedy poslední výrok za definici. Z ní okamžitě plyne, že zobrazení L je prosté, spojité, že LY je uzavřený podprostor X a že L je izomorfizmus.

Lze-li navíc L volit jako izometrii, řekneme, že Y je *izometricky vnořen* do X, či že X obsahuje *izometrickou kopii* Y.

Banachův podprostor TY pak můžeme chápat jako kopii Y v X. Tedy kupříkladu, je-li X Banachův prostor, je εX jeho izometrická kopie v X^{**}. Ještě jinak, X je izometricky vnořen do X^{**}.

2.32. Reflexivní prostory. Řekneme, že normovaný lineární prostor E je *reflexivní*, jestliže $\varepsilon E = E^{**}$, kde ε je kanonické vnoření E do E^{**}.

2.33. Poznámky. (a) Protože kanonické vnoření ε je izometrické, a tedy i prosté, a každý duál je úplný, je i každý reflexivní prostor úplný.

(b) Je-li N normovaný lineární prostor, je $Y := \overline{\varepsilon N}$ uzavřená podmnožina úplného prostoru X^{**}. Je tedy Y Banachův prostor, do něhož je N hustě vnořen a lze jej tedy považovat za *zúplnění* N.

(c) Existují prostory, které jsou izometricky-izomorfní se svým druhým duálem, a přesto nejsou reflexivní (viz R.C. James [1951]). V definici reflexivity je důležité, že se jedná o speciální izometricky-izomorfní zobrazení dané kanonickým vnořením.

(d) Mějme Banachův prostor X. Jeho duál X^* označme Y. Je tedy $Y^* = X^{**}$. Je-li prostor X reflexivní, je jeho druhý duál X^{**} izometricky-izomorfní s původním prostorem X. Tudíž i duál Y^* je izometricky-izomorfní s X. V tomto smyslu můžeme říci, že duálem k Y je X, ačkoliv samozřejmě duálem k Y je X^{**}, a my bychom měli raději přesněji mluvit o tom, že Y^* je izometricky-izomorfní s X. Tuto licenci si mohou dovolit odborníci, vyjadřování začátečníka (hlavně pro dobré pochopení) by mělo být přesnější.

2.34. Reflexivita Hilbertových prostorů. *Každý Hilbertův prostor je reflexivní.*

Důkaz. Buď H Hilbertův prostor a $F \in H^{**}$. Pro $h \in H$ položme $\varphi_h(x) = (x, h)$. Připomeňme, že $\varphi_h \in H^*$ a že zobrazení $h \mapsto \varphi_h$ je izometrické, sdruženě-lineární zobrazení H na H^*. Protože zobrazení $\psi : h \mapsto \overline{F(\varphi_h)}$ je spojitá lineární forma na H, existuje podle Fréchet-Rieszovy věty 2.9 $x \in H$ tak, že $\psi(h) = (h, x)$ pro každé $h \in H$. Buď tedy konečně $\varphi \in H^*$. Existuje právě jedno $h \in H$ tak, že $\varphi = \varphi_h$. Potom

$$F(\varphi) = F(\varphi_h) = \overline{\psi(h)} = \overline{(h, x)} = (x, h) = \varphi_h(x) = \varphi(x) = \varepsilon_x(\varphi)\,.$$

Našli jsme tedy $x \in H$ tak, že $\varepsilon_x = F$. ■

2.35. Reflexivita dalších prostorů. (a) `Reflexivita` L^p`-prostorů.` V dalším $(X, \mathcal{S}, \mu)$ bude prostor s mírou, $1 < p < \infty$, $L^p := L^p(X, \mathcal{S}, \mu)$ a $q = \frac{p}{p-1}$. Ukážeme, že prostor L^p je reflexivní. Důkaz (pořádný), jehož myšlenka je obdobná myšlence právě provedeného důkazu reflexivity Hilbertových prostorů, založíme samozřejmě na charakteristice duálu k L^p uvedené v 2.14.b. Pro jednoduchost ještě předpokládejme, že uvažované prostory L^p jsou reálné, důkaz v komplexním případě je však skoro identický.

Volme tedy $F \in L^{p**}$ libovolně. Naším cílem je nalézt $h \in L^p$ tak, aby $\varepsilon_h = F$. Definujme zobrazení $i : L^q \to L^{p*}$ předpisem

$$i(g) : f \mapsto \int_X fg\,d\mu \quad \text{pro} \quad f \in L^p\,,\ g \in L^q\,.$$

Podle zmíněné charakteristiky je i izometricky-izomorfní zobrazení L^q na L^{p*}. Položíme-li $\varphi = F \circ i$, je $\varphi \in L^{q*}$. Existuje tedy $h \in L^p$ tak, že

$$\varphi(g) = \int_X gh\,d\mu \quad \text{pro} \quad g \in L^q\,.$$

Stačí ukázat, že $\varepsilon_h = F$. K tomu účelu volme $t \in L^{p*}$. Existuje $g_t \in L^q$ tak, že $i(g_t) = t$. Potom

$$F(t) = F(i(g_t)) = \varphi(g_t) = \int_X g_t h\,d\mu = i(g_t)(h) = t(h) = \varepsilon_h(t)$$

a jsme s důkazem hotovi.

(b) `Reflexivita` l^p. Z předchozího speciálně plyne, že prostory l^p jsou pro $p \in (1, \infty)$ reflexivní.

(c) `Nereflexivita` c_0. Prostor c_0 není reflexivní. Jeden z argumentů je ukryt ve cvičeních 2.55.i a 2.55.j . Jiný v neseparabilitě l^∞, v 3.7.a či v 18.6.c.

Poznámka. V mnoha učebnicích důkaz reflexivity L^p-prostorů probíhá následovně. Protože $L^{p*} = L^q$ a $L^{q*} = L^p$, je $L^{p**} = L^p$ a důkaz je hotov. I kdybychom však uvedené rovnosti prostorů chápali tak, že tyto jsou izometricky-izomorfní, dostáváme z uvedených úvah pouze, že L^{p**} je izometricky-izomorfní s L^p, z čehož ještě nevyplývá, jak jsme poznamenali v poznámce 2.33.c, že prostor L^p je reflexivní. Uvedená myšlenka snad může sloužit dobrému matematikovi k domněnce o reflexivitě, nicméně pořádný důkaz je tomu přeci jen vzdálen.

V dalším budeme zkoumat speciální třídy operátorů. Začněme s projekcemi v Banachových prostorech. Pro lepší pochopení si však nejdříve zopakujte odstavce 1.23 a 1.24 o algebraických a topologických součtech. Připomeňme, že symbolem $L_1 \circ L_2$, či prostě $L_1 L_2$, značíme složení lineárních zobrazení L_1 a L_2 ($L_1 L_2(x) := L_1(L_2(x))$). Samozřejmě, $L^2 := L \circ L$. Dále, I vždy bude značit identické zobrazení daného prostoru.

2.36. Projekce v Banachových prostorech. *Projekcí* na Banachově prostoru X rozumíme spojitý lineární operátor $P : X \to X$ splňující $P^2 = P$.

Je-li P projekce, je projekcí také operátor $I - P$.

Protože $\|P\| = \|P^2\| \leq \|P\|\,\|P\|$, je nutně $\|P\| \geq 1$, pokud ovšem P není projekcí X na nulový prvek. Projekce však může nabývat libovolně velké normy. Stačí vzít v $\mathbf{R}^2$ zobrazení $(x, y) \mapsto (x + \beta y, 0)$, kde $\beta > 0$ je libovolné číslo.

2.37. Věta. *Nechť P je projekce na Banachově prostoru X. Potom* $\ker P := \{x \in X : Px = 0\}$ *a* $\mathcal{R}P := \{Px : x \in X\}$ *jsou uzavřené podprostory X a X je jejich topologickým součtem.*

Obráceně, jsou-li M a N uzavřené podprostory Banachova prostoru X a $X = M \oplus_t N$, existuje projekce P na X tak, že $M = \ker P$ a $N = \mathcal{R}P$.

Důkaz. Zřejmě jak $\ker P$, tak i $\mathcal{R}P$ jsou podprostory X, $\ker P \cap \mathcal{R}P = \{0\}$ a $\ker P$ je navíc uzavřený. Protože však $\mathcal{R}P = \ker(I - P)$, je i $\mathcal{R}P$ uzavřený. Libovolné $x \in X$ lze psát ve tvaru $x = Px + (I - P)x$, odkud již dostáváme, že $X = \ker P \oplus \mathcal{R}P$. Potom podle 1.24 (kde jsme, znovu zdůrazněme, použili větu 4.19 o uzavřeném grafu) máme $X = \ker P \oplus_t \mathcal{R}P$.

Pro $x = x_M + x_N$, kde $x_M \in M$ a $x_N \in N$, stačí položit $Px = x_M$, abychom dokázali druhou část tvrzení. ∎

Vidíme, že mezi projekcemi na X a komplementárními podprostory existuje vzájemně jednoznačné zobrazení. Máme následující důležitou charakteristiku (viz F.J. Murray, [1937]), jejíž důkaz vyplývá z předchozí věty.

2.38. Věta. *Buď M podprostor Banachova prostoru X. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *M má topologický doplněk,*
(ii) *existuje projekce X na M.*

2.39. Poznámka. Pokud M je netriviální podprostor X a P projekce X na M, víme, že $\|P\| \geq 1$. Není vždy snadné, a také to není vždy možné, nalézt takovou projekci P, aby $\|P\| = 1$. Podívejte se třeba na *2.1 či *2.6.b.

Co lze říci o projekcích v Hilbertových prostorech? Protože v nich máme navíc definován pojem kolmosti, můžeme očekávat další vlastnosti projekcí. Začněme však nejdříve s pojmem hermiteovského operátoru, k němuž se vrátíme podrobněji v 8. kapitole.

2.40. Hermiteovské operátory. Buď H Hilbertův prostor. Operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ se nazývá *hermiteovský*, jestliže $(Tx, y) = (x, Ty)$ pro každou dvojici $x, y \in H$.

Z kurzu lineární algebry víme, že $T \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^n)$ reprezentovaný maticí $(t_{i,j})$ je hermiteovský, právě když $t_{i,j} = \overline{t_{j,i}}$.

2.41. Ortogonální projekce v Hilbertových prostorech. Buď P projekce na (komplexním) Hilbertově prostoru H. Řekneme, že P je *ortogonální projekce*, jestliže $\ker P$ a $\mathcal{R}P$ jsou navzájem kolmé podprostory H.

Je-li P nenulová ortogonální projekce na H, je $\|P\| = 1$. To plyne snadno pomocí „Pythagorovy věty", podle které odvodíme nerovnost $\|Px\|^2 \leq \|Px\|^2 + \|x - Px\|^2 = \|x\|^2$ platnou pro každé $x \in H$. Odtud $\|P\| \leq 1$. Na druhé straně je vždy $\|P\| \geq 1$ podle 2.36.

2.42. Věta. *Buď P projekce na Hilbertově prostoru H. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *P je ortogonální projekce,*

(ii) *P je hermiteovský operátor.*

Důkaz. Je-li P ortogonální a $x, y \in H$, máme

$$(Px, y) = (Px, Py) + (Px, y - Py) = (Px, Py) = (x, Py) + (Px - x, Py) = (x, Py)\,.$$

Je-li naopak P hermiteovský, $x \in \ker P$ a $y \in \mathcal{R}P$, je

$$(x, y) = (x, Py) = (Px, y) = (0, y) = 0\,.$$

■

Máme-li nyní dvě ortogonální projekce na H, lze se ptát, kdy jsou na sebe kolmé. Definice je následující.

2.43. Projekce kolmé na sebe. Říkejme, že ortogonální *projekce* P_1 a P_2 v Hilbertově prostoru H *jsou na sebe kolmé*, jestliže průměty H jsou na sebe kolmé, tedy jestliže podprostory $\mathcal{R}P_1$ a $\mathcal{R}P_2$ jsou na sebe kolmé.

Ukažte, že P_1 a P_2 jsou na sebe kolmé, jestliže $P_1 P_2 = 0$.

Ve zbytku této kapitoly se budeme zabývat jednou z nejdůležitějších tříd operátorů, kterou tvoří kompaktní operátory. Než k nim přejdeme, zopakujme něco málo o kompaktních množinách v metrických a v normovaných lineárních prostorech.

2.44. Kompaktní a prekompaktní množiny. V metrických prostorech jsou *kompaktní množiny* ty, u nichž z libovolného jejich pokrytí otevřenými množinami lze vybrat konečné podpokrytí. Dokazuje se, že množina K je kompaktní, právě když z každé posloupnosti jejích prvků lze vybrat konvergentní podposloupnost s limitou ležící v K.

Každá kompaktní podmnožina metrického prostoru je uzavřená a omezená. V normovaných lineárních prostorech konečné dimenze platí i obrácené tvrzení. Uzavřené omezené podmnožiny v prostorech konečné dimenze jsou kompaktní (viz *1.8). Naproti tomu podle Rieszovy věty, kterou dokážeme později v 5.12, v normovaných lineárních prostorech nekonečné dimenze nikdy žádná uzavřená koule nemůže být kompaktní množinou.

Množina M v metrickém prostoru se nazývá *prekompaktní*, někdo též říká *totálně omezená*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje v M konečná *ε-síť*, tedy konečná množina $x_1, \dots, x_n \in M$ s vlastností $\bigcup\limits_{i=1}^{n} U(x_i, \varepsilon) \supset M$. Ekvivalentně lze říci, že M je prekompaktní, jestliže ji lze pokrýt konečně mnoha koulemi o libovolně malém poloměru. Přesněji, zadáme-li si $\varepsilon > 0$, existuje konečný počet koulí $K_1, \dots, K_n$ o poloměrech menších než ε tak, že $M \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} K_j$.

Jako užitečné cvičení dokažte, že množina M je prekompaktní, právě když z každé její posloupnosti lze vybrat posloupnost cauchyovskou.

Každá prekompaktní množina je zajisté omezená. Kompaktní množiny jsou právě ty, které jsou prekompaktní a úplné.

Relativně kompaktní množiny jsou ty, jejichž uzávěr je kompakt. V úplných metrických prostorech prekompaktní a relativně kompaktní množiny splývají. Množina E je relativně kompaktní, právě když z každé posloupnosti prvků E lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Před vlastní definicí kompaktních operátorů ještě zopakujme, že spojitá lineární zobrazení jsou ta, která zobrazují omezené množiny na množiny omezené. Tyto množiny, jak jsme se právě zmínili, v nekonečné dimenzi nemají příliš silné vlastnosti.

2.45. Kompaktní operátory. Buďte M, N normované lineární prostory. Řekneme, že lineární zobrazení z M do N je *kompaktní*, jestliže zobrazuje omezené podmnožiny v M na množiny relativně kompaktní v N. Symbolem $\mathcal{L}_c(M, N)$ značme množinu všech kompaktních operátorů z M do N. Dále $\mathcal{L}_c(M) := \mathcal{L}_c(M, M)$. Vzhledem k různým charakteristikám kompaktnosti právě uvedeným, lze uvést i následující ekvivalentní definice.

Větička. *Následující výroky jsou ekvivalentní pro $K \in \mathcal{L}(M, N)$:*

(i) *K je kompaktní,*

(ii) *je-li $\{x_n\}$ omezená posloupnost v M, lze z posloupnosti $\{Kx_n\}$ vybrat konvergentní podposloupnost,*

(iii) *K zobrazuje jednotkovou kouli $\{x \in M : \|x\| \le 1\}$ na množinu relativně kompaktní.*

Je-li prostor N navíc úplný, je dále ekvivalentní:

(iv) *K zobrazuje omezené množiny na množiny prekompaktní.*

2.46. Konečně dimenzionální operátory. Dále řekneme, že operátor $F \in \mathcal{L}(M,N)$ je *konečně dimenzionální*, jestliže prostě jeho obor hodnot $F(M)$ je množina konečné dimenze v N. Označme $\mathcal{L}_f(M,N)$ množinu všech konečně dimenzionálních operátorů z M do N, $\mathcal{L}_f(M) := \mathcal{L}_f(M,M)$.

Základní vlastnosti kompaktních operátorů jsou shrnuty v následující větě.

2.47. Vlastnosti kompaktních operátorů. *Buďte M, N, P normované lineární prostory a X Banachův prostor. Potom*

(a) *každý kompaktní operátor je omezený, každý konečně dimenzionální je kompaktní a tyto třídy operátorů tvoří vektorové prostory, tedy $\mathcal{L}_f(M,N) \subset\subset \mathcal{L}_c(M,N) \subset\subset \mathcal{L}(M,N)$,*
(b) *$\mathcal{L}_c(M,X)$ je uzavřený vektorový podprostor $\mathcal{L}(M,X)$,*
(c) *je-li $L \in \mathcal{L}(M,N)$ a $T \in \mathcal{L}(N,P)$, potom operátor $T \circ L$ je kompaktní, pokud L či T je kompaktní.*

Důkaz. Mnohá z těchto tvrzení jsou snadným důsledkem definic. Dokazujme pouze něco.

Nechť $F \in \mathcal{L}(M,N)$ je konečně dimenzionální operátor, B_M uzavřená jednotková koule v M. Potom $F(M)$ je podprostor N konečné dimenze, tedy uzavřená podmnožina N (viz *1.9.a). Protože $\overline{F(B_M)} \subset F(M)$ je omezená uzavřená podmnožina konečně dimenzionálního prostoru, musí být $\overline{F(B_M)}$ kompakt. Tudíž $F \in \mathcal{L}_c(M,N)$.

Nechť nyní $K_n \in \mathcal{L}_c(M,X)$, $K_n \to K$ (samozřejmě v normě prostoru $\mathcal{L}(M,X)$). Chceme ukázat, že i operátor K je kompaktní. K tomu stačí ověřit, že množina $K(B_M)$ je prekompaktní v X. Volme tedy $\varepsilon > 0$. Existuje n_0 tak, že $\|K_n - K\| < \varepsilon$ pro všechna $n \geq n_0$. Dále existují $x_1, \dots, x_k \in X$ tak, že $K_{n_0}(B_M) \subset \bigcup_{i=1}^{k} U(x_i, \varepsilon)$. Potom však $K(B_M) \subset \bigcup_{i=1}^{k} U(x_i, 2\varepsilon)$, jak se snadno přesvědčíme pomocí trojúhelníkové nerovnosti.

Jiný důkaz tohoto tvrzení lze provést klasickou diagonální metodou. Jestliže $K_n \in \mathcal{L}_c(M,X)$, $K_n \to K$ a $\{x_n\}$ je omezená posloupnost v M, vybereme z této posloupnosti podposloupnost $\{x_n^1\}$ tak, aby posloupnost $\{K_1 x_n^1\}$ konvergovala. Poté vybereme z $\{x_n^1\}$ podposloupnost $\{x_n^2\}$ tak, aby posloupnost $\{K_2 x_n^2\}$ konvergovala. Tak pokračujeme dále. Uvažujeme-li diagonální posloupnost $\{z_n\}$, kde $z_n := x_n^n$ (a to je skutečně vybraná posloupnost z původní posloupnosti $\{x_n\}$), vidíme, že posloupnost $\{K_k z_n\}$ konverguje pro každé k. Tudíž i posloupnost $\{K z_n\}$ konverguje, jak se lehko přesvědčíme. Skutečně, volme $\varepsilon > 0$. Protože $\|K_k - K\| \to 0$ a $\{z_n\}$ je omezená posloupnost, existuje k tak, že $\|K_k z_n - K z_n\| < \varepsilon$ pro každé n. Protože posloupnost $\{K_k z_n\}_n$ je cauchyovská (je dokonce konvergentní), existuje n_0 tak, že $\|K_k(z_i) - K_k(z_j)\| < \varepsilon$ pro $i, j \geq n_0$. Pro tato i, j pak máme

$$\|K z_i - K z_j\| \leq \|K z_i - K_k z_i\| + \|K_k z_i - K_k z_j\| + \|K_k z_j - K z_j\| < 3\varepsilon\,.$$

■

2.48. Poznámky. (a) Prostor kompaktních operátorů nemusí být uzavřený v $\mathcal{L}(M,N)$, pokud N není úplný. Protipříklad je založen na následující myšlence. Nechť $T \in \mathcal{L}(c_0, l^2)$ je operátor definovaný předpisem $T : \{x_n\} \mapsto \{\frac{x_n}{n}\}$. Položme $N = T(c_0)$. Potom T uvažovaný jako prvek prostoru $\mathcal{L}(c_0, N)$ není kompaktní (uvažujte posloupnost $z_k := (1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots)$ z jednotkové sféry prostoru c_0 a ukažte, že z posloupnosti $\{T z_k\}$ nelze vybrat žádnou posloupnost konvergující k nějakému prvku prostoru N). Na druhé straně posloupnost (dokonce) konečně dimenzionálních operátorů $T_k \in \mathcal{L}(c_0, N)$ definovaná vztahem $T_k : \{x_n\} \mapsto (x_1, \frac{1}{2}x_2, \dots, \frac{1}{k}x_k, 0, 0, \dots)$ konverguje k T, neboť

$$\|T - T_k\| = \sup\bigl\{(T_k - T)(\{x_n\}) : \|\{x_n\}\| \leq 1\bigr\} \leq \Bigl(\sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j^2}\Bigr)^{\frac{1}{2}}.$$

(b) Z tvrzení v 2.47.c speciálně plyne, že $\mathcal{L}_c(M)$ tvoří *oboustranný ideál* v prostoru $\mathcal{L}(M)$ (to znamená, že operátory KL i LK jsou kompaktní, pokud $K, L \in \mathcal{L}(M)$ a K je kompaktní). Pokud prostor M je úplný, je $\mathcal{L}_c(M)$ dokonce uzavřený ideál v $\mathcal{L}(M)$ podle (b) v 2.47.

2.49. Příklady. (a) `Fredholmův operátor.` Nechť k je spojitá, obecně komplexní, funkce na $[0,1] \times [0,1]$. *Fredholmův operátor* $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(\mathcal{C}([0,1]))$ definujme předpisem

$$\mathcal{F}f(s) := \int_0^1 k(s,t) f(t)\, dt \quad \text{pro} \quad f \in \mathcal{C}([0,1]) \quad \text{a} \quad s \in [0,1].$$

Není těžké si uvědomit, že $\mathcal{F}f$ je korektně definováno (integrand je spojitá funkce), že $\mathcal{F}f \in \mathcal{C}([0,1])$ (využije se stejnoměrné spojitosti funkce k), že $\mathcal{F}$ je lineární operátor, a že je omezený ($\|\mathcal{F}\| \le \sup\{|k(s,t)| : s,t \in [0,1]\}$).

Soustřeďme se nyní na důkaz, že $\mathcal{F}$ je kompaktní. Označme $B := \{f \in \mathcal{C}([0,1]) : \|f\| \le 1\}$. K tomu, abychom dokázali, že množina $\mathcal{F}(B)$ je relativně kompaktní v $\mathcal{C}([0,1])$ použijeme Arzelà-Ascoliho větu z *1.14. Ovšem $\mathcal{F}(B)$ je omezená množina, protože $\mathcal{F}$ je omezený operátor a zbývá ukázat, že $\mathcal{F}(B)$ je množina stejně spojitých funkcí. Ale to je snadné. Volíme-li $\varepsilon > 0$, najdeme $\delta > 0$ tak, aby $|k(s_1,t) - k(s_2,t)| < \varepsilon$, kdykoliv $t \in [0,1]$ a $|s_1 - s_2| < \delta$. Potom

$$\big|\mathcal{F}f(s_1) - \mathcal{F}f(s_2)\big| \le \max_{t\in[0,1]} \big|k(s_1,t) - k(s_2,t)\big| \, \|f\| \le \varepsilon \, .$$

Podívejme se nyní na obecnější Fredholmovy operátory. Budeme uvažovat kompaktní (Hausdorffovy) topologické prostory S a T, spojitou funkci k na $S \times T$ a Radonovu míru μ na T. Opět položíme

$$\mathcal{F}f(s) := \int_T k(s,t) f(t)\, d\mu(t) \quad \text{pro} \quad f \in \mathcal{C}(T) \quad \text{a} \quad s \in S \, .$$

Jako shora se ukáže, že $\mathcal{F} \in \mathcal{L}\big(\mathcal{C}(T), \mathcal{C}(S)\big)$. Pro důkaz, že $\mathcal{F}$ je kompaktní bychom mohli opět použít Arzelà-Ascoliho větu anebo můžeme postupovat následovně. Uvědomíme si, že podle Stone-Weierstrassovy věty je množina

$$\mathcal{C}(S) \otimes \mathcal{C}(T) := \Big\{ \sum_{i=1}^{k} f_i(s) g_i(t) : f_i \in \mathcal{C}(S), g_i \in \mathcal{C}(T) \Big\}$$

hustá v $\mathcal{C}(S \times T)$. Existuje tedy posloupnost $\{k_n(s,t)\} \subset \mathcal{C}(S) \otimes \mathcal{C}(T)$ tak, že $k_n \rightrightarrows k$ na $S \times T$. Protože operátory

$$T_n : f \mapsto \int_T k_n(s,t) f(t)\, d\mu(t) \, , \quad f \in \mathcal{C}(T)$$

jsou konečně dimenzionální (to plyne z vyjádření jádra k_n, jestliže totiž $k_n(s,t) = \sum_{i=1}^{k} f_i(s) g_i(t)$, je $T_n f(s) = \sum_{i=1}^{k} f_i(s) \int_T g_i(t)\, d\mu(t)$ a $T_n f$ leží v lineárním obalu množiny $\{f_1, \dots, f_k\}$) a

$$\|\mathcal{F} - T_n\| \le \|k - k_n\| \, \|\mu\| \to 0 \, ,$$

je $\mathcal{F}$ kompaktní podle 2.47.

(b) `Volterrův operátor.` Buď opět k spojitá funkce, tentokráte na množině $\{(s,t) \in \mathbf{R}^2 : s \in [0,1], t \in [0,s]\}$. Jestliže

$$\mathcal{V}f(s) := \int_0^s k(s,t) f(t)\, dt \quad \text{pro} \quad f \in \mathcal{C}([0,1]) \, ,$$

je opět $\mathcal{V}$ kompaktní operátor na prostoru $\mathcal{C}([0,1])$. Operátoru $\mathcal{V}$ se říká *Volterrův*.

(c) `Hilbert-Schmidtovy operátory.` Buďte μ, ν Radonovy míry na lokálně kompaktních prostorech E a F a $k \in \mathcal{L}^2_{E\times F}(\mu \otimes \nu)$ (zde $\mu \otimes \nu$ je součin Radonových měr μ a ν, viz třeba [LM], 16.9). Definujme nyní *Hilbert-Schmidtův* operátor T předpisem

$$T\varphi(y) := \int_E k(x,y) \varphi(x)\, d\mu(x) \quad \text{pokud} \quad \varphi \in \mathcal{L}^2(\mu) \, .$$

Pomocí Schwarzovy nerovnosti a Fubiniovy věty odvodíme, že pro $\varphi \in \mathcal{L}^2(\mu)$ máme

$$\begin{aligned}
\|T\varphi\|^2_{L^2(\nu)} &= \int_F T^2\varphi \, d\nu = \int_F \left[\int_E k(x,y)\varphi(x)\, d\mu(x) \right]^2 d\nu(y) \\
&\le \int_F \left[\int_E |k(x,y)|^2 \, d\mu(x) \int_E |\varphi(x)|^2 \, d\mu(x) \right] d\nu(y) \\
&= \|\varphi\|^2_{L^2(\mu)} \int_F \left[\int_E |k(x,y)|^2 \, d\mu(x) \right] d\nu(y) \\
&= \|\varphi\|^2_{L^2(\mu)} \, \|k\|^2_{L^2(\mu\otimes\nu)} \, .
\end{aligned}$$

Odtud vidíme, že $T \in \mathcal{L}(L^2(\mu), L^2(\nu))$ a $\|T\| \le \|k\|_{L^2(\mu\otimes\nu)}$. Chceme ukázat, že T je kompaktní operátor. Můžeme postupovat stejně jako v (a) tím, že T bude limitou posloupnosti konečně dimenzionálních operátorů. K tomu použijeme poznatek, obdobně jako v (a), že prostor $\mathcal{C}_k(E) \otimes \mathcal{C}_k(F)$ je hustý v prostoru $\mathcal{C}_k(E \times F)$ (zde $\mathcal{C}_k(E)$ je prostor všech spojitých funkcí na E majících kompaktní nosič se sup-normou) a že prostor $\mathcal{C}_k(E \times F)$ je hustou podmnožinou $L^2(\mu \otimes \nu)$ (opatřeného L^2-normou).

Uveďme ještě jiný důkaz kompaktnosti T využívající charakteristiky kompaktních operátorů v Hilbertových prostorech z věty 4.12. Volme tedy posloupnost $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{L}^2(\mu)$, $\varphi_n \xrightarrow{w} 0$. Protože funkce $x \mapsto k(x,y)$ leží v prostoru $\mathcal{L}^2(\mu)$ pro ν-skoro všechna $y \in F$, je pro tato y podle definice slabé konvergence a Fréchet-Rieszovy věty 2.9 $T\varphi_n(y) = \int_E k(x,y)\varphi_n(x)\,d\mu(x) \to 0$. Posloupnost $\{\varphi_n\}$ je omezená podle 4.7, nechť $\|\varphi_n\| \le \beta$ pro všechna n. Protože

$$|T\varphi_n(y)|^2 \le \int_E |k(x,y)|^2\,d\mu(x) \int_E |\varphi_n(x)|^2\,d\mu(x) \le \beta^2 \int_E |k(x,y)|^2\,d\mu(x)$$

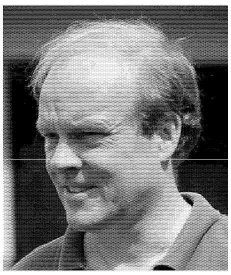
a funkce $y \to \int_E |k(x,y)|^2\,d\mu(x)$ je ν-integrabilní, je podle Lebesgueovy věty o dominantní konvergenci $\|T\varphi_n\| \to 0$. Podle zmíněné věty v 4.12 je T kompaktní.

V 10. kapitole se budeme zabývat obecnými Hilbert-Schmidtovými operátory a také některými jejich speciálními případy.

(d) `Nukleární operátory.` Nechť X, Y jsou Banachovy prostory, $\{\lambda_n\} \in l^1$, $\{y_n\}$ omezená posloupnost v Y a $\{\varphi_n\}$ omezená posloupnost v X^*. Nechť $\sup\limits_n \|y_n\| \sup\limits_n \|\varphi_n\| \le C$. Definujeme-li

$$Nx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\, \varphi_n(x)\, y_n \quad \text{pro} \quad x \in X\,,$$

je $\|Nx\| \le C\,\|x\| \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|$, takže $N \in \mathcal{L}(X,Y)$. Navíc N je kompaktní, neboť je limitou v $\mathcal{L}(X,Y)$ konečně dimenzionálních operátorů $F_n : x \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\, \varphi_i(x)\, y_i$ ($\|N - F_n\| \le C \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} |\lambda_i| \to 0$). Operátory tohoto typu se nazývají *nukleární*.



P. Enflo

2.50. Banachovy prostory s aproximační vlastností. Podle 2.47 víme, že limita posloupnosti konečně dimenzionálních operátorů v Banachově prostoru X je kompaktní operátor, tedy $\overline{\mathcal{L}_f(X)} \subset \mathcal{L}_c(X)$. Je otázkou, zda každý kompaktní operátor je limitou posloupnosti konečně dimenzionálních operátorů. To byl po dlouhou dobu slavný otevřený problém. Až P. Enflo [1973] sestrojil příklad dokonce separabilního Banachova prostoru, v němž toto tvrzení neplatí. Viz *2.18, kde uvedeme přesné definice a tvrzení.

2.51. Banachovsky adjungovaná zobrazení. Buďte M, N normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(M,N)$. Pro $\varphi \in N^*$ položme $T'\varphi := \varphi \circ T$, tedy $T'\varphi(x) = \varphi(Tx)$ pro $x \in M$. Téměř bezprostředně je vidět, že $T'\varphi \in M^*$ a $T' \in \mathcal{L}(N^*, M^*)$. Zobrazení T' budeme říkat *(banachovsky) adjungované* zobrazení k T.

2.52. Vlastnosti adjungovaných zobrazení. *Jsou-li M, N normované lineární prostory, $S, T \in \mathcal{L}(M,N)$ a $\lambda \in \mathbf{F}$, je*

$$(S+T)' = S' + T'\,, \quad (\lambda T)' = \lambda T'\,, \quad \|T\| = \|T'\|\,.$$

Jsou-li M, N, P normované lineární prostory, $L \in \mathcal{L}(M,N)$ a $T \in \mathcal{L}(N,P)$, je $T \circ L \in \mathcal{L}(M,P)$ a

$$\|TL\| \le \|T\|\,\|L\|\,, \quad (TL)' = L'T'\,.$$

Důkaz. Důkazy všech tvrzení jsou nabíledni. Snad pouze k rovnosti norem. Protože $\|T'\varphi\| \le \|\varphi\|\,\|T\|$, máme ihned $\|T'\| \le \|T\|$. Ukážeme-li, že pro každé $x \in M$ je $\|Tx\| \le \|T'\|\,\|x\|$, dostaneme ihned i opačnou nerovnost $\|T\| \le \|T'\|$. Je-li ovšem $x \in M$ a $Tx = 0$, je uvedená nerovnost zřejmá. Jinak existuje podle 2.20 $\psi \in N^*$ tak, že $\|\psi\| = 1$ a $\psi(Tx) = \|Tx\|$. V tom případě máme

$$\|Tx\| = \psi(Tx) = T'\psi(x) \le \|T'\|\,\|\psi\|\,\|x\| = \|T'\|\,\|x\|\,.$$

∎

2.53. Schauderova věta. *Nechť $T \in \mathcal{L}(E,X)$, kde E je normovaný lineární prostor a X Banachův. Potom T je kompaktní, právě když T' je kompaktní.*

Důkaz. Nechť $B := B_E$ značí uzavřenou jednotkovou kouli v E a $\varepsilon > 0$ je zadáno. Protože TB je prekompaktní, existují $x_1, \dots, x_n \in E$ tak, že $TB \subset \bigcup_{i=1}^{n} U(Tx_i, \varepsilon)$.

Definujme operátor $K : X^* \to \mathbf{F}^n$ předpisem $K : \varphi \mapsto \{\varphi(Tx_1), \dots, \varphi(Tx_n)\}$. Evidentně K je kompaktní operátor. Je-li B^* uzavřená jednotková koule v X^*, existují opět $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in B^*$ tak, že $KB^* \subset \bigcup_{j=1}^{k} U(K\varphi_j, \varepsilon)$.

Ukážeme nyní, že $\{T'\varphi_1, \dots, T'\varphi_k\}$ je 3ε-síť pro $T'B^*$. Volme tedy $\varphi \in B^*$ pevně. Existuje $j \in \{1, \dots, k\}$ tak, že $\|K\varphi - K\varphi_j\| < \varepsilon$ a potřebujeme dokázat, že

$$\begin{aligned}\|T'\varphi - T'\varphi_j\| &= \|T'(\varphi - \varphi_j)\| = \sup\{|T'(\varphi - \varphi_j)(x)| : x \in B\} \\ &= \sup\{|\varphi(Tx) - \varphi_j(Tx)| : x \in B\} \le 3\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Volme tedy ještě $x \in B$. Existuje $i \in \{1, \dots, n\}$ tak, že $\|Tx - Tx_i\| < \varepsilon$. Uvědomme si, že podle definice K potom $|\varphi(Tx_i) - \varphi_j(Tx_i)| \le \|K\varphi - K\varphi_j\| < \varepsilon$. Když dáme vše dohromady, získáme kýžený odhad

$$\begin{aligned}|\varphi(Tx) - \varphi_j(Tx)| &\le |\varphi(Tx) - \varphi(Tx_i)| + |\varphi(Tx_i) - \varphi_j(Tx_i)| + |\varphi_j(Tx_i) - \varphi_j(Tx)| \\ &\le \|\varphi\|\,\|Tx - Tx_i\| + \varepsilon + \|\varphi_j\|\,\|Tx_i - Tx\| \le 3\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Předpokládáme-li, že $T' \in \mathcal{L}(X^*, E^*)$ je kompaktní, je podle první části důkazu i operátor $T'' \in \mathcal{L}(E^{**}, X^{**})$ kompaktní. Označíme-li $\varepsilon_E, \varepsilon_X$ kanonická vnoření E do E^{**} a X do X^{**}, je $\varepsilon_X^{-1} \in \mathcal{L}(\varepsilon_X(X), X)$ a $T = \varepsilon_X^{-1} T'' \varepsilon_E$ na X (je nutno si uvědomit, že ε_X je izometrie a $T''\varepsilon_E(E)$ je podmnožinou uzavřeného podprostoru $\varepsilon_X(X)$). Odtud podle 2.47.c plyne, že T je kompaktní. ■

2.54. Poznámky. (a) Jiný důkaz Schauderovy věty postavený na Arzelà-Ascoliho větě lze vést následovně. Předpokládejme, že T je kompaktní a $\{\varphi_n\} \subset B^*$. Protože $|\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| \le \|x - y\|$, je posloupnost funkcionálů $\{\varphi_n\}$ stejně spojitá. Uvažujeme-li ji na kompaktu $K := \overline{TB}$, je tam navíc omezená. Podle Arzelá-Ascoliho věty v *1.14 existuje její vybraná podposloupnost $\{\varphi_{n_k}\}$ konvergující stejnoměrně na K. Protože $\|T'\varphi_{n_k} - T'\varphi_{n_j}\| \le \sup\{|T'(\varphi_{n_k} - \varphi_{n_j})x| : x \in B\} = \sup\{|\varphi_{n_k}(Tx) - \varphi_{n_j}(Tx)| : x \in B\}$, plyne z předchozího a z úplnosti prostoru X, že posloupnost $T'\varphi_{n_k}$ konverguje.

Ještě jiný důkaz je založen na důsledku Alaoglu-Bourbakiho věty 16.6. Abychom ukázali, že T' je kompaktní, volme posloupnost $\{\varphi_n\} \subset B^*$. Podle zmíněné věty má $\{\varphi_n\}$ hromadný bod $\varphi \in B^*$ ve w^*-topologii. Pak stačí ukázat, že $T'\varphi$ je hromadným bodem $\{T'\varphi_n\}$ v normové topologii prostoru E^* (porovnejte ostatně s 4.11 a 4.12).

(b) Rovněž tak pro závěr důkazu lze použít cvičení 2.55.r.

(c) Kde jsme vůbec v předchozím důkazu využívali úplnosti prostoru X?

2.55. Elementární cvičení. (a) Zjistěte, zda následující operátory na prostoru X jsou lineární a spojité. Pokud ano, spočtěte jejich normu:

(a1) $Lf(t) := \omega(t)f(t)$, $X = \mathcal{C}([0,1])$ (ω je spojitá funkce na $[0,1]$),
(a2) $Lf(t) := \omega(t)f(t)$, $X = L^2([0,1])$ (ω je zadaná funkce na $[0,1]$),
(a3) $Lf(t) := f(t^3)$, $X = \mathcal{C}([0,1])$,
(a4) $Lf(t) := f(t^3)$, $X = L^2([0,1])$,
(a5) L je identické vnoření prostoru $\mathcal{C}^1([0,1])$ (viz *1.1.d) do $\mathcal{C}([0,1])$,
(a6) $Lf(t) := \int_0^{2\pi} f(s)\cos(t-s)\,ds$, $X = L^2([0,2\pi])$,
(a7) $Lf(t) := t\int_0^1 f$, $X = L^2([0,1])$,
(a8) $L(\{x_n\} = (x_1, x_2, x_3, 0, 0, \dots)$, $X = c_0$ či $X = l^1$,
(a9) $L(x_1, x_2, x_3) := (x_1, -2x_2, 3x_3)$ pro $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$.

Návod. Abyste se nemuseli mořit s počítáním normy $\|L\|$ podle definice, označte si M matici lineárního zobrazení L v nějaké bázi prostoru $\mathbf{R}^3$. Potom matice M^*M je samoadjungovaná a její vlastní čísla jsou reálná a nezáporná. Pro největší z nich, označme ho λ, platí $\lambda = \|M^*M\| = \|M\|^2$. ♣

(b) Rozmyslete si, zda následující funkcionály na Banachově prostoru X jsou lineární a omezené. V kladném případě nalezněte jejich normy.

(b1) $F : \{x_n\} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^2}$, $X = c_0$.

Návod. Buďto počítejte přímo z definice anebo se podívejte na 2.14.a, jak vypadají spojité lineární funkcionály na prostoru c_0 a jejich normy. ♣

(b2) $F : f \mapsto \int\limits_0^\pi f(x) \sin x \, dx$, $X = L^2([0, \pi])$.

Návod. Protože $F(f) = (f, \sin)$ je vlastně skalární součin v $L^2([0, \pi])$, je podle Fréchet-Rieszovy věty 2.9 $\|F\| = \|\sin\| = \sqrt{\int\limits_0^\pi \sin^2 x \, dx} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. ♣

(b3) $F : f \mapsto \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} f(\frac{1}{n})$, $X = \mathcal{C}([-1, 1])$.

(b4) $F : \{x_n\} \mapsto \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2+\frac{1}{n})^{\frac{n}{2}}} x_n$, $X = l^2$.

Návod. Což opět zkusit Fréchet-Rieszovu větu? ♣

(b5) $F : f \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f(t^n) \, dt$, $X = \mathcal{C}([0, 1])$.

(b6) $F : f \mapsto \int\limits_0^1 t^{-\frac{1}{5}} f(t) \, dt$, $X = L^2([0, 1])$.

(b7) $F : \{x_n\} \mapsto \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_n$, $X = l^1$.

(b8) $F : f \mapsto \int\limits_0^1 t \, f(t) \, dt$, $X = L^p([0, 1])$.

(b9) $F : f \mapsto f'(0)$, $X = \{f \in \mathcal{C}([-1, 1]) : f$ je polynom nejvýše druhého stupně$\}$.

Návod. $\|F\| = 8$. ♣

(c) Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $L \in \mathcal{L}(X, Y)$. Najděte adjungovaný operátor $L' : Y^* \to X^*$ v následujících případech:

(c1) $X = \mathcal{C}([0, 2])$, $Y = \mathcal{C}([0, 1])$ a $Lf = f \restriction [0, 1]$ pro $f \in X$,

(c2) $X = \mathcal{L}^p(0, 1)$, $Y = \mathcal{L}^q(0, 1)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ a $Lf = \int\limits_0^1 (x^2 - y) \sin(x + y) f(y) dy$ pro $f \in X$,

(c3) $X = l^2$, $Y = c_0$ a L je „formální“ identita (každou posloupnost z l^2 lze chápat jako prvek c_0); v tomto případě popište i L''.

Návod. (c2) $L'g = \int\limits_0^1 (y^2 - x) \sin(x + y) f(y) dy$. ♣

(d) Buď φ funkce na intervalu $(0, 1)$. Definujme lineární operátor z prostoru $\mathcal{L}^p(0, 1)$ do $\mathcal{L}^q(0, 1)$ předpisem $Tf = \varphi f$. Za jakých podmínek na funkci φ je T omezený operátor?

Návod. Jestliže $p \geq q$ a $\varphi \in \mathcal{L}^\infty(0, 1)$, je T omezený. Pokud $p < q$, je T omezený pouze v případě $\varphi = 0$ skoro všude. ♣

(e) Uvažujme normovaný lineární prostor $E := l^1_{00}$ z *1.1.c a položme

$$M = \big\{\{x_n\} \in E : x_{2n+1} = 0\big\} \quad \text{a} \quad N = \big\{\{x_n\} \in E : x_1 = x_2\,,\ 2x_3 = x_4\,,\ 3x_5 = x_6\,, \dots\big\}\,.$$

Ukažte, že M a N jsou uzavřené podprostory E, $E = M \oplus N$, ale projekce E na M není spojitá. Je tedy E algebraickým součtem dvou uzavřených podprostorů, není však jejich součtem topologickým.

(f) Buď X Banachův prostor. Nechť $f \in X^*$. Potom existuje $x \in X$ tak, že $\|x\| = 1$ a $\operatorname{dist}(x, \ker f) = 1$, právě když existuje $z \in X$, $\|z\| = 1$ a $|f(z)| = \|f\|$.

Návod. Možná by pomohla Ascoliho formulka v 5.32.l. ♣

(g) Ukažte, že identické zobrazení l^1 do l^2 je omezený lineární operátor.

Návod. Využijte toho, že $\{x \in l^1 : \|x\|_1 \leq 1\} \subset \{x \in l^2 : \|x\|_2 \leq 1\}$.

(h) V poznámce 2.6.c jsme ukázali, že na každém normovaném lineárním prostoru E nekonečné dimenze existuje nespojitý lineární funkcionál. Využijte jeho existenci k důkazu, že v tomto případě existuje i prostý nespojitý lineární operátor $L : E \to E$, $L(E) = E$. Můžete však též využít následující návod.

Návod. Nechť $\{e_1, e_2, \dots\}$ je spočetná podmnožina nějaké Hamelovy báze $\mathcal{B}$ prostoru E, o níž můžeme předpokládat, že $\|e\| = 1$ pro každé $e \in \mathcal{B}$. Položme $Le_n = ne_n$ pro $n = 1, 2, \dots$ a $Le = e$ pro ostatní prvky e báze $\mathcal{B}$. Zobrazení L, které je zatím definováno jen na bázi $\mathcal{B}$, lze jednoznačně rozšířit na lineární operátor definovaný na celém prostoru E. Ten je určitě prostý a na, není však omezený. ♣

(i) Definujte $L(\{x_n\}) = \sum \frac{x_n}{n!}$ pro $\{x_n\} \in c_0$. Ukažte, že $L \in (c_0)^*$, $\|L\| = \sum \frac{1}{n!}$ a neexistuje $x \in c_0$, $\|x\| \le 1$ tak, aby $Lx = \|L\|$.

(j) Buď X reflexivní Banachův prostor a $\varphi \in X^*$. Potom existuje $z \in X$, $\|z\| \le 1$ tak, že $\|\varphi\| = \varphi(z)$.

Návod. Podle 2.20 nalezněme $Z \in X^{**}$ tak, aby $\|Z\| = 1$ a $\|\varphi\| = Z(\varphi)$. Použitím reflexivity X dostaneme $z \in X$ s vlastnostmi $\varepsilon_z = Z$ a $\|z\| = \|Z\| = 1$. ♣

Poznámka. Protože podle Banach-Bourbakiho věty 16.9 v reflexivních prostorech je uzavřená jednotková koule kompaktní v jisté w-topologii, v níž jsou současně i všechny prvky X^* spojité, plyne i odtud tvrzení.

(k) Buď X Banachův prostor. Ukažte, že εX je uzavřený podprostor X^{**}.

Návod. Využijte izometrie kanonického vnoření ε k důkazu, že εX je úplný. ♣

(l) Jestliže M je hustý podprostor normovaného lineárního prostoru E, potom prostory M^* a E^* jsou izometricky-izomorfní.

Návod. Ukažte, že ke každému $T \in M^*$ existuje právě jeden $S \in E^*$ s vlastnostmi $T = S$ na M a $\|T\|_M = \|S\|_E$. ♣

(m) Nechť E je normovaný lineární prostor nad $\mathbf{F}$. Ukažte, že prostory E a $\mathcal{L}(\mathbf{F}, E)$ jsou izometricky-izomorfní.

(n) Je-li M uzavřený podprostor normovaného lineárního prostoru E, jsou prostory $E^*/M^\perp$ a M^* izometricky-izomorfní. Rovněž tak prostory $(E/M)^*$ a $M^\perp$ jsou izometricky-izomorfní.

Návod. V prvním případě uvažujte zobrazení $\varphi + M^\perp \mapsto \varphi \restriction M$, v druhém pak pro $\eta \in (E/M)^*$ bude mít hledané zobrazení tvar $\eta \mapsto \eta \circ q$, kde $q : E \to E/M$ je kanonické zobrazení. ♣

(p) Nechť E je normovaný lineární prostor. Potom existuje množina T a podprostor $\mathcal{A}$ Banachova prostoru $\mathcal{B}(T)$ všech omezených funkcí na T (viz *1.1.c) tak, že E a $\mathcal{A}$ jsou izometricky-izomorfní.

Návod. Položte $T = \{\varphi \in E^* : \|\varphi\| \le 1\}$. Je-li $x \in E$, definujte $f_x : \varphi \mapsto \varphi(x)$ pro $\varphi \in T$. Hledané zobrazení je pak $x \mapsto f_x$. ♣

Poznámka. Podle důsledku 16.6 je množina T kompaktní v jisté topologii, v níž je i každá f_x spojitá. Tudíž každý normovaný lineární prostor je dokonce izometricky-izomorfní jistému podprostoru Banachova prostoru $\mathcal{C}(T)$ spojitých funkcí na kompaktu T.

(q) Ukažte, že identické vnoření $\mathcal{C}^1([0,1])$ do $\mathcal{C}([0,1])$ je kompaktní operátor.

Návod. Použijte odhad $|f(x) - f(y)| \le \|f\|\,|x-y|$ ($f \in \mathcal{C}^1([0,1])$ a $x, y \in [0,1]$) a Arzelà-Ascoliho větu. ♣

(r) Buď X Banachův prostor. Nechť $K \in \mathcal{L}_c(X)$ a Y je uzavřený K-invariantní podprostor X ($KY \subset Y$). Ukažte, že $K \restriction Y \in \mathcal{L}_c(Y)$.

Návod. Nechť $\{x_n\}$ je omezená posloupnost v Y. Z posloupnosti $\{Kx_n\}$ lze vybrat konvergentní. Protože $Kx_n \in Y$ a Y je uzavřená množina, leží limita této vybrané pospoupnosti v Y. ♣

(s) Buď X Banachův prostor a η kanonické vnoření X^* do X^{***}. Ukažte, že ηX^* má v prostoru X^{***} topologický doplněk.

Návod. Nechť ε' je banachovsky adjungované zobrazení ke kanonickému vnoření $\varepsilon : X \to X^{**}$. Potom $\eta \circ \varepsilon' : X^{***} \to X^{***}$ je projekcí X^{***} na ηX^*. ♣

(t) Ukažte, že prostor c_0 nemůže být duálem žádného Banachova prostoru.

Návod. Využijte předchozí cvičení či 18.6.b. ♣

(u) Nechť l^{bv} je vektorový prostor všech posloupností reálných čísel pro něž

$$\|\{x_n\}\|_{bv} := |x_1| + \sum_{j=1}^{\infty} |x_{j+1} - x_j| < \infty\,.$$

Ukažte, že l^{bv} s takto definovanou normou $\|.\|_{bv}$ (což je vlastně prostor všech posloupností „konečné variace“) tvoří Banachův prostor, který je izometricky-izomorfní s l^1.

(v) Nechť T je izomorfní zobrazení Banachova prostoru X na normovaný lineární prostor Y. Ukažte, že v tomto případě je Y již úplný.

Návod. Uvědomte si, že izomorfní zobrazení převádí cauchyovské posloupnosti na cauchyovské a konvergentní na konvergentní.

Můžete též nahlédnout do návodu v 4.22.r. ♣

(w) Ukažte, že normy $\|.\|_1$ a $\|.\|_2$ na vektorovém prostoru E jsou ekvivalentní, právě když identické zobrazení $\mathrm{id} : (E, \|.\|_1) \to (E, \|.\|_2)$ je izomorfní.

(x) Nechť A, B jsou disjunktní konvexní podmnožiny normovaného lineárního prostoru E a A je otevřená. Ukažte, že existuje $f \in E^*$ a α tak, že $A \subset \{x \in E : f(x) > \alpha\}$ a $B \subset \{x \in E : f(x) \le \alpha\}$.

Návod. Kopírujte důkaz Mazurovy věty z 2.22. ♣

(y) Využijte následující návod a v rámci procvičení zkuste dokázat verzi Hahn-Banachovy věty z poznámky 2.17: *Je-li p konvexní funkcionál na reálném vektorovém prostoru W, existuje lineární forma $F \in W^\#$ tak, že $F \le p$ na W.*

Návod. Nechť $\mathcal{P}$ je množina všech konvexních funkcionálů na W, kde definujeme uspořádání $p_1 \prec p_2$, pokud $p_1(x) \ge p_2(x)$ pro každé $x \in W$. Zprvu ukažte, že každý řetězec v $\mathcal{P}$ má horní závoru (a to bodové infimum prvků tohoto řetězce). Položme $\mathcal{P}_p := \{q \in \mathcal{P} : q \le p \text{ na } W\}$. Podle Zornova lemmatu existuje minimální prvek $F \in \mathcal{P}_p$. K dokončení důkazu stačí ukázat, že F je lineární forma. To dá trochu práce.

Pro $w, x \in W$ položte $F_w(x) := \inf\{F(x + \lambda w) - \lambda F(w) : \lambda \ge 0\}$. Z odhadu $-F(-x) \le F(x + \lambda w) - \lambda F(w) \le F(x)$ plyne, že F_w je reálná funkce na W a že $F_w \le F$. Nyní ukažte, že F_w je konvexní funkcionál na W. Tudíž z minimality F plyne, že $F_w = F$. Volíme-li tedy $\lambda = 1$, dostaneme, že F je aditivní ($F(x) + F(w) \le F(x + w) \le F(x) + F(w)$). ♣

Poznámka. Odtud již lehko dokážeme algebraickou verzi Hahn-Banachovy věty 2.16: Stačí položit při označení v uvedené větě $q(x) := \inf\{p(x - m) + f(m) : m \in M\}$ a ukázat, obdobně jako výše, že q je korektně definovaný konvexní funkcionál na W. Potom bude existovat $F \in W^\#$ tak, že $F \le q \le p$ na W. Speciálně pak $F = f$ na M.

(z) Pokud M, N jsou kolmé podprostory Hilbertova prostoru, označme $M \oplus_o N$ podprostor $M + N$, což je samozřejmě $\{m + n : m \in M, n \in N\}$. Jsou-li P, Q projekce na Hilbertově prostoru H, je $P + Q$ projekce, právě když podprostory $\mathcal{R}(P)$ a $\mathcal{R}(Q)$ jsou na sebe kolmé. Ukažte, že v tom případě je $P + Q$ projekce na $\mathcal{R}(P) \oplus_o \mathcal{R}(Q)$.

3. Konvergence a řady v Banachových prostorech

3.1. Konvergence v X a X^*. Uvažujme normovaný lineární prostor X s normou $\|.\|$. Vžitou konvencí mezi matematiky je mlčky vztahovat veškeré topologické pojmy v X k metrice $\varrho(x, y) := \|x - y\|$. Někdy mluvíme též o normové topologii, konvergenci v normě, … . Je-li tedy $\{x_n\}$ posloupnost v X a $x \in X$, říkáme, že $\{x_n\}$ *konverguje* k x, jestliže $\|x_n - x\| \to 0$.

Pokud jde o prostor spojitých lineárních forem X^*, připomeňme, že na něm je norma definována vztahem

$$\|L\| = \sup\{|Lx| : \|x\| \le 1\}, \quad L \in X^*,$$

a ta automaticky určuje konvergenci v X^*.

Máme-li tedy definován pojem konvergence (v normě), lze mluvit o *součtu řady*, který je definován jako limita posloupnosti částečných součtů:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} a_n .$$

V Banachových prostorech lze definovat celou škálu konvergencí. V dalším se soustředíme pouze na základní pojmy.

3.2. Slabá konvergence v X. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}$ prvků normovaného lineárního prostoru X *konverguje slabě* k prvku x, symbolicky značeno $x_n \xrightarrow{w} x$, jestliže $Lx_n \to Lx$ pro každou spojitou lineární formu $L \in X^*$. Někdy též, avšak velice zřídka, budeme říkat, že posloupnost $\{x_n\}$ *w-konverguje* k prvku x. Ihned je vidět, že každá konvergentní posloupnost je i slabě konvergentní (ne však naopak!), a že limita slabě konvergentní posloupnosti, pokud existuje, je určena jednoznačně (uvědomte si, že podle důsledku Hahn-Banachovy věty 2.20 prvky X^* oddělují body X).

3.3. Slabá* konvergence v X^*. Je-li $\{L_n\}$ posloupnost v X^*, řekneme, že $\{L_n\}$ *w^*-konverguje* k prvku $L \in X$, symbolicky $L_n \xrightarrow{w^*} L$, jestliže $L_n x \to Lx$ pro každý prvek x původního prostoru X. Opět je ihned vidět, že každá konvergentní posloupnost v X^* je i w^*-konvergentní (využijte odhad $\|L_n x - Lx\| \le \|L_n - L\|\, \|x\|$), a že w^*-konvergentní posloupnost nemůže mít dvě různé limity (potřebujeme k tomuto tvrzení Hahn-Banachovu větu?).

3.4. Varování. Je-li X Banachův prostor, máme na jeho duálu X^* definovány dvě „slabé" konvergence. Jednak $L_n \xrightarrow{w} L$, pokud $\Phi(L_n) \to \Phi(L)$ pro každé $\Phi \in X^{**}$, a jednak $L_n \xrightarrow{w^*} L$, jestliže $L_n x \to Lx$ pro každé $x \in X$.

Pokud $L_n \xrightarrow{w} L$, potom i $L_n \xrightarrow{w^*} L$. To je jasné. Volíme-li totiž $x \in X$, je $\varepsilon_x \in X^{**}$ a z předpokladu $L_n \xrightarrow{w} L$ plyne, že $\varepsilon_x(L_n) \to \varepsilon_x(L)$. To ovšem neznamená nic jiného než $L_n x \to Lx$. Tudíž $L_n \xrightarrow{w^*} L$.

3.5. Větička. *Pokud X je reflexivní prostor, potom w- a w^*-konvergence na X^* splývají.*

Důkaz. Právě jsme řekli, že vždy w-konvergence na X za sebou vleče i w^*-konvergenci. Nechť tedy X je reflexivní a $L_n \xrightarrow{w^*} L$. Chceme ukázat, že i $L_n \xrightarrow{w} L$. K tomu stačí zvolit $\Phi \in X^{**}$ a ověřit, že $\Phi(L_n) \to \Phi(L)$. Protože X je reflexivní, existuje $x \in X$ tak, že $\varepsilon_x = \Phi$. Tvrzení nyní plyne z toho, že $L_n x \to Lx$, že $\Phi(L_n) = \varepsilon_x(L_n) = L_n(x)$ a že $\Phi(L) = L(x)$. ■

3.6. Příklad. Obecně w-konvergence na X^* nemusí splývat s w^*-konvergencí, stačí si dobře promyslet následující příklad. Uvažujme Banachův prostor c_0 a jeho duál reprezentovaný prostorem l^1. Nechť $\{e_n\}$ je posloupnost prvků l^1, kde, jako obvykle, $e_n := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$. Každý prvek e_n reprezentuje spojitou lineární formu φ_n na c_0 podle 2.14.a. Ukážeme, že $\varphi_n \xrightarrow{w^*} 0$. Volme tedy $x = \{x_n\} \in c_0$. Potom podle zmíněného popisu duálu k c_0 máme $\varphi_n(x) = x_n$. Protože $x_n \to 0$, je tvrzení dokázáno. Pokud by posloupnost $\{e_n\}$ konvergovala v l^1 slabě, musela by podle toho, co jsme před chvílí řekli, slabě konvergovat k 0. To však není pravda, stačí uvažovat spojitou lineární formu na l^1 reprezentovanou prvkem $(1, 1, 1, \dots) \in l^\infty$.

3.7. Poznámky. (a) S přihlédnutím k poslední větičce 3.5 ihned vidíme, že prostor c_0 není reflexivní.

(b) Vůbec, pokud jde o konvergenci v prostoru l^1, situace je zajímavá. Podle Schurova lemmatu, které dokážeme v *3.2, posloupnost prvků z l^1 konverguje slabě, právě když konverguje v normě. Použijeme-li toto lemma, vidíme také, že posloupnost $\{e_n\}$ z posledního příkladu nemůže konvergovat slabě, neboť tato posloupnost nekonverguje v normě ($\|e_n - e_k\| = 1$ pro $n \neq k$).

3.8. Poznámky. (a) Později v kapitole 15 ukážeme, že na X a X^* existují rozumné topologie, v nichž posloupnosti konvergují, právě když konvergují slabě. Ty není nikterak těžké popsat, učiňme to tedy hned.

Řekneme, že podmnožina G normovaného lineárního prostoru X je *w-otevřená*, jestliže ke každému $a \in G$ existuje $\varepsilon > 0$ a $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in X^*$ tak, že

$$\mathcal{U}(a, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \varepsilon) := \{x \in X : |\varphi_j(x - a)| < \varepsilon \text{ pro } j = 1, \dots, n\} \subset G.$$

Snadnou úvahou zjistíme, že sjednocení libovolného počtu w-otevřených množin a průnik konečného počtu w-otevřených množin je opět w-otevřená množina. Tvoří tedy kolekce všech w-otevřených množin topologii. Tato topologie se nazývá *slabou topologií* na X. Každá w-otevřená množina je otevřená i v původní topologii prostoru X. I to nahlédneme vcelku snadno. Vskutku, je-li G w-otevřená množina a $a \in G$, existuje $\varepsilon > 0$ a $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in X^*$ tak, že $\mathcal{U}(a, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \varepsilon) \subset G$. Ze spojitosti funkcionálů $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ v bodě a najdeme $\delta > 0$ tak, aby $|\varphi_j(x-a)| < \varepsilon$ pro každé $j = 1, \dots, n$ a každé $x \in X$, pokud $\|x-a\| < \delta$. Odtud plyne, že $U(a, \delta) \subset G$, čili G je otevřená množina. A skutečně lehkým cvičením je ukázat, že $x_n \xrightarrow{w} x$, právě když $x_n \to x$ v námi zavedené slabé w-topologii. Hned však upozorněme, že slabá w-topologie se nedá popsat pomocí slabé konvergence posloupností (kupříkladu podle Schurova lemmatu *3.2 v Banachově prostoru l^1 konvergence a slabá konvergence posloupností splývají ačkoliv slabá topologie na l^1 zdaleka nesplývá s jeho „normovou" topologií).

Obdobně lze definovat w^*-topologii na X^*.

(b) Všimněte si, že i přes symetrickou definici slabých konvergencí v X a X^*, argumenty pro odůvodnění analogických tvrzení nejsou zdaleka obdobné.

(c) Abychom rozlišili názvem slabou konvergenci od konvergence v normě, nazýváme též někdy konvergenci v normě *silnou konvergencí*.

3.9. Příklady. (a) Nechť $\{e_n\}$ je nekonečná ortonormální soustava Hilbertova prostoru H. Je-li $L \in H^*$, existuje podle Fréchet-Rieszovy věty 2.9 takové $a \in H$, že $Lx = (x, a)$ pro každé $x \in H$. Protože podle Besselovy nerovnosti 1.32 platí $\sum_n |(e_n, a)|^2 \leq \|a\|^2 < \infty$, je $\lim Le_n = \lim(e_n, a) = 0$. Vidíme, že $e_n \xrightarrow{w} 0$. Na druhé straně, protože $\|e_n - e_k\| = \sqrt{2}$ pro $n \neq k$, nemůže posloupnost $\{e_n\}$ konvergovat (v normě). (Pro důkaz, že posloupnost $\{e_n\}$ nemůže konvergovat, lze argumentovat také takto. Kdyby posloupnost $\{e_n\}$ konvergovala, musela by konvergovat k 0, neboť k tomuto prvku konverguje slabě. Ze spojitosti normy bychom pak ovšem dostali, že $\|0\| = 1$.)

(b) Ukážeme, že $\cos nx \xrightarrow{w} 0$ v prostoru $L^p([0,1])$, pokud $1 < p < \infty$. Je-li totiž $q = \frac{p}{p-1}$ a $L \in (L^p([0,1]))^*$, existuje $g \in L^q([0,1])$ tak, že $L \cos nx = \int_0^1 g \cos nx$ pro každé n (viz 2.14.b). Použitím Riemann-Lebesgueova lemmatu (viz [LM], 31.10, uvědomte si, že $L^q([0,1]) \subset L^1([0,1])$) dostáváme tvrzení. Posloupnost $\{\cos nx\}$ však nemůže konvergovat v normě prostoru L^p. Stačí totiž, obdobně jako v příkladu (a), spočítat $\|\cos nx\|_p$.

(c) Uvažujme Banachův prostor $X = \mathcal{C}([-1,1])$ a položme $L_n = \varepsilon_{-\frac{1}{n}} - \varepsilon_{\frac{1}{n}}$ (zde Diracova míra ε_z definovaná předpisem $\varepsilon_z(f) = f(z)$ je prvkem X^*). Je-li $f \in \mathcal{C}([0,1])$, je $L_n f = f(-\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{n}) \to f(0) - f(0) = 0$. Tedy $L_n \xrightarrow{w^*} 0$. Protože $\|L_n\| = \varepsilon_{-\frac{1}{n}}(1) + \varepsilon_{\frac{1}{n}}(1) = 2$, nemůže posloupnost $\{L_n\}$ konvergovat silně k nule.

Poznámka. Platí velice překvapivé tvrzení (alespoň na první pohled): *Je-li X Banachův prostor nekonečné dimenze, existuje vždy posloupnost $\varphi_n \in X^*$ tak, že $\|\varphi_n\| = 1$ pro každé n a $\varphi_n \xrightarrow{w^*} 0$.* Můžete se podívat na poznámku v 16.17.c.

(d) Buď K kompaktní prostor a $\{f_n\}$ posloupnost funkcí Banachova prostoru $\mathcal{C}(K)$. Potom $f_n \xrightarrow{w} f$, právě když $\sup_n \|f_n\| < \infty$ a $f_n(t) \to f(t)$ v každém bodě $t \in K$.

Návod. Jestliže $\sup_n \|f_n\| < \infty$ a $f_n(t) \to f(t)$ pro každé $t \in K$, potom pomocí Lebesgueovy věty máme $\mu f_n \to \mu f$ pro každou nezápornou Radonovu míru μ na K. Odtud je již jen krůček k důkazu, že $L f_n \to L f$ pro každý prvek $L \in \mathcal{C}(K)^*$ (musíme použít 2.14.d a rozklad libovolné (znaménkové) Radonovy míry).

Pokud $f_n \xrightarrow{w} f$, potom posloupnost norem $\{\|f_n\|\}$ je omezená. Tady se musíme odvolat na tvrzení v 4.7. Abychom ukázali, že posloupnost $\{f_n\}$ konverguje bodově k f na K, stačí si uvědomit, že Diracovy míry ε_t jsou prvky $\mathcal{C}(K)^*$. ♣

Vraťme se nyní k řadám v Banachových prostorech.

3.10. Absolutní a bezpodmínečná konvergence. Řada $\sum_n a_n$ v normovaném lineárním prostoru se nazve *absolutně konvergentní*, jestliže konverguje řada $\sum_n \|a_n\|$ a *bezpodmínečně konvergentní*, konverguje-li řada $\sum_n a_{\pi(n)}$ pro každou permutaci π přirozených čísel.

Podívejme se nejprve, jaká je situace pro řady reálných čísel. Máme-li konvergentní řadu $\sum_n a_n$ reálných čísel se součtem A, mohou nastat dva případy: Buďto řada $\sum_n a_{\pi(n)}$ konverguje pro každou permutaci π přirozených čísel (v tom případě pak $\sum_n a_{\pi(n)} = A$) anebo existuje permutace π, pro kterou řada $\sum_n a_{\pi(n)}$ nekonverguje. První případ nastane, právě když řada $\sum_n a_n$ je absolutně konvergentní (někdy se tomuto tvrzení říká *Dirichletova věta*). V druhém případě je pak řada $\sum_n a_n$ neabsolutně konvergentní a ať si zvolíme jakékoliv $\alpha \in \mathbf{R}$, existuje permutace π tak, že $\sum_n a_{\pi(n)} = \alpha$. Dokonce můžeme přerovnat řadu $\sum_n a_n$ tak, aby divergovala k $+\infty$, $-\infty$, či aby dokonce oscilovala. To vše říká *Riemannova věta*.

Každá absolutně konvergentní řada v Banachově prostoru je i bezpodmínečně konvergentní. Pro důkaz tohoto tvrzení by si stačilo osvěžit myšlenku důkazu pro řady reálných čísel. My v další větě dokážeme vlastně malinko více. Zároveň uvidíme, jakou roli zde hraje úplnost prostoru.

3.11. Věta. *Nechť E je normovaný lineární prostor. Potom následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) *E je Banachův,*
(ii) *každá absolutně konvergentní řada v E je konvergentní,*
(iii) *každá absolutně konvergentní řada v E je bezpodmínečně konvergentní.*

Důkaz. Nechť E je Banachův a $\sum_n \|x_n\| < \infty$. Využijeme-li odhadu

$$\|x_n + x_{n+1} + \cdots + x_k\| \le \|x_n\| + \|x_{n+1}\| + \cdots + \|x_k\|$$

vidíme, že posloupnost částečných součtů řady $\sum_n x_n$ je cauchyovská v E. Tudíž řada $\sum_n x_n$ musí konvergovat.

Ze (iii) triviálně plyne (ii). Ale také naopak. Je-li totiž $\sum_n x_n$ absolutně konvergentní a $\pi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ přerovnání, plyne z odhadu $\sum\limits_{n=1}^{k} \|x_\pi(n)\| \le \sum_n \|x_n\| < \infty$, že řada $\sum_n x_{\pi(n)}$ konverguje absolutně. Předpokládáme-li tedy (ii), musí tato přerovnaná řada konvergovat.

Předpokládejme nyní (ii) a volme cauchyovskou posloupnost $\{x_n\}$ v E. Nalezneme-li její vybranou konvergentní podposloupnost, bude $\{x_n\}$ určitě konvergentní. Ale to není obtížné. Určitě existuje taková posloupnost indexů $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, že $\|x_{n_{j+1}} - x_{n_j}\| < 1/2^j$. Protože číselná řada $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|x_{n_{j+1}} - x_{n_j}\|$ konverguje, musí podle předpokladu konvergovat i řada $\sum\limits_{j=1}^{\infty} (x_{n_{j+1}} - x_{n_j})$. Tudíž existuje $\lim x_{n_j}$, neboť $x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}) + \dots + (x_{n_j} - x_{n_{j-1}}) = x_{n_j}$. ■

Konverguje-li nějaká řada bezpodmínečně, je její součet nezávislý na pořadí jejích sčítanců. Je totiž stejný pro libovolnou permutaci $\pi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$. Toto tvrzení ovšem musíme dokázat.

3.12. Věta. *Nechť řada $\sum_n x_n$ konverguje v Banachově prostoru X bezpodmínečně. Potom její součet nezávisí na jejím jakémkoliv přerovnání.*

Důkaz. Nechť π a ν jsou permutace $\mathbf{N}$, $s := \sum_n x_{\pi(n)}$, $t := \sum_n x_{\nu(n)}$, přičemž $s \neq t$. Zvolme okolí U a V bodů s a t v prostoru X tak malá, aby se neprotínala. Důkaz bude proveden, najdeme-li takové přerovnání naší řady, které nekonverguje. Ale to není těžké. Najdeme index n_1 tak, aby součet $\sum\limits_{j=1}^{n_1} x_{\pi(j)}$ padl do okolí U. Dále nalezneme index $n_2 > n_1$ tak, aby v součtu $\sum\limits_{j=1}^{n_2} x_{\nu(j)}$ se vyskytly všechny členy $x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n_1)}$ a aby tento součet ležel v okolí V. Vytvoříme posloupnost, kde za prvky $x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n_1)}$ dáme prvky $x_{\nu(1)}, \dots, x_{\nu(n_2)}$ samozřejmě s vynecháním těch prvků, které by se v této posloupnosti vyskytly dvakrát. Tak pokračujeme dále. Je jasné, že výsledná přeházená řada nemůže konvergovat.

Uveďme ještě jinou myšlenku důkazu. Protože $s \neq t$, existuje podle důsledku Hahn-Banachovy věty 2.20 spojitá lineární forma $\varphi \in X^*$ tak, že $\varphi(s) \neq \varphi(t)$. Číselná řada $\sum_n \varphi(x_{\pi(n)})$ nemůže podle Dirichletovy věty konvergovat absolutně (neboť $\sum_n \varphi(x_{\pi(n)}) = \varphi(s) \neq \varphi(t) = \sum_n \varphi(x_{\nu(n)})$). Podle Riemannovy věty, o které jsme se zmínili, existuje permutace σ přirozených čísel tak, že řada $\sum_n \varphi(x_{\sigma(n)})$ diverguje. Odtud vyplývá, že řada $\sum_n x_{\sigma(n)}$ nemůže konvergovat k žádnému prvku z X. ■

3.13. Rozdíl konečné a nekonečné dimenze. Jaká je situace v prostorech konečné dimenze? Dirichletova věta říká, obdobně jako tomu bylo pro řady reálných čísel, že řada prvků konečně dimenzionálního Banachova prostoru konverguje absolutně, právě když konverguje bezpodmínečně. To není těžké si uvědomit. Konvergence v $\mathbf{R}^n$ je konvergencí po složkách a je stejná ve všech ekvivalentních normách.

V nekonečně rozměrných prostorech již Dirichletova věta neplatí, uveďme následující příklad. Uvažujme Banachův prostor c_0 a v něm posloupnost prvků $\{x_n\}$, kde $x_n = (0, \dots, 0, \frac{1}{n}, 0, \dots)$ má pouze na n-tém místě nenulovou hodnotu $\frac{1}{n}$. Je evidentní, že řada $\sum_n x_n$ nekonverguje absolutně. Na druhé straně si stačí rozmyslet, že pro libovolnou permutaci $\pi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ přeházená řada $\sum_n x_{\pi(n)}$ konverguje k prvku $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$.

Jiný příklad je uveden ve cvičení 3.14.m.

Platí hluboká Dvoretzky-Rogersova věta, podle které dokonce v každém Banachově prostoru nekonečné dimenze existuje bezpodmínečně konvergentní řada, která není absolutně konvergentní. K ní se ještě vrátíme v *3.4.c a *10.4.e.

Analogii Riemannovy věty v komplexní rovině $\mathbf{C}$ lze vyslovit takto: *Je-li dána konvergentní řada komplexních čísel, potom množina všech součtů všech možných jejích konvergentních přerovnání je buďto jednobodová (právě v případě, kdy daná řada konverguje bezpodmínečně), nebo přímka v* $\mathbf{C}$*, anebo celá komplexní rovina* $\mathbf{C}$. Důkaz tohoto tvrzení upravený podle práce V. Jarníka [1928] lze nalézt v [Prob], odst. 39.*C.

Situaci v prostorech vyšší dimenze pak vystihuje Lévy-Steinitzova věta, na jejíž znění čtenáře upozorníme v *3.7.a.

V. Jarník

3.14. Elementární cvičení. (a) Nechť $e_n := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ je posloupnost mající na n-tém místě cifru 1, jinde samé nuly. Ukažte, že $e_n \xrightarrow{w} 0$ v libovolném prostoru l^p pro $p > 1$, zatímco v prostoru l^1 posloupnost $\{e_n\}$ vůbec slabě nekonverguje.

Návod. Uvědomte si, jak vypadají spojité lineární formy na prostorech l^p pro $p \geq 1$. A samozřejmě využijte fakt, že $a_n \to 0$, pokud $\{a_n\} \in l^p$ pro $1 \leq p < \infty$. ♣

(b) Nechť X, Y jsou normované lineární prostory, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Jestliže $x_n \xrightarrow{w} x$, potom $Tx_n \xrightarrow{w} Tx$. Porovnejte s 4.22.d.

(c) Uvažujte posloupnost prvků $x_n := (1, 1, \dots, 1, 0, \dots)$ (cifry 1 až do n-tého místa) Banachova prostoru l^∞. Ukažte, že posloupnost $\{x_n\}$ nemůže konvergovat v normě prostoru l^∞. Dále ukažte, že $x_n \xrightarrow{w^*} x$, kde $x = (1, 1, 1, \dots)$. Nejtěžším problémem je ukázat, že posloupnost $\{x_n\}$ nekonverguje slabě k x (ona nemůže konvergovat slabě k žádnému jinému prvku l^∞, stačí se podívat na 3.4).

Návod. K důkazu posledního tvrzení stačí najít $\Phi \in (l^\infty)^*$ tak, aby $\Phi x_n = 0$ pro každé n a $\Phi x = 1$. K tomu si stačí uvědomit, že $c \subset\subset l^\infty$ a $\varphi : \{\xi_n\} \mapsto \lim \xi_n$ je spojitá lineární forma na c, která jde podle Hahn-Banachovy věty rozšířit na celý prostor l^∞. (Můžete též použít cvičení 3.14.j.) ♣

(d) Nechť $\{e_n\}$ je ortonormální báze (separabilního) Hilbertova prostoru H. Ukažte, že pro každé $x \in H$ řada $\sum_n (x, e_n) e_n$ konverguje bezpodmínečně k x.

(e) Ukažte, že posloupnost $\{f_n\} \subset \mathcal{C}([0,1])$, kde $f_n(0) = 1$, $f_n = 0$ na intervalu $[\frac{1}{n}, 1]$ a f_n je lineární na $[0, \frac{1}{n}]$, ani žádná její vybraná posloupnost nekonverguje slabě (v prostoru $\mathcal{C}([0,1])$).

Návod. Uvědomte si, že Diracovy míry ε_x jsou pro $x \in [0,1]$ prvky duálu. ♣

(f) Nechť $f_n = c_{(n,n+1)}$ na $\mathbf{R}$. Ukažte, že posloupnost $\{f_n\} \subset L^1(\mathbf{R})$ ani žádná její vybraná posloupnost nekonverguje slabě v $L^1(\mathbf{R})$.

Návod. Nechť $\{f_{n_k}\}$ je vybraná posloupnost. Nalezněte $\varphi \in L^\infty$ tak, aby posloupnost $\{\int_{\mathbf{R}} \varphi f_{n_k}\}$ neměla limitu. ♣

(g) Nechť E je normovaný lineární prostor. Jestliže $x_n \xrightarrow{w} x$, potom $\|x\| \le \liminf \|x_n\|$.

Návod. Tvrzení je zřejmé, pokud $x = 0$. Jinak podle důsledku Hahn-Banachovy věty 2.20 nalezněte $f \in E^*$ tak, aby $\|f\| = 1$ a $f(x) = \|x\|$. Potom $\|x\| = \lim f(x_n) \le \liminf \|f\| \, \|x_n\|$. ♣

Poznámka. Podívejte se také na 16.18.b.

(h) Ukažte, že nerovnost v (g) může být i ostrá.

Návod. Uvažujte ortonormální bázi nějakého separabilního Hilbertova prostoru. ♣

(i) Nechť $x_n \xrightarrow{w} x$ v normovaném lineárním prostoru E. Potom existuje posloupnost $\{y_k\}$ (konečných) lineárních kombinací prvků posloupnosti $\{x_n\}$ tak, že $y_k \to x$.

Návod. Nechť $Y = \overline{\operatorname{lin}}\{x_n\}$ je uzavřený lineární obal prvků posloupnosti $\{x_n\}$. Stačí ukázat, že $x \in Y$. Kdyby tomu tak nebylo, existoval by podle důsledku Hahn-Banachovy věty 2.22 funkcionál $\varphi \in E^*$ tak, že $\varphi(x) > 0$ a $\varphi = 0$ na Y. Potom by ovšem nemohlo být $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$. ♣

Poznámka. Platí dokonce, že x je (silnou) limitou konvexních kombinací prvků posloupnosti $\{x_n\}$. Abychom toto ověřili, potřebovali bychom mít v předchozím návodu k dispozici větu Hahn-Banachova typu pro oddělování konvexních množin. Takové věty existují, stačí se podívat třeba na 2.23, stačila by i malá Mazurova věta 14.27.

(j) Nechť Y je uzavřený podprostor normovaného lineárního prostoru E, $x_n \in Y$ a $x_n \xrightarrow{w} x$. Ukažte, že $x \in Y$.

Návod. Použijte předchozí cvičení (i). ♣

(k) Uvažujme posloupnost funkcí $f_n : t \mapsto \sin nt$ na intervalu $[0, 2\pi]$. Ukažte, že posloupnost $\{f_n\}$ konverguje slabě v Hilbertově prostoru $L^2([0,2\pi])$, zatímco v prostoru $\mathcal{C}([0,2\pi])$ slabě nekonverguje. Konverguje v některém z těchto prostorů silně?

Návod. Použijte samozřejmě Fréchet-Rieszovu větu 2.9 a příklad 3.9.d. ♣

(l) Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků Hilbertova prostoru. Jestliže $x_n \xrightarrow{w} x$ a $\|x_n\| \to \|x\|$, potom $x_n \to x$.

Návod. Použijte rovnost

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 - (x_n, x) - \overline{(x_n, x)} + \|x\|^2$$

spolu s poznatkem, že $(x_n, x) \to (x, x) = \|x\|^2$. ♣

(m) V Hilbertově prostoru l^2 uvažujte posloupnost prvků $x_n := (0, \dots, 0, \lambda_n, 0, \dots)$ (na n-tém místě hodnota λ_n). Ukažte, že řada $\sum_n x_n$ je bezpodmínečně konvergentní v l^2, pokud $\{\lambda_n\} \in l^2$, ale není absolutně konvergentní, jestliže $\sum_n |\lambda_n| = \infty$.

4. Základní věty funkcionální analýzy

V této kapitole uvedeme důležité hlubší věty, které spolu s Hahn-Banachovou větou tvoří páteř funkcionální analýzy. Při důkazu věty o principu stejnoměrné omezenosti, kterou náš výklad začneme, budeme potřebovat následující variantu Baireovy věty. O jejím důkazu a o dalších souvislostech se lze dočíst v Appendixu o topologii.

4.1. Baireova věta. *Nechť P je úplný metrický prostor, $\{F_n\}$ posloupnost jeho uzavřených podmnožin a $P = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Potom existuje k tak, že množina F_k má neprázdný vnitřek.*

4.2. Princip stejnoměrné omezenosti. *Nechť X je Banachův prostor, E normovaný lineární prostor a $\mathcal{G} \subset \mathcal{L}(X, E)$. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) $\sup\big\{\|L\| : L \in \mathcal{G}\big\} < +\infty$,

(ii) $\sup\big\{\|Lx\| : L \in \mathcal{G}\big\} < +\infty$ *pro každé* $x \in X$.

Důkaz. Implikace (i) $\Rightarrow$ (ii) plyne ze vztahu $\|Lx\| \le \|L\|\,\|x\|$. Předpokládejme tedy platnost (ii) a položme

$$F_n := \bigcap_{L \in \mathcal{G}} \{x \in X : \|Lx\| \le n\} \quad \text{pro} \quad n \in \mathbf{N}\,.$$

Množiny F_n jsou uzavřené díky spojitosti normy a zobrazení ze systému $\mathcal{G}$ (nesmíme též zapomenout, že průnik libovolného systému uzavřených množin je množina uzavřená). Protože podle předpokladu $X = \bigcup_n F_n$, existuje podle Baireovy věty 4.1 takové k, že množina F_k má neprázdný vnitřek. Tedy existuje $\varepsilon > 0$ a $z \in F_k$ tak, že $\{x \in X : \|x - z\| < 2\varepsilon\} \subset F_k$. Volme pevně $L \in \mathcal{G}$ a $y \in X$, $\|y\| \le 1$. Protože $x := z + \varepsilon y \in F_k$, dostáváme

$$\|Ly\| = \Big\|L\Big(\frac{x - z}{\varepsilon}\Big)\Big\| \le \frac{1}{\varepsilon}\big(\|Lx\| + \|Lz\|\big) \le \frac{2k}{\varepsilon}\,,$$

a tudíž $\|L\| \le \frac{2k}{\varepsilon}$. ∎

Princip stejnoměrné omezenosti lze poněkud zesílit. Platí totiž následující tvrzení.

4.3. Věta. *Nechť opět X je Banachův prostor, E normovaný lineární prostor a $\mathcal{G} \subset \mathcal{L}(X, E)$. Potom následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) $\sup\big\{\|L\| : L \in \mathcal{G}\big\} = +\infty$,

(ii) *existuje* $x \in X$ *tak, že* $\sup\big\{\|Lx\| : L \in \mathcal{G}\big\} = +\infty$,

(iii) *existuje množina* $M \subset X$ *hustá a typu* G_δ *tak, že* $\sup\big\{\|Lx\| : L \in \mathcal{G}\big\} = +\infty$ *pro každé* $x \in M$,

(iv) $\big\{x \in X : \sup\{\|Lx\| : L \in \mathcal{G}\} < +\infty\big\}$ *je 1. kategorie.*

Důkaz. Ekvivalenci (i) a (ii) jsme právě dokázali v předchozí větě. Předpokládejme nyní (ii). Označíme-li $V_n := \big\{x \in X : \sup\{\|Lx\| : L \in \mathcal{G}\} > n\big\}$, jsou V_n podle předpokladu neprázdné. Využijeme-li spojitost normy a definice suprema, lehko ověříme, že V_n jsou také otevřené podmnožiny X . Ukážeme, že V_n jsou také husté v X. Kdyby totiž existovalo k tak, že V_k není hustá v X, existovala by otevřená množina G, $\emptyset \ne G \subset X \setminus V_k$. Potom ovšem $\|Lx\| \le k$ pro každé $x \in G$ a $L \in \mathcal{G}$. Obdobně jako v důkazu předchozí věty bychom ukázali, že potom $\sup\{\|L\| : L \in \mathcal{G}\} < +\infty$, což by bylo ve sporu s (i). Tedy všechny množiny V_n jsou husté a protože X je Baireův, je i G_δ-množina $M := \bigcap_n V_n$ hustá. Samozřejmě, pro $x \in M$ je $\sup\{\|L\| : L \in \mathcal{G}\} = +\infty$. Tím jsme ukázali, že (ii) $\Rightarrow$ (iii). Ježto doplněk každé husté G_δ-množiny je 1. kategorie, plyne ze (iii) ihned (iv). Konečně implikace (iv) $\Rightarrow$ (ii) plyne z toho, že prostor X je Baireův. ∎

4.4. Banach-Steinhausova věta. *Buď X Banachův a E normovaný lineární prostor. Nechť $\{L_n\} \subset \mathcal{L}(X, E)$ je taková posloupnost, že existuje* $\lim L_n x$ *pro každé $x \in X$; označme tuto limitu Lx. Potom $L \in \mathcal{L}(X, E)$.*

Důkaz. Linearita zobrazení L je zřejmá. Z konvergence plyne, že $\sup\{\|L_n x\| : n \in \mathbf{N}\} < \infty$ pro každé $x \in X$. Podle principu stejnoměrné omezenosti 4.2 existuje $M > 0$ tak, že $\|L_n\| \le M$ pro každé n. Potom ovšem využitím spojitosti normy dostaneme, že $\|Lx\| = \lim \|L_n x\| \le M\,\|x\|$, což jsme potřebovali ukázat. ■

4.5. Poznámky. (a) K platnosti Banach-Steinhausovy věty stačí předpokládat, že bodová limita $\lim L_n x$ existuje pro x z množiny 2. kategorie.

(b) Ukažte, že při shora zavedeném označení $\|L\| \le \liminf \|L_n\| < \infty$.

(c) Je-li $\{L_n\}$ libovolná posloupnost z $\mathcal{L}(X,E)$, je množina $\{x \in X : \limsup \|L_n x\| < \infty\}$ buďto 1. kategorie anebo splývá s X.

Návod. Využijte ekvivalenci (i) a (iv) ve větě 4.3. Uvědomte si při tom, že $\limsup a_n < \infty$, právě když $\sup\{a_n : n \in \mathbf{N}\} < \infty$. ♣

(d) V důkazu Banach-Steinhausovy věty jsme podstatným způsobem využili baireovskosti prostoru X. Banach-Steinhausova věta však platí i v obecnějších prostorech (kupř. pro distribuce) a souvisí úzce s *barelovanými* lokálně konvexními prostory (viz 14.8.b).

V dalším podáme některé aplikace principu stejnoměrné omezenosti, další jsou pak uvedeny v kapitole *4.

4.6. Konvergence a divergence Fourierových řad. Než se dostaneme k vlastní aplikaci principu stejnoměrné omezenosti, uveďme některá tvrzení z teorie Fourierových řad.

(a) Budeme uvažovat prostor $\mathcal{P}(2\pi)$ všech 2π-periodických funkcí na $\mathbf{R}$, které jsou na intervalu $[0,2\pi]$ lebesgueovsky integrovatelné. Pro $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ označíme $F_f(x)$ (formální) Fourierovu řadu funkce f v bodě x

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,,$$

kde koeficienty a_n a b_n se spočítají podle známých vzorců

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt \quad \text{a} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt\,.$$

Základní úlohou je zjistit, v jakých bodech Fourierova řada konverguje a k jakému součtu. K tomu účelu je třeba vyšetřit limitu posloupnosti částečných součtů řady $F_f(x)$. Označíme-li tedy $s_n(f,x)$ n-tý částečný součet Fourierovy řady funkce f v bodě x, po chvilce počítání zjistíme, že

$$s_n(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \big[f(x+t) + f(x-t)\big] D_n(t)\,dt\,,$$

kde $D_n(t)$ je t.zv. *Dirichletovo jádro*

$$D_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\,.$$

Fourierova řada pak konverguje v bodě x k součtu S, právě když $\lim s_n(f,x) = S$, což lze ekvivalentně vyjádřit tak, že

$$\lim \int_0^{\pi} \big[f(x+t) + f(x-t) - 2S\big] D_n(t)\,dt = 0\,,$$

ba dokonce, že

$$\lim \int_0^{\delta} \big[f(x+t) + f(x-t) - 2S\big] D_n(t)\,dt = 0\,,$$

kde $\delta > 0$ je libovolně zadané číslo.

L. Carleson

Odtud se lehko odvodí, že kupříkladu Fourierova řada konverguje v bodě x k součtu $f(x)$, jestliže f má vlastní derivaci $f'(x)$ anebo známé Dirichlet-Jordanovo kriterium.

Naproti tomu již v roce 1876 sestrojil du Bois Reymond příklad spojité funkce, jejíž Fourierova řada diverguje v jednom bodě. Lebesgueův příklad funkce stejné vlastnosti lze nalézt v [JII]. Kolmogorov pak ve dvacátých letech sestrojil dokonce příklad integrovatelné funkce, jejíž Fourierova řada diverguje ve všech bodech. Na druhé straně z teorie v Hilbertových prostorech víme (viz 1.36 a 1.34), že Fourierova řada funkce $f \in \mathcal{L}^2(0,2\pi)$ musí konvergovat ve smyslu L^2-normy k f (z toho ovšem ještě nic neplyne pro bodovou konvergenci). Dlouho otevřený problém o bodové konvergenci Fourierových řad funkcí z $\mathcal{L}^2\big((0,2\pi)\big)$ vyřešil až L. Carleson v roce 1965: *Fourierova řada funkce z* $\mathcal{L}^2\big((0,2\pi)\big)$ *(speciálně každé spojité funkce) konverguje ve skoro všech bodech.*

Jako aplikaci principu stejnoměrné omezenosti nyní podáme nekonstruktivní důkaz existence spojité funkce, jejíž Fourierova řada diverguje v nějakém bodě a ukážeme, že tato vlastnost je vlastně „typická“ pro většinu spojitých funkcí.

(b) Uvažujme Banachův prostor $X := \{f \in \mathcal{C}([0,2\pi]) : f(0) = f(2\pi)\}$. Pro $f \in X$ a $n \in \mathbf{N}$ položme $L_n f = s_n(f,0)$. Samozřejmě, L_n jsou lineární funkcionály na X, a protože

$$\|L_n\| = \sup\{|s_n(f,0)| : \|f\| \le 1\} \le \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |D_n(t)|\,dt < \infty\,,$$

jsou L_n omezené funkcionály na X. Ukážeme-li, že dokonce

$$\|L_n\| = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |D_n(t)|\,dt \to +\infty$$

bude $\sup\{\|L_n\| : n \in \mathbf{N}\} = +\infty$. Podle principu stejnoměrné omezenosti 4.2 musí pak existovat spojitá funkce $f \in X$, pro niž posloupnost $\{s_n(f,0)\}$ nekonverguje.

Lze však tvrdit mnohem více. Zesílený princip stejnoměrné omezenosti 4.3 dá existenci takové husté G_δ-množiny $M \subset X$, že $\sup_n |s_n(f,0)| = +\infty$ pro každou funkci $f \in M$. Jinými slovy, existuje „velká“ množina M spojitých funkcí na $[0,2\pi]$, mající tu vlastnost, že Fourierova řada libovolné funkce z této množiny M nekonverguje v bodě 0.

Ale můžeme jít ještě dále. Bod 0 nebyl nikterak výjimečný. Stejně bychom mohli ukázat, že pro každé $x \in [0,2\pi]$ existuje hustá G_δ-množina $\mathcal{C}_x \subset X$ tak, že Fourierova řada libovolné funkce z $\mathcal{C}_x$ nekonverguje v bodě x. Dále si rozmyslíme, že množina $\{x \in [0,2\pi] : \eta(x) = \infty\}$, kde $\eta(x) = \sup_n |s_n(f,x)|$, je typu G_δ. To plyne z toho, že funkce $x \mapsto |s_n(f,x)|$ jsou spojité a že funkce η je jejich supremem. Volíme-li nyní spočetnou hustou množinu $S \subset [0,2\pi]$, je $\mathcal{F} := \bigcap_{x\in S} \mathcal{C}_x$ opět hustá G_δ-množina a pro každou funkci f z této „velké“ (reziduální) množiny Fourierova řada funkce f diverguje na „velké“ (reziduální) množině v $[0,2\pi]$.

Zbývá tedy jen dokázat, že

$$\|L_n\| = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |D_n(t)|\,dt \quad \text{a že} \quad \int_0^\pi |D_n(t)|\,dt \to +\infty\,.$$

První tvrzení bude zřejmé, najdeme-li posloupnost funkcí $f_j \in X$, $\|f_j\| \le 1$ tak, aby

$$\lim_j L_n f_j = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |D_n(t)|\,dt\,.$$

Ale to není těžké, stačí zvolit vhodnou posloupnost $f_j(t) \to \operatorname{sign} \sin(n+\frac{1}{2})t$. K důkazu druhého tvrzení stačí využít odhady

$$\int_0^\pi |D_n(t)|\,dt \ge 2\int_0^\pi \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{t}\,dt = 2\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin y|}{y}\,dy \to +\infty\,.$$

4.7. Omezenost slabě konvergentních posloupností. *Buď $\{x_n\}$ slabě konvergentní posloupnost v normovaném lineárním prostoru E. Potom posloupnost $\{\|x_n\|\}$ je (silně) omezená.*

Důkaz. Volíme-li $\varphi \in E^*$, je posloupnost $\{\varphi(x_n)\}$ konvergentní. Existuje tedy konstanta c_φ (závislá na φ) tak, že $|\varphi(x_n)| \le c_\varphi$ pro každé n. Definujeme-li pro $n \in \mathbf{N}$

$$g_n : \varphi \mapsto \varphi(x_n) \quad \text{pro} \quad \varphi \in E^*$$

(kanonické vnoření!), je $g_n \in E^{**}$ a $\|g_n\| = \|x_n\|$ (viz 2.30). Protože prostor E^* je úplný a posloupnost $\{g_n\}$ je bodově omezená ($|g_n(\varphi)| \le c_\varphi$), je posloupnost norem $\{\|g_n\|\}$ podle principu stejnoměrné omezenosti omezená. A to jsme potřebovali dokázat. ■

4.8. Poznámka. V souvislosti s předešlou větou se blížeji zastavme u problému, zda z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost. Bolzano-Weierstrassova věta říká, že tomu tak zajisté je v prostorech konečné dimenze. Protože v nekonečně dimenzionálních Banachových prostorech podle Rieszovy věty 5.12 vždy existují omezené množiny, třeba koule, které nejsou relativně kompaktní, odpověď na náš problém musí být záporná. Ptejme se tedy, zda alespoň z každé omezené posloupnosti v Banachově prostoru lze vybrat slabě konvergentní podposloupnost. I když se touto problematikou budeme zabývat později v 16. kapitole, uveďme již nyní následující větu. Její důkaz není totiž obtížný a je poměrně poučný.

4.9. Věta. *Z každé omezené posloupnosti v reflexivním Banachově prostoru lze vybrat slabě konvergentní podposloupnost.*

Důkaz. Nechť $\{x_n\}$ je omezená posloupnost reflexivního prostoru X a nechť Y je uzavřený lineární obal množiny $\{x_n\}$. Banachův prostor Y, ve kterém budeme dále pracovat, je samozřejmě separabilní a je též reflexivní (viz *2.12). Podle *2.8.e je Y^* separabilní. Nechť $\{\varphi_n\}$ je jeho hustá podmnožina. Protože (číselná) posloupnost $\{\varphi_1(x_n)\}$ je omezená, lze z posloupnosti $\{x_n\}$ vybrat podposloupnost, označme ji třeba $\{x_n^1\}$, tak, aby posloupnost $\{\varphi_1(x_n^1)\}$ byla konvergentní. Obdobně z posloupnosti $\{x_n^1\}$ lze vybrat podposloupnost, označme ji $\{x_n^2\}$, tak, aby posloupnost $\{\varphi_2(x_n^2)\}$ byla konvergentní. Je zřejmé, jak bychom dále indukcí pokračovali. Uvažujme nyní diagonální posloupnost $\{x_n^n\}$. Je jasné, že posloupnost $\{\varphi_k(x_n^n)\}$ konverguje pro každé k. Není těžké si rozmyslet, že potom musí konvergovat posloupnost $\{\varphi(x_n^n)\}$, ať si zvolíme $\varphi \in Y^*$ jakkoliv. Jestliže totiž $\varphi \in Y^*$ a $\varepsilon > 0$, nalezneme nejdíve φ_k tak, aby $\|\varphi - \varphi_k\| < \varepsilon$. Označíme-li ještě $K := \sup\{\|x_n\| : n \in \mathbf{N}\}$, je podle předpokladu $K < \infty$, přičemž

$$\left|\varphi(x_i^i) - \varphi(x_j^j)\right| \leq 2K\|\varphi - \varphi_k\| + \left|\varphi_k(x_i^i) - \varphi_k(x_j^j)\right| \leq (2K+1)\varepsilon$$

pro dostatečně velká i, j. Ježto tedy posloupnost $\{\varphi(x_n^n)\}$ je cauchyovská, je konvergentní.

Můžeme tedy pro $\varphi \in Y^*$ definovat

$$F(\varphi) := \lim \varphi(x_n^n)\,.$$

Protože $\{x_n\}$ byla omezená posloupnost, je $F \in Y^{**}$. Ale prostor Y byl reflexivní, existuje tedy $x \in Y$ tak, že $\varphi(x) = F(\varphi)$ pro každé $\varphi \in Y^*$. Tudíž $x_n^n \xrightarrow{w} x$, neboť pro každé $\varphi \in Y^*$, a tím spíše i pro každé $\varphi \in X^*$ (jehož restrikce na Y leží v Y^*) máme $\varphi(x_n^n) \to \varphi(x)$. ∎

4.10. Poznámky. (a) Pomocí této věty a cvičení 3.14.e, 3.14.f ukažte, že prostory $\mathcal{C}([0,1])$ a $L^1(\mathbf{R})$ nejsou reflexivní.

(b) V případě Hilbertových prostorů lze tvrzení poslední věty ještě zesílit. Podle *Banach-Saksovy věty* lze z každé omezené posloupnosti v Hilbertově prostoru vybrat slabě konvergentní podposloupnost, která má navíc tu vlastnost, že její aritmetické průměry konvergují silně. Zájemce odkažme na *21.10.

(c) Možná, že je na místě i následující poznámka. Nechť Y je uzavřený podprostor Banachova prostoru X. Jestliže $x_n, x \in Y$ a $x_n \xrightarrow{w} x$ v Y, potom $x_n \xrightarrow{w} x$ také v prostoru X. Platí i opačné tvrzení. Jestliže za stejné situace $x_n \xrightarrow{w} x$ v prostoru X, potom i $x_n \xrightarrow{w} x$ v Y. Je-li totiž $\varphi \in Y^*$, existuje podle Hahn-Banachovy věty $\Phi \in X^*$ tak, že $\varphi = \Phi$ na Y. A závěr je jasný.

Libovolný spojitý lineární operátor převádí slabě konvergentní posloupnosti opět na slabě konvergentní. To je vidět téměř okamžitě z definice slabé konvergence (je-li $T \in \mathcal{L}(M, N)$ a $\varphi \in N^*$, je $\varphi T \in M^*$; ostatně můžete porovnat se cvičením 3.14.b.) Jak ukážeme v následující větě, kompaktní operátory převádějí slabě konvergentní posloupnosti dokonce v silně konvergentní.

4.11. Kompaktní operátory a slabá konvergence. *Buďte M, N normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}_c(M, N)$ kompaktní operátor. Jestliže $x_n \xrightarrow{w} x$, potom $Tx_n \to Tx$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $x_n \xrightarrow{w} 0$. Jak jsme před chvílí poznamenali, $Tx_n \xrightarrow{w} T(0) = 0$. Předpokládejme, že posloupnost $\{Tx_n\}$ nekonverguje k 0. V tom případě existuje $\varepsilon > 0$ a vybraná posloupnost $\{x_{n_k}\}$ tak, že $\|Tx_{n_k}\| \geq \varepsilon$ pro všechna n_k. Podle 4.7 je celá posloupnost $\{\|x_n\|\}$ omezená. Omezená je tedy i její podposloupnost $\{x_{n_k}\}$. Z definice kompaktnosti T existuje $y \in N$ a vybraná posloupnost $\{y_j\}$ z $\{x_{n_k}\}$ tak, že $Ty_j \to y$. Protože však $Ty_j \xrightarrow{w} 0$, je $y = 0$. Tudíž $\|Ty_j\| \to 0$, což vede ke sporu.

Princip důkazu spočívá na následující myšlence. Je-li $K \subset N$ kompaktní množina, potom slabá w-topologie splývá na K s normovou topologií (podívejte se na B.7 a uvědomte si, že slabá w-topologie je Hausdorffova a slabší než normová topologie), a tudíž obě topologie musejí mít stejné konvergentní posloupnosti. Jelikož tedy posloupnost $\{Tx_n\}$ je obsažena v nějaké kompaktní množině (z důvodu, že posloupnost $\{x_n\}$ je omezená a T zobrazuje omezené množiny na množiny, jejichž uzávěr je kompakt) a $Tx_n \xrightarrow{w} Tx$, musí i $Tx_n \to Tx$. ∎

4.12. Poznámka. Operátory, které převádějí slabě konvergentní posloupnosti na silně konvergentní, nazýval D. Hilbert *úplně spojitými*, v českém překladu též *totálně spojitými*. Právě v Hilbertových prostorech bývají kompaktní operátory velice často takto definovány. Definice kompaktních operátorů, kterou jsme použili, náleží F. Rieszovi. Obecně, úplně spojité operátory nemusejí být kompaktní. Podle Rieszovy věty 5.12 identické zobrazení v prostoru l^1 není určitě kompaktní, ale s odvoláním na Schurovo lemma *3.2 je úplně spojité. Je zajímavé, že pojmy úplně spojitých a kompaktních operátorů splývají v reflexivních prostorech. Platí totiž následující věta.

Věta. *Buď X reflexivní prostor. Potom operátor $K \in \mathcal{L}(X)$ je kompaktní, právě když $Kx_n \to Kx$, kdykoliv $x_n \xrightarrow{w} x$.*

Důkaz. Nechť K je úplně spojitý operátor na reflexivním prostoru X a $\{x_n\}$ je posloupnost z jednotkové koule v X. Podle 4.9 existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ z $\{x_n\}$ a $x \in X$ tak, že $x_{n_k} \xrightarrow{w} x$. Podle předpokladu $Kx_{n_k} \to Kx$, a tedy podle definice K je kompaktní. ■

Úplně spojité a kompaktní operátory splývají i v jiných prostorech. Zájemce odkažme na *4.3.

4.13. Otevřená zobrazení. Řekneme, že zobrazení $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je *otevřené*, jestliže $T(G)$ je otevřená podmnožina oboru hodnot $\mathcal{R}T := T(X)$, kdykoliv G je otevřená podmnožina X.

Pozor, dobře rozlišujte, zda $T(G)$ je otevřená množina v $\mathcal{R}T$ či v Y. Příklad identického zobrazení $X \subset Y \to Y$ ukazuje, že to není zdaleka totéž.

4.14. Banachova věta o otevřeném zobrazení. *Buď $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, kde X, Y jsou Banachovy prostory. Jestliže $\mathcal{R}T = Y$, je T otevřené zobrazení.*

Důkaz. Důkaz je poněkud náročnější. Pokusíme se nastínit hlavní myšlenky. Označíme-li V otevřenou kouli o středu v počátku, stačí ukázat, že TV je okolím 0. Bude-li potom $U \subset X$ otevřená množina a $y \in TU$, nalezneme $x \in U$ a $\varepsilon > 0$ tak, aby $Tx = y$ a $x + U(0,\varepsilon) \subset U$. Existuje tedy podle právě řečeného $\delta > 0$ tak, že $U(0,\delta) \subset TU(0,\varepsilon)$. Potom

$$y + U(0,\delta) \subset Tx + TU(0,\varepsilon) = T\big(x + U(0,\varepsilon)\big) \subset TU\,,$$

čímž bude dokázáno, že TU je otevřená množina.

Označme tedy $U_n := U(0, 2^{-n})$. Nejdříve dokážeme, že $\overline{TU_1}$ obsahuje otevřenou kouli. Odtud již odvodíme, že $\overline{TU_0}$ je okolím 0. Protože $X = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} k\,U_1$, vyplývá z linearity T, že

$$Y = \mathcal{R}T = T\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} k\,U_1\Big) = \bigcup_{k=1}^{\infty} k\,TU_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{k\,TU_1}\,.$$

Prostor Y je úplný, musí tedy podle Baireovy věty 4.1 existovat k tak, že množina $\overline{k\,TU_1}$ má neprázdný vnitřek. Tudíž i množina $\overline{TU_1}$ musí obsahovat nějakou otevřenou kouli.

Nyní ukážeme, že $\overline{TU_0}$ je okolím nuly. Podle právě dokázaného existuje $\varepsilon > 0$ a $z \in \overline{TU_1}$ tak, že $U(z,\varepsilon) \subset \overline{TU_1}$. Pokud se nám podaří dokázat, že $\overline{TU_1} - z \subset \overline{TU_0}$, budeme hotovi, neboť pak $U(0,\varepsilon) = U(z,\varepsilon) - z \subset \overline{TU_1} - z \subset \overline{TU_0}$. Volme tedy $y \in \overline{TU_1} - z$. Potom $y + z \in \overline{TU_1}$, a protože samozřejmě i $z \in \overline{TU_1}$, existují posloupnosti $\{w_n\}$ a $\{z_n\}$ prvků U_1 tak, že

$$u_n := Tw_n \mapsto y + z \quad \text{a} \quad v_n := Tz_n \mapsto z\,.$$

Z nerovností $\|w_n - z_n\| \le \|w_n\| + \|z_n\| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ dostáváme $w_n - z_n \in U_0$. A protože $T(w_n - z_n) = u_n - v_n \mapsto y$, je $y \in \overline{TU_0}$.

Zatím jsme sestrojili $\varepsilon > 0$ tak, aby $U(0,\varepsilon) \subset \overline{TU_0}$. Z rovnosti $\overline{TU_n} = 2^{-n}\,\overline{TU_0}$ plyne ihned, že $U(0,\frac{\varepsilon}{2^n}) \subset \overline{TU_n}$.

Nyní dokážeme, že $U(0,\frac{\varepsilon}{2}) \subset TU_0$, čímž celý důkaz završíme. Volme $y \in U(0,\frac{\varepsilon}{2})$. Potřebujeme nalézt $x \in U_0$ tak, aby $Tx = y$.

Protože $y \in U(0,\frac{\varepsilon}{2}) \subset \overline{TU_1}$, existuje $v \in TU_1$, $\|y - v\| < \frac{\varepsilon}{4}$. Nalezli jsme tudíž $x_1 \in U_1$, pro něž $\|y - Tx_1\| < \frac{\varepsilon}{4}$ $(v = Tx_1)$.

Protože $y - Tx_1 \in U(0,\frac{\varepsilon}{4}) \subset \overline{TU_2}$, existuje $x_2 \in U_2$ tak, že $\|(y - Tx_1) - Tx_2\| < \frac{\varepsilon}{8}$. Takto můžeme pokračovat dále. Nalezneme posloupnost $\{x_k\}$ s vlastnostmi

$$\|x_k\| < \frac{1}{2^k} \quad \text{a} \quad \Big\|y - \sum_{k=1}^{n} Tx_k\Big\| < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

pro každé n. Položme $z_n := x_1 + \dots + x_n$. Protože

$$\|z_n - z_m\| \le \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| < \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{2^k}$$

pro každé $n > m$, je posloupnost $\{z_n\}$ cauchyovská. Existuje tedy $\lim z_n$, označme ji x. Protože $\|z_n\| \to \|x\|$ a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$, je $x \in U_0$. A to jsme již u závěru důkazu. Na jedné straně máme $Tz_n \to Tx$ (T je spojitý), na druhé pak $Tz_n \to y$, neboť $\|y - Tz_n\| < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$, odkud $Tx = y$. ■

Věta 4.14 připouští částečné obrácení. Platí totiž následující Banachova alternativa.

4.15. Banachova alternativa. *Nechť X je Banachův prostor, Y normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Potom buďto*

(a) *$\mathcal{R}T$ je 1. kategorie,*

anebo

(b) *$\mathcal{R}T = Y$, T je otevřené zobrazení a prostor Y je úplný.*

Důkaz. Předpokládáme-li, že $\mathcal{R}T$ je 2. kategorie, projde důkaz předchozí věty a ukáže se stejně, že T je otevřené zobrazení X do Y (povšimněte si, že v předchozím důkaze jsme použili rovnost $Y = \mathcal{R}T$ a úplnost Y k závěru, že množina $\overline{TU_1}$ má neprázdný vnitřek; stačilo samozřejmě předpokládat, že $\mathcal{R}T = TX$ je 2. kategorie). Protože potom $\mathcal{R}T$ je otevřený podprostor Y, musí nutně být $\mathcal{R}T = Y$. Zbývá dokázat, že prostor Y je úplný. Uvažujme kanonické zobrazení $q : X \to X/\ker T$. Protože jádro $\ker T$ je uzavřený podprostor, je faktorprostor $X/\ker T$ úplný a zobrazení q spojité a otevřené. To vše podle věty *1.11. Existuje právě jedno zobrazení $S : X/\ker T \to Y$ tak, že $T = S \circ q$ (stačí položit $S(x + \ker T) = Tx$). Zobrazení S je očividně algebraickým izomorfizmem (je prosté a zachovává algebraické operace). Ukážeme-li, že S zobrazuje $X/\ker T$ homeomorfně na Y, bude prostor Y úplný. Ale S je skutečně homeomorfizmem. Je-li totiž $G \subset Y$ otevřená množina, je $S^{-1}(G) = q(T^{-1}(G))$ také otevřená, neboť T je spojité a q otevřené. A naopak, máme-li v prostoru $X/\ker T$ otevřenou množinu U, je $S(U) = T(q^{-1}(U))$ opět otevřená, protože pro změnu T je otevřené a q spojité. ■

4.16. Důsledek. *Buďte X, Y Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ prosté zobrazení X na Y. Potom operátor T^{-1} je spojitý.*

Důkaz. Protože $\mathcal{R}T = Y$, je tvrzení bezprostředním důsledkem Banachovy věty o otevřeném zobrazení a definice spojitého zobrazení. ■

4.17. Uzavřené zobrazení. Řekneme, že lineární zobrazení L mezi normovanými lineárními prostory M a N je je *uzavřené*, jestliže jeho graf $L := \{(z, Lz) : z \in M\}$ je uzavřená množina v $M \times N$. Samozřejmě, $M \times N$ uvažujeme jako součin dvou normovaných lineárních prostorů (viz *1.10).

Definici lze také přepsat takto (uvědomte si, že konvergence v $M \times N$ je konvergence po složkách!): Zobrazení L je uzavřené, jestliže

$$z_n \to z \quad \text{v} \quad M\,, Lz_n \to y \quad \text{v} \quad N\,, \quad \text{potom} \quad Lz = y\,.$$

Každé spojité lineární zobrazení je uzavřené; opačná implikace však zdaleka neplatí, jak ukazuje následující příklad.

4.18. Příklad. Nechť $M := \{f \in \mathcal{C}([0,1]) : f' \in \mathcal{C}([0,1])\}$. Uvažujme zobrazení $L : M \to \mathcal{C}([0,1])$ definované předpisem $f \mapsto f + f'$. Evidentně L je lineární zobrazení, které není spojité (stejnoměrná konvergence posloupnosti $\{f_n\}$ nic neudává o konvergenci posloupnosti derivací $\{f'_n\}$). Ukážeme, že L je uzavřené. Nechť tedy $f_n \in M$, $f_n \to f$ a $Lf_n \to g$ (konvergence jsou stejnoměrné!). Volme $x \in [0,1]$. Protože $\int_0^x f'_n = f_n(x) - f_n(0)$, je

$$\int_0^x g = \lim \int_0^x Lf_n = \lim\bigl(f_n(x) - f_n(0)\bigr) + \int_0^x f = f(x) - f(0) + \int_0^x f$$

(vše je třeba pořádně zdůvodnit) a dostáváme $g = f' + f = Lf$.

V tomto příkladě si uvědomte, že prostor M není úplný.

4.19. Věta o uzavřeném grafu. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a L uzavřené zobrazení X do Y. Potom L je spojité.*

Důkaz. Z definice uzavřenosti L plyne, že graf L je uzavřený podprostor Banachova prostoru $X \times Y$. Tedy graf L je Banachův prostor. Uvažujeme-li zobrazení $P : (x, Lx) \mapsto x$ pro $x \in X$, je

$$\|P(x, Lx)\| = \|x\| \le \|x\| + \|Lx\| = \|(x, Lx)\|\,.$$

Zobrazení P je lineární, prosté, na a $\|P\| \le 1$. Podle důsledku 4.16 je inverzní zobrazení P^{-1} omezené, a tudíž

$$\|Lx\| \le \|x\| + \|Lx\| = \|(x, Lx)\| = \|P^{-1}(x)\| \le \|P^{-1}\|\,\|x\|$$

pro každé $x \in X$. Což jsme potřebovali dokázat. ■

Důkaz následujícího tvrzení dlužíme odstavci 1.24.

4.20. Důsledek. *Nechť Banachův prostor X je algebraickým součtem uzavřených podprostorů M a N, $X = M \oplus N$. Potom X je i jejich topologickým součtem: $X = M \oplus_t N$.*

Důkaz. Buď $P_M : X \to M$ příslušná projekce. Naším úkolem je ukázat, že P_M je spojitá. Protože M je uzavřený podprostor X, je M úplný a podle věty o uzavřeném grafu stačí ověřit, že P_M je uzavřené zobrazení. Jestliže ale $x_n \to x$ v X a $P_M x_n \to y$, potom $y \in M$ a $\lim(x_n - P_M x_n) = x - y$ musí ležet v N (neboť $x_n - P_M x_n \in N$ a N je uzavřený). Protože $x = y + (x - y)$, je $P_M x = y$. ■

4.21. Poznámka. Pokud je Banachův prostor X algebraickým součtem dvou podprostorů, z nichž jeden je uzavřený, nemusí být X jejich topologickým součtem. Stačí vzít příklad nějakého uzavřeného podprostoru, který nemá v X topologický doplněk. Ten samozřejmě algebraický doplněk v X má.

Uveďme ještě jiný příklad. Vezměme na (nekonečně dimenzionálním) Banachově prostoru X nespojitý lineární funkcionál φ. Jeho existenci jsme si rozmysleli v 2.6.c. Potom $X = \ker \varphi \oplus F$, kde F má dimenzi 1 (viz A.4). Protože každý konečně dimenzionální podprostor X je uzavřený, je i F uzavřený. Přesto X není topologickým součtem $\ker \varphi$ a F.

4.22. Elementární cvičení. (a) Podobnou metodou jako v 4.10 ukažte, že prostor $L^1([0,1])$ není reflexivní.

(b) Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Potom buďto $\mathcal{R}T$ je uzavřený anebo je 1. kategorie (dokonce v sobě).

(c) Podmnožina M normovaného lineárního prostoru E je omezená, právě když (číselná) množina $\varphi(M)$ je omezená pro každý funkcionál $\varphi \in E^*$.

Návod. Podívejte se na množinu $\{\varepsilon_x : x \in M\}$ a použijte princip stejnoměrné omezenosti 4.2. ♣

(d) Buď T lineární zobrazení mezi normovanými lineárními prostory X a Y. Jestliže T převádí slabě konvergentní posloupnosti v X na slabě konvergentní posloupnosti v Y ($Tx_n \overset{w}{\to} Tx$, pokud $x_n \overset{w}{\to} x$), potom $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.

(e) Ukažte že každé zobrazení tvaru $I - K$, kde K je kompaktní operátor na Banachově prostoru, je otevřené.

Návod. Použijte 5.17, tvrzení, že uzavřený podprostor Banachova prostoru je úplný a větu o otevřeném zobrazení.

Poznámka. Můžete dokázat následující tvrzení: *Jsou-li X, Y Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, je T otevřené zobrazení, právě když $\mathcal{R}T := T(X)$ je uzavřený podprostor Y.* ♣

(f) Dokažte následující tvrzení známé jako *Osgoodovo lemma*. Nechť T úplný metrický prostor (obecněji Baireův topologický prostor) a $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(T)$ bodově omezená množina spojitých funkcí. Potom existuje neprázdná otevřená podmnožina $G \subset T$ a $K > 0$ tak, že $|f(x)| \le K$ pro každé $f \in \mathcal{F}$ a $x \in G$.

Poznámka. $\mathcal{F}$ je *bodově omezená* množina funkcí na T, jestliže ke každému $x \in T$ existuje $K_x > 0$ tak, že $|f(x)| \le K_x$ pro každé $f \in \mathcal{F}$.

Návod. Množiny $F_{n,f} := \{x \in T : |f(x)| \le n\}$ jsou uzavřené (ze spojitosti f) pro každé $f \in \mathcal{F}$ a n, a tudíž i množiny $F_n := \bigcap_{f \in \mathcal{F}} F_{n,f}$ jsou uzavřené pro každé $n \in \mathbf{N}$. Podle předpokladů je $\bigcup_n F_n = T$, musí tedy existovat k tak, že množina F_k má neprázdný vnitřek. Nyní stačí položit $G = \operatorname{Int} F_k$ a $K = k$. ♣

(g) Nechť $\{T_n\}$ je posloupnost z $\mathcal{L}(X,E)$, kde X je Banachův prostor a E normovaný lineární prostor, konvergující bodově k 0. Je-li K relativně kompaktní podmnožina X, konverguje posloupnost $\{T_n\}$ k 0 na K stejnoměrně. Tedy $\lim T_n x = 0$ pro každé $x \in X$ implikuje $\lim\{\sup \|T_n x\| : x \in K\} = 0$.

Návod. Použijte princip stejnoměrné omezenosti. ♣

(h) Definujte funkcionály L_n a T_n na prostoru c_{00} předpisy

$$L_n : \{\alpha_j\} \mapsto n\alpha_n \quad \text{a} \quad T_n : \{\alpha_j\} \mapsto \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \,.$$

Potom $L_n, T_n \in c_{00}^*$. Evidentně $\|L_n\| = n$, přičemž $\sup\{|L_n(\alpha)| : n \in \mathbf{N}\} < \infty$ pro každý prvek $\alpha \in c_{00}$.

Ukažte dále, že $T_n \in c_{00}^*$, a že posloupnost $\{T_n\}$ konverguje bodově na c_{00}. Přesto její limita není spojitým lineárním funkcionálem na c_{00}.

Poznámka. Tento příklad tedy ukazuje, že jak princip stejnoměrně omezenosti v 4.2, tak Banach Steinhausova věta 4.4 neplatí obecně v neúplných normovaných lineárních prostorech. Jiné příklady lze nalézt v 14.5 či *14.1.

Na druhé straně tyto věty šikovně formulované stále ještě platí v úplných pseudonormovaných či v úplných kvazinormovaných prostorech zavedených v *14.13.

(k) Nechť $\{x_n\}$ je taková posloupnost reálných čísel, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ konverguje, kdykoliv $\lim \alpha_n = 0$. Ukažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje absolutně.

Návod. Zpočátku se zkuste zamyslet nad elementárním důkazem. Jinak lze použít Banach-Steinhausovu větu 4.4, kde položíme $X = c_0$, $E = \mathbf{R}$ a $L_k(\{\alpha_n\}) = \sum_{n=1}^{k} \alpha_n x_n$. Do úvahy je nutno vzít i popis duálu k c_0 z 2.14.a. ♣

(l) Uvažujte identické zobrazení id : $\big(\mathcal{C}([0,1]), \|.\|\big) \to \big(\mathcal{C}([0,1]), \|.\|_i\big)$ prostoru spojitých funkcí na $[0,1]$, jednou uvažovaného s max-normou a podruhé s integrální normou (viz 1.10.b). Ukažte, že

(l1) id je prosté, spojité lineární zobrazení,
(l2) id není otevřené a nemá spojitou inverzi,
(l3) obraz $\mathcal{C}([0,1])$ při zobrazení id je 1. kategorie,
(l4) inverzní zobrazení k id je uzavřené.

Návod. Jednotková koule $\{f \in \mathcal{C}([0,1]) : \|f\| < 1\}$ není otevřená v prostoru $\big(\mathcal{C}([0,1]), \|.\|_i\big)$. Pro důkaz (l3) ukažte, že množiny $\{f \in \mathcal{C}([0,1]) : \|f\| \le n\}$ jsou uzavřené a řídké v prostoru $\big(\mathcal{C}([0,1]), \|.\|_i\big)$ pro každé n. (Tvrzení v (l3) také plyne z Banachovy alternativy 4.15 za pomocí (l1) a (l2).) ♣

(m) Ukažte, že prostor $L^2([0,1])$ je 1. kategorie v Banachově prostoru $L^1([0,1])$.

Návod. Uvažujte identické vnoření $L^2([0,1])$ do $L^1([0,1])$ a využijte Banachovu alternativu 4.15. ♣

(n) Nechť $\|.\|_1$ a $\|.\|_2$ jsou úplné normy na vektorovém prostoru X, pro něž existuje $\beta > 0$ tak, že $\|x\|_1 \le \beta \|x\|_2$ pro každé $x \in X$. Ukažte, že $\|.\|_1$ a $\|.\|_2$ jsou ekvivalentní.

Návod. Jelikož identické zobrazení $(X, \|.\|_2)$ na $(X, \|.\|_1)$ je spojité, stačí použít větu 4.16. ♣

(o) Nechť $T \in \mathcal{L}(c_0)$ je zobrazení definované předpisem $T : \{x_n\} \to \{\frac{x_n}{n}\}$. Je T otevřené?

Návod. Podívejte se na obraz otevřené jednotkové koule. ♣

(p) V sérii cvičení dokazujte následující *faktorizační věty*:

(p1) Nechť V, W jsou vektorové prostory, $T : V \to W$ lineární zobrazení a $q : V \to V/\ker T$ kanonické zobrazení (zopakujme, že $q(x) := x + \ker T$). Potom existuje právě jedno zobrazení $\widehat{T} : V/\ker T \to W$ tak, že $T = \widehat{T} \circ q$. Zobrazení $\widehat{T}$ je izomorfní zobrazení $V/\ker T$ na $T(X)$ (prosté zobrazení zachovávající algebraické operace).

Návod. Pro $x + \ker T$ položte $\widehat{T}(x + \ker T) = Tx$. Především ukažte, že tato definice je korektní (samozřejmě, pokud $x_1 + \ker T = x_2 + \ker T$, potom $Tx_1 = Tx_2$). ♣

(p2) Nechť M, N jsou normované lineární prostory a $T : M \to N$ uzavřený (lineární) operátor. Nechť $\widehat{T}$: $M/\ker T \to N$ je (jednoznačně určený) operátor z (p1). Ukažte, že $\widehat{T}$ je uzavřený. Navíc operátor $T^{-1} : T(M) \to M/\ker T$ je také uzavřený.

(p3) Nechť M, N jsou opět normované lineární prostory, $T \in \mathcal{L}(M, N)$ a $\widehat{T} : M/\ker T \to N$ jako dříve. Ukažte že $\widehat{T} \in \mathcal{L}(M/\ker T, N)$, $\widehat{T}$ je prosté a $\|T\| = \|\widehat{T}\|$.

Návod. Protože $\|\widehat{T}(qx)\| = \|Tx\| = \|T(x - t)\| \le \|T\|\,\|x - t\|$ pro každé $t \in \ker T$, je podle definice normy ve faktorovém prostoru $M/\ker T$ splněna nerovnost $\|\widehat{T}(qx)\| \le \|T\|\,\|qx\|$. Odtud dostáváme jednu nerovnost $\|\widehat{T}\| \le \|T\|$. Na druhé straně $\|Tx\| = \|\widehat{T}(qx)\| \le \|\widehat{T}\|\,\|qx\| \le \|\widehat{T}\|\,\|x\|$, odkud plyne druhá nerovnost $\|T\| \le \|\widehat{T}\|$. ♣

(p4) Nechť $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, kde X, Y jsou Banachovy prostory a $TM = Y$. Je-li $\widehat{T}$ zobrazení jako výše, je $\widehat{T}$ homeomorfní a (algebraicky) izomorfní zobrazení $X/\ker T$ na Y.

(q) Nechť $T \in \mathcal{L}(M, N)$, kde M, N jsou normované lineární prostory, $T(M) = N$. Potom následující dvě podmínky jsou ekvivalentní:

(i) T je otevřené zobrazení,
(ii) existuje takové $\beta > 0$, že ke každému $y \in N$ existuje $x \in M$ s vlastnostmi $Tx = y$ a $\|x\| \le \beta \|Tx\|$.

Návod. Především si uvědomte, že v důsledku otevřenosti a spojitosti kanonického zobrazení $q : M \to M/\ker T$, otevřené množiny v $M/\ker T$ jsou právě množiny tvaru $q(G)$, kde $G \subset M$ je otevřená. Dále, jestliže $x_1 - x_2 \in \ker T$, potom $x_1 + \ker T = x_2 + \ker T$. Odtud plyne, že zobrazení $S : N \to M/\ker T$ je korektně definované předpisem $Sy := x + \ker T$, jestliže x je takový prvek M, pro nějž $Tx = y$. Protože $S^{-1}(q(G)) = T(G)$, je S spojité, právě když T je otevřené. Z definici normy v prostoru $M/\ker T$ dále plyne, že S je spojité, právě když existuje $\beta > 0$ tak, že $\|x + \ker T\| := \inf\{\|x + t\| : t \in \ker T\} \le \beta \|Tx\|$ pro každé $x \in M$.

Ekvivalenci můžete také odůvodnit jinak. Lehce totiž zjistíte, že T je otevřené zobrazení, právě když existuje $\beta > 0$ tak, že $\{x \in N : \|x\| < \frac{1}{\beta}\} \subset T(B_M)$. ♣

(r) Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $TX = Y$. Jestliže T je otevřené zobrazení, je Y úplný.

Návod. Můžete se podívat na důkaz Banachovy alternativy 4.15 či postupovat přímo. V tom případě volte cauchyovskou posloupnost $\{y_n\}$ v Y a nalezněte její vybranou posloupnost $\{y_{n_k}\}$ tak, aby $\|y_{n_{j+1}} - y_{n_j}\| < 1/2^j$. Nyní použijte předchozí cvičení (q). Existují $\beta > 0$ a posloupnost $\{x_j\}$ tak, že $Tx_j = y_{n_{j+1}} - y_{n_j}$ a $\|x_j\| \le \beta \|y_{n_{j+1}} - y_{n_j}\|$. Zřejmě $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|$ konverguje. Jelikož X je úplný prostor, konverguje i řada $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$, její součet označme x. Ze spojitosti a linearity T máme $\sum_{j=1}^{\infty} Tx_j = Tx$. To neznamená ale nic jiného, než že $y_{n_{j+1}} \to y_{n_1} + Tx$. Protože ale posloupnost $\{y_n\}$ je cauchyovská a její vybraná posloupnost konverguje, jsme s důkazem hotovi. ♣

(s) Nechť X, Y jsou Banachovy prostory. Ukažte, že množina $\mathcal{J} := \{T \in \mathcal{L}(X, Y) : TX = Y\}$ je otevřená v $\mathcal{L}(X, Y)$.

Návod. Nechť $T \in \mathcal{J}$. Protože T je otevřené, existuje podle cvičení (q) $\beta > 0$ s jistými vlastnostmi. Stačí ukázat, že $U := \{S \in \mathcal{L}(X, Y) : \|S - T\| < \frac{1}{2\beta}\} \subset \mathcal{J}$. Volme tedy $S \in U$ a $y \in Y$. Aniž ztratíme na obecnosti, předpokládejme $\|y\| \le 1$ a hledejme $x \in X$ tak, aby $Sx = y$. Existuje $x_0 \in X$ tak, že $Tx_0 = y$ a $\|x_0\| \le \beta$. Pokračujme dále. Položme $y_1 = Tx_0 - Sx_0$. Potom $\|y_1\| \le \frac{1}{2}$. Nalezněme $x_1 \in X$ tak, aby $Tx_1 = y_1$ a $\|x_1\| \le \frac{\beta}{2}$. Opět položíme $y_2 = Tx_1 - Sx_1$. Jelikož $\|y_2\| \le \frac{1}{4}$, pokračujeme zřejmým způsobem indukcí dále. Položíme-li $x = \sum_{j=0}^{\infty} x_j$, dostaneme $Sx = y$. ♣

B. Spektrální teorie

5. Riesz-Schauderova teorie kompaktních operátorů

V celé této kapitole se budeme zabývat Banachovým prostorem operátorů $\mathcal{L}(X)$ na Banachově prostoru X. Symbolem I budeme značit identické zobrazení X na X.

Snad pouze poznamenejme, že v tomto prostoru lze definovat i násobení jako skládání operátorů. S touto novou operací (a jednotkou I) pak prostor $\mathcal{L}(X)$ tvoří Banachovu algebru. Této nové struktuře se budeme hlouběji věnovat až v následující kapitole.

5.1. Obor hodnot operátoru. Je-li T operátor na Banachově prostoru X, budeme množinu $T(X)$ nazývat *oborem hodnot* operátoru T a značit ji $\mathcal{R}T$. Obor hodnot $\mathcal{R}T$ je vždy lineárním podprostorem X. V případě konečné dimenze prostoru X je tedy $\mathcal{R}T$ vždy uzavřený podprostor.

Příklad v 5.14 ukazuje, že v prostorech nekonečné dimenze nemusí být obor hodnot omezeného lineárního operátoru uzavřený. O podmínkách, kdy tomu tak je, se lze dočíst v 8.2, *5.3 či v *4.1. My podáme pouze v následujícím lemmatu jednoduchou postačující podmínku pro uzavřenost oboru hodnot operátoru.

5.2. Lemma. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Existuje-li $\beta > 0$ tak, že $\|Tx\| \geq \beta\|x\|$ pro každé $x \in X$, potom $\mathcal{R}T$ je uzavřená množina.*

Operátorům splňujícím podmínku z lemmatu se říká *zdola omezené* (viz též 8.1).

Důkaz. Nechť $z_n \in \mathcal{R}T$, $z_n \to z$. Najděme $x_n \in X$ tak, aby $Tx_n = z_n$. Potom $\|x_n - x_k\| \leq \beta^{-1}\|z_n - z_k\|$ a vidíme, že posloupnost $\{x_n\}$ je cauchyovská. Existuje tedy $\lim x_n =: x$ a ze spojitosti operátoru T dostáváme $Tx = z$. ■

5.3. Vlastní hodnoty operátoru. Pro pohodlí připomeňme, že (komplexní) číslo λ se nazývá *vlastní hodnotou* operátoru $T \in \mathcal{L}(X)$, existuje-li $x \neq 0$, pro něž $Tx = \lambda x$. Jinými slovy, λ je vlastní hodnotou T, není-li operátor $T - \lambda I$ prostý. Množinu všech vlastních hodnot T značíme $\sigma_p(T)$ a nazýváme ji *bodovým spektrem* T.

Jaká je situace v konečné dimenzi? Předpokládejme, že A je lineární operátor na vektorovém prostoru X konečné dimenze. Nechť M je matice operátoru A v nějaké bázi prostoru X. Potom A je prostý operátor, právě když $\mathcal{R}A = X$, a to nastane právě v případě, kdy determinant matice M je nenulový.

Následující věta, která bývá obyčejně nazývána Fredholmovou alternativou, pak plně charakterizuje vlastní hodnoty operátoru A.

Věta. *Následující výroky jsou ekvivalentní pro lineární operátor na konečně dimenzionálním vektorovém prostoru X:*

(i) *λ není vlastní hodnota operátoru T,*
(ii) $\mathcal{R}(T - \lambda I) = X$,

Což lze vyslovit také takto. Buďto rovnice $Tx - \lambda x = y$ má řešení pro každé $y \in X$, anebo homogenní rovnice $Tx = \lambda x$ má netriviální řešení.

V prostorech nekonečné dimenze je situace diametrálně rozdílná. Existují v nich operátory, které jsou prosté a nejsou na a naopak.

5.4. Spektrum operátoru. Řekneme, že komplexní číslo $\lambda \in \mathbf{C}$ leží ve *spektru* $\sigma(T)$ operátoru T, jestliže buďto operátor $T - \lambda I$ není prostý, anebo jestliže $\mathcal{R}(T - \lambda I) \neq X$. Je jasné, že ve spektru operátoru T leží všechny jeho vlastní hodnoty.

5.5. Invertibilní operátory. Neleží-li λ ve spektru operátoru T, je operátor $T - \lambda I$ prostý a jeho oborem hodnot je celý prostor X. Operátory s touto vlastností se dají charakterizovat i jiným způsobem. Říkáme, že operátor T definovaný na Banachově prostoru X je *invertibilní*, existuje-li operátor $L \in \mathcal{L}(X)$ tak, že $LT = TL = I$. Následující jednoduchou větičku můžete porovnat se cvičením 5.32.e.

5.6. Věta. *Operátor $T \in \mathcal{L}(X)$ je invertibilní, právě když T je prostý a na.*

Důkaz. Nechť T je invertibilní. Existuje tedy $L \in \mathcal{L}(X)$ tak, že $LT = I$ a $TL = I$. Pokud $Tx = 0$, potom z první rovnosti dostáváme $x = L(Tx) = L0 = 0$. Je tedy T prostý. Volíme-li $y \in X$ libovolně, stačí položit $x = Ly$, abychom pomocí druhé rovnosti ukázali, že $y = T(Ly) = Tx$. Odtud plyne, že operátor T zobrazuje X na X.

Máme-li prostý operátor $T \in \mathcal{L}(X)$ s vlastností $\mathcal{R}T = X$, je (množinové) inverzní zobrazení T^{-1} opět lineární operátor na X, který je podle důsledku Banachovy věty o otevřeném zobrazení 4.16 spojitý. Samozřejmě pro něj platí, že $T(T^{-1}x) = T^{-1}(Tx) = x$ pro každé $x \in X$. ■

5.7. Lemma. *Buď T invertibilní operátor na Banachově prostoru X, $\alpha := \|T^{-1}\|$. Jestliže $S \in \mathcal{L}(X)$ a $\|S - T\| < \frac{1}{\alpha}$, je i operátor S invertibilní.*

Důkaz. Protože

$$\Big\|\sum_{j=k}^{n}\big(T^{-1}(T-S)\big)^j\Big\| \le \sum_{j=k}^{n}\|(T^{-1}(T-S))^j\| \le \sum_{j=k}^{n}\big\|(T^{-1}(T-S))\big\|^j \le \sum_{j=k}^{n} q^j$$

pro každé $k < n$, kde $q = \alpha\|S-T\| < 1$, je posloupnost částečných součtů řady $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\big(T^{-1}(T-S)\big)^j$ cauchyovská v $\mathcal{L}(X)$ (dokonce tato řada je absolutně konvergentní). Můžeme tedy položit

$$L := \Big(\sum_{j=0}^{\infty}\big(T^{-1}(T-S)\big)^j\Big)T^{-1}\,.$$

Uvědomíme-li si, že $S = T\big(I - T^{-1}(T-S)\big)$, výpočtem snadno zjistíme, že $LS = SL = I$. ■

Poznámka. Lemma nám vlastně říká, že množina všech invertibilních operátorů na Banachově prostoru X je otevřená v prostoru $\mathcal{L}(X)$.

5.8. Věta. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Potom spektrum $\sigma(T)$ je kompaktní podmnožina komplexní roviny $\mathbf{C}$. Dokonce máme $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \le \|T\|\}$.*

Důkaz. Z předchozího lemmatu 5.7 plyne, že množina všech invertibilních elementů je otevřená v prostoru $\mathcal{L}(X)$. Je-li tedy $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \sigma(T)$ a číslo $|\mu - \lambda|$ je dostatečně malé, je i operátor $T - \mu I$ invertibilní. Což neznamená nic jiného, než že μ neleží ve spektru $\sigma(T)$.

Chceme ukázat, že $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \le \|T\|\}$. Volme tedy $\lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda| > \|T\|$. Operátor $A := -\lambda I$ je zajisté invertibilní. Položíme-li $S := T - \lambda I$, je $\|S - A\| = \|T\| < |\lambda| = \|A^{-1}\|^{-1}$. Lemma 5.7 říká, že v tom případě je operátor $S = T - \lambda I$ invertibilní. Jinými slovy, $\lambda \notin \sigma(T)$. ■

Poznámka. Gelfandova věta 6.18, kterou dokážeme později, říká, že spektrum libovolného operátoru $T \in \mathcal{L}(X)$ je vždy neprázdná podmnožina $\mathbf{C}$. Důkaz tohoto tvrzení je již poněkud obtížnější. Je založen na hlubších vlastnostech zobrazení $\lambda \mapsto (T - \lambda I)^{-1}$.

O tom, že pojmy spektra a bodového spektra zdaleka nesplývají, svědčí následující příklady.

5.9. Příklady. (a) Uvažujme na Hilbertově prostoru l^2 operátor R definovaný předpisem

$$R : (x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots)\,.$$

Není těžké zjistit, že $\|R\| = 1$ (R je dokonce izometrie). Tudíž spektrum $\sigma(R)$ musí ležet v kruhu $\{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \le 1\}$.

Ukážeme, že bodové spektrum $\sigma_p(R)$ je prázdná množina. Kdyby totiž λ bylo vlastní číslo operátoru R, existoval by nenulový prvek $z := \{z_n\} \in l^2$ tak, že

$$Rz = (0, z_1, z_2, \dots) = \lambda z = (\lambda z_1, \lambda z_2, \dots)\,.$$

Potom ovšem z této rovnosti dostáváme, ať je již $\lambda = 0$ či $\lambda \ne 0$, že $z_1 = z_2 = \cdots = 0$.

Ukážeme nyní, že libovolné $|\lambda| \le 1$ leží ve spektru $\sigma(R)$. Operátor $R - \lambda I$ nezobrazuje l^2 na l^2. Neexistuje totiž $z := \{z_n\} \in l^2$ tak, aby

$$(R - \lambda I)z = (-\lambda z_1, z_1 - \lambda z_2, z_2 - \lambda z_3, \dots) = (1, 0, 0, \dots)\,.$$

Vyloučíme-li triviální případ $\lambda = 0$, musel by z uvedené rovnosti prvek z mít tvar $z = (\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda^3}, \dots)$. Ten však pro $|\lambda| \le 1$ určitě v l^2 neleží.

(b) Obdobně jako v (a) definujme operátory S a T na l^2 předpisy

$$S : (x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_2, \frac{x_3}{2}, \frac{x_4}{3}, \dots) \quad \text{a} \quad T : (x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots) .$$

Sami si rozmyslete, že $\sigma(S) = \sigma_p(S) = \{0\}$, $\sigma_p(T) = \emptyset$ a $\sigma(T) = \{0\}$.

Návod. Není těžké ukázat, že operátory $S - \lambda I$ a $T - \lambda I$ jsou prosté pro $\lambda \neq 0$, T je prostý a S nikoliv. Tudíž $\sigma_p(S) = \{0\}$ a $\sigma_p(T) = \emptyset$. Dokázat tvrzení, že pro $\lambda \neq 0$ operátory $S - \lambda I$ a $T - \lambda I$ zobrazují l^2 na l^2, dá mnohem více práce a je to technicky náročnější. Nicméně se o to pokuste! Přitom je snadné ukázat, že jak S tak i T jsou kompaktní operátory (jsou totiž limitou konečně dimenzionálních; chcete-li, můžete se též podívat na příklad 8.17). Dále pak použijte Fredholmovy věty. ♣

(c) Pro f z Hilbertova prostoru $L^2([0,1])$ položme $Lf(t) := tf(t)$. Ukažte, že $L \in \mathcal{L}\big(L^2([0,1])\big)$. Není těžké si rozmyslet, že L nemá žádné vlastní hodnoty. Pokud totiž $Lf = \lambda f$, musí být $0 = \|Lf - \lambda f\|^2 = \int_0^1 |\xi - \lambda|^2 \, |f(\xi)|^2 \, d\xi$. Tudíž $|\xi - \lambda| \, |f(\xi)| = 0$ pro skoro všechna ξ, což ukáže, že $f = 0$ skoro všude.

Operátor $L - \lambda I$ je tedy prostý pro každé $\lambda \in \mathbf{C}$. Mějme teď $\lambda \in \mathbf{C} \setminus [0,1]$. Jestliže za této situace volíme $g \in L^2([0,1])$ a položíme $f(t) = \frac{g(t)}{t-\lambda}$, je samozřejmě $Lf - \lambda f = g$. Ukážeme-li, že $f \in L^2([0,1])$, dostaneme, že operátor $L - \lambda I$ má inverzi (jinak řečeno, je prostý a na), a tedy $\lambda \notin \sigma(L)$. Důkaz, že $f \in L^2([0,1])$ by však neměl činit potíže ani průměrnému studentovi.

Dokážeme, že $\sigma(L) = [0,1]$. Stačí tedy volit $\lambda \in [0,1]$ a ukázat, že operátor $L - \lambda I$ není na. Ale i to je snadné, která funkce z $L^2([0,1])$ by se mohla zobrazit na funkci $g(t) = 1$?

Dostáváme se tedy k Riesz-Schauderově teorii, v jejímž základu leží následující důležité lemma.

5.10. Rieszovo lemma o skoro-kolmici. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $Y \subset\subset X$ jeho vlastní uzavřený podprostor. Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $x_\varepsilon \in X$ tak, že*

$$\|x_\varepsilon\| = 1 \quad a \quad \operatorname{dist}(x_\varepsilon, Y) \geq 1 - \varepsilon .$$

Důkaz. Předpokládejme, že $0 < \varepsilon < 1$ a $x \in X \setminus Y$. Jelikož $d := \operatorname{dist}(x, Y) > 0$, existuje $x' \in Y$ pro něž $\|x - x'\| \leq \frac{d}{1-\varepsilon}$. Položíme-li $x_\varepsilon = \frac{x - x'}{\|x - x'\|}$, je $\|x_\varepsilon\| = 1$ a

$$\|z - x_\varepsilon\| = \frac{1}{\|x - x'\|} \big\|(\|x - x'\| \, z + x') - x\big\| \geq \frac{\operatorname{dist}(x, Y)}{\|x - x'\|} \geq 1 - \varepsilon$$

pro libovolné $z \in Y$.

5.11. Poznámky. (a) Pro důkaz Rieszova lemmatu lze také využít Hahn-Banachovu větu. Můžete postupovat následovně. Protože Y je vlastní uzavřený podprostor X, existuje podle jedné z variant Hahn-Banachovy věty 2.22 takové $\varphi \in X^*$, pro něž $\|\varphi\| = 1$ a $\varphi = 0$ na Y. Podle definice normy funkcionálu (přesněji, podle poznámky 2.6.a) k danému $\varepsilon \in (0,1)$ existuje $x_\varepsilon \in X$ tak, že $\|x_\varepsilon\| = 1$ a $|\varphi(x_\varepsilon)| > 1 - \varepsilon$. Volíme-li $y \in Y$, máme $1 - \varepsilon < |\varphi(x_\varepsilon)| = |\varphi(x_\varepsilon) - \varphi(y)| = |\varphi(x_\varepsilon - y)| \leq \|\varphi\| \, \|x_\varepsilon - y\| = \|x_\varepsilon - y\|$.

Ještě jiné důkazy Rieszova lemmatu jsou obsaženy v *5.2.

(b) Obecně „Rieszovo lemma“ pro $\varepsilon = 0$ nemusí platit. Stačí se podívat na příklady 1.39.m či 5.32.h. Je-li ale prostor X reflexivní a Y jeho vlastní uzavřený podprostor, existuje vždy $x \in X$ tak, že $\|x\| = 1$ a $\operatorname{dist}(x, Y) = 1$. Podívejte se opět na 5.32.l. ■

5.12. Rieszova věta. *Buď X normovaný lineární prostor. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) *X má konečnou dimenzi,*
(ii) *uzavřená jednotková koule $\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ je kompakt,*
(iii) *identické zobrazení v X je kompaktní.*

Důkaz. Implikace (i) ⇒(ii) je známa z kurzu analýzy a její důkaz je ukryt v důkazu věty 1.7, (ii) ⇒(iii) je elementární. Předpokládejme tedy, že $\dim X = +\infty$. Existují podprostory $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \cdots \subset X$ tak, že $\dim X_n = n$. Podle předešlého Rieszova lemmatu najděme posloupnost $\{x_n\}$, pro niž

$$\|x_n\| = 1 \quad , \quad x_{n+1} \in X_{n+1} \quad \text{a} \quad \operatorname{dist}(x_{n+1}, X_n) \geq \frac{1}{2}$$

(využíváme i faktu, že konečně-dimenzionální podprostory X jsou uzavřené, viz 1.9). Odtud plyne, že $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$ pro $n \neq m$, takže identické zobrazení nemůže být kompaktní. ■

5.13. Poznámka. Někdy je vidět přímo, že uzavřená jednotková koule není kompaktní. Podívejte se na příklady 5.32.a či 5.32.b.

5.14. Jádro a obor hodnot operátoru. Připomeňme, že

$$\ker T := \{x \in X : Tx = 0\} \quad \text{a} \quad \mathcal{R}T := T(X)$$

nazýváme *jádrem* a *oborem hodnot* operátoru $T \in \mathcal{L}(X)$. Zatímco $\ker T$ ja vždy uzavřený podprostor X, $\mathcal{R}T$ nemusí být uzavřená množina. Stačí uvažovat operátor $T \in \mathcal{L}(c_0)$ daný předpisem

$$T\{x_n\} = \{\tfrac{1}{n}x_n\}\,.$$

Pro $x_n := (1, 1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots)$ máme nyní

$$Tx_n = (1, \tfrac{1}{2}, \ldots, \tfrac{1}{n}, 0, 0, \ldots) \to (1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \ldots) \notin \mathcal{R}T\,.$$

Jiným příkladem operátoru (mezi dvěma prostory) s neuzavřeným oborem hodnot může sloužit identické zobrazení $\mathcal{C}([0,1])$ do Banachova prostoru $L^1([0,1])$.

5.15. Věta. *Buď K kompaktní operátor na normovaném lineárním prostoru X. Potom* $\ker(I - K)$ *je (uzavřený) konečně dimenzionální podprostor X.*

Důkaz. Označme $B = \{x \in \ker(I-K) : \|x\| \leq 1\}$. Protože $\ker(I-K) = \{x \in X : Kx = x\}$, je $KB = B$, a tudíž B musí být (relativně) kompaktní. Rieszova věta tedy dává, že $\ker(I-K)$ je konečně dimenzionální. ■

5.16. Věta. *Je-li K kompaktní operátor na nekonečně dimenzionálním normovaném lineárním prostoru X, je $0 \in \sigma(K)$.*

Důkaz. Kdyby spektrum $\sigma(K)$ neobsahovalo 0, byl by K invertibilní operátor. Jelikož $I = K^{-1} \circ K$, byla by identita kompaktní operátor podle 2.48.b. ■

5.17. Věta. *Nechť $K \in \mathcal{L}_c(X)$ je kompaktní operátor na Banachově prostoru X. Potom $\mathcal{R}(I - K)$ tvoří uzavřený podprostor X.*

Důkaz. Označme $T = I - K$ a $Z = \ker(I-K)$. Podle věty 5.15 je $\dim Z < \infty$, existuje tedy topologický doplněk W k Z (viz 2.27). Protože W je uzavřený, je W Banachův prostor. Dále $\mathcal{R}T = T(W)$. Dokážeme-li, že T je zdola omezený na W, jsme hotovi s přihlédnutím k lemmatu 5.2. Kdyby tedy T nebyl na W zdola omezený, existovala by posloupnost $x_n \in W$ s vlastnostmi $\|x_n\| = 1$ a $Tx_n \to 0$. Využitím kompaktnosti K lze předpokládat, že $Kx_n \to y$. Protože $\lim x_n = \lim(Tx_n + Kx_n) = y$, je $y \in W$. Protože však $Tx_n \to Ty$, je na druhé straně $Ty = 0$ a $y \in Z$. Dostáváme, že $y = 0$, což je ve sporu s tím, že $1 = \lim \|x_n\| = \|y\|$. ■

5.18. Anihilátory. Nechť X je normovaný lineární prostor, $M \subset\subset X$ a $N \subset\subset X^*$. Definujeme *anihilátory* předpisem

$$\begin{aligned} M^{\perp} &= \{\varphi \in X^* : \varphi(x) = 0 \text{ pro všechna } x \in M\} \quad , \\ {}^{\perp}N &= \{x \in X : \varphi(x) = 0 \text{ pro všechna } \varphi \in N\}\,. \end{aligned}$$

Zřejmě $M^{\perp}$ a ${}^{\perp}N$ tvoří uzavřené podprostory a $X^{\perp} = \{0\}$, ${}^{\perp}X^* = \{0\}$ (pokaždé z jiného důvodu).

Následující dvě věty ukáží těsný vztah mezi anihilátory, jádry a obory hodnot původního i adjungovaného operátoru. Nezapomeňte přitom, že jádro spojitého lineárního operátoru je vždy uzavřené, zatímco obor hodnot nemusí být. První větu budeme neustále využívat, k další, která je hlubší, se vrátíme později.

5.19. Věta. *Jsou-li X, Y normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, je*
$$\ker T' = \mathcal{R}T^{\perp} \quad a \quad \ker T = {}^{\perp}\mathcal{R}(T')\,.$$

Důkaz. Pro důkaz uvedených rovností stačí použít definice anihilátorů a adjungovaného zobrazení. Máme $a \in \ker T'$, právě když $T'(a)(x) = a(Tx) = 0$ pro každé $x \in X$. Poslední rovnost říká, že $a(z) = 0$ pro všechna $z \in \mathcal{R}T$, což neznamená nic jiného, než že $a \in \mathcal{R}T^{\perp}$. Dále, $x \in \ker T$, právě když $Tx = 0$. To nastane přesně v případě, kdy $\varphi(Tx) = T'(\varphi)(x) = 0$ pro každé $\varphi \in Y^*$. A to je, právě když $z'(x) = 0$ pro každé $z' \in \mathcal{R}(T')$, čili když $x \in {}^{\perp}\mathcal{R}(T')$. ■

5.20. Poznámka. Protože obor hodnot $\mathcal{R}T$ nemusí být vždy uzavřenou množinou (podívejte se na příklad v 5.14), zatímco ${}^{\perp}\ker T'$ vždy je, nemůže obecně platit rovnost $\mathcal{R}T = {}^{\perp}\ker T'$. Nicméně platí alespoň následující rovnost.

5.21. Věta. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Potom*
$$\overline{\mathcal{R}T} = {}^{\perp}\ker T'\,.$$

Důkaz. Nechť $y \in \mathcal{R}T$ a $\varphi \in \ker T'$. Chceme zprvu ukázat, že $\varphi(y) = 0$. Ale $y = Tx$ pro nějaké $x \in X$, odkud $\varphi(y) = \varphi(Tx) = (T'\varphi)(x) = 0$ (neboť $T'\varphi = 0$). Tím jsme ukázali, že $\mathcal{R}T \subset {}^{\perp}\ker T'$. Protože však jakýkoliv anihilátor je vždy uzavřený, máme $\overline{\mathcal{R}T} \subset {}^{\perp}\ker T'$.

Dokazujme nyní opačnou inkluzi. Nechť tedy $y \notin \overline{\mathcal{R}T}$. Protože $\overline{\mathcal{R}T}$ je uzavřený podprostor Y, existuje podle Hahn-Banachovy věty 2.22 $\varphi \in Y^*$ tak, že $\varphi = 0$ na $\overline{\mathcal{R}T}$ a $\varphi(y) \neq 0$. Je-li tedy $x \in X$, je $\varphi(Tx) = 0$, tudíž i $T'(\varphi(x)) = 0$, což neznamená nic jiného než $\varphi \in \ker T'$. Protože však $\varphi(y) \neq 0$, máme $y \notin {}^{\perp}\ker T'$ ■

5.22. Poznámka. Podobná rovnost pro $\mathcal{R}T'$ obecně neplatí. Uveďme příklad. Definujeme-li operátor T na prostoru l^1 předpisem $T : \{x_n\} \mapsto \{\frac{1}{n}x_n\}$, lehce zjistíme, že adjungovaný operátor $T' \in \mathcal{L}(l^\infty)$ je dán jako $T' : \{z_n\} \mapsto \{\frac{1}{n}z_n\}$. Chápeme-li c_0 jako podprostor l^∞, je $\mathcal{R}T' \subset c_0$ a $\overline{\mathcal{R}T'} = c_0$. Na druhé straně je $(\ker T)^{\perp} = l^\infty$. To plyne z následující věty, jejíž jak znění, tak i důkaz, vyžadují znalosti ze slabých topologií (potřebujeme Hahn-Banachovu větu pro w^*-topologii). Důkaz je bezprostředním důsledkem vět 5.19 a 16.5.

5.23. Věta. Nechť $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, kde X, Y jsou normované lineární prostory. Potom $\overline{\mathcal{R}T'}^{w^*} = (\ker T)^{\perp}$.

5.24. Fredholmova alternativa. *Buď K kompaktní operátor na Banachově prostoru X a $\lambda \neq 0$. Potom operátor $K - \lambda I$ je prostý, právě když je na.*

Důkaz. Roznásobením lehko zjistíme, že pro $n = 0, 1, 2, \ldots$ je $(K - \lambda I)^n = S - \mu I$, kde $S \in \mathcal{L}_c(X)$. Podle věty 5.17 tedy $M_n := \mathcal{R}((K - \lambda I)^n)$ je uzavřený podprostor X. Zřejmě $X = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \ldots$. Ukážeme, že $M_n = M_{n+1}$ pro jisté $n = 0, 1, \ldots$. Kdyby tomu tak nebylo, byl by M_{n+1} vlastní uzavřený podprostor M_n pro každé n a podle Rieszovy věty 5.12 by existovala posloupnost $\{x_n\}$ s vlastnostmi $x_n \in M_n$, $\|x_n\| = 1$ a $\operatorname{dist}(x_n, M_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$. Potom pro $m > n$ dostáváme
$$Kx_n - Kx_m = y + \lambda x_n\,,$$
kde $y = (K - \lambda I)x_n - (K - \lambda I)x_m - \lambda x_m \in M_{n+1}$ podle definice M_{n+1}. To nás vede ke sporu s kompaktností K, neboť
$$\|Kx_n - Kx_m\| = \|y + \lambda x_n\| = |\lambda| \left\|\frac{1}{\lambda}y + x_n\right\| \geq \frac{1}{2}|\lambda|\,.$$
Předpokládejme nyní, že $K - \lambda I$ je prostý. Ukážeme, že $M_{n-1} = M_n$ za předpokladu, že $M_n = M_{n+1}$ pro nějaké $n > 0$. Odtud potom dostaneme, že $M_1 = M_0 = X$, což neříká nic jiného, než $\mathcal{R}(K - \lambda I) = X$. Volme tedy $t \in M_{n-1}$. Najděme $x \in X$ tak, aby $t = (K - \lambda I)^{n-1}x$. Potom ovšem
$$(K - \lambda I)t = (K - \lambda I)^n x \in M_n = M_{n+1}\,.$$
Existuje tedy $z \in X$ tak, že $(K - \lambda I)t = (K - \lambda I)^{n+1}z$ a odtud plyne konečně (využitím prostoty $K - \lambda I$), že $t = (K - \lambda I)^n z \in M_n$.

Nyní za předpokladu $\mathcal{R}(K - \lambda I) = X$ dostáváme $\ker(K - \lambda I)' = X^{\perp} = \{0\}$. Ale $(K - \lambda I)' = K' - \lambda I'$, kde K' je kompaktní operátor podle Schauderovy věty 2.53. Ježto tedy $K' - \lambda I'$ je prostý (a I', což je adjungovaný operátor k I, je identita I_{X^*} na X^*), plyne z právě dokázaného, že $\mathcal{R}(K' - \lambda I') = X^*$. Tedy $\ker(K - \lambda I) = {}^{\perp}X^* = \{0\}$, což přesně říká, že $K - \lambda I$ je prostý. ■

5.25. Poznámka. Nechť K je kompaktní operátor na Banachově prostoru a $\lambda \neq 0$ není jeho vlastní číslo. Potom podle Fredholmovy alternativy (s přihlédnutím k větě 5.6) je operátor $K - \lambda I$ invertibilní. To zdůrazněme hned na tomto místě. Jinou formulaci můžete najít v 5.29.

5.26. Druhá Fredholmova věta. *Buď opět $K \in \mathcal{L}_c(X)$ a $\lambda \neq 0$. Potom*

$$\mathcal{R}(K' - \lambda I') = \ker(K - \lambda I)^{\perp} \quad a \quad \mathcal{R}(K - \lambda I) = {}^{\perp}\ker(K' - \lambda I') .$$

Důkaz. Dokažme první rovnost. Pro důkaz inkluze $\mathcal{R}(K' - \lambda I') \subset \ker(K - \lambda I)^{\perp}$ stačí použít vztah $A \subset ({}^{\perp}A)^{\perp}$ a větu 5.19.

Důkaz opačné inkluze je obtížnější: Označme $\mathcal{N} = \ker(K - \lambda I)$. Jelikož $\dim \mathcal{N} < +\infty$, existuje podle 2.27.a uzavřený podprostor $M \subset\subset X$ tak, že $X = M \oplus_t \mathcal{N}$. Definujme $S : M \to X$ předpisem $Sx = Kx - \lambda x$. Během důkazu věty 5.17 jsme viděli, že $\mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(K - \lambda I)$ a že S je zdola omezený (na M). Speciálně, S je prostý a existuje $\beta > 0$ tak, že $\|y\| \geq \beta \|S^{-1}y\|$. Volme nyní $\varphi \in \mathcal{N}^{\perp}$. Chceme nalézt $\Phi \in X^*$ tak, aby $\varphi = K'\Phi - \lambda\Phi$. Definujme funkcionál ψ na $\mathcal{R}(K - \lambda I)$ (což je uzavřený podprostor X) předpisem $\psi(y) = \varphi(S^{-1}y)$. Zřejmě ψ je lineární a splňuje pro $y \in \mathcal{R}(K - \lambda I)$ nerovnosti

$$\|\psi(y)\| \leq \|\varphi\| \, \|S^{-1}y\| \leq \|\varphi\| \, \frac{1}{\beta} \, \|y\| .$$

Je tedy $\psi \in (\mathcal{R}(K - \lambda I))^*$ a podle Hahn-Banachovy věty 2.18 existuje $\Phi \in X^*$ tak, že $\Phi = \psi$ na $\mathcal{R}(K - \lambda I)$. Tím jsme vlastně u konce důkazu, neboť

$$(K'\Phi - \lambda\Phi)(x) = \Phi(Kx) - \lambda\Phi(x) = \Phi(Kx - \lambda x) = \Phi(Sx) = \varphi(x)$$

pro každé $x \in X$.

Důkaz druhé identity plyne ihned z věty 5.21. ■

5.27. Poznámka. Vraťme se k případu, kdy $\dim X < +\infty$. V této situaci je každý lineární operátor $A : X \to X$ spojitý a je prostý, právě když je na. Fredholmova alternativa, dobře známá z kurzů algebry, pak říká, že rovnice

$$Ax = y$$

má řešení pro **každou** pravou stranu y, právě když homogenní rovnice

$$Ax = 0$$

má pouze triviální řešení. Toto tvrzení již neplatí v prostorech nekonečné dimenze (existují prosté lineární operátory, které nejsou na, a naopak lineární operátory, které jsou na a nejsou prosté). V případě, kdy operátor A má tvar $K - \lambda I$, kde K je kompaktní, platí podle věty 5.24 opět Fredholmova alternativa: Buďto rovnice

$$Kx - \lambda x = y$$

má řešení pro každé $y \in X$ anebo rovnice

$$Kx = \lambda x$$

má netriviální řešení.

Také druhá Fredholmova věta má „algebraickou“ interpretaci: Rovnice $Ax = y$ má řešení pro danou pravou stranu y, právě když y je kolmé na každé řešení homogenní adjungované rovnice $A'x = 0$. Totéž vpodstatě říká i věta 5.26 (druhá identita): y leží v $\mathcal{R}(K - \lambda I)$, tj. existuje řešení rovnice $Kx - \lambda x = y$, právě když y leží v „kolmici“ k prostoru řešení homogenní adjungované rovnice $K'\varphi - \lambda\varphi = 0$.

Rovněž tak následující věta by měla být dobře známa z algebry: Homogenní rovnice $Ax = 0$ a $A'x = 0$ mají stejný počet lineárně nezávislých řešení.

5.28. Třetí Fredholmova věta. *Je-li K kompaktní operátor na Banachově prostoru X a $\lambda \neq 0$, je*

$$\dim \ker(K - \lambda I) = \dim \ker(K' - \lambda I') < +\infty .$$

Důkaz. Víme již, že uvedená jádra mají konečnou dimenzi. Předpokládejme, že $\{x_1, \dots, x_n\}$ je báze $\ker(K - \lambda I)$, $\{f_1, \dots, f_m\}$ báze $\ker(K' - \lambda I')$, a že $n < m$. Podle poznámky 2.28 a A.6 existují $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in X^*$ a $z_1, \dots, z_m \in X$ tak, že

$$\varphi_j(x_i) = f_j(z_i) = \delta_i^j .$$

Položme

$$Ux = Kx + \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x) z_j \quad \text{pro} \quad x \in X\,.$$

Jakožto součet kompaktního a konečně dimenzionálního operátoru je U kompaktní. Ukážeme-li, že rovnice $Ux - \lambda x = 0$ má pouze triviální řešení, bude podle Fredholmovy alternativy 5.24 existovat $t \in X$ tak, že $Ut - \lambda t = z_{n+1}$. Potom ovšem

$$\begin{aligned} f_{n+1}(z_{n+1}) &= f_{n+1}(Kt - \lambda t + \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x) z_j) = \\ &= (K' f_{n+1} - \lambda f_{n+1})(t) + \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x) f_{n+1}(z_j) = 0\,, \end{aligned}$$

což je ve sporu s $f_{n+1}(z_{n+1}) = 1$.

Nechť tedy $Ux - \lambda x = 0$ a $k \in \{1, \dots, n\}$. Potom

$$f_k(Kt - \lambda t + \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(t) z_j) = 0\,,$$

a protože $f_k(Kt) - \lambda f_k(t) = (K' f_k - \lambda f_k)(t) = 0$ (nesmíme zapomenout, že $f_k \in \ker(K' - \lambda I')$), je $\varphi_k(t) = 0$. Tudíž $Ut = Kt$, odkud $Kt - \lambda t = 0$, tj. $t \in \ker(K - \lambda I)$. Potom ovšem $t = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$. Tím jsme hotovi, neboť $0 = \varphi_k(t) = \alpha_k$, a konečně i $t = 0$.

Podobnou úvahu bychom provedli i v případě $n > m$. Museli bychom se ovšem zaměřit na operátor

$$Vf := K' f + \sum_{i=1}^{m} f(z_i) \varphi_i\,,$$

tentokrát ovšem definovaného na X^*.

Místo toho můžeme provést následující úvahu. Máme již dokázáno, že $\dim\ker(K' - \lambda I') \le \dim\ker(K - \lambda I)$. Potom tedy máme $\dim\ker(K'' - \lambda I'') \le \dim\ker(K' - \lambda I')$. Protože však $\varepsilon \ker(K - \lambda I) \subset \ker(K'' - \lambda I'')$ (snad jste ještě nezapomněli, že ε je kanonické vnoření X do X^{**}), dostáváme kýženou rovnost.

■

5.29. Věta. *Každý nenulový prvek spektra kompaktního operátoru $K \in \mathcal{L}(X)$ je jeho vlastním číslem, tj. $\sigma(K) \subset \{0\} \cup \sigma_p(K)$.*

Důkaz. Není-li $\lambda \neq 0$ vlastním číslem K, je podle Fredholmovy alternativy 5.24 prvek $\lambda I - K$ invertibilní, což znamená, že $\lambda \notin \sigma(K)$. ■

Poznámka. Bod 0, který vždy leží ve spektru kompaktního operátoru podle 5.16, může, ale také nemusí být jeho vlastní hodnotou. Příklady v 5.9 ilustrují tento fakt.

5.30. Věta. *Buď $\varepsilon > 0$ a $K \in \mathcal{L}_c(X)$. Potom množina $\sigma(K) \cap \{\lambda : |\lambda| \ge \varepsilon\}$ je konečná.*

Důkaz. S přihlédnutím k předešlé větě předpokládejme, že $\{\lambda_n\}$ je posloupnost různých vlastních čísel K, $|\lambda_n| \ge \varepsilon > 0$. Jsou-li $x_n \in \ker(\lambda_n I - K)$ příslušné nenulové vlastní vektory, je množina $\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ lineárně nezávislá podle 5.32.f. Nechť X_n je podprostor X, generovaný $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Potom $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \dots$, $X_n \neq X_{n+1}$ a podle Rieszova lemmatu 5.10 existují $z_n \in X_n$ tak, že $\|z_n\| = 1$ a $\operatorname{dist}(z_n, X_{n-1}) \ge \frac{1}{2}$. Volme $m > k$ pevně. Prvek $z := (\lambda_{m+1} I - K) z_{m+1}$ leží v X_m (využijeme rovnosti $z_{m+1} = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m + \alpha_{m+1} x_{m+1}$ a $Kx_j = \lambda_j x_j$), tudíž $z + Kz_k \in X_m + X_k \subset X_m$ (opět $Kx_j = \lambda_j x_j$) a

$$\|Kz_{m+1} - Kz_k\| = \big\|\lambda_{m+1} z_{m+1} - (z + Kz_k)\big\| \ge |\lambda_{m+1}| \operatorname{dist}(z_{m+1}, X_m) \ge \frac{1}{2}\varepsilon\,.$$

Vidíme, že z posloupnosti $\{Kz_n\}$ nelze vybrat konvergentní. ■

5.31. Shrnutí. Buď K kompaktní operátor na Banachově prostoru X. Potom každé $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$ je vlastním číslem K konečné násobnosti ($\dim \ker(\lambda I - K) < \infty$), vlastní čísla tvoří spočetnou množinu, pro niž jedině 0 může být hromadným bodem a vně libovolného kruhu se středem v 0 jich leží pouze konečně mnoho. Pro operátor $\lambda I - K$ platí Fredholmova alternativa a Fredholmovy věty 5.26 a 5.28.

5.32. Elementární cvičení. (a) Ukažte přímo, že uzavřená jednotková koule v $\mathcal{C}([0,1])$ není kompaktní.

Návod. Uvažujte posloupnost po částech lineárních funkcí $\{f_n\}$, kde $f_n = 0$ v intervalech $[0, \frac{1}{n+1}]$ a $[\frac{1}{n-1}, 1]$ a $f(\frac{1}{n}) = 1$. ♣

(b) Ukažte, že uzavřená jednotková koule v l^2 není kompaktní.

Návod. Posloupnost $\{e_n\}$, kde $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ není cauchyovská. ♣

(c) V následujících příkladech je dán operátor $T \in \mathcal{L}(X)$. Vaším úkolem je najít $\|T\|$, $\sigma_p(T)$, $\sigma(T)$ a zjistit, zda T je kompaktní.

(c1) $X = l^2$, $T\{x_n\} = (0, 0, x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \dots)$,
(c2) $X = l^2$, $T\{x_n\} = (ix_1, i^2x_2, i^3x_3, i^4x_4, \dots)$,
(c3) $X = l^2$, $T\{x_n\} = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \dots)$,
(c4) $X = l^5$, $T\{x_n\} = (x_2, x_3, x_4, \dots)$,
(c5) $X = \mathcal{C}([0,1])$, $Tf(x) = \varphi(x)\, f(x)$, kde $\varphi \in \mathcal{C}([0,1])$ je daná funkce,
(c6) $X = \mathcal{C}([0,1])$, $Tf(x) = \int_0^x f(t)\, dt$,
(c7) $X = \mathcal{C}([0,1])$, $Tf(x) = x^2 f(0)$,
(c8) $X = \mathcal{C}([0,1])$, $Tf(x) = f(x^2)$,
(c9) $X = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) : f(0) = 0\}$, $Tf(x) = \int_0^x f(t)\, dt$,
(c10) $X = \mathcal{L}^2([-1,1])$, $Tf(x) = \int_{-1}^1 x^2 t f(t)\, dt$,
(c11) $X = \mathcal{L}^2([0,1])$, $Tf(x) = x \int_0^1 f(t)\, dt$.

(d) Je-li Z uzavřený podprostor normovaného lineárního prostoru E, potom $Z = {}^\perp(Z^\perp)$.

Návod. Pro libovolnou množinu $M \subset E$ je vždy $M \subset {}^\perp(M^\perp)$, jak se lehko přesvědčíme z definice. Nechť tedy $x \in {}^\perp(Z^\perp) \setminus Z$. Podle 2.22 existuje takový funkcionál $\varphi \in E^*$, že $\varphi = 0$ na Z a $\varphi(x) > 0$. Potom ovšem $\varphi \in Z^\perp$, a tudíž x nemůže ležet v ${}^\perp(Z^\perp)$. ♣

(e) Nechť V, W jsou vektorové prostory a $T : V \to W$ lineární zobrazení.

(e1) Existuje-li lineární zobrazení $S : W \to V$ tak, že $T \circ S = I_W$ (identita na W), je $TW = V$.

(e2) Existuje-li lineární zobrazení $L : W \to V$ tak, že $L \circ T = I_V$ (identita na V), je T prosté.

(f) Buďte $x_1, \dots, x_n$ nenulové vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům operátoru $T \in \mathcal{L}(X)$. Ukažte, že $\{x_1, \dots, x_n\}$ jsou lineárně nezávislé.

Návod. Dokazujte sporem, nechť existuje $k < n$ tak, že $\{x_1, \dots, x_k\}$ jsou lineárně nezávislé a $\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i x_i = 0$ pro jistá $(\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}) \neq (0, \dots, 0)$. Potom

$$0 = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i(\lambda_i - \lambda_{k+1})x_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(\lambda_i - \lambda_{k+1})x_i\,,$$

odkud plyne $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ (neboť $\lambda_i \neq \lambda_{k+1}$), a tedy i $\alpha_{k+1} = 0$. ♣

(g) Operátor T na Banachově prostoru X je invertibilní, právě když adjungovaný operátor $T' \in \mathcal{L}(X^*)$ je invertibilní. V tomto případě $\sigma(T) = \sigma(T')$.

Návod. Je-li $T \in \mathcal{L}(X)$ invertibilní, je $(T^{-1})'$ inverzí k T'. Nechý tedy T' je invertibilní. Potřebujeme dokázat, že T je prostý a $\mathcal{R}T = X$. Využitím Banachovy věty o otevřeném zobrazení 4.14 ukažte, že T je zdola omezený operátor. Odtud vyplyne, že T je prostý a má uzavřený obor hodnot (podívejte se na lemma 5.2). Protože však $(\mathcal{R}T)^\perp = \ker T' = \{0\}$, musí být $\mathcal{R}T$ hustou podmnožinou X. ♣

(h) Nechť $X := \{f \in \mathcal{C}([0,1]) : f(0) = 0\}$ a $Y := \{f \in X : \int_0^1 f = 0\}$. Ukažte, že X je Banachův prostor, Y jeho uzavřený podprostor a neexistuje $x \in X$, $\|x\| = 1$ tak, aby $\operatorname{dist}(x, Y) \geq 1$.

Jiný protipříklad na platnost Rieszova lemmatu o skoro kolmici 5.10 pro $\varepsilon = 0$ je obsažen v 1.39.m.

(k) Je-li Y vlastní uzavřený podprostor Banachova prostoru l^p $(1 < p < \infty)$, existuje vždy $x \in l^p$, $\|x\| = 1$ tak, že $\operatorname{dist}(x, Y) = 1$.

(l) Náměty na přemýšlení v (h) a (k) nejsou náhodné, platí totiž dokonce mnohem silnější tvrzení — reflexivní prostory jsou právě charakterizovány existencí „kolmic“ (viz 16.15). Prozatím si všimněme následujícího postřehu, který je založen na jednoduchém tvrzení.

Ascoliho formulka. *Jestliže X je Banachův prostor a φ spojitá lineární forma z jednotkové sféry X^*, potom $|\varphi(x)| = \operatorname{dist}(x, \ker \varphi)$ pro každé $x \in X$.*

Odtud plyne, že forma φ nabývá své normy (tj. existuje $x \in X$ tak, že $\|x\| = 1$ a $|\varphi(x)| = \|\varphi\| = 1$), právě když existuje $x \in X$, $\|x\| = 1$ a $\operatorname{dist}(x, \ker \varphi) = 1$ (viz též 2.55.f).

(m) Je-li Z uzavřený podprostor E^*, nemusí být $Z = ({}^\perp Z)^\perp$.

Návod. Uvažujte následující příklad. Položte $X = c_0$. Potom $Z := \varepsilon X$ je uzavřený vlastní podprostor X^{**} podle cvičení 2.55.k. Protože však ${}^\perp Z = \{0\}$, je $({}^\perp Z)^\perp = X^{**}$. ♣

(n) Nechť $\{e_n\}$ je ortonormální báze nějakého separabilního Hilbertova prostoru H a $\{\lambda_n\}$ omezená posloupnost čísel. Je-li $x = \sum_n x_n e_n$, položme $Ax = \sum_n \lambda_n x_n e_n$. Ukažte, že

(a) $A \in \mathcal{L}(H)$ a $\|A\| = \sup\{|\lambda_n|\}$,
(b) A je invertibilní, právě když $\inf\{|\lambda_n|\} > 0$ (jak vypadá A^{-1}?),
(c) spektrum operátoru A je rovno uzávěru množiny $\{\lambda_n : n \in \mathbf{N}\}$.

(o) Ukažte, že libovolná kompaktní podmnožina $\mathbf{C}$ je spektrem nějakého lineárního operátoru.

Návod. Použijte předchozí cvičení. ♣

(p) Nechť $K \in \mathcal{L}_c(X)$ je kompaktní operátor a $\lambda \neq 0$. Označíme-li $S := K - \lambda I$, je

$$\dim \ker S = \dim \ker S' = \dim(X/\mathcal{R}S) = \dim(X^*/\mathcal{R}S') < \infty .$$

Návod. První rovnost je obsažena v třetí Fredholmově větě 5.28. Protože obor hodnot $\mathcal{R}S$ je podle věty 5.17 uzavřený, jsou prostory $(X/\mathcal{R}S)^*$ a $\mathcal{R}S^\perp$ izometricky-izomorfní podle cvičení 2.55.n. Dále víme podle věty 5.19, že $\mathcal{R}S^\perp = \ker S'$. Odtud plyne, že $\dim(X/\mathcal{R}S) = \dim(X/\mathcal{R}S)^* = \dim \ker S'$. Cvičení 2.55.n také říká, že $(\ker S)^*$ a $(X^*/\mathcal{R}S')$ jsou izometricky-izomorfní (nezapomeňte, že $\mathcal{R}S'$ je také uzavřený a že $\ker S^\perp = \mathcal{R}S'$), takže $\dim(X^*/\mathcal{R}S') = \dim(\ker S)^* = \dim \ker S$. Stačí si tedy vše dát dohromady. ♣

(q) Nechť A je operátor na Hilbertově prostoru H. V 8.5 ukážeme, že existuje právě jeden operátor $A^* \in \mathcal{L}(H)$ tak, že $(Ax, y) = (x, A^*y)$ pro každou dvojici $x, y \in H$. Operátor A^* nazýváme *hermiteovsky adjungovaným* k A. Ukažte, že

(q1) $\ker A = (\mathcal{R}A^*)^\perp$ a $\ker A^* = (\mathcal{R}A)^\perp$,
(q2) $(\ker A)^\perp = \overline{\mathcal{R}A^*}$ a $(\ker A^*)^\perp = \overline{\mathcal{R}A}$.

Návod. Důkaz rovnosti $\ker A = (\mathcal{R}A^*)^\perp$ vyžaduje pouze znalost definice kolmice a (hermiteovsky) adjungovaného operátoru. Pro důkaz druhé využijte rovnost $A^{**} = A$. Pokud jde o (q2), můžete využít poznámku 8.6, rovnosti ve větě 5.21 a 5.23 a tvrzení, že w a w^* topologie splývají na H^*. Anebo se můžete pokusit o přímý důkaz. ♣

(r) Buď E normovaný lineární prostor. Ukažte, že množina $\{T \in \mathcal{L}(E)\} : T$ je zdola omezený$\}$ je otevřená v prostoru $\mathcal{L}(E)$.

Návod. Nechť $\|Tx\| \geq \beta \|x\|$ pro $x \in E$. Volíme-li $L \in \mathcal{L}(E)$ tak, aby $\|L - T\| < \beta$, potom

$$\|Lx\| \geq \|Tx\| - \|(L-T)x\| \geq (\beta - \|L - T\|)\|x\|$$

pro $x \in E$. ♣

6. Banachovy algebry

6.1. Algebra. *Algebrou* $\mathcal{A}$ nad tělesem $\mathbf{F}$ (ponejvíce nad reálnými či komplexními čísly) rozumíme vektorový prostor, kde je navíc definováno vnitřní násobení, které je asociativní, distributivní vůči sčítání a splňuje rovnosti

$$\lambda\,(ab) = a\,(\lambda b) = (\lambda a)\,b \quad \text{pro} \quad \lambda \in \mathbf{F}\,, \quad a\,, b \in \mathcal{A}\,.$$

Jednotka algebry je takový její prvek e, pro nějž $xe = ex = x$ pro každé $x \in \mathcal{A}$.

6.2. Banachova algebra. *Banachova algebra* $\mathcal{A}$ je algebra opatřená navíc normou, v níž $\mathcal{A}$ je Banachův prostor a násobení je svázáno s normou podmínkou

$$\|ab\| \le \|a\|\,\|b\|\,.$$

6.3. Poznámky. (a) Pokud jednotka algebry existuje, je určena jednoznačně. Dále, z nerovnosti $\|x\| = \|xe\| \le \|x\|\,\|e\|$ plyne, že v netriviálním případě je $\|e\| \ge 1$. Přenormováním celé Banachovy algebry lze vždy docílit, že $\|e\| = 1$ v případě, že jednotka e existuje.

Bylo by zcela přirozené definovat novou normu předpisem $\|x\|_n = \frac{\|x\|}{\|e\|}$. Tím skutečně získáme ekvivalentní normu na $\mathcal{A}$, bohužel pro ni nemusí platit $\|xy\|_n \le \|x\|_n\,\|y\|_n$. Položíme-li však $\|x\|_n = \sup\{\|xy\| \,:\, \|y\| \le 1\}$, je $\frac{\|x\|}{\|e\|} \le \|x\|_n \le \|x\|$ pro každé $x \in \mathcal{A}$, $\|e\|_n = 1$ a $\mathcal{A}$ s novou normou tvoří Banachovu algebru. Srovnejte s *6.2.

(b) Jak uvidíme z následujícího příkladu 6.5.e, nemusí každá Banachova algebra $\mathcal{A}$ vždy mít jednotku. V takovém případě lze podle *6.4 $\mathcal{A}$ rozumným způsobem vnořit do Banachovy algebry s jednotkou.

(c) Násobení je spojitá operace: Jestliže $x_n \to x$ a $y_n \to y$, potom $x_n y_n \to xy$, jak lehko plyne z nerovnosti

$$\|x_n y_n - xy\| \le \|y_n\|\,\|x_n - x\| + \|x\|\,\|y_n - y\|\,.$$

6.4. Homomorfizmus a izomorfizmus Banachových algeber. Hned zpočátku upozorněme na definice těchto pojmů v Banachových algebrách. Jsou-li $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ Banachovy algebry, je zobrazení $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *homomorfizmus*, zachovává-li všechny algebraické operace, tedy jestliže

$$h(x+y) = h(x) + h(y)\,, \quad h(\lambda x) = \lambda h(x) \text{ a } \quad h(xy) = h(x)\,h(y)$$

pro všechna $x, y \in \mathcal{A}$ a $\lambda \in \mathbf{F}$. *Izomorfizmem* pak rozumíme každé prosté homomorfní zobrazení $\mathcal{A}$ na $\mathcal{B}$.

V těchto definicích je malý háček. Nebrali jsme v nich vůbec v úvahu, že v Banachových algebrách máme definovánu také spojitost a bylo by tedy vhodnější v definici izomorfizmu požadovat, aby h bylo i spojité zobrazení (pak by bylo dokonce homeomorfní podle důsledku 4.16). A tudíž prostory $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ by byly izomorfní i jako Banachovy prostory. Většinou však sestrojený izomorfizmus je i izometrií, tudíž i spojitým zobrazením a tato starost odpadá. Poznamenejme také, že homomorfizmy $\mathcal{A} \to \mathbf{C}$ jsou automaticky spojité. Ale o tom až v 7.5.

6.5. Příklady. (a) Prostor $\mathcal{L}(X)$ všech lineárních omezených operátorů na Banachově prostoru X tvoří Banachovu algebru, definujeme-li násobení jako skládání zobrazení. Tato Banachova algebra není komutativní pokud $\dim X \ge 2$ a její jednotkou je identické zobrazení, které budeme značit symbolem I. Speciální případ dostáváme, jestliže $\dim X = n$. Za této situace lze $\mathcal{L}(X)$ chápat jako prostor všech $n \times n$ matic, který budeme značit $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ či $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$, podle toho, jsou-li prvky uvažovaných matic reálná či komplexní čísla..

(b) Prostor $\mathcal{C}(K)$ všech spojitých (obecně komplexních) funkcí na kompaktu K s obvyklým (bodovým) násobením a max-normou tvoří komutativní Banachovu algebru s jednotkou. V případě konečné množiny K dostáváme $\mathbf{R}^n$ či $\mathbf{C}^n$.

(c) Je-li $K \subset \mathbf{C}$ kompakt, tvoří $\mathcal{A}(K) := \{f \in \mathcal{C}(K) : f \text{ je analytická na } \operatorname{int} K\}$ Banachovu algebru s násobením a normou z prostoru $\mathcal{C}(K)$. Ve speciálním případě $\Delta := \{x \in \mathbf{C} : |x| \le 1\}$ nazýváme $\mathcal{A}(\Delta)$ *diskovou algebrou*.

(d) Je-li $\{a_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ (zobecněná) posloupnost (reálných či komplexních) čísel, položme

$$\|\{a_n\}\| = \sum_{n\in\mathbf{Z}} |a_n| := \sup\{\sum_{n\in J} |a_n| : J \text{ je konečná množina}\}\,.$$

Jestliže $\sum_{n\in\mathbf{Z}} |a_n| < +\infty$, říkáme, že řada $\sum_n a_n$ konverguje absolutně a množinu všech těchto posloupností označme $l^1(\mathbf{Z})$.

Jsou-li nyní $x = \{x_n\}, y = \{y_n\} \in l^1(\mathbf{Z})$, konverguje absolutně pro každé $m \in \mathbf{Z}$ také řada $\sum_n x_{m-n}y_n$. Položíme-li tedy $z_m = \sum_n x_{m-n}y_n$, je $z := \{z_m\} \in l^1(\mathbf{Z})$, a lehko se přesvědčíme, že $\|z\| \le \|x\|\,\|y\|$. Prvek z nazýváme *konvolucí* x a y a značíme ho $x * y$. Vidíme, že $l^1(\mathbf{Z})$ je Banachova algebra s právě definovaným násobením. Navíc, $l^1(\mathbf{Z})$ je komutativní a prvek $\{\dots,0,0,0,1,0,0,0,\dots\}$ (cifra 1 je na nultém místě) je její jednotkou.

(e) Banachův prostor $L^1(\mathbf{R}^n)$ s násobením určeným *konvolucí*

$$f * g : x \mapsto \int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy$$

(uvědomte si, že napsaný integrál konverguje pro skoro všechna $x \in \mathbf{R}^n$ a $f * g \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$ pro $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$) tvoří opět Banachovu algebru. Tato je komutativní, ale nemá jednotku (viz *6.5).

(f) Příklady (d) a (e) lze zobecnit: Buď μ Haarova míra na lokálně kompaktní abelovské grupě G (viz [LM]). Jsou-li $f, g \in L^1(G)$, definujeme opět konvoluci $f * g \in L^1(G)$ předpisem

$$f * g(x) = \int_G f(x-y)g(y)\,d\mu$$

pro skoro všechna x. S takto definovaným násobením je $L^1(G)$ komutativní Banachova algebra zahrnující i speciální případy, kdy grupa G je buďto $\mathbf{Z}$ či $\mathbf{R}^n$. $L^1(G)$ má jednotku, právě když G je diskrétní.

(g) Prostor $\mathcal{L}_c(X)$ všech kompaktních operátorů na Banachově prostoru X tvoří uzavřenou podalgebru $\mathcal{L}(X)$. Banachova algebra $\mathcal{L}_c(X)$ není komutativní. Je-li prostor X nekonečné dimenze, nemá ani jednotku.

(h) *Wienerova algebra* $\mathcal{W}$ sestává ze všech komplexních 2π-periodických funkcí na $\mathbf{R}$, které jsou lebesgueovsky integrovatelné na $[0, 2\pi]$ a jejichž Fourierova řada absolutně konverguje.

Označíme-li $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt$ Fourierovy koeficienty funkce f, leží funkce f ve $\mathcal{W}$, právě když řada $\sum\limits_{n\in\mathbf{Z}} |c_n(f)|$ konverguje. Jinými slovy, $f \in \mathcal{W}$, právě když $\{c_n(f)\}_{n\in\mathbf{Z}} \in l^1(\mathbf{Z})$. Uvědomme si, že pro $f \in \mathcal{W}$ Fourierova řada $\sum\limits_{n\in\mathbf{Z}} c_n(f)e^{inx}$ konverguje na $\mathbf{R}$ stejnoměrně, a tudíž $f(x) = \sum\limits_{n\in\mathbf{Z}} c_n(f)e^{inx}$ pro každé $x \in \mathbf{R}$.

Vektorové operace i násobení ve $\mathcal{W}$ definujeme bodově. Normu pak předpisem

$$\|f\|_{\mathcal{W}} := \sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_n(f)|\,.$$

Není těžké ukázat, že $\mathcal{W}$ je komutativní Banachova algebra s jednotkou $f = 1$ na $\mathbf{R}$. I když, po pravdě řečeno, ověření nerovnosti $\|fg\|_{\mathcal{W}} \le \|f\|_{\mathcal{W}}\|g\|_{\mathcal{W}}$ dá trochu práce.

Zobrazení $\Phi : f \to \{c_n(f)\}_{n\in\mathbf{Z}}$ je homomorfním a izometrickým zobrazením $\mathcal{W}$ na $l^1(\mathbf{Z})$. Bodovému součinu fg ve Wienerově algebře odpovídá konvoluce $\{c_n(f)\} * \{c_n(g)\}$ v $l^1(\mathbf{Z})$. Je tedy Φ dokonce izomorfizmem mezi Banachovými algebrami. Vidíme, že Banachovu algebru $l^1(\mathbf{Z})$ můžeme izometricky-izomorfně zobrazit na Wienerovu algebru $\mathcal{W}$, kteroužto zase můžeme chápat jako podalgebru prostoru spojitých funkcí na jistém kompaktu. V následující kapitole o Gelfandově reprezentaci ukážeme, že podobným způsobem lze reprezentovat každou Banachovu algebru.

Leckdy se Wienerova algebra $\widehat{\mathcal{W}}$ definuje jako množina všech komplexních funkcí tvaru $f(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n z^n$ definovaných na jednotkovém kruhu $\{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$, pro něž $\sum_{n\in\mathbf{Z}} |a_n| < \infty$. Norma funkce f je definována jako $\|f\| := \sum_{n\in\mathbf{Z}} |a_n|$ a součin je konvolučního typu. Tedy jsou-li $f(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n z^n$ a $g(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} b_n z^n$ dvě funkce z této algebry, definujeme $f * g(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n z^n$, kde $c_n = \sum_{j\in\mathbf{Z}} a_j b_{n-j}$ je vlastně součin dvou prvků v Banachově algebře $l^1(\mathbf{Z})$. Nezabere dlouhou chvilku přemýšlení si rozmyslet, že $\mathcal{W}$ a $\widehat{\mathcal{W}}$ jsou izometricky-izomorfní.

V dalším $\mathcal{A}$ bude (komplexní) Banachova algebra s jednotkou e, pro niž $\|e\| = 1$.

6.6. Regulární prvky. Řekneme, že prvek $x \in \mathcal{A}$ je *regulární* či *invertibilní*, existuje-li takové $z \in \mathcal{A}$, pro něž $xz = zx = e$. Takové z je potom ovšem určeno jednoznačně, značíme ho symbolem x^{-1} a nazýváme *inverzí* k prvku x. Množinu všech regulárních prvků $\mathcal{A}$ značme U.

6.7. Poznámky. (a) Množina U s operací násobení tvoří grupu s jednotkou e. Jsou-li totiž $x, y \in U$, leží v U i prvky xy a x^{-1} (inverzí k x^{-1} je samozřejmě x a k xy prvek $y^{-1}x^{-1}$). Navíc $e^{-1} = e$ a $\lambda x \in U$, pokud $\lambda \neq 0$ a $x \in U$.

(c) Je-li x prvek Banachovy algebry, definujeme $x^0 = e$ a x^n induktivně přirozeným způsobem.

6.8. Lemma. *Je-li $x \in \mathcal{A}$, $\|x\| < 1$, je $e - x \in U$ a*

$$(e-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \,.$$

Navíc $\|(e-x)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|x\|}$ *a* $\|e - (e-x)^{-1}\| \leq \frac{\|x\|}{1-\|x\|}$.

Důkaz. Položme $y_n = e + x + \cdots + x^n$, $y = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ (protože $\|x^n\| \leq \|x\|^n$, je posloupnost $\{y_n\}$ cauchyovská, a tedy $y_n \to y$). Z odhadu $\|y_n\| \leq 1 + \|x\| + \cdots + \|x\|^n \leq \frac{1}{1-\|x\|}$ ihned dostáváme $\|y\| \leq \frac{1}{1-\|x\|}$ (norma je spojitá funkce) a $\|e - y\| = \|(e-x)y - y\| = \| - xy\| \leq \|x\|\,\|y\| \leq \frac{\|x\|}{1-\|x\|}$. Zbývá ukázat, že

$$y\,(e-x) = (e-x)\,y = e\,.$$

Ale to je již snadné, neboť $y_n x = x y_n = y_{n+1} - e$, odkud ze spojitosti násobení okamžitě plyne, že $xy = yx = y - e$. ∎

Poznámka. Řadě $\sum_n x^n$ se říká *Neumannova řada* prvku x.

6.9. Důsledek. *Je-li $x \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbf{C}$ a $\|x\| < |\lambda|$, je $\lambda e - x \in U$,*

$$(\lambda e - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x^n \quad a \quad \|(\lambda e - x)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|x\|}\,.$$

6.10. Věta. *Grupa U je otevřená v $\mathcal{A}$ a zobrazení $x \mapsto x^{-1}$ je homeomorfní.*

Důkaz. Dokazujme nejdříve, že množina U je otevřená. Volme $x \in U$ a nechť $\|y - x\| < \varepsilon$. Potom

$$\|e - yx^{-1}\| = \|(x-y)x^{-1}\| \leq \varepsilon \|x^{-1}\|\,.$$

Je-li tedy $\varepsilon < \|x^{-1}\|^{-1}$, dostáváme podle předchozího lemmatu, že $e - (e - yx^{-1}) = yx^{-1} \in U$, odkud plyne $y = (yx^{-1})x \in U$.

Lehko zjistíme, že zobrazení $x \mapsto x^{-1}$ je prosté. Zafixujme nyní opět $x \in U$ a volme h dostatečně blízko x. Použitím poslední nerovnosti z lemmatu 6.8 máme

$$\begin{aligned}\big\|(x-h)^{-1} - x^{-1}\big\| &= \big\|[(e - hx^{-1})x]^{-1} - x^{-1}\big\| = \\ &= \big\|x^{-1}(e - hx^{-1}) - x^{-1}\big\| \leq \|x^{-1}\|\,\big\|(e - hx^{-1})^{-1} - e\big\| \leq \frac{\|h\|\,\|x^{-1}\|^2}{1 - \|h\|\,\|x^{-1}\|}\,.\end{aligned}$$

Vidíme (limitní přechod $h \to 0$), že zobrazení $x \mapsto x^{-1}$ je spojité v bodě x.

Protože zobrazení $x \mapsto x^{-1}$ se shoduje se svým inverzním, máme konečně kýžený důkaz, že toto zobrazení je homeomorfní. ∎

6.11. Poznámky. (a) Z důkazu předešlé věty je vidět, že množina U obsahuje s každým svým prvkem x i jeho okolí o poloměru $\frac{1}{\|x^{-1}\|}$.

(b) Je-li τ taková topologie na grupě G, že grupové operace $(x,y)\mapsto xy$ a $x\mapsto x^{-1}$ jsou v ní spojité, nazýváme dvojici (G,τ) *topologickou grupou*. Množina invertibilních prvků Banachovy algebry je tedy příkladem topologické grupy.

6.12. Rezolventa, spektrum a spektrální poloměr. Pro $x\in\mathcal{A}$ definujeme *rezolventu* $\varrho(x)$ jako množinu těch (komplexních) čísel λ, pro něž prvek $\lambda e - x$ je invertibilní. Doplněk (v $\mathbf{C}$) nazýváme *spektrem* prvku x a značíme ho $\sigma(x)$. Konečně číslo

$$r(x) := \sup\{|\lambda| : \lambda\in\sigma(x)\}$$

nazveme *spektrálním poloměrem* prvku x.

6.13. Věta. *Pro libovolný prvek $x\in\mathcal{A}$ jeho rezolventa je vždy otevřená podmnožina $\mathbf{C}$, spektrum uzavřená podmnožina a $r(x)\le\|x\|$.*

Důkaz. Otevřenost $\varrho(x)$ plyne ihned z otevřenosti U v $\mathcal{A}$ a spojitosti zobrazení $\lambda\mapsto\lambda e - x$. Podle důsledku 6.9 pak máme $\sigma(x)\subset U(0,\|x\|)$. ■

6.14. Vlastní čísla a bodové spektrum. Vraťme se k příkladu Banachovy algebry $\mathcal{L}(X)$ všech operátorů na Banachově prostoru X. Operátor T je invertibilní, právě když T je prostý a $\mathcal{R}T = X$. To jsme si odvodili ve větě 5.6. Zopakujme, je-li operátor T prostý a na, existuje jeho (množinová) inverze T^{-1}. Podle důsledku 4.16 je $T^{-1}\in\mathcal{L}(X)$, a protože $T\circ T^{-1} = T^{-1}\circ T = I$ (identita), je T^{-1} inverzní prvek k T i ve smyslu definice 6.6. Naopak, existuje-li k T prvek $Z\in\mathcal{L}(X)$, pro nějž $T\circ Z = Z\circ T = I$, musí být T prostý a na (viz již zmíněnou větu 5.6 či cvičení 5.32.e).

Odtud plyne, že λ leží ve spektru operátoru T, právě když buďto $T-\lambda I$ není prostý anebo $T-\lambda I$ není na. Říkali jsme též, že λ je *vlastní hodnota* operátoru T, jestliže $T-\lambda I$ není prostý, tj. existuje-li $x\in X, x\neq 0$ takové, že $Tx-\lambda x = 0$. Ještě jinak, λ je vlastní hodnota, má-li rovnice $Tx = \lambda x$ netriviální řešení. Množinu všech vlastních hodnot jsme nazvali *bodovým spektrem* operátoru T a označili ji $\sigma_p(T)$. Místo pojmu vlastní hodnota se také někdy mluví o *vlastním čísle*; každé nenulové řešení rovnice $Tx = \lambda x$ pak nazýváme *vlastním vektorem* operátoru T. Evidentně, $\sigma_p(T)\subset\sigma(T)$.

6.15. Cvičení. (a) Uvažujte Banachovu algebru $\mathcal{A} = \mathcal{C}(K)$ z příkladu 6.5.b a ukažte, že $\sigma(f) = f(K)$ pro každou funkci $f\in\mathcal{C}(K)$.

(b) Rozmyslete si, že spektrum $\sigma(A)$ matice $A\in M_n(\mathbf{C})$ sestává právě ze všech vlastních čísel této matice.

Z uvedených příkladů je vidět, že pojem spektra v jistém smyslu zobecňuje pojem oboru hodnot funkce a současně pojem vlastních čísel matice.

6.16. Rezolventní funkce. Buď $x\in\mathcal{A}$. Na množině $\varrho(x)$ definujeme *rezolventní funkci* předpisem

$$R_\lambda(x) = (\lambda e - x)^{-1}\,.$$

I když značení je poněkud nezvyklé, rezolventní funkce je funkce proměnné λ. Je tedy definována na otevřené podmnožině $\mathbf{C}$ a nabývá hodnot v Banachově algebře $\mathcal{A}$. Podle důsledku 6.9 již víme, že $R_\lambda(x)$ je určitě definována pro $|\lambda|\ge\|x\|$ a pro tato λ máme

$$R_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-1}x^n\,.$$

6.17. Vlastnosti rezolventní funkce. *Buď x prvek Banachovy algebry $\mathcal{A}$. Potom*

(a) $\lim\limits_{\lambda\to\infty} R_\lambda(x) = 0$,

(b) *je-li $\lambda\in\varrho(x)$ a $|\mu| < \|R_\lambda(x)\|^{-1}$, potom i $\lambda-\mu\in\varrho(x)$ a*

$$R_{\lambda-\mu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\mu^n R_\lambda^{n+1}(x)\,,$$

(c) *je-li $\Phi\in\mathcal{A}^*$, je funkce $f:\lambda\mapsto\Phi\circ R_\lambda(x)$ holomorfní na $\varrho(x)$.*

Důkaz. Tvrzení (a) je snadným důsledkem 6.9, neboť pro $|\lambda| \geq 2\|x\|$ máme odhad

$$\|R_\lambda(x)\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|x\|} \leq \frac{2}{|\lambda|}\,.$$

Je-li $|\mu| < \|R_\lambda(x)\|^{-1}$, potom $\lambda - \mu \in \varrho(x)$ podle poznámky 6.11, neboť vzdálenost prvků $\lambda e - x$ a $\lambda e - x - \mu e$ je menší než $\frac{1}{\|(\lambda e - x)^{-1}\|}$. Dále počítejme

$$\begin{aligned} R_{\lambda-\mu}(x) &= (\lambda e - x - \mu e)^{-1} = \left[(\lambda e - x)(e - \mu R_\lambda(x))\right]^{-1} = \left(e - \mu R_\lambda(x)\right)^{-1} R_\lambda(x) = \\ &= \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{\mu}e - R_\lambda(x)\right)^{-1} R_\lambda(x) = \frac{1}{\mu} R_{\frac{1}{\mu}}(R_\lambda(x)) R_\lambda(x) = \\ &= \frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^{\infty} \mu^{n+1} R_\lambda^n(x)\, R_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n R_\lambda^{n+1}(x)\,. \end{aligned}$$

Zvolme nyní $\lambda \in \varrho(x)$ pevně. Pro $\Phi \in \mathcal{A}^*$ a h dostatečně blízká 0 dostáváme

$$f(\lambda + h) = \Phi(R_{\lambda+h}(x)) = \Phi\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-h)^n\, R_\lambda^{n+1}(x)\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-h)^n \Phi(R_\lambda^{n+1}(x))\,,$$

odkud vidíme, že funkce f je analytická. ■

6.18. Gelfandova věta. *Spektrum libovolného prvku Banachovy algebry je neprázdná kompaktní podmnožina* **C**.

Důkaz. Víme již, že spektrum je uzavřená a omezená množina. Nechť $\sigma(x) = \emptyset$ pro nějaké $x \in \mathcal{A}$. Podle předešlého je funkce $f : \lambda \mapsto \Phi(R_\lambda(x))$ holomorfní v **C** pro každé $\Phi \in \mathcal{A}^*$. Ježto f je omezená v **C** podle 6.17.a, musí být f podle Liouvilleovy věty konstantní. Opětovným užitím 6.17.a dostáváme, že $f = 0$ na celém **C**. Speciálně $0 = f(0) = \Phi(x^{-1})$. Podle důsledku Hahn-Banachovy věty 2.20 je tudíž $x^{-1} = 0$, což je kýžený spor. ■

6.19. Gelfand-Mazurova věta. *Má-li v Banachově algebře $\mathcal{A}$ každý nenulový prvek inverzi, je $\mathcal{A}$ izometricky-izomorfní tělesu komplexních čísel* **C**.

Důkaz. Ke každému $a \in \mathcal{A}$ existuje právě jedno $\lambda_a \in$ **C** tak, že $a = \lambda_a e$. Skutečně, je-li $a \neq 0$, volme $\lambda_a \in \sigma(a)$. Prvek $a - \lambda_a e$ nemá inverzi, a tudíž podle předpokladu je $a - \lambda_a e = 0$. Požadované zobrazení je tedy $a \mapsto \lambda_a$. ■

6.20. Poznámky. (a) Jiný důkaz Gelfand-Mazurovy věty bez teorie funkcí komplexní proměnné je uveden v C. Rickart [*1960], str. 40.

(b) Existují i jiné podmínky zaručující, že daná Banachova algebra je izometricky-izomorfní s **C**. Uveďme následující dvě, první od R.E. Edwardse, druhou od S. Mazura.

Edwardsova věta. *Pokud v Banachově algebře $\mathcal{A}$ s jednotkou platí $\|x^{-1}\| \leq \frac{1}{\|x\|}$ pro každý invertibilní prvek x, je $\mathcal{A}$ izometricky-izomorfní* **C**.

Mazurova věta. *Jestliže v Banachově algebře $\mathcal{A}$ s jednotkou platí $\|xy\| = \|x\|\,\|y\|$ pro každé dva prvky $x, y \in \mathcal{A}$, je $\mathcal{A}$ izometricky-izomorfní* **C**.

Návod. Je-li x invertibilní, máme $1 = \|e\| = \|xx^{-1}\| = \|x\|\,\|x^{-1}\|$ a stačí použít Edwardsovu větu. ♣

6.21. Definice. Nechť x je prvek Banachovy algebry $\mathcal{A}$ a $p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n$ komplexní polynom. Zcela přirozeným způsobem definujeme $p(x) = \alpha_0 e + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$. Potom $p(x)$ je prvek naší Banachovy algebry $\mathcal{A}$, jehož spektrum je obrazem spektra $\sigma(x)$ při zobrazení p. O tom vypovídá následující věta, jejíž podstatné zobecnění přineseme v 9. kapitole.

6.22. Věta o obrazu spektra pro polynomy. *Je-li p polynom a $x \in \mathcal{A}$, potom $\sigma(p(x)) = p(\sigma(x))$.*

Důkaz. Buď $\lambda \in$ **C**. Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (komplexní) kořeny polynomu $p(t) - \lambda$, můžeme psát

$$p(x) - \lambda e = c\,(x - \lambda_1 e)\dots(x - \lambda_n e)$$

pro nějaké $c \neq 0$. Nyní si stačí uvědomit, že součin komutujících prvků $\mathcal{A}$ je invertibilní, právě když každý jeho faktor je invertibilní. Tudíž prvek $p(x) - \lambda e$ má inverzi, právě když λ neleží v množině $p(\sigma(x))$. ■

6.23. Beurlingův vzorec. *Je-li $x \in \mathcal{A}$, potom pro spektrální poloměr platí*

$$r(x) = \lim \sqrt[n]{\|x^n\|} = \inf \sqrt[n]{\|x^n\|}\,.$$

Důkaz. Je-li $\lambda \in \sigma(x)$, potom $\lambda^n \in \sigma(x^n)$ (to není těžké odůvodnit, máme totiž pro jistý polynom p rovnost $(\lambda^n e - x^n) = (\lambda e - x)p(x) = p(x)(\lambda e - x)$, odkud plyne, že $\lambda e - x$ je invertibilní pokud $\lambda^n e - x^n$ je invertibilní; ostatně můžete přímo aplikovat předchozí větu 6.22 na $p(x) = x^n$), tudíž $|\lambda^n| \le \|x^n\|$. Odtud plyne, že $r(x) \le \inf \sqrt[n]{\|x^n\|} \le \liminf \sqrt[n]{\|x^n\|}$.

V další fázi důkazu označme $G := \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| > r(x)\}$ a volme opět $\Phi \in \mathcal{A}^*$. Funkce $f(\lambda) := \Phi(R_\lambda(x))$ je holomorfní v $\varrho(x) \supset \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| > \|x\|\}$, přičemž pro $|\lambda| > \|x\|$ máme $f(\lambda) = \sum \lambda^{-n-1}\Phi(x^n)$ (to je vlastně Laurentův rozvoj funkce f v ∞). Na základě jednoznačnosti koeficientů vyplývá, že $f(\lambda) = \sum \lambda^{-n-1}\Phi(x^n)$ i pro $\lambda \in G$. Je-li tedy $\lambda \in G$, je $\lim \Phi(\lambda^{-n}x^n) = 0$, jinými slovy, posloupnost $\{\lambda^{-n}x^n\}$ konverguje slabě k 0. Podle věty 4.7 je tato posloupnost omezená, existuje $C(\lambda)$ tak, že $\|\lambda^{-n}x^n\| \le C(\lambda)$. Tudíž $\limsup \sqrt[n]{\|x^n\|} \le |\lambda|$, odkud konečně plyne, že $\limsup \sqrt[n]{\|x^n\|} \le r(x)$. ■

6.24. Poznámka. Na Beurlingově vzorečku je na první pohled něco divného. Definice spektrálního poloměru $r(x)$ nezávisí příliš na normě dané Banachovy algebry, zatímco $\lim \sqrt[n]{\|x^n\|}$ naopak velice. Ta však na druhé straně závisí pouze na mocninách prvku x a ne na celé algebře $\mathcal{A}$. Podíváme-li se na předchozí důkaz pečlivě a analyzujeme-li ho, zjistíme, že podstatnými ingrediencemi byly úplnost $\mathcal{A}$ a odhad $\|xy\| \le \|x\|\,\|y\|$.

6.25. Elementární cvičení. (a) Nalezněte množinu U všech invertibilních prvků pro případ Banachovy algebry $\mathcal{A} = \mathcal{C}(K)$, K kompakt.

(b) Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost invertibilních prvků Banachovy algebry, $x_n \to x$. Není-li x invertibilní, je $\|x_n^{-1}\| \to \infty$.

Návod. Pokud by tomu tak nebylo, našli bychom konstantu $K > 0$ a vybranou posloupnost $\{z_k\}$ z $\{x_n\}$ tak, že $\|z_k\| \le K$. Protože $x = z_k(e + z_k^{-1}(x - z_k))$, přičemž $\|z_k^{-1}(x - z_k)\| \le K\|x - z_k\|$, jsou prvky $e + z_k^{-1}(x - z_k)$ od určitého indexu invertibilní. Tudíž i x musí být invertibilní. ♣

(c) Buď $\mathbf{C}[z]$ algebra všech polynomů s komplexními koeficienty. Definujeme-li

$$\|p\| = \sup\{|p(z)| : |z| \le 1\}\,,$$

je $\|.\|$ norma na $\mathbf{C}[z]$. S ní tvoří $\mathbf{C}[z]$ „normovanou algebru“, která však není úplná. Ukažte, že množina všech invertibilních prvků $\mathbf{C}[z]$ není otevřená.

Návod. Uvažujte posloupnost polynomů $\{1 + \frac{z}{n}\}$. ♣

Dále ukažte, že pro polynom $p \in \mathbf{C}[z]$, $p(z) = \frac{z}{2}$ platí sice $\|p\| < 1$, ale $1 - p$ není invertibilní.

d) Buď $\mathcal{A}$ komutativní Banachova algebra. Ukažte, že

$$\sigma(x + y) \subset \sigma(x) + \sigma(y) \quad \text{a} \quad \sigma(xy) \subset \sigma(x)\,\sigma(y)$$

pro jakákoliv $x, y \in \mathcal{A}$.

Návod. Jednoduché odůvodnění skýtá použití Gelfandovy transformace, přesněji věta 7.9.c. Ovšem přímý „elementární“ důkaz by byl vítaný. Podaří se vám? ♣

(e) Jestliže $r(x) = 0$ (takovým prvkům říkáme *kvazi–nilpotentní*), nemůže x mít inverzi.

7. Gelfandova reprezentace

V celé kapitole budeme uvažovat (komplexní) Banachovu algebru $\mathcal{A}$ s jednotkou e, přičemž budeme předpokládat, že $\|e\| = 1$.

Hlavním cílem bude reprezentovat naši algebru $\mathcal{A}$ jako speciální algebru spojitých funkcí na nějakém kompaktním prostoru. Hledáme tedy takový kompakt, abychom mohli každému prvku z $\mathcal{A}$ přiřadit spojitou funkci na něm. Samozřejmě od tohoto zobrazení požadujeme splnění jistých rozumných vlastností.

Pro výklad potřebujeme ovšem hlubší výsledky z teorie topologických prostorů, zejména pak pojem slabé topologie. V tomto smyslu není tedy tato kapitola příliš elementární. Aby se čtenář nemusel příliš obtěžovat hledáním příslušných pojmů, nastiňme v krátkosti nejnutnější přehled o w^*-topologii.

7.1. Slabá w^*-topologie. Uvažujme Banachův prostor X a jeho duál X^*. Množinu $G \subset X^*$ nazveme *w^*-otevřenou*, jestliže ke každému $\varphi \in G$ existují $x_1, \dots, x_n \in X$ a $\varepsilon > 0$ tak, že

$$V_\varphi(x_1, \dots, x_n; \varepsilon) := \Big\{ f \in X^* : \max\big\{ \big|(f - \varphi)\big|(x_1), \dots, \big|(f - \varphi)\big|(x_n) \big\} < \varepsilon \Big\} \subset G\,.$$

Množiny $V_\varphi(x_1, \dots, x_n; \varepsilon)$ hrají roli jakýchsi otevřených ε-okolí prvku φ. Zkuste si sami dokázat, že každá z množin $V_\varphi(x_1, \dots, x_n; \varepsilon)$ je skutečně w^*-otevřená.

Není těžké ověřit, že soustava w^*-otevřených množin tvoří na X^* topologii. Nazývejme ji (slabou) *w^*-topologií* a veškeré w^*-pojmy vztahujme k ní.

Poznámka. Takto definujeme w^*-topologii v případě reálných Banachových prostorů. Je-li uvažovaný prostor komplexní, nahradíme v definici množiny $V_\varphi(x_1, \dots, x_n; \varepsilon)$ funkcionály z X^* jejich reálnými částmi.

Z těch nejzákladnějších vlastností w^*-topologie uveďme alespoň následující.

7.2. Vlastnosti w^*-topologie. *Každá w^*-otevřená množina v X^* je i (silně) otevřená. Posloupnost funkcionálů $\{\varphi_n\} \subset X^*$ konverguje ve w^*-topologii k φ, právě když $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ pro každé $x \in X$.*

Důkaz. Protože množiny $V_\varphi(x_1, \dots, x_n; \varepsilon)$ jsou otevřené v X^*, musí být každá w^*-otevřená množina i otevřená (v X^*).

Nechť $\varphi_n \to \varphi$ ve w^*-topologii. Volme $x \in X$ a $\varepsilon > 0$. Protože množina $\big\{ f \in X^* : \big|(f - \varphi)\big|(x) < \varepsilon \big\}$ je w^*-otevřená, musí existovat n_0 tak, že v této množině leží všechny funkcionály φ_n pro $n \geq n_0$. Tudíž pro tato n máme $|\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$.

Jestliže naopak $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ pro každé $x \in X$ a G je w^*-otevřená množina obsahující φ, existuje $\varepsilon > 0$ a body $x_1, \dots, x_n \in X$ tak, že $V_\varphi(x_1, \dots, x_n; \varepsilon) \subset G$. Podle předpokladu existuje n_0 tak, že $\max\big\{ \big|(\varphi_k - \varphi)\big|(x_1), \dots, \big|(\varphi_k - \varphi)\big|(x_n) \big\} < \varepsilon$ pro každé $k \geq n_0$. Odtud plyne, že pro tato k máme $\varphi_k \in G$. ∎

7.3. Poznámky. (a) Vidíme, že w^*-konvergence posloupnosti funkcionálů se přesně shoduje se slabou* konvergencí zavedenou v 3.3. Proto nepřekvapí, že v dalším používané označení $\varphi_n \overset{w^*}{\to} \varphi$ není nijak zmateční.

(b) Poznamenejme ještě, že v konečné dimenzi w^*-topologie splývá s normovou topologií prostoru X^*. Na druhé straně v nekonečné dimenzi tyto topologie nesplývají nikdy. Tam totiž libovolné w^*-okolí 0 je vždy neomezená množina.

(c) w^*-topologie je vždy Hausdorffova.

Pro nás zcela základním tvrzením bude následující Alaogluova věta. K ní se ještě vrátíme později. Uveďme ji i s podrobným důkazem.

7.4. Alaogluova věta. *Nechť X je Banachův prostor. Uzavřená jednotková koule $B_{X^*} := \{\varphi \in X^* : \|\varphi\| \leq 1\}$ je w^*-kompaktní.*

Důkaz. Je-li $\varphi \in B_{X^*}$ a $x \in X$, je $\varphi(x) \in \big[-\|x\|, \|x\|\big]$. Uvažujeme-li zobrazení $\Theta : \varphi \mapsto \{\varphi(x)\}_{x \in X}$, zobrazuje Θ kouli B_{X^*} do kartézského součinu $\prod\limits_{x \in X} \big[-\|x\|, \|x\|\big]$. Zobrazení Θ je evidentně prosté. Protože w^*-topologie na X^* je topologií bodové konverence na X, je zobrazení Θ spojité, uvažujeme-li na X^* w^*-topologii a na $\prod\limits_{x \in X} \big[-\|x\|, \|x\|\big]$ topologii kartézského součinu. V tomto smyslu tedy můžeme ztotožnit B_{X^*} s jistou podmnožinou kartézského součinu $\prod\limits_{x \in X} \big[-\|x\|, \|x\|\big]$.

Podle Tichonovovy věty B.8 je $\prod\limits_{x \in X} \big[-\|x\|, \|x\|\big]$ kompaktní prostor. K dokončení důkazu si stačí uvědomit, že B_{X^*} je jeho w^*-uzavřená podmnožina. Nechť tedy f leží ve w^*-uzávěru B_{X^*}. Chceme ukázat, že $f \in B_{X^*}$. Volme $x, y \in X$. Je-li $\varepsilon > 0$, musí w^*-otevřená množina $V_f(x, y, x + y; \varepsilon)$ obsahovat jistý funkcionál $g \in B_{X^*}$. Dostáváme, že

$$\big|f(x+y) - f(x) - f(y)\big| \leq \big|f(x+y) - g(x+y)\big| + \big|g(x) - f(x)\big| + \big|g(y) - f(y)\big| < 3\varepsilon\,.$$

Odtud máme $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Obdobným způsobem bychom ukázali, že $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Je tedy f lineární funkcionál a zbývá ukázat, že $\|f\| \leq 1$. Volíme-li opět $x \in X$ a $\varepsilon > 0$, je

$V_f(x;\varepsilon)$ w^*-otevřené okolí f. Existuje tedy $h \in B_{X^*} \cap V_f(x,\varepsilon)$. Potom $|f(x)| < |h(x)| + \varepsilon$. Odtud odvodíme kýžený závěr, že $|f(x)| \le \|x\|$ ■

Po této malé odbočce se vraťme k našemu tématu a vydejme se hledat námi inzerovaný kompakt.

7.5. Prostor charakterů. *Charakterem* χ na $\mathcal{A}$ rozumíme každý nenulový multiplikativní lineární funkcionál z $\mathcal{A}$ do $\mathbf{C}$.

Podotkněme, že χ je *multiplikativní*, jestliže $\chi(ab) = \chi(a)\,\chi(b)$ pro každé dva prvky $a, b \in \mathcal{A}$. Zřejmě multiplikativní funkcionál je nenulový, právě když $\chi(e) = 1$. Je-li totiž $y \in \mathcal{A}$ takový prvek, že $\chi(y) \neq 0$, je $\chi(y) = \chi(ey) = \chi(e)\,\chi(y)$, a tudíž $\chi(e) = 1$.

Množinu všech charakterů značme symbolem $\Omega(\mathcal{A})$. Tento prostor se nazývá *prostorem charakterů* (v angličtině obvykle *structure space*), někdy také *spektrem Banachovy algebry* $\mathcal{A}$.

Je-li χ charakter a $x \in \mathcal{A}$, musí být $\chi(x)$ ve spektru prvku x. Kdyby totiž $\chi(x)$ leželo v rezolventě $\varrho(x)$, existoval by prvek $y \in \mathcal{A}$ tak, že $\big(x - \chi(x)e\big)y = e$. Potom ovšem $1 = \chi(e) = \big(\chi(x) - \chi(x)\big)\chi(y) = 0$, což je nemožné.

Poznámka. Platí i opačné tvrzení: *Jestliže $\chi \in \mathcal{A}^*$ a $\chi(x) \in \sigma(x)$ pro každé $x \in \mathcal{A}$, potom χ je již charakter.* To je tak zvaná *Gleason-Kahane-Żelazkova charakteristika* charakterů. Jednoduchý důkaz tohoto tvrzení pocházející od M. Roitmana a Y. Sternfelda lze nalézt v B. Aupetit [*1991].

Tedy $\chi(x) \in \sigma(x)$, odkud plyne, že $|\chi(x)| \le r(x) \le \|x\|$. Protože $\chi(e) = 1$, dostáváme, že každý charakter je spojitý lineární funkcionál a

$$\Omega(\mathcal{A}) \subset \{\varphi \in \mathcal{A}^* : \|\varphi\| = 1\}\,.$$

Na prostoru $\mathcal{A}^*$ uvažujme slabou w^*-topologii. V ní je jednotková koule $B_{\mathcal{A}} := \{\varphi \in \mathcal{A}^* : \|\varphi\| \le 1\}$ podle Alaogluovy věty 7.3 w^*-kompaktní. Není těžké si rozmyslet, že prostor charakterů $\Omega(\mathcal{A})$ je w^*-uzavřená podmnožina $B_{\mathcal{A}}$. Je-li totiž $\{\chi_\alpha\}$ zobecněná posloupnost charakterů a $\chi_\alpha \xrightarrow{w^*} \chi$, je zřejmě i χ charakter na $\mathcal{A}$ (zobecněná posloupnost charakterů konverguje, právě když konverguje bodově na $\mathcal{A}$).

Právě zavedená w^*-topologie na $\Omega(\mathcal{A})$ se často nazývá *Gelfandovou topologií.*

Shrňme vše do následující věty.

7.6. Věta. *Buď $\mathcal{A}$ Banachova algebra a $\Omega(\mathcal{A})$ prostor všech charakterů na $\mathcal{A}$. Potom $\Omega(\mathcal{A})$ je w^*-kompaktní podprostor $\mathcal{A}^*$.*

7.7. Poznámky. (a) Nikde není řečeno, že prostor charakterů $\Omega(\mathcal{A})$ by nemohla být prázdná množina. Kupříkladu na Banachově algebře všech $n \times n$-matic, $n > 1$, neexistují žádné charaktery. Také prostor charakterů Banachovy algebry $\mathcal{L}(H)$ všech operátorů na Hilbertově prostoru H tvoří prázdnou množinu. Z tohoto hlediska jsou zajímavější komutativní Banachovy algebry, jak uvidíme v následujících větách.

(b) Víme, že Banachova algebra $L^1(\mathbf{R})$ nemá jednotku. Není problém rozšířit celou teorii i na ni a obecněji pak též na všechny Banachovy algebry nemající jednotku. Snad pouze z důvodu jednoduchosti se tím nebudeme zabývat. Poznamenejme jenom, že pro Banachovy algebry bez jednotky je prostor charakterů pouze lokálně kompaktním prostorem.

7.8. Gelfandova transformace. Nechť $\Omega(\mathcal{A})$ je prostor charakterů Banachovy algebry $\mathcal{A}$. Je-li $x \in \mathcal{A}$, definujme funkci $\widehat{x}$ na $\Omega(\mathcal{A})$ předpisem

$$\widehat{x} : \chi \mapsto \chi(x)\,.$$

Téměř okamžitě je vidět, že $\widehat{x}$ je spojitá funkce na $\Omega(\mathcal{A})$ (nezapomeňte, že na prostoru charakterů $\Omega(\mathcal{A})$ uvažujeme w^*-topologii, což je topologie bodové konvergence na $\mathcal{A}$). Zobrazení $x \mapsto \widehat{x} : \mathcal{A} \to \mathcal{C}(\Omega(\mathcal{A}))$ se nazývá *Gelfandovou transformací*. Spojité funkci $\widehat{x}$ se pak také říká *Gelfandova transformace* prvku x.

Podařilo se nám tedy každému prvku naší Banachovy algebry $\mathcal{A}$ přiřadit spojitou funkci na jistém kompaktu K. Zajímá nás nyní, jaké toto přiřazení má vlastnosti. Především, jaké algebraické operace zachovává, je-li prosté či dokonce izometrické, a konečně za jakých podmínek zobrazí $\mathcal{A}$ na celý prostor spojitých funkcí na K.

Poznámka. Pro další snad ještě připomeňme, že zobrazení h Banachovy algebry $\mathcal{A}$ do Banachovy algebry $\mathcal{B}$ je *homomorfizmus*, jestliže $h(a+b) = h(a) + h(b), h(ab) = h(a)\,h(b), h(\lambda a) = \lambda h(a)$ pro všechna $a, b \in \mathcal{A}$ a $\lambda \in \mathbf{C}$.

Dále, s odvoláním na cvičení 6.15.a víme, že spektrum $\sigma(\widehat{x})$ spojité funkce $\widehat{x}$ na kompaktu $\Omega(\mathcal{A})$ splývá s oborem hodnot $\widehat{x}(\Omega(\mathcal{A}))$.

7.9. Vlastnosti Gelfandovy transformace. *Nechť Φ je Gelfandova transformace Banachovy algebry $\mathcal{A}$ a $a \in \mathcal{A}$. Potom:*

(a) *Φ je homomorfizmus $\mathcal{A}$ na jistou podalgebru prostoru $\mathcal{C}(\Omega(\mathcal{A}))$,*
(b) *$\sigma(\widehat{a}) \subset \sigma(a)$ a $\|\widehat{a}\|_{\mathcal{C}(\Omega(\mathcal{A}))} \leq \|a\|_{\mathcal{A}}$.*

Je-li $\mathcal{A}$ komutativní, potom navíc:

(c) *$\sigma(a) = \sigma(\widehat{a})$ a $r(a) = \|\widehat{a}\|_{\mathcal{C}(\Omega(\mathcal{A}))}$.*

Důkaz. (a) Volme $x, y \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbf{C}$ a $\chi \in \Omega(\mathcal{A})$. Tvrzení je skoro zřejmé, plyne z následujících rovností

$$\widehat{\lambda x}(\chi) = \chi(\lambda x) = \lambda\chi(x) = \lambda\widehat{x}(\chi)\,,$$

$$\widehat{x+y}(\chi) = \chi(x+y) = \chi(x) + \chi(y) = \widehat{x}(\chi) + \widehat{y}(\chi)\,,$$

$$\widehat{xy}(\chi) = \chi(xy) = \chi(x)\,\chi(y) = \widehat{x}(\chi)\widehat{y}(\chi)\,.$$

(b) V odstavci 7.5 jsme ukázali, že $\widehat{a}(\Omega(\mathcal{A})) \subset \sigma(a)$, přičemž podle poslední poznámky výše víme, že $\sigma(\widehat{a}) = \widehat{a}(\Omega(\mathcal{A}))$. Odtud ihned plyne i druhá část tvrzení.

(c) Nechť $\lambda \in \sigma(a)$. Odvoláme-li se na cvičení 7.23.b2 (v něm jsme, bohužel, museli použít některých tvrzení z kapitoly *7 týkající se teorie ideálů), nalezneme charakter χ tak, aby $\lambda = \chi(a)$. Potom ovšem také $\lambda \in \sigma(\widehat{a})$, neboť $\lambda = \widehat{a}(\chi)$. Poslední část tvrzení plyne ihned z dokázaných vztahů. ■

7.10. Poznámka. Z předchozí věty speciálně plyne, že pro každou komutativní Banachovu algebru je její prostor charakterů neprázdný.

7.11. Příklady. Začněme obecně. Vrátíme-li se k poznámce v 2.10, musíme si znovu uvědomit, že při popisu duálu X^* Banachova prostoru X se snažíme najít takový prostor, s nímž by byl duál X^* v nějaké příjemné relaci (kupř. izometricky-izomorfní či homeomorfní). To se týká samozřejmě i následujících příkladů. V nich půjde o to, že se pokusíme ztotožňovat prostory charakterů s jednoduchými množinami. Ostatně příklady vše objasní.

(a) Buď $\mathcal{C}(K)$ Banachova algebra všech spojitých funkcí na kompaktním prostoru K (příklad 6.5.b).

Pro každé $x \in K$, je zobrazení $\chi_x : f \mapsto f(x)$, $f \in \mathcal{C}(K)$, charakterem na $\mathcal{C}(K)$. Zobrazení $\kappa : x \mapsto \chi_x : K \to \Omega(\mathcal{C}(K))$ je prosté, neboť prvky $\mathcal{C}(K)$ oddělují body K. Ukážeme, že κ zobrazuje kompakt K na celý prostor charakterů $\Omega(\mathcal{C}(K))$. Volme tedy $\chi \in \Omega(\mathcal{C}(K))$ a nechť neexistuje $x \in K$ tak, aby $\chi = \chi_x$. V tom případě můžeme ke každému $x \in K$ nalézt spojitou funkci $f_x \in \mathcal{C}(K)$ tak, že $f_x(x) \neq 0$ a $\chi(f_x) = 0$. Z kompaktnosti K a spojitosti funkcí f_x v bodě x nalezneme funkce $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}(K)$, pro něž $\chi(f_1) = \cdots = \chi(f_n) = 0$ a funkce $g := f_1\overline{f_1} + \cdots + f_n\overline{f_n}$ je na K všude kladná. Potom ovšem $\chi(g) = 0$ (jestliže $\chi(f) = 0$, potom i $\chi(f\,\overline{f}) = \chi(f)\chi(\overline{f}) = 0$), a protože $g^{-1} \in \mathcal{C}(K)$, je $\chi(1) = \chi(g\,g^{-1}) = \chi(g)\,\chi(g^{-1}) = 0$.

Zobrazení κ je navíc spojité. Jestliže totiž $x_\alpha \to x$, je $\chi_{x_\alpha} \overset{w^*}{\to} \chi_x$ (stačí si opět uvědomit, že w^*-konvergence je bodovou konvergencí na $\mathcal{C}^*(K)$). Protože K je kompakt, je κ dokonce homeomorfizmus.

Závěr — prostor všech charakterů $\Omega(\mathcal{C}(K))$ Banachovy algebry $\mathcal{C}(K)$ a K jsou homeomorfní. V tomto smyslu tedy můžeme ztotožnit K s $\Omega(\mathcal{C}(K))$ pomocí zobrazení $x \mapsto \chi_x$.

Jak vypadá Gelfandova transformace? Je-li $f \in \mathcal{C}(K)$, je

$$\widehat{f} : \chi \mapsto \chi(f) \quad \text{pro} \quad \chi \in \Omega(\mathcal{C}(K))\,.$$

Ztotožníme-li podle předchozího $\Omega(\mathcal{C}(K))$ s K, vidíme, že Gelfandova transformace je vlastně identita.

(b) Uvedeme nyní jeden z nejdůležitějších příkladů. V 6.5.d jsme uvažovali Banachovu algebru $l^1(\mathbf{Z})$ všech absolutně konvergentních řad na $\mathbf{Z}$ s násobením daným konvolucí.

Označíme-li symbolem $\mathbf{T}$ jednotkovou kružnici v $\mathbf{C}$, ukážeme zprvu, že prostor charakterů $\Omega(l^1(\mathbf{Z}))$ je homeomorfní s $\mathbf{T}$. Ztotožněme ještě pro jednoduchost běžným způsobem $\mathbf{T}$ s intervalem $[0, 2\pi)$ (i topologicky!), volme $z \in [0, 2\pi)$ a položme

$$\chi_z(\{a_n\}) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n e^{inz} \quad \text{pro} \quad \{a_n\}_{n \in \mathbf{Z}} \in l^1(\mathbf{Z}).$$

Není těžké ověřit, že χ_z je charakter na $l^1(\mathbf{Z})$. Nyní bychom chtěli ukázat, že zobrazení $\kappa : z \mapsto \chi_z$ je homeomorfizmus. Snadno si rozmyslíme, proč κ je prosté zobrazení. Je-li nyní χ charakter na $l^1(\mathbf{Z})$, hledáme $z \in [0, 2\pi)$ tak, aby $\chi = \chi_z$. Uvažujme speciální funkce φ a ψ na $\mathbf{Z}$, kde φ je charakteristická funkce množiny $\{1\}$ a ψ charakteristická funkce množiny $\{-1\}$. Protože

$$1 = |\chi(\varphi)\,\chi(\psi)| = |\chi(\varphi)|\,|\chi(\psi)| \le \|\varphi\|\,\|\psi\| = 1,$$

dostáváme, že $|\chi(\varphi)| = 1$. Existuje tudíž $z \in [0, 2\pi)$ tak, že $\chi(\varphi) = e^{iz}$. Je-li nyní $a = \{a_n\} \in l^1(\mathbf{Z})$, je $a = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n \varphi^n$, a tudíž využitím spojitosti χ konečně

$$\chi(a) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n e^{inz} = \chi_z(a).$$

K dokončení úvahy stačí dokázat, že κ je spojité zobrazení $[0, 2\pi)$ do prostoru $\Omega(l^1(\mathbf{Z}))$ opatřeného w^*-topologií. Stačí tedy volit $a = \{a_n\} \in l^1(\mathbf{Z})$ a ukázat, že zobrazení $z \mapsto \chi_z(a) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n e^{inz}$ je spojité. Ale to již plyne z toho, že $\chi_z(a)$ je stejnoměrnou limitou spojitých funkcí (a to funkcí $\sum_{n=-k}^{n=k} a_n e^{inz}$).

Podívejme se nyní, jak vypadá Gelfandova transformace prvku $\{a_n\}_{n \in \mathbf{Z}} \in l^1(\mathbf{Z})$. Po předchozím ztotožnění a označení $f := \{a_n\}$ máme

$$\widehat{f}(z) = \chi_z(\{a_n\}) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n e^{inz}, \quad z \in \mathbf{T}.$$

Samozřejmě $\widehat{f}$ je spojitá funkce na $\mathbf{T}$, přičemž a_n nejsou nic jiného, než Fourierovy koeficienty funkce $\widehat{f}$:

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widehat{f}(e^{it}) e^{-int}\, dt.$$

Vidíme tedy, že Gelfandovými transformacemi prvků $l^1(\mathbf{Z})$ jsou všechny takové spojité funkce na $\mathbf{T}$, jejichž Fourierova řada je absolutně konvergentní.

Varování. Pozor — ne každá spojitá funkce na $\mathbf{T}$ má absolutně konvergentní Fourierovu řadu!

(c) Nechť $\mathcal{A}(\Delta)$ je disková (Banachova) algebra všech spojitých funkcí na uzavřeném jednotkovém kruhu v komplexní rovině, které jsou holomorfní na vnitřku Δ (příklad 6.5.c).

Obdobně jako v případě (a) ukážeme, že prostor charakterů $\Omega(\mathcal{A}(\Delta))$ lze ztotožnit přímo s kompaktem Δ. Definujme tedy zobrazení

$$\chi_x : h \mapsto h(x) \quad \text{pro} \quad x \in \Delta,\ h \in \mathcal{A}(\Delta)$$

a $\kappa : x \mapsto \chi_x$ pokud $x \in \Delta$. Zřejmě χ_x je charakter pro každé $x \in \Delta$. Protože identické zobrazení $\mathrm{id} : z \mapsto z$ leží v $\mathcal{A}(\Delta)$, je zobrazení κ prosté. Chceme ukázat, že $\kappa(\Delta) = \Omega(\mathcal{A}(\Delta))$. Volme tedy $\chi \in \Omega(\mathcal{A}(\Delta))$. Položíme-li $a = \chi(\mathrm{id})$, musí být $a \in \Delta$. V opačném případě by totiž funkce $g(z) := (z-a)^{-1}$ byla prvkem $\mathcal{A}(\Delta)$, což by vedlo ke sporu ($\chi(1) = \chi(g\,(\mathrm{id} - a)) = \chi(g)\,\chi(\mathrm{id} - a) = 0$). Protože $\chi(p) = p(a)$ pro každý polynom p, a protože prostor polynomů je hustý v $\mathcal{A}(\Delta)$ (to zdůvodníme v následující poznámce), je $\chi(f) = f(a)$ pro každou funkci $f \in \mathcal{A}(\Delta)$. Tudíž $\chi = \chi_a$. (Místo hustoty polynomů lze též uvážit, že funkce holomorfní na okolí Δ tvoří hustou podmnožinu $\mathcal{A}(\Delta)$).)

Nyní je již jen krůček k tomu, abychom ukázali, že Δ a prostor charakterů $\Omega(\mathcal{A}(\Delta))$ jsou homeomorfní pomocí zobrazení κ. Sami si rozmyslete, že po tomto ztotožnění se Gelfandova transformace opět redukuje na identické zobrazení.

7.12. Poznámky. (a) Řekněme si stručně, proč množina polynomů je hustá v $\mathcal{A}(\Delta)$. Volme tedy $f \in \mathcal{A}(\Delta)$ a $\varepsilon > 0$. Najděme $r < 1$ tak, aby $|f(rz) - f(z)| < \varepsilon$ pro $z \in \Delta$ a aby funkce $f(rz)$ byla analytická na okolí Δ. Potom existuje polynom p tak, že $|p(z) - f(rz)| < \varepsilon$ pro $z \in \Delta$ (vzpomeňte si, jak je to se stejnoměrnou konvergencí Taylorovy řady). Tudíž pro $z \in \Delta$ dostaváme $|f(z) - p(z)| < \varepsilon$.

(b) Uvažujme obecnější případ Banachovy algebry $\mathcal{A}(K)$ všech spojitých funkcí na kompaktní podmnožině K komplexní roviny, které jsou holomorfní na vnitřku K (příklad 6.5.c). Nahradíme-li jednotkový kruh Δ kompaktní podmnožinou $K \subset \mathbf{C}$ „ohraničenou“ Jordanovou křivkou, lze stále prostor charakterů na $\mathcal{A}(K)$ ztotožnit s K. To proto, že i v tomto případě je prostor polynomů hustý v $\mathcal{A}(K)$. Poslední tvrzení o hustotě polynomů dokázal J.L. Walsh v [1927]. Důležitá *Mergeljanova věta* dokonce říká, že funkce z $\mathcal{A}(K)$ lze stejnoměrně aproximovat polynomy, jestliže doplněk K je souvislá množina. Důkaz je uveden v W. Rudin [*1977].

Nicméně prostor charakterů algebry $\mathcal{A}(K)$ lze ztotožnit s kompaktem K i ve zcela obecné situaci. To říká Arensova věta, jejíž důkaz lze vést podobně jako výše a jehož detaily lze nalézt v T.W. Gamelin [*1969] či v B. Aupetit [*1991].

(c) Je-li K kompaktní podmnožina v komplexní rovině (mohla by mít i prázdný vnitřek), označme $\tilde{\mathcal{A}}(K)$ množinu všech komplexních funkcí na K, které jsou na K stejnoměrnými limitami posloupností polynomů. Potom $\tilde{\mathcal{A}}(K)$ je (uzavřenou) Banachovou podalgebrou $\mathcal{C}(K)$ a její prostor charakterů obsahuje charaktery typu $\chi : h \mapsto h(x)$ pro $x \in K$. Může být ovšem větší. Přitom $\Omega(\tilde{\mathcal{A}}(K))$ lze ztotožnit uvedeným způsobem s K, právě když kompakt K „neroztíná“ $\mathbf{C}$. Tvrdí to C.E. Rickart v [*1960], str. 305.

(d) Zajímavý je případ Banachovy algebry $H^\infty(U)$ všech omezených holomorfních funkcí na otevřené množině $U \subset \mathbf{C}$. Již v případě, kdy $U = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| < 1\}$ je prostor charakterů větší než U. Množinu U lze totiž vnořit do prostoru charaktorů $\Omega(H^\infty(U))$ pomocí zobrazení $\kappa : x \mapsto \chi_x$, kde $\chi_x : h \mapsto h(x)$ pro $h \in H^\infty(U)$. Čtenář může nahlédnout do monografie K. Hoffman [*1962]. Stále je neřešen slavný *problém korony*, totiž zda obraz U v $\Omega(H^\infty(U))$ je tam hustý (v Gelfandově topologii). Přitom *koronou* se rozumí množina $\Omega(H^\infty(U)) \setminus \overline{\kappa(U)}$. Je-li U jednoduše souvislá množina, odpověď je kladná. To říká neméně slavný Carlesonův výsledek. Jeho zjednodušený důkaz lze nalézt v T.W. Gamelin [1980].

7.13. Věta. *Gelfandova transformace komutativní Banachovy algebry $\mathcal{A}$ je izometrickým zobrazením, právě když $\|x^2\| = \|x\|^2$ pro každé $x \in \mathcal{A}$.*

Důkaz. Jestliže $\|x^2\| = \|x\|^2$ pro prvek $x \in \mathcal{A}$, potom z Beurlingova vzorečku 6.23 pro spektrální poloměr ihned dostáváme $r(x) = \|x\|$. Protože podle 7.9.c máme $r(x) = \|\widehat{x}\|$, je $\|x\| = \|\widehat{x}\|$.

Předpokládáme-li, že Gelfandova transformace je izometrií a $x \in \mathcal{A}$, využijeme tvrzení 7.9.a, podle něhož $\widehat{x^2} = (\widehat{x})^2$, odkud dostaneme

$$\|x^2\| = \|\widehat{x^2}\| = \|(\widehat{x})^2\| = \|\widehat{x}\|^2 = \|x\|^2 .$$

■

V dalším se zaměříme na otázku, kdy Gelfandova transformace je prostým zobrazením a kdy zobrazuje algebru $\mathcal{A}$ na celý prostor $\mathcal{C}(\Omega(\mathcal{A}))$. Protože každá izometrie je prosté zobrazení, postačující podmínku máme obsaženu v předchozí větě. Dále, podle 7.9 je Gelfandova transformace Φ lineárním zobrazením, tudíž Φ je prosté zobrazení, právě když jeho jádro $\ker \Phi$ sestává pouze z nulového prvku. Věnujme se této množině trochu detailněji.

7.14. Radikál algebry. Buď $\mathcal{A}$ komutativní Banachova algebra a $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{C}(\Omega(\mathcal{A}))$ její Gelfandova transformace. Potom *radikálem* $\operatorname{Rad}\mathcal{A}$ algebry $\mathcal{A}$ nazýváme jádro její Gelfandovy transformace: $\operatorname{Rad}\mathcal{A} := \ker \Phi$. Je tedy

$$\operatorname{Rad}\mathcal{A} = \{a \in \mathcal{A} : \Phi(a) = \widehat{a} = 0 \text{ na } \Omega(\mathcal{A})\} = \bigcap\{\ker\varphi : \varphi \in \Omega(\mathcal{A})\} .$$

Podíváme-li se na tvrzení v 7.9.c, vidíme, že $\operatorname{Rad}\mathcal{A} = \{a \in \mathcal{A} : r(a) = 0\}$. Tudíž radikál $\operatorname{Rad}\mathcal{A}$ sestává ze všech kvazi-nilpotentních prvků $\mathcal{A}$.

Připomeňme, že $x \in \mathcal{A}$ je *kvazi-nilpotentní*, jestliže jeho spektrální poloměr $r(x)$ je roven 0.

Radikál algebry $\mathcal{A}$ je (oboustranným) ideálem v $\mathcal{A}$. To plyne ihned z toho, že Φ je podle 7.9.a homomorfizmus.

7.15. Polojednoduché algebry. Gelfandova transformace je tedy prostým zobrazením, právě když její radikál je tvořen pouze nulovým prvkem, to jest právě když radikál neobsahuje žádné netriviální kvazi-nilpotentní prvky. Algebry, pro něž $\operatorname{Rad}\mathcal{A} = \{0\}$, se nazývají *polojednoduché*.

Kupříkladu Banachova algebra $\mathcal{C}(K)$ z 6.5.b je polojednoduchá. Totéž platí i o Banachově algebře $l^1(\mathbf{Z})$ z 6.5.d.

Další informace o polojednoduchých algebrách přineseme v *7.7.

7.16. Komutativní C^*-algebry.

Otázka, kdy $\Phi(\mathcal{A}) = \mathcal{C}(\Omega(\mathcal{A}))$ je delikátnější a vyžaduje přechod od obecných komutativních Banachových algeber ke komutativním C^*-algebrám. Těmi se budeme zabývat v 9. kapitole, připomeňme pouze základní pojmy z 9.11 a 9.1.

C^*-algebrou rozumíme Banachovu algebru $\mathcal{Z}$, kde je navíc definována další operace $z \mapsto z^*$, zvaná involuce, s vlastností $\|z^*z\| = \|z\|^2$. Máme-li dvě C^*-algebry $\mathcal{Z}_1$ a $\mathcal{Z}_2$, *$*$-homomorfizmem* mezi nimi rozumíme každé zobrazení $\mathcal{Z}_1$ do $\mathcal{Z}_2$, které zachovává všechny algebraické operace, tedy Φ je $*$-homomorfizmus $\mathcal{Z}_1$ do $\mathcal{Z}_2$, pokud

$$\Phi(\lambda y + \mu z) = \lambda \Phi y + \mu \Phi z\,,\ \Phi(yz) = \Phi y + \Phi z\,,\ \Phi(z^*) = (\Phi z)^*\,, \quad y, z \in \mathcal{Z}_1, \lambda, \mu \in \mathbf{F}\,.$$

Pod *$*$-izomorfizmem* rozumíme prosté $*$-homomorfní zobrazení $\mathcal{Z}_1$ na $\mathcal{Z}_2$.

Prvky $z \in \mathcal{Z}$, pro které $zz^* = z^*z$ se nazývají *normální*, pokud dokonce $z = z^*$, nazveme z *hermiteovským*.

V dalším budeme uvažovat pouze C^*-algebry s jednotkou.

Přicházíme k jedné z nejdůležitějších vět této partie. K ní jen připomeňme, že prostor $\mathcal{C}(K)$ všech (komplexních) spojitých funkcí na kompaktu K tvoří C^*-algebru s involucí danou zobrazením $f \mapsto \overline{f}$.

7.17. Gelfand-Naimarkova věta. *Buď $\mathcal{Z}$ komutativní C^*-algebra. Potom Gelfandova transformace Φ daná zobrazením $z \mapsto \widehat{z}$ je izometrickým $*$-izomorfizmem $\mathcal{Z}$ na $\mathcal{C}(\Omega(\mathcal{Z}))$.*

Důkaz. Protože $\mathcal{Z}$ je komutativní, je každý její prvek normální. Odtud též plyne, že

$$\|z^2\|^2 = \|z^2(z^2)^*\| = \|zz^*\,zz^*\| = \|(zz^*)(zz^*)^*\| = \|zz^*\|^2 = \|z\|^4$$

pro každé $z \in \mathcal{Z}$ (porovnejte se cvičením 8.28.h). Tudíž věta 7.13 říká, že Gelfandova transformace je izometrickým zobrazením. Dále, je-li x hermiteovský prvek $\mathcal{Z}$ a $\chi \in \Omega(\mathcal{Z})$ charakter, je spektrum $\sigma(x)$ reálné (cvičení 7.23.d), odkud podle 7.9.c je také $\chi(x) \in \mathbf{R}$.

Nyní, každý prvek $z \in \mathcal{Z}$ lze napsat (jednoznačně) jako $z = x + iy$, kde x, y jsou hermiteovské (stačí položit $x = \frac{1}{2}(z + z^*)$ a $y = \frac{i}{2}(z^* - z)$), tudíž pro libovolný charakter χ máme

$$\overline{\widehat{z}}(\chi) = \overline{\chi}(z) = \chi(x) - i\chi(y) = \chi(x - iy) = \chi(z^*) = \widehat{(z^*)}(\chi)\,.$$

Vidíme, též s přihlédnutím k 7.9.a, že zobrazení $\Phi : z \mapsto \widehat{z}$ je $*$-izomorfní.

Zbývá dokázat, že $\Phi(\mathcal{Z}) = \mathcal{C}(\Omega(\mathcal{Z}))$. Není sporu o tom, že $\Phi(\mathcal{Z})$ je podalgebra $\mathcal{C}(\Omega(\mathcal{Z}))$ (stačí odkázat na 7.9.a). Protože Φ je izometrie, je $\Phi(\mathcal{Z})$ úplná, a tedy uzavřená podalgebra v $\mathcal{C}(\Omega(\mathcal{Z}))$. Ukážeme-li, že $\Phi(\mathcal{Z})$ obsahuje konstanty, odděluje body $\Omega(\mathcal{Z})$ a je uzavřena na tvoření komplexně sdružených funkcí, bude podle komplexní verze Stone-Weierstrassovy věty D.2 $\Phi(\mathcal{Z}) = \mathcal{C}(\Omega(\mathcal{Z}))$. Ale poslední tvrzení jsou již snadno ověřitelná. Protože $\Phi(e) = \widehat{e} = 1$, obsahuje $\Phi(\mathcal{Z})$ konstanty. Jsou-li χ_1 a χ_2 různé charaktery, existuje $z \in \mathcal{Z}$ tak, že $\chi_1(z) \neq \chi(z)$. Potom ovšem $\widehat{z} \in \Phi(\mathcal{Z})$, přičemž $\widehat{z}(\chi_1) \neq \widehat{z}(\chi_2)$. Konečně, je-li $z \in \mathcal{Z}$, je podle začátku důkazu $\overline{\widehat{z}} = \widehat{(z^*)} \in \Phi(\mathcal{Z})$. ■

7.18. Poznámka. Poznamenejme jen na okraj, že každý prostý $*$-homomorfizmus mezi C^*-algebrami je již izometrií. Návod k důkazu je obsažen ve cvičení 7.23.g.

Kapitolu zakončíme dvěma důležitými větami, které často také nesou jména Gelfanda a Naimarka. První z nich je vlastně funkčním kalkulem pro normální prvky C^*-algeber. Tímto tématem se budeme podrobně zabývat v 9. kapitole, ovšem na mnohem elementárnější úrovni. Druhá věta pak říká, že libovolnou C^*-algebru můžeme reprezentovat jako jistou podalgebru prostoru $\mathcal{L}(H)$ všech omezených operátorů na jistém Hilbertově prostoru.

7.19. Věta. *Nechť a je normální prvek C^*-algebry $\mathcal{Z}$. Potom existuje zobrazení $\Psi : f \mapsto f(a)$ prostoru $\mathcal{C}(\sigma(a))$ do $\mathcal{Z}$ mající následující vlastnosti:*

(a) *Ψ je izometrický $*$-izomorfizmus,*
(b) *$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$ pro každé $f \in \mathcal{C}(\sigma(a))$,*

(c) *jestliže funkce g je holomorfní na okolí spektra $\sigma(a)$ a $f = g \restriction \sigma(a)$, potom*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma g(\lambda)(\lambda e - a)^{-1}\, d\lambda\,.$$

Speciálně, je-li $p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_n t^n$ polynom, je $p(a) = \alpha_0 + \alpha_1 a + \cdots + \alpha_n a^n$.

Zde se jedná o křivkový integrál z vektorové funkce přes cyklus Γ obsahující $\sigma(a)$ a obsažený v oblasti holomorfie funkce g, blíže viz 9.6 a 9.7.

Důkaz. Nechť $\mathcal{A}$ je nejmenší uzavřená C^*-algebra v $\mathcal{Z}$ obsahující prvky e, a (poznamenejme, že $\mathcal{A}$ je prostě uzávěr množiny všech elementů $p(a, a^*)$, kde p je komplexní polynom dvou proměnných). Protože a je normální prvek, je $\mathcal{A}$ komutativní.

Zprvu je nutno uvážit, že spektrum prvku a, uvažujeme-li jej vzhledem k $\mathcal{A}$ či k $\mathcal{Z}$ je stejné. To plyne z důsledku (f) v *6.8.

Další krok spočívá v důkazu, že spektrum $\sigma(a)$ a prostor charakterů $\Omega(\mathcal{A})$ jsou homeomorfní. Uvažujme tedy funkci $\widehat{a} : \chi \mapsto \chi(a)$. Podle 7.9.c zobrazuje $\widehat{a}$ prostor $\Omega(\mathcal{A})$ na $\sigma(a)$. Ukážeme, že $\widehat{a}$ je prosté zobrazení. Jestliže totiž $\widehat{a}(\chi_1) = \widehat{a}(\chi_2)$, je vzhledem k vlastnostem Gelfandovy transformace v 7.17 $\chi_1(a^*) = \chi_2(a^*)$. Tudíž i $\chi_1(p(a, a^*)) = \chi_2(p(a, a^*))$ pro každý polynom p dvou proměnných. Ze spojitosti charakterů a konstrukce $\mathcal{A}$ dostáváme konečně, že $\chi_1 = \chi_2$. Zobrazení $\widehat{a}$ je spojité, to plyne ihned z definice Gelfandovy topologie. A protože prostor charakterů $\Omega(\mathcal{A})$ je kompakt, musí být $\widehat{a}$ homeomorfizmem mezi $\Omega(\mathcal{A})$ a $\sigma(a)$.

Vidíme, že zobrazení $f \mapsto f \circ \widehat{a}$ je izometrickým $*$-izomorfizmem prostoru $\mathcal{C}(\sigma(a))$ na $\mathcal{C}(\Omega(\mathcal{A}))$.

Konečně použijeme Gelfand-Naimarkovu větu 7.17. Nechť Φ je Gelfandova transformace $\mathcal{A}$ na $\mathcal{C}(\sigma(a))$. Položme

$$\Psi : f \mapsto \Phi^{-1}(f \circ \widehat{a}) \quad \text{pro} \quad f \in \mathcal{C}(\sigma(a))\,.$$

Ψ je evidentně izometrické a $*$-izomorfní zobrazení $\mathcal{C}(\sigma(a))$ na $\mathcal{A}$. Dále $\varphi(a) = a$ pro funkci $\varphi(t) = t$.

Volme $f \in \mathcal{C}(\sigma(a))$. Protože $\Psi : \mathcal{C}(\sigma(a)) \to \mathcal{A}$ je $*$-izomorfizmus, je $\sigma(f(a)) = \sigma(\Psi(f)) = \sigma(f)$. Víme však, že v případě speciální Banachovy algebry $\mathcal{C}(\sigma(a))$ je $\sigma(f) = f(\sigma(a))$ (cvičení 6.15.a). Tím jsme dokázali část (b) o obrazu spektra.

K dokončení důkazu zbývá ověřit (c). Ale to již není těžké. Označíme-li totiž $\Pi : \mathrm{Hol}(a) \to \mathcal{A}$ Dunfordův funkční kalkulus z věty 9.8, $f \mapsto \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)(\lambda e - a)^{-1}\, d\lambda$, máme $\Psi(\varphi) = \Pi(\varphi) = a$ pro $\varphi(z) = z$ a pomocí čistě algebraických úvah i $\Psi(f) = \Pi(f)$, pokud f je racionální funkce mající póly mimo $\sigma(a)$. Je-li konečně $f \in \mathrm{Hol}(a)$, existuje podle Rungeho věty posloupnost $\{f_n\}$ racionálních funkcí s póly mimo $\sigma(a)$ tak, že $f_n \to f$ stejnoměrně na okolí $\sigma(a)$. Potom podle věty 9.8 $\Pi(f_n) \to \Pi(f)$, přičemž současně $\Psi(f_n) \to \Psi(f)$ z izometrie Ψ. Tedy $\Psi(f) = \Pi(f)$.

Výpočet $p(a)$ v případě polynomu p je uveden v 9.7. ■

7.20. Poznámky. (a) Zobrazení Ψ je vpodstatě dáno jako inverzní Gelfandova transformace.

(b) Protože algebra $\mathcal{A}$ z důkazu věty 7.19 je komutativní, je prvek $f(a)$ vždy normální. To též plyne ze vztahů $f(a)^* = \overline{f}(a)$ a $f\,\overline{f} = \overline{f}\,f$.

(c) Předchozí věta mimo jiné říká, že zobrazení Ψ je rozšířením Dunfordova funkčního kalkulu z 9.7 pro speciální případ normálních prvků C^*-algeber. Také je zobecněním Rieszova funkčního kalkulu z 9.15 a udává jinou metodu jeho konstrukce.

(d) Funkční kalkulus Ψ z předchozí věty je také jednoznačně určen, jak vyplývá z následující věty.

Věta. *Nechť $\mathcal{A}$ je C^*-podalgebra C^*-algebry $\mathcal{Z}$ generována normálním prvkem $a \in \mathcal{Z}$. Dále nechť τ je spojitý $*$-izomorfizmus $\mathcal{C}(\sigma(a))$ do $\mathcal{A}$ rozšiřující Dunfordův funkční kalkulus ($\tau(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)(\lambda e - a)^{-1}\, d\lambda$, pokud f je funkce holomorfní na okolí $\sigma(a)$). Potom $\Psi(f) = f(a)$ pro $f \in \mathcal{C}(\sigma(a))$.*

Důkaz. Volíme-li $f \in \mathcal{C}(\sigma(a))$, existuje posloupnost $\{p_n\}$ polynomů dvou proměnných tak, že $p_n(z, \overline{z}) \to f(z)$ stejnoměrně na $\sigma(a)$ (viz důsledek D.3). Z vlastností τ i Dunfordova funkčního kalkulu pak plyne, že $\tau(p_n) = p_n(a, a^*) \to \tau(f)$, $p_n(a, a^*) \to \Psi(a)$. Tedy $\tau(f) = \Psi(f)$. ■

7.21. Věta. *Nechť $\mathcal{Z}$ je C^*-algebra. Potom existuje Hilbertův prostor H, uzavřená samoadjungovaná podalgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(H)$ a izometrický $*$-izomorfizmus $\mathcal{Z}$ na $\mathcal{A}$.*

Algebra $\mathcal{A}$ je *samoadjungovaná*, jestliže $T^* \in \mathcal{A}$, pokud T leží v $\mathcal{A}$.

Důkaz. Dokázat tuto Gelfand-Naimarkovu větu o reprezentaci vyžaduje poměrné úsilí a další techniku. Místo toho připojíme pouze poznámky. ■

7.22. Poznámky. (a) Předchozí věta platí i pro C^*-algebry bez jednotky.

(b) Hilbertův prostor H v uvedené větě může být značně komplikovaný a veliký. V případě, kdy $\mathcal{Z}$ je separabilní, lze volit $H = l^2$.

(c) Pro obecné Banachovy algebry lze odvodit následující větu.

Věta. *Nechť $\mathcal{M}$ je Banachova algebra. Potom existuje Banachův prostor X, uzavřená podalgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X)$ a spojité izomorfní zobrazení $\mathcal{M}$ na $\mathcal{A}$.*

Návod. Podívejte se na *6.2. ♣

7.23. Elementární cvičení. (a) Označme

$$\widehat{\mathcal{A}} := \{\widehat{x} : x \in \mathcal{A}\}$$

množinu všech Gelfandových transformací prvků z $\mathcal{A}$. Zřejmě $\widehat{\mathcal{A}}$ je vektorový prostor funkcí na $\Omega(\mathcal{A})$. Ukažte, že Gelfandova topologie na $\Omega(\mathcal{A})$ je generována $\widehat{\mathcal{A}}$. Jinak řečeno, je to nejslabší topologie na prostoru charakterů, při níž jsou všechny funkce z $\widehat{\mathcal{A}}$ spojité.

(b) Nechť $\mathcal{A}$ je komutativní Banachova algebra a $x \in \mathcal{A}$.

(b1) Prvek x je invertibilní, právě když $\chi(x) \neq 0$ pro každé $\chi \in \Omega(\mathcal{A})$, tedy právě když $\widehat{x}$ je invertibilní v prostoru $\mathcal{C}(\Omega(\mathcal{A}))$.

Návod. Je-li x invertibilní a χ charakter, je $\chi(x)\chi(x^{-1}) = \chi(e) = 1$. Pro důkaz opačné implikace uvažte, že množina $x\mathcal{A} = \mathcal{A}x$ je ideál neobsahující jednotku e. Tudíž podle *7.2 je $x\mathcal{A}$ obsaženo v jistém maximálním ideálu $\mathcal{I}$. Podle *7.5 existuje $\chi \in \Omega(\mathcal{A})$ tak, že $\mathcal{I} = \ker \chi$. Odtud $\chi(x) = \chi(xe) = 0$. ♣

(b2) $\lambda \in \sigma(x)$, právě když existuje charakter χ tak, že $\chi(x) = \lambda$.

Návod. Plyne ihned z (b1). ♣

Poznámka. Pro důkaz (b1) a následně i (b2) jsme použili hlubších tvrzení z kapitoly *7. V nich jsme minimálně potřebovali Zornovo lemma. Bylo by zajímavé podat důkaz tvrzení v (b2) nevyužívající teorie ideálů a pouze vystačit s (multiplikativními) funkcionály.

(c) Buď $\mathcal{A}$ Banachova algebra. Potom $\mathcal{A}$ je komutativní a polojednoduchá, právě když prostor charakterů $\Omega(\mathcal{A})$ odděluje body $\mathcal{A}$.

Návod. Nechť prostor charakterů odděluje body $\mathcal{A}$. Pokud $ab \neq ba$ pro nějaké $a, b \in \mathcal{A}$, nalezneme charakter χ, který odděluje ab od ba a ihned získáme spor. Je-li $x \in \mathcal{A}$, $x \neq 0$ a $\chi \in \Omega(\mathcal{A})$ tak, že $\chi(x) = \widehat{x}(\chi) \neq 0 = \chi(0)$, musí být podle 7.9.c $r(x) \neq 0$. Podle 7.14 pak $x \notin \operatorname{Rad}\mathcal{A}$.

Jestliže $\mathcal{A}$ je komutativní a polojednoduchá a $x \neq 0$, je opět podle 7.9.c a 7.14 $\|\widehat{x}\|_{\mathcal{C}(\Omega(\mathcal{A}))} = r(x) \neq 0$. Vzhledem k definici normy v $\mathcal{C}(\Omega(\mathcal{A}))$ musí existovat charakter $\chi \in \Omega(\mathcal{A})$, pro nějž $\chi(x) \neq 0$. ♣

(d) Je-li x hermiteovský prvek C^*-algebry $\mathcal{Z}$, potom $\sigma(x) \subset \mathbf{R}$.

Návod. Předpokládejme, že $\alpha + i\beta \in \sigma(x)$ pro $\beta \neq 0$. Volme $\lambda \in \mathbf{R}$ a položme $z = \frac{1}{\beta}(x - \alpha e)$. Potom z je hermiteovský a $i \in \sigma(z)$. Tudíž prvek $(\lambda + 1)e - (\lambda e - iz) = (e + iz)$ není invertibilní. Odtud

$$(\lambda + 1)^2 \leq \|\lambda e - iz\|^2 = \|\lambda^2 e + z^2\| \leq \lambda^2 + \|z\|^2 \, .$$

Dostáváme tedy, že $\lambda \leq \frac{1}{2}(\|z\|^2 - 1)$, což je samozřejmě spor. ♣

(e) Buď Φ Gelfandova transformace komutativní Banachovy algebry $\mathcal{A}$. Ukažte, že $\Phi(\mathcal{A})$ je uzavřená podalgebra $\mathcal{C}(\Omega(\mathcal{A}))$, pokud existuje $C > 0$ tak, že $\|x\|^2 \leq C\|x^2\|$ pro každé $x \in \mathcal{A}$.

Návod. Ukažte, že $\|x\| \leq C\, r(x)$ pro každé $x \in \mathcal{A}$. Tudíž Gelfandova transformace je „zdola omezená“, což stačí k uzavřenosti jejího oboru hodnot. Můžete se též inspirovat *7.7.g. ♣

Poznámka. Ve cvičení 43.6 knihy C. Swartz [*1992] se tvrdí, že platí i opačná implikace. To je skutečně v již zmíněném odstavci *7.7.f dokázáno, ale za dodatečného předpokladu, že $\mathcal{A}$ je polojednoduchá. Zdá se však, že bez předpokladu polojednoduchosti $\mathcal{A}$ tomu tak není. Uvažte následující příklad. Za $\mathcal{A}$ vezmeme prostor $\mathbf{C}^2$ opatřený normou $\|.\|_\infty$ (tedy komplexní prostor l_2^∞ z 1.10.a). Definujme násobení předpisem $(x,y).(u,v) = (xu, 0)$. Zkuste ověřit, že $\mathcal{A}$ tvoří komutativní Banachovu algebru, která není jednoduchá. Gelfandův prostor $\Omega(\mathcal{A})$ je jednobodový a obraz Gelfandovy transformace je uzavřený. Přesto $\|(0,y)^2\|_\infty = 0$ a $\|(0,y)\|_\infty^2 = |y|^2$.

(f) Je-li Banachova algebra $\mathcal{A}$ separabilní, potom Gelfandova topologie na prostoru charakterů $\Omega(\mathcal{A})$ je metrizovatelná a má spočetnou bázi.

Návod. Pokud X je separabilní Banachův prostor, je jednotková koule B_{X^*} jeho duálu metrizovatelná a kompaktní ve w^*-topologii podle věty *16.2.a. ♣

(g) Nechť $h : \mathcal{Z}_1 \to \mathcal{Z}_2$ je $*$-homomorfizmus mezi C^*-algebrami $\mathcal{Z}_1$ a $\mathcal{Z}_2$, Potom je h již spojitý. Je-li navíc h prosté zobrazení, je h již izometrií.

Návod. To nahlédneme takto. Předpokládejme, že $h : \mathcal{Z}_1 \to \mathcal{Z}_2$ je $*$-homomorfizmus (a převádí jednotku v $\mathcal{Z}_1$ na jednotku v $\mathcal{Z}_2$). Je-li $z \in \mathcal{Z}_1$, je $\sigma(h(z)) \subset \sigma(z)$, a tudíž $r(h(z)) \le r(z)$. Volíme-li $x \in \mathcal{A}$, je prvek x^*x zřejmě hermiteovský a dostáváme

$$\|h(x)\|^2 = \|h(x)^*h(x))\| = \|h(x^*x)\| = r(h(x^*x)) \le r(x^*x) = \|x^*x\| = \|x\|^2 .$$

Pokud byly některé kroky nejasné, podívejte se na 9.11. Tím dostáváme, že $\|h\| \le 1$.

Předpokládáme-li nyní, že H není izometrie, existuje $z \in \mathcal{Z}_1$ tak, že $\|z\| = 1$ a $\|h(z)\| < 1$. Potřebujeme nalézt nenulový prvek $x \in \mathcal{Z}_1$ tak, aby $h(x) = 0$. Naznačme stručně myšlenku jeho konstrukce. Položíme $x := z^*z$. Potom x je hermiteovský prvek a $\|x\| = \|z^*z\| = \|z\|^2 = 1$ a $\|h(x)\| = \|h(z^*z)\| = \|(h(z))^*h(z)\| = \|h(z)\|^2 = 1-\varepsilon$, kde $\varepsilon > 0$. Nechť $f \in \mathcal{C}([0,1])$ je taková funkce, že $f = 0$ na $[0, 1-\varepsilon]$, $f(1) = 1$ a f je lineární na $[1-\varepsilon, 1]$. Podle věty o obrazu spektra a 5.15.c je $f(\sigma(x)) = \sigma(f(x)) = \sigma(\widehat{f(x)} = \widehat{f(x)}(\Omega(\mathcal{Z}_1))$ (uvažujeme komutativní algebru generovanou e, x). Tudíž $1 \notin \sigma(f(x))$ a $f(x) \ne 0$. Z vlastností h plyne, že $h(f(x)) = f(h(x))$ (ze spojitosti a rovnosti pro polynomy). Protože $\|h(x)\| = 1-\varepsilon$, je $\sigma(h(x)) \subset [0, 1-\varepsilon]$. Dostáváme $\sigma(h(f(x))) = f(\sigma(h(x))) \subset f([0, 1-\varepsilon]) = \{0\}$. Prvek $h(x)$ je hermiteovský, tedy $h(x) = 0$. A je to. ♣

(h) Dokažte následující slavnou *Wienerovu větu*: *Nechť Fourierova řada funkce $f \in \mathcal{C}(\mathbf{T})$ absolutně konverguje. Potom i funkce $\frac{1}{f}$ má absolutně konvergentní Fourierovu řadu.*

Návod. Podle 7.11.b existuje posloupnost $x = \{x_n\} \in l^1(\mathbf{Z})$ tak, že její Gelfandova transformace $\widehat{x}(e^{it}) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} x_n e^{int} = f(t)$. Tvrzení (c) v 7.9 nám pak spolu s předpokladem říká že x má inverzi x^{-1} v $l^1(\mathbf{Z})$. Potom ovšem $\frac{1}{f}$ je Gelfandovou transformací prvku x^{-1}, a tudíž $\frac{1}{f}$ má absolutně konvergentní Fourierovu řadu. ♣

Poznámka. N. Wiener ukázal v [1932], že *převrácená hodnota nikde se neanulující absolutně konvergentní trigonometrické řady je opět absolutně konvergentní trigonometrická řada.* To je poměrně silná věta, neboť ne každá spojitá funkce z $\mathcal{C}(\mathbf{T})$ má absolutně konvergentní Fourierovu řadu. I.M. Gelfand [1941a] podal právě naznačený důkaz a ukázal tím na sílu výsledků jeho teorie komutativních Banachových algeber.

8. Spektrální teorie v Hilbertových prostorech

V této kapitole se budeme zabývat spektrální teorií operátorů na Hilbertových prostorech, které uvažujeme převážně nad tělesem komplexních čísel $\mathbf{C}$. Symbolem H značíme vždy Hilbertův prostor.

Začněme však s dvěma novými pojmy, které lze definovat bez problémů i v Banachově algebře $\mathcal{L}(X)$ všech operátorů na Banachově prostoru X.

8.1. Zdola omezené operátory. Řekneme, že operátor $T \in \mathcal{L}(X)$ je *zdola omezený*, existuje-li takové $\beta > 0$, že $\|Tx\| \ge \beta\,\|x\|$ pro všechna $x \in X$. Evidentně každý zdola omezený operátor je prostý. Platí dokonce tato jednoduchá charakteristika.

8.2. Věta. *Následující výroky jsou ekvivalentní pro operátor T na Banachově prostoru X:*

(i) *operátor T je zdola omezený,*
(ii) *T je prostý a jeho obor hodnot $\mathcal{R}T$ je uzavřený,*
(iii) $\inf\{\|Tx\| : \|x\| = 1\} > 0$.

Důkaz. Ekvivalence (i) $\Leftrightarrow$ (iii) je zřejmá. Je-li T zdola omezený operátor, je jeho obor hodnot $\mathcal{R}T$ uzavřený. To jsme již dokázali v 5.2.

Nechť naopak T je prostý a má uzavřený obor hodnot. Potom $\mathcal{R}T$ je úplný a z věty 4.16 plyne, že $T^{-1} : \mathcal{R}T \to X$ je omezený. Je-li tedy $x \in X$, máme $\|x\| = \|T^{-1}(Tx)\| \le \|T^{-1}\|\,\|Tx\|$. ■

8.3. Aproximativní spektrum. *Aproximativní spektrum* $\sigma_{ap}(T)$ operátoru $T \in \mathcal{L}(X)$ sestává ze všech takových $\lambda \in \mathbf{C}$, pro něž

$$\inf\{\|Tx - \lambda x\| : \|x\| = 1\} = 0\,.$$

Jinak řečeno, $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$, jestliže existuje posloupnost $x_n \in X$, $\|x_n\| = 1$ tak, že $Tx_n - \lambda x_n \to 0$. Nemusejí tedy existovat netriviální řešení rovnice $Tx - \lambda x = 0$, ale existují její „přibližná“ netriviální řešení. Ihned je vidět, že $\sigma_p(T) \subset \sigma_{ap}(T)$ a z následující věty, jež je samozřejmým důsledkem věty 8.2, také $\sigma_{ap}(T) \subset \sigma(T)$.

8.4. Věta. *Buď $T \in \mathcal{L}(X)$ a $\lambda \in \mathbf{C}$. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) *λ neleží v aproximativním spektru T,*
(ii) *operátor $T - \lambda I$ je prostý a má uzavřený obor hodnot,*
(iii) *operátor $T - \lambda I$ je zdola omezený.*

A nyní se již věnujme operátorům na Hilbertově prostoru H.

8.5. Hermiteovsky adjungované zobrazení. *Nechť $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, kde H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory. Potom existuje právě jedno zobrazení $T^* : H_2 \to H_1$ tak, že*

$$(Tx, y) = (x, T^*y) \quad \textit{pro každé} \quad x \in H_1\,, y \in H_2\,.$$

Přitom $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ a $\|T^*\| = \|T\|$.

Zobrazení T^* se nazývá *(hermiteovsky) adjungované* k zobrazení T.

Důkaz. Je-li $y \in H_2$, je zobrazení $L_y : x \mapsto (Tx, y)$ spojitá lineární forma na H_1. Podle Fréchet-Rieszovy věty 2.9 existuje právě jedno $z \in H_1$ tak, že $(Tx, y) = (x, z)$ pro všechna $x \in H_1$ a $\|z\| = \|L_y\|$. Označíme-li toto z jako T^*y, máme $(Tx, y) = (x, T^*y)$, kdykoliv $x \in H_1$.

Lehko nyní ověříme, že T^* je lineární, stačí třeba sledovat rovnosti

$$\begin{aligned}(x, T^*(y_1 + y_2)) &= (Tx, y_1 + y_2) = (Tx, y_1) + (Tx, y_2) = (x, T^*y_1) + (x, T^*y_2) = \\ &= (x, T^*y_1 + T^*y_2)\,.\end{aligned}$$

Je-li $y \in H_2$, plyne z Fréchet-Rieszovy věty, že $\|T^*y\| = \|L_y\| \le \|y\|\,\|T\|$, tedy $\|T^*\| \le \|T\|$. Lehko se přesvědčíme, že $T^{**} = T$, což nás vede k druhé nerovnosti $\|T\| = \|T^{**}\| \le \|T^*\|$. ■

8.6. Poznámka. Nechť T je operátor mezi Hilbertovými prostory H_1 a H_2. Jaký je vztah mezi banachovsky a hermiteovsky adjungovanými operátory T' a T^*? Především je nutné si uvědomit, že T' je operátor z duálu H_2^* do H_1^*, zatímco T^* operuje mezi původními prostory H_2 a H_1. Označíme-li však j přirozené zobrazení ztotožňující Hilbertův prostor H s jeho duálem H^* (viz 2.11), je $T^* = j_1^{-1} \circ T' \circ j_2$.

Jaká je tedy situace v konečné dimenzi? Odpovídá-li matice $A = (a_{i,k})$ lineárnímu zobrazení $L \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^n)$, potom pro prvky matice $A^* = (a^*_{i,k})$ (hermiteovsky) adjungovaného zobrazení L^* platí $a^*_{i,k} = \overline{a_{k,i}}$ a pro matici $A' = (a'_{i,k})$ (banachovsky) adjungovaného zobrazení L' dostáváme $a'_{i,k} = a_{k,i}$. To je „způsobeno“ tím, že zobrazení j je „sdruženě-lineární“: $j(\lambda h) = \overline{\lambda}\, j(h)$.

8.7. Příklad. Zpestřeme nyní teorii krátkým příkladem. Uvažujte operátor S na Hilbertově prostoru l^2 definovaný předpisem

$$S\big((x_1, x_2, x_3, \dots)\big) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)\,.$$

Ukažte, že

$$\sigma_p(S) = \emptyset\,, \quad \sigma_{ap}(S) = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| = 1\}\,, \quad \sigma(S) = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \le 1\}\,.$$

Návod. Označme $\mathbf{T} = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| = 1\}$ a $\Delta = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \le 1\}$. S žádnou potíží bychom se neměli setkat pro ověření,že $\sigma_p(S) = \emptyset$ a $\sigma(S) = \Delta$. Pokud ano, lze se podívat na příklad 5.9.a anebo sledovat následující jiný argument.

Nejdříve si rozmyslete, že $\sigma(S^*) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(S)\}$. To plyne z toho, že $\big((S - \lambda I)^{-1}\big)^* = \big((S - \lambda I)^*\big)^{-1} = (S^* - \overline{\lambda} I)^{-1}$.

Protože $\|S\| = 1$, musí být $\sigma(S) \subset \Delta$. Adjungovaný operátor S^* je dán předpisem $(x_1, x_2, x_3, \dots) \to (x_2, x_3, \dots)$. Nechť $|\theta| < 1$. Potom $x := (1, \theta, \theta^2, \dots) \in l^2$ a $S^*x = \theta x$. Tudíž $\theta \in \sigma_p(S^*) \subset \sigma(S^*) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(S)\}$. Odtud tedy $\overline{\theta} \in \sigma(S)$. Vidíme, že $\{\theta \in \mathbf{C} : |\theta| < 1\} \subset \sigma(S)$. Protože $\sigma(S)$ je vždy uzavřená množina, musí být $\sigma(S) = \Delta$.

Je-li opět $|\theta| < 1$ a $x \in l^2$, je $\|Sx - \theta x\| \ge \|Sx\| - \|\theta x\| = \|x\| - |\theta|\,\|x\| = (1 - |\theta|)\|x\|$ a podle 8.4 je $\theta \notin \sigma_{ap}(S)$. Tudíž $\sigma_{ap}(S) \subset \mathbf{T}$. S přihlédnutím k cvičení 8.28.s tedy máme $\sigma_{ap}(S) = \mathbf{T}$. ♣

8.8. Hermiteovské a normální operátory. Operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ se nazve *hermiteovským*, jestliže $T = T^*$. Pokud $TT^* = T^*T$, říkáme, že T je *normální*. Někteří autoři používají označení *samoadjungovaný* místo hermiteovský.

Každý hermiteovský operátor je normální, ne však naopak (uveďte příklad nějaké matice). Pro hermiteovské (a normální) operátory platí řada speciálních tvrzení, uvedeme některá z nich.

8.9. Rayleighova věta. *Je-li $T \in \mathcal{L}(H)$ hermiteovský, je*

$$\|T\| = \sup\{|(Tx, x)| : \|x\| \le 1\}\,.$$

Důkaz. Položme $\alpha = \sup\{|(Tx, x)| : \|x\| \le 1\}$. Ze Schwarzovy nerovnosti ihned dostáváme $\alpha \le \|T\|$. Zřejmě $|(Tx, x)| \le \alpha \|x\|^2$ pro každé $x \in H$. Jsou-li $x, y \in H$, máme

$$\begin{aligned} 4\,\mathrm{Re}(Tx, y) &= \big(T(x+y), x+y\big) - \big(T(x-y), x-y\big) \le \alpha\big(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\big) = \\ &= 2\alpha\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)\,. \end{aligned}$$

Buď nyní $x \in H$, $\|x\| \le 1$, pro něž $Tx \ne 0$ a $y = \frac{Tx}{\|Tx\|}$. Potom

$$0 \le \|Tx\| = (Tx, y) = \mathrm{Re}(Tx, y) \le \frac{\alpha}{2}\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big) \le \alpha\,.$$

Poslední nerovnost platí i v případě, kdy $Tx = 0$, a tudíž $\|T\| \le \alpha$. ■

Poznámka. Kde jsme vlastně v důkaze využili předpoklad, že T je hermiteovský?

8.10. Weylovo kriterium. *Buď $T \in \mathcal{L}(H)$ hermiteovský operátor. Potom spektrum T splývá s jeho aproximativním spektrem, tedy $\sigma_{ap}(T) = \sigma(T)$.*

Důkaz. Jak zmíněno v 8.3, vždy je $\sigma_{ap}(T) \subset \sigma(T)$. Nechť nyní $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_{ap}(T)$. Podle věty 8.4 je operátor $T - \lambda I$ prostý a $Y := \mathcal{R}(T - \lambda I)$ tvoří uzavřený podprostor H. Protože $\lambda \in \sigma(T)$, je $Y \ne H$. Podle věty 1.25 existuje $y \in Y^\perp$, $\|y\| = 1$. Protože pro každé $x \in H$ je $Tx - \lambda x \in \mathcal{R}(T - \lambda I) = Y$, je $0 = (Tx - \lambda x, y) = (x, Ty - \overline{\lambda} y)$ (využíváme toho, že $(T - \lambda I)^* = T^* - \overline{\lambda} I = T - \overline{\lambda} I$). Tudíž $Ty - \overline{\lambda} y = 0$ a vidíme, že $\overline{\lambda}$ je vlastní hodnota operátoru T. Protože ale $\overline{\lambda}(y, y) = (Ty, y)$ a $(Ty, y) \in \mathbf{R}$ podle cvičení 8.28.f, je $\overline{\lambda}$ reálné číslo. Dostáváme se k závěru, že $\lambda = \overline{\lambda}$ je vlastní hodnota T, což je kýžený spor (nezapomeňte, že $\sigma_p(T) \subset \sigma_{ap}(T)$). ■

8.11. Poznámka. Jak jsme poznamenali v předchozím důkazu, pro každý hermiteovský operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ je příslušná kvadratická forma (Tx, x) reálná. To je nutné si uvědomit i v dalším tvrzení. V ní se rovněž dopustíme menší nepřesnosti - budeme psát $M \subset [a, b]$ pro $M \subset \mathbf{C}$ místo pořádného zápisu $M \subset [a, b] \times \{0\}$. Podobně budeme říkat, že spektrum operátoru T je reálné či je podmnožinou $\mathbf{R}$, aniž bychom úzkostlivě lpěli na formulaci, že $\sigma(T)$ je podmnožinou $\mathbf{R} \times \{0\}$.

8.12. Spektrum hermiteovského operátoru. *Buď $T \in \mathcal{L}(H)$ hermiteovský operátor. Označíme-li*

$$m_T = \inf\{(Tx, x) : \|x\| = 1\}\,, \quad M_T = \sup\{(Tx, x) : \|x\| = 1\}\,,$$

je $\sigma(T) \subset [m_T, M_T]$, přičemž $m_T, M_T \in \sigma(T)$.

Důkaz. Předpokládejme, že $T = T^*$. Především, je-li $x \in H$ a $\lambda = \alpha + i\beta \in \sigma(T)$, lehkým výpočtem zjistíme, že

$$\|Tx - \lambda x\|^2 = \beta^2\,\|x\|^2 + \|Tx - \alpha x\|^2\,.$$

Tudíž užitím Weylova kriteria dostáváme $\beta = 0$.

Buď nyní $\lambda < m_T$. Volme $x \in H$ z jednotkové sféry. Potom

$$\|Tx - \lambda x\| = \|Tx - \lambda x\|\,\|x\| \ge |(Tx - \lambda x, x)| = (Tx, x) - \lambda\,,$$

a tedy $\inf\{\|Tx - \lambda x\| : \|x\| = 1\} \ge m_T - \lambda > 0$. Opětným užitím Weylova kriteria dostáváme, že $\lambda \notin \sigma(T)$.

Obdobnou úvahu můžeme provést v případě M_T, čímž je dokázáno, že $\sigma(T) \subset [m_T, M_T]$.

Pomocí Rayleighovy věty 8.9 vidíme, že $\|T\| = \max(M_T, -m_T)$. Předpokládejme nyní bez újmy na obecnosti, že třeba $\lambda = \|T\| = M_T$ (jinak bychom uvažovali operátor $-T$) a volme opět $\|x\| = 1$. Počítejme

$$\begin{aligned}\|Tx - \lambda x\|^2 &= \|Tx\|^2 - 2\lambda(Tx, x) + \lambda^2 \le \|T\|^2 . \|x\|^2 - 2\lambda(Tx, x) + \|T\|^2 \\ &= 2\|T\|^2 - 2\|T\| \, (Tx, x) = 2\|T\| \big(\|T\| - (Tx, x)\big) .\end{aligned}$$

Odtud podle předpokladů plyne $\inf\{\|Tx - \lambda x\|^2 : \|x\| = 1\} = 0$. Protože $\sigma_{ap}(T) \subset \sigma(T)$, dostáváme $\lambda \in \sigma(T)$.

Zbývá ukázat, že $m_T \in \sigma(T)$. Jedním ze způsobů, jak toho dosáhnout, je uvažovat operátor $M_T I - T$ a využít předchozí úvahu. ■

8.13. Důsledek. *Je-li $T \in \mathcal{L}(H)$ hermiteovský, je $\|T\| = r(T)$.*

Důkaz. Tvrzení plyne přímo z předešlé rovnosti $\|T\| = \max(M_T, -m_T)$.

Jiná možnost (přímého) důkazu: Nejdříve ukažte, že operátor T^2 je hermiteovský a $\|T^2\| = \|T\|^2$, pokud T je sám hermiteovský (viz cvičení 8.28.i). Pak stačí užít Beurlingův vzoreček 6.23 pro spektrální poloměr $r(T)$ a uvědomit si, že vybraná posloupnost $\big\{\|T^{2^k}\|^{2^{-k}}\big\}$ je konstantní s limitou $\|T\|$. ■

8.14. Poznámka. Rayleighova věta 8.9, Weylovo kriterium 8.10 i důsledek 8.13 platí i pro normální operátory. Náznak důkazu lze nalézt ve cvičeních 8.28.j a 8.28.m.

8.15. Riesz-Schauderova teorie kompaktních hermiteovských operátorů. V páté kapitole jsme probírali Riesz-Schauderovu teorii kompaktních operátorů v obecných Banachových prostorech. Dá se očekávat, že v případě hermiteovských (kompaktních) operátorů na Hilbertově prostoru se tato teorie podstatně zjednoduší. To je pravda, v následujících pár řádcích naznačíme některé postupy.

Předpokládáme tedy, že K je kompaktní hermiteovský operátor na Hilbertově prostoru H.

(a) Každý nenulový prvek spektra K je vlastním číslem K.

Důkaz. Buď $0 \neq \lambda \in \sigma(K)$. Podle Weylova kriteria existují $x_n \in H$, $\|x_n\| = 1$ tak, že $\lambda x_n - K x_n \to 0$. Užitím kompaktnosti K lze předpokládat, že $K x_n \to y$. Tudíž $\lambda x_n = (\lambda x_n - K x_n) + K x_n \to y$. Ze spojitosti K (a jednoznačnosti limity) plyne, že $Ky = \lambda y$. Jelikož $\|y\| = \lim \|\lambda x_n\| = |\lambda|$, je $y \neq 0$. Vidíme, že $\lambda \in \sigma_p(K)$. ■

(b) Libovolné dva vlastní vektory x_1, x_2 příslušné k různým vlastním číslům λ_1, λ_2 operátoru K jsou na sebe kolmé.

Důkaz. Víme již, že λ_1, λ_2 jsou reálné. Protože $\lambda_1(x_1, x_2) = (Kx_1, x_2) = (x_1, Kx_2) = \lambda_2(x_1, x_2)$, dostáváme $(x_1, x_2) = 0$. ■

(c) Vně libovolného intervalu $[-\varepsilon, \varepsilon]$ leží pouze konečně mnoho vlastních čísel operátoru K.

Důkaz. Poznamenejme znovu, že všechna vlastní čísla jsou reálná. Existuje-li nekonečná posloupnost $\{\lambda_n\}$ vlastních čísel, $|\lambda_n| > \varepsilon$, nalezněme příslušná x_n s vlastnostmi $\|x_n\| = 1$ a $Kx_n = \lambda_n x_n$. Použitím předešlého dostáváme

$$\|Kx_n - Kx_j\|^2 = \|Kx_n\|^2 + \|Kx_j\|^2 = \lambda_n^2 + \lambda_j^2 \ge 2\varepsilon^2$$

a vidíme, že z posloupnosti $\{Kx_n\}$ nelze vybrat konvergentní. ■

8.16. Úvod ke spektrální větě — trocha algebry. Chceme-li dobře porozumět spektrální teorii v nekonečné dimenzi, je zapotřebí mít jasno, jaká je situace v prostorech konečné dimenze. Proto v tomto odstavci v krátkosti zopakujeme základní pojmy a vztahy této teorie.

Začněme zkraje nejprve teorií **matic**. *Jordanova věta* říká, že *libovolná* komplexní čtvercová $n \times n$ matice $\mathbf{A}$ je podobná matici tvořené *Jordanovými buňkami*: Existuje invertibilní matice $\mathbf{X}$ a matice $\mathbf{J}$ tvaru

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_p \end{pmatrix} \quad , \quad \text{kde} \quad J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix}$$

tak, že $\mathbf{J} = \mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{X}^{-1}$. Komplexní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ jsou *vlastní čísla* matice $\mathbf{A}$. Snad také připomeňme, že vlastní číslo (někdo též říká vlastní hodnota, charakteristické číslo či latentní kořen) je takové λ, pro něž existuje netriviální řešení rovnice $\mathbf{A}x = \lambda x$, a že je získáme jako řešení *charakteristické rovnice* $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ (zde, samozřejmě, $\mathbf{I}$ je jednotková matice). Každé řešení rovnice $\mathbf{A}x = \lambda x$ nazveme *vlastním vektorem* matice $\mathbf{A}$ (příslušným vlastnímu číslu λ). Množina všech vlastních vektorů tedy tvoří *jádro* $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$.

Má-li charakteristická rovnice za řešení n různých vlastních čísel, má $\mathbf{J}$ dokonce diagonální tvar. Můžeme se tedy ptát dále: Které matice jsou podobné diagonálním maticím, jinak řečeno, které matice jsou *diagonalizovatelné*? (Znovu připomeňme, že dvě matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ jsou *podobné* či *ekvivalentní*, existuje-li invertibilní matice $\mathbf{X}$ tak, že $\mathbf{B} = \mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{X}^{-1}$.) Je známo, že $n \times n$ matice $\mathbf{A}$, ať již reálná nebo komplexní, je (komplexně) diagonalizovatelná, právě když $\mathbf{A}$ má n lineárně nezávislých vlastních vektorů. Za matici $\mathbf{X}$ pak můžeme vzít matici, jejíž sloupce tvoří právě ony lineárně nezávislé vlastní vektory $\mathbf{A}$.

Snad jen na okraj. Je-li $\mathbf{A}$ reálná $n \times n$ matice, je *reálně diagonalizovatelná*, tedy je podobná reálné diagonální matici, právě když $\mathbf{A}$ má n vlastních vektorů v reálném oboru.

A protože existence řešení charakteristické rovnice je silně závislé na tom, uvažujeme-li matice s reálnými či komplexními čísly, je třeba vždy pečlivě rozlišovat, který případ máme na mysli.

Pokročme nyní dál a ptejme se, kdy matice $\mathbf{A}$ je *ortogonálně* či *unitárně* diagonalizovatelná (podle toho, uvažujeme-li reálný či komplexní případ). Přitom reálná (resp. komplexní) matice $\mathbf{A}$ se zove *ortogonální*, (resp. *unitární*), jestliže $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^t$, (resp. $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^*$), kde $\mathbf{A}^t$ značí transponovanou matici k $\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}^* = \overline{\mathbf{A}}^t$ pak hermiteovsky transponovanou matici k $\mathbf{A}$. Samozřejmě, matice $\mathbf{A}$ je ortogonální či unitární, jestliže její řádkové (či sloupcové) vektory tvoří ortonormální soustavu.

Matici $\mathbf{A}$ nazveme *ortogonálně (či unitárně) diagonalizovatelnou*, existuje-li ortogonální (či unitární) matice $\mathbf{P}$ tak, že matice $\mathbf{D} := \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ je diagonální matice. Není pak těžké ukázat, že reálná matice $\mathbf{A}$ je ortogonálně diagonalizovatelná, právě když $\mathbf{A}$ je *symetrická* a komplexní matice je unitárně diagonalizovatelná, právě když je *normální* . Přitom $\mathbf{A}$ je symetrická, je-li $\mathbf{A} = \mathbf{A}^t$, a normální, když $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A}$. Požadujeme-li, aby výsledkem diagonalizace byla *reálná* diagonální matice, pak $\mathbf{A}$ je unitárně diagonalizovatelná, právě když $\mathbf{A}$ je *hermiteovská* ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$).

Na diagonále matice $\mathbf{D}$ jsou pak právě vlastní čísla matice $\mathbf{A}$.

Přejděme nyní k **lineárním operátorům** na konečně dimenzionálním vektorovém prostoru W (který budeme uvažovat nad reálnými či komplexními čísly). Je-li $T \in \mathcal{L}(W)$ a jsou-li matice $\mathbf{A}(T)$ a $\mathbf{B}(T)$ matice operátoru T ve dvou bázích prostoru W, jsou matice $\mathbf{A}(T)$ a $\mathbf{B}(T)$ podobné a tedy matice $\mathbf{A}(T)$ je diagonalizovatelná, právě když $\mathbf{B}(T)$ je diagonalizovatelná. Můžeme tedy říci, že operátor T je *diagonalizovatelný*, je-li jeho maticové vyjádření v kterékoliv bázi diagonalizovatelné.

Pojmy *vlastního čísla* a *vlastního vektoru* lineárního operátoru definujeme zřejmým způsobem. Není těžké si rozmyslet, že vlastní čísla operátoru T jsou stejná jako vlastní čísla libovolné matice $\mathbf{A}(T)$ reprezentující operátor T (podobné matice mají stejná vlastní čísla). Důležitá charakteristika říká, že T je diagonalizovatelný, existuje-li báze W sestávající z vlastních vektorů operátoru T.

Platí následující věta, jejíž důkaz není nikterak těžký.

Věta. *Buď T diagonalizovatelný lineární operátor na W a buďte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ všechna různá vlastní čísla T. Potom existují projekce $P_1, P_2, \dots, P_k$ na W tak, že*

(a) $T = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j P_j$,

(b) $I = \sum_{j=1}^{k} P_j$,

(c) $P_i P_j = 0$ *pro* $i \neq j$,

kde I je identické zobrazení na W, PQ značí složení zobrazení P a Q a 0 je zobrazení celého prostoru W na jeho nulový prvek.

Označíme-li $N_j := \ker(T - \lambda_j I) = \{w \in W : Tw = \lambda_j w\}$, je P_j projekce prostoru W na N_j a navíc $W = N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k$ (algebraický součet). Pozor — podmínka (c) vyjadřuje, že operátory P_j a P_i jsou navzájem ortogonální, to nic ovšem neříká o tom, jsou-li samy operátory P_j či P_i ortogonální.

Obráceně, není těžké si rozmyslet, že každý operátor T tvaru (a), kde λ_j jsou různá čísla a P_j (nenulové) projekce splňující (b) a (c), je diagonalizovatelný. V tom případě jsou λ_j vlastní čísla T a P_j jsou projekce W na $\ker(T - \lambda_j I)$.

Více lze říci, máme-li na našem vektorovém prostoru definován navíc *skalární součin*. V tom případě lze mluvit o pojmu kolmosti a můžeme se ptát, zda projekce P_j v uvedené větě mají ještě některé další vlastnosti. A protože každý konečně dimenzionální vektorový prostor se skalárním součinem je úplný, předpokládejme rovnou v dalším, že H je Hilbertův (komplexní) prostor konečné dimenze a T lineární operátor na H. Existují-li opět čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ a *ortogonální* projekce $P_1, P_2, \dots, P_k$ tak, že platí (a), (b) i (c), je operátor T *unitárně diagonalizovatelný* (existuje unitární operátor U tak, že U^*TU je diagonální) a λ_j jsou jeho vlastní čísla. Navíc v tomto případě je operátor T normální.

Platí však i obrácená (hlubší) věta, kterou nyní uveďme.

Věta. *Buď T operátor na konečně-dimenzionálním Hilbertově prostoru H. Potom T je diagonalizovatelný, právě když existují různá čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ a projekce $P_1, \dots, P_k$ tak, že $T = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j P_j$, $I = \sum_{j=1}^{k} P_j$ a $P_i P_j = 0$ pro různá i, j. Navíc, T je normální operátor, právě když všechny projekce P_j jsou ortogonální. V posledním případě je T dokonce unitárně diagonalizovatelný, existuje ortonormální báze H tvořená vlastními vektory operátoru T a podprostory $\ker(T - \lambda_j I)$ jsou navzájem kolmé.*

Na závěr ještě připomeňme (doufejme známou) souvislost převedení matice na diagonální tvar s *větou o hlavních osách*: Libovolná reálná symetrická kvadratická forma $(\mathbf{A}x, x) = \sum a_{i,j}x_i x_j$ může mít po vhodné ortogonální transformaci tvar $\sum \lambda_i x_i^2$. (Samozřejmě zobecnění na normální kvadratické formy je nasnadě.)

Než přejdeme k hlavní větě této kapitoly, uveďme důležitý příklad.

8.17. Příklad. *Nechť $\{e_n\}$ je ortonormální báze Hilbertova prostoru H, $\{\alpha_n\}$ posloupnost komplexních čísel, $M := \sup\{|\alpha_n|\} < +\infty$. Položíme-li*

$$Tx = \sum\nolimits_n \alpha_n (x, e_n) e_n \,,$$

je T omezený lineární operátor na H a $\|T\| = M$. Operátor T je normální, T je hermiteovský, právě když všechna α_n jsou reálná a je kompaktní, právě když $\alpha_n \to 0$.

Bodové spektrum T splývá s množinou $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$, eventuálně rozšířenou o $\{0\}$.

Návod. Dokázat, že $T \in \mathcal{L}(H)$ a $\|T\| = M$ bychom mohli ponechat jako užitečné cvičení. Nicméně

$$\|Tx\|^2 = \Big\|\sum_n \alpha_n (x, e_n) e_n\Big\|^2 = \sum_n |\alpha_n (x, e_n)|^2 \le M^2 \sum |(x, e_n)|^2 \le M^2 \|x\|^2 \,.$$

Na druhé straně je $\|T\| \ge \|Te_n\| = |\alpha_n|$ pro každé n. Tudíž $\|T\| = M$.

Protože $T^*x = \sum_n \overline{\alpha_n}(x, e_n)e_n$ (ze spojitosti skalárního součinu a vyjádření prvku x), je $TT^*x = \sum_n \alpha_n \overline{\alpha_n}(x, e_n)e_n = T^*Tx$. Potom tedy $T = T^*$, právě když $Tx = T^*x$ pro každé $x \in H$ a z jednoznačnosti vyjádření je to, právě když $\alpha_n = \overline{\alpha_n}$ pro každé n.

Nechť $\alpha_n \to 0$. Označíme-li $T_n := \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j (x, e_j) e_j$, jsou T_n konečně dimenzionální operátory a $T_n \to T$, neboť $\|T_n - T\| = \sup\{|\alpha_{n+j}| : j \in \mathbf{N}\} \to 0$. Naopak, nechť T je kompaktní. Protože $e_n \xrightarrow{w} 0$, musí být $Te_n \to 0$ (vzpomínáte ještě?). Tudíž $\|\alpha_n e_n\| \to 0$, odkud $\alpha_n \to 0$.

Je-li $Tx = \lambda x$, zjistíme lehko, že buďto $\lambda = \alpha_n$ pro nějaké n anebo $Tx = 0$. Samozřejmě každé α_n je vlastním číslem T. ♣

8.18. Označení. Buď $T \in \mathcal{L}(H)$ kompaktní hermiteovský operátor. Je-li $\lambda \in \sigma_p(T)$ vlastní číslo T, označme $\mathcal{N}(\lambda) = \{h \in H : Th - \lambda h = 0\}$ prostor vlastních vektorů příslušných k λ. Věta 5.15 říká, že $\mathcal{N}(\lambda)$ je uzavřený konečně dimenzionální podprostor H pro každé $\lambda \neq 0$. Existuje tedy pro každé $0 \neq \lambda \in \sigma_p(T)$ ortonormální báze $\{u_1^\lambda, u_2^\lambda, \dots, u_{n(\lambda)}^\lambda\}$ prostoru $\mathcal{N}(\lambda)$. Symbolem $\mathfrak{M}$ označme uzavřený lineární obal množiny $\mathcal{U} := \{u_i^\lambda : \lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}, 1 \le i \le n(\lambda)\}$. Podle 8.15.b jsou libovolné dva vektory u_i^λ a u_j^ν na sebe kolmé, pokud λ a ν jsou různé. Tedy $\mathcal{U}$ je ortonormální bazí $\mathfrak{M}$ podle věty 1.34.

8.19. Hilbert-Schmidtova spektrální věta. *Buď T kompaktní hermiteovský operátor na Hilbertově prostoru H. Potom*

$$H = \mathfrak{M} \oplus \ker T \,,$$

kde $\mathfrak{M}$ je uzavřený lineární podprostor H generovaný všemi vlastními vektory operátoru T příslušnými nenulovým vlastním číslům.

Důkaz. Postupujme v několika krocích. Především, množina $\mathcal{U}$ vlastních vektorů z 8.18 je spočetná (viz třeba 8.15.c), uspořádejme ji tedy do posloupnosti $\{u_1, u_2, u_3, \dots\}$. Každé u_n je vlastním vektorem příslušným některému nenulovému vlastnímu číslu λ, jejich posloupnost označme $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots\}$ (některá λ v této posloupnosti se tedy mohou i opakovat). Je-li $x \in \mathfrak{M}$, lze psát $x = \sum \gamma_n u_n$ (viz větu 1.34.v). Odtud plyne, že $Tx = \sum \gamma_n \lambda_n u_n \in \mathfrak{M}$. Ukázali jsme, že $\mathfrak{M}$ je *T-invariantní*: $T\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$.

Ukážeme, že $\mathfrak{M}$ dokonce *redukuje* T: $T\mathfrak{M}^\perp \subset \mathfrak{M}^\perp$. Ale i to je téměř zřejmé. Je-li $h \in \mathfrak{M}^\perp$ a $x \in \mathfrak{M}$, je $(Th, x) = (h, Tx) = 0$ (neboť $Tx \in \mathfrak{M}$).

Ježto $\mathfrak{M}^\perp$ je uzavřený podprostor H, invariantní pro T, lehce zjistíme, že $K := T \restriction \mathfrak{M}^\perp$ je opět hermiteovský a kompaktní operátor na $\mathfrak{M}^\perp$ (srovnej s 2.55.r). Ukážeme, že $\sigma(K) = \{0\}$. Kdyby totiž $\lambda \neq 0$ bylo vlastní číslo K, existovalo by $y \in \mathfrak{M}^\perp$, $y \neq 0$ tak, že $Ky = \lambda y$. Potom by ale λ bylo i (nenulové) vlastní číslo T a muselo by být $y \in \mathfrak{M}$. V průniku $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}^\perp$ však nemůže ležet nenulový prvek. Dokázali jsme tedy, že $r(K) = 0$. Podle důsledku 8.13 je $\|K\| = 0$, tudíž $K = 0$ a $T\mathfrak{M}^\perp = \{0\}$. Jinými slovy, $\mathfrak{M}^\perp \subset \ker T$.

Abychom tedy dokončili důkaz, stačí si uvědomit že $H = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{M}^\perp$ a $\mathfrak{M} \cap \ker T = \{0\}$. Ale poslední je snadné. Je-li totiž $z \in \mathfrak{M} \cap \ker T$, je opět $z = \sum \beta_n u_n$ a $Tz = \sum \beta_n \lambda_n u_n = 0$. Parsevalova rovnost z věty 1.34 dá $\beta_n \lambda_n = 0$ pro každé n, a protože $\lambda_n \neq 0$, máme konečně $\beta_n = 0$. ■

Znění uvedené spektrální věty není právě nejobvyklejší, existují její různé varianty. Podejme některé z nich.

8.20. Důsledek. *Buď T kompaktní hermiteovský operátor na H. Potom existuje posloupnost $\{\lambda_n\}$ reálných čísel a ortonormální soustava $\{u_n\}$ (přesněji, ortonormální báze* $(\ker T)^\perp$ *) tak, že*

$$Th = \sum_n \lambda_n (h, u_n) u_n \quad \textit{pro každé} \quad h \in H\,.$$

Důkaz. Buďte $\{\lambda_n\}$ a $\{u_n\}$ jako výše. Protože $\{u_n\}$ tvoří bázi $\mathfrak{M}$ a $H = \mathfrak{M} \oplus \ker T$, lze libovolné $h \in H$ psát jednoznačně jako $h = \sum_n (h, u_n) u_n + z$, kde $Tz = 0$. Odtud již plyne tvrzení. ■

8.21. Důsledek. *Buď opět T kompaktní hermiteovský operátor na H. Existuje ortonormální báze H tvořená vlastními vektory T.*

Důkaz. Stačí vzít nějakou ortonormální bázi $\ker T$ a přidat k ní vlastní vektory u_n sestrojené při důkazu Hilbert-Schmidtovy věty (ty tvoří ortonormální bázi $\mathfrak{M}$). ■

8.22. Důsledek. *Buď $T \in \mathcal{L}(H)$ kompaktní hermiteovský operátor. Jsou-li $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots\}$ všechna různá nenulová vlastní čísla T a P_n ortogonální projekce H na* $\ker(T - \lambda_n I)$, *je $P_n P_k = 0$ pro $k \neq n$ a*

$$T = \sum_n \lambda_n P_n\,,$$

kde uvedená řada (může být i konečná) konverguje v normě prostoru $\mathcal{L}(H)$.

Důkaz. Podaří-li se dokázat odhad

$$\Big\| T - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j \Big\| = \Big\| \sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j P_j \Big\| \le \max\big\{ |\lambda_j| : j \ge n+1 \big\}\,,$$

je vyhráno, neboť $|\lambda_n| \to 0$. Ale to není těžké, neboť víme, že norma kompaktního hermiteovského operátoru je rovna absolutní hodnotě největšího vlastního čísla. ■

8.23. Poznámky. (a) Protože podprostory $\mathfrak{M}$ a $\ker T$ jsou uzavřené, lze v Hilbert-Schmidtově větě 8.19 psát $H = \mathfrak{M} \oplus_t \ker T$. Víme také, že $\ker T = \mathfrak{M}^\perp$.

(b) Hilbert-Schmidtova věta a její důsledky platí také pro kompaktní normální operátory. Je však třeba dát poněkud pozor při formulacích, neboť vlastní čísla již nemusejí být reálná. Jak postupovat při důkazu? Jedna z možností je uzpůsobit důkaz věty 8.19 a využívat pouze normality T (vlastně by nám stačilo ukázat, že $T^*x \in \mathfrak{M}$, pokud $x \in \mathfrak{M}$). Anebo ve shodě se cvičením 8.28.g rozložit $T = A + iB$, kde A, B jsou již komutující kompaktní hermiteovské operátory a snažit se aplikovat větu 8.14 zvláště na A i B. To není tak úplně jednoduché, potřebovali bychom hledat vlastní vektory „společné" současně pro A a B. Ty získáme následujícím trikem. Nechť λ je vlastní číslo A, $\mathcal{N}_\lambda = \{h \in H : Ah = \lambda h\}$. Protože A a B komutují (zde využíváme normality T), je $\mathcal{N}_\lambda$ B-invariantní podprostor H (pro $v \in \mathcal{N}_\lambda$ máme $A(Bv) = B(Av) = \lambda Bv$, tedy $B\mathcal{N}_\lambda \subset \mathcal{N}_\lambda$). Protože $B \restriction \mathcal{N}_\lambda$ je kompaktní a hermiteovský (cvičení 2.55.r), existuje podle předchozího ortonormální báze $\mathcal{N}_\lambda$ tvořená vlastními vektory B (a protože se pohybujeme v $\mathcal{N}_\lambda$, jsou to současně i vlastní vektory A). Nyní stačí uvažovat sjednocení všech těchto vektorů a uvědomit si, že vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům operátoru A jsou na sebe kolmé a že dostaneme bázi H.

(c) Zatím jsme se zabývali diagonalizací kompaktních, ať již hermiteovských či normálních, operátorů. Důležitou třídu tvoří také *unitární operátory*. To jsou operátory splňující $TT^* = T^*T = I$. Každý unitární operátor je normální, nicméně žádný unitární operátor na nekonečně dimenzionálním prostoru nemůže být kompaktní (potom by samozřejmě identita byla kompaktním operátorem). To je také jeden z důvodů, proč v další kapitole odstraníme předpoklad kompaktnosti uvažovaných operátorů a vyslovíme obecnější spektrální věty. Bude však velice užitečné je porovnat s právě dokázanými větami.

(d) Nechť $\{P_n\}$ je kolekce na sebe navzájem kolmých projekcí na Hilbertově prostoru H (to znamená, že $P_nP_k = P_kP_n = 0$ pro pro $n \neq k$, anebo též, že $\mathcal{R}(P_n) \perp \mathcal{R}(P_k)$ pro tato n, k). Potom $\sum_n P_n x$ konverguje pro každé $x \in H$ k projekci P prostoru H na uzavřený lineární obal $\overline{\text{lin}}\{\mathcal{R}(P_n)\}$. Velice často bývá zvykem psát $P = \sum_n P_n$, i když je to značně nebezpečné. Uvedená řada projekcí nemůže totiž konvergovat v normě prostoru $\mathcal{L}(H)$ (s triviální výjimkou konečného součtu), neboť $\left\| P - \sum_{j=1}^{n} P_j \right\| = 1$ pro každé n. Musíme si uvědomit, že uvedená řada konverguje pouze bodově v H.

Říká se, že množina navzájem kolmých projekcí $\{P_n\}$ je *rozkladem jednotky*, jestliže uzavřeným lineárním obalem $\{\mathcal{R}(P_n) : n\}$ je celý prostor H. Jinými slovy, jestliže $x = \sum_n P_n x$ pro každé $x \in H$. Což se leckdy zapisuje symbolicky $I = \sum_n P_n$.

Vrátíme-li se tedy k našemu případu a označíme-li P_n projekci H na $\ker(T - \lambda_n I)$ a P_0 projekci na $\ker T$, lze ukázat, že v tomto smyslu $I = \sum_{n \geq 0} P_n$. Tvoří tedy $\{P_n\}$ rozklad jednotky. V této souvislosti dodejme, že o rovnosti $T = \sum_n \lambda_n P_n$ mluvíme jako o *spektrálním rozkladu* operátoru T. Musíme si uvědomit, že v tomto případě se jedná skutečně o konvergenci v $\mathcal{L}(H)$. Tyto vztahy nás povedou za chvíli v 8.27 k funkčnímu kalkulu kompaktních hermiteovských (či obecněji normálních) operátorů.

8.24. Diagonalizovatelné operátory. Řekneme, že operátor T je *diagonalizovatelný*, existuje-li ortonormální báze H tvořená vlastními vektory T. Rozmyslete si, že v případě separabilního Hilbertova prostoru H je operátor T diagonalizovatelný, právě když existuje ortonormální báze $\{e_n\}$ a posloupnost čísel $\{\lambda_n\}$ tak, že $Te_n = \lambda_n e_n$ pro každé n. Podle důsledku 8.21 je každý kompaktní hermiteovský operátor diagonalizovatelný. Obecněji podle poznámky 8.23.b je diagonalizovatelný i každý kompaktní normální operátor.

8.25. Řešení rovnice $\mathbf{Tx} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Předpokládejme, že $T \in \mathcal{L}(H)$ je hermiteovský kompaktní operátor a $\lambda \neq 0$ není vlastní číslo T. Potom operátor $T - \lambda I$ má inverzi, jeho oborem hodnot je celý prostor H a rovnice $Tx - \lambda x = y$ má tedy řešení pro každé $y \in H$. A protože operátor $T - \lambda I$ je navíc prostý, je toto řešení jediné. Formálně můžeme psát

$$x = (T - \lambda I)^{-1} y = R_\lambda(T) y \,,$$

kde $R_\lambda(T)$ je rezolventní funkce operátoru T. Použijeme-li nyní Hilbert-Schmidtovu větu ve tvaru důsledku 8.20, lze psát

$$y = \sum_n \lambda_n (x, u_n) u_n - \lambda x \,,$$

kde λ_n jsou všechna nenulová vlastní čísla T. Pronásobíme-li uvedenou rovnost skalárně vektory u_k, dostaneme, že $(y, u_k) = \lambda_k (x, u_k) - \lambda (x, u_k)$, odkud opětovným dosazením

$$x = \frac{1}{\lambda} \sum_n \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda} (y, u_n) u_n - \frac{1}{\lambda} y \,.$$

8.26. Poznámky. (a) Označíme-li P_n projekci H na $\ker(T - \lambda_n I)$ (položme navíc $\lambda_0 = 0$), dostáváme využitím rovnosti $x = \sum_{n \geq 0} P_n x$ rovnost

$$x = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} P_n y \,.$$

8.27. Funkční kalkulus pro normální kompaktní operátory. V tomto, spíše ilustrativním, odstavci předpokládejme, že T je kompaktní hermiteovský (obecněji, normální) operátor na H. Označme symbolem $\mathfrak{F}$ množinu $l^\infty(\sigma(T))$ všech omezených komplexních funkcí definovaných na spektru $\sigma(T)$ (vzhledem k tomu, že $\sigma(T)$ je pouze spočetná, lze chápat $\mathfrak{F}$ jako množinu posloupností). Hilbert-Schmidtova věta a její důsledky nás vedou k následující definici.

Je-li $T = \sum_n \lambda_n P_n$, kde λ_n jsou vlastní čísla T, $\lambda_0 = 0$, P_n projekce H na $\ker(T - \lambda_n I)$ a $f \in \mathfrak{F}$, položme

$$f(T) = \sum_{n \geq 0} f(\lambda_n) P_n \,,$$

kde konvergenci chápeme ve smyslu bodové konvergence na H.

Důkazy následujících tvrzení nebudeme provádět. Jednak jsou velmi snadné a lze si je dokazovat jako vhodná cvičení, jednak časem vyslovíme obecnější věty.

Ukažte, že

(a) $f(T)$ je diagonalizovatelný operátor a $\|f(T)\| = \sup\{|f(\lambda)| : \lambda \in \sigma_p(T)\}$,

(b) $f(T)^* = \overline{f}(T)$, kde $\overline{f}$ značí komplexně sdruženou funkci k f,

(c) je-li $f_0(\lambda) = 1$, je $f_0(T) = I$; pro $f_1(\lambda) = \lambda$, je $f_1(T) = T$,
(d) zobrazení $f \mapsto f(T) : \mathfrak{F} \to \mathcal{L}(H)$ je lineární a multiplikativní,
(e) komutuje-li operátor $L \in \mathcal{L}(H)$ s T, komutuje i s $f(T)$.

Udejte podmínky na funkci f, za jakých je operátor $f(T)$ kompaktní, hermiteovský či normální. Některé aplikace tohoto „funkčního kalkulu“ lze nalézt ve cvičení 8.28.t.

8.28. Elementární cvičení. Ve všech cvičeních bude H značit Hilbertův prostor.

(a) Buďte $A, B \in \mathcal{L}(H)$, $\alpha \in \mathbf{C}$. Potom $(A+B)^* = A^* + B^*$, $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$, $(AB)^* = B^* A^*$. Je-li A invertibilní, je i A^* invertibilní a $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

(b) Buď $T \in \mathcal{L}(H)$. Ukažte, že operátory T^*T a TT^* jsou vždy hermiteovské.

(c) Je-li $T \in \mathcal{L}(H)$ hermiteovský operátor a $(Tx, x) = 0$ pro každé $x \in H$, je $T = 0$.

Návod. Použijte Rayleighovu větu 8.9. ♣

(d) Ukažte, že předpoklad $T = T^*$ nelze v (c) vynechat.

Návod. Použijte příklad matice A z následujícího cvičení 8.28.f. ♣

(e) Je-li T operátor na komplexním Hilbertově prostoru H a příslušná kvadratická forma (Tx, x) je nulová, je $T = 0$.

Návod. Volte $x, y \in H$ a rozepište vztahy $(T(x+y), x+y) = 0 = (T(x+iy), x+iy)$. Dostanete, že $(Tx, y) = 0$. ♣

(f) Je-li $T \in \mathcal{L}(H)$ hermiteovský, je příslušná kvadratická forma (Tx, x) reálná, neboť $(Tx, x) = (x, Tx) = \overline{(Tx, x)}$. Je-li $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, je příslušná forma (Ax, x) reálná pro každé $x \in \mathbf{R}^2$, ačkoliv $A \neq A^*$. (Poznamenejme, že na reálném prostoru je každá kvadratická forma reálná.)

Je-li však $T \in \mathcal{L}(H)$ na komplexním Hilbertově prostoru H a $(Tx, x) \in \mathbf{R}$ pro každé $x \in H$, potom T je hermiteovský.

Návod. Využijte cvičení 8.28.e a vztah $(x, T^*x) = (Tx, x) = \overline{(Tx, x)} = (x, Tx)$. ♣

(g) Buď T operátor na komplexním Hilbertově prostoru H.

(g1) Existují jednoznačně určené hermiteovské operátory $A, B \in \mathcal{L}(H)$ tak, že $T = A + iB$.

Návod. Pro existenci položte $A = \frac{1}{2}(T + T^*)$ a $B = \frac{1}{2i}(T - T^*)$. ♣

(g2) Operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální, právě když $AB = BA$.

(g3) Je-li T kompaktní, jsou i A, B kompaktní. A také obráceně.

(h) Pro každý operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ platí $\|T\|^2 = \|T^*T\|$.

Návod. Sledujte

$$\|T\|^2 = \sup\{(Tx, Tx) : \|x\| \le 1\} = \sup\{(T^*Tx, x) : \|x\| \le 1\} \le \|T^*T\| \le \|T^*\|\,\|T\| = \|T\|^2 .$$

♣

(i) Je-li $T \in \mathcal{L}(H)$ hermiteovský, je $\|T^2\| = \|T\|^2$ (a, samozřejmě, $\|T^n\| = \|T\|^n$ pro $n = 2^k$, $k \in \mathbf{N}$).

(j) Je-li $T \in \mathcal{L}(H)$ normální, je opět $\|T^2\| = \|T\|^2$. Odtud plyne použitím Beurlingova vzorečku, že $r(T) = \|T\|$.

Návod. Použijte 8.28.h a 8.28.b. ♣

(k) Ukažte, že operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální, právě když $\|Th\| = \|T^*h\|$ pro každé $h \in H$.

Návod. Použijte cvičení 8.28.b a 8.28.c, podle kterých T je normální, právě když $\big((T^*T - TT^*)h, h\big) = 0$ pro všechna $h \in H$. ♣

(l) Je-li $T \in \mathcal{L}(H)$, je $\ker T = \mathcal{R}(T^*)^\perp$ (porovnejte s větou 5.19).

Návod. Na tomto cvičení není nic těžkého. Vlastně jsme se s ním již setkali v 5.32.q. ♣

(m) Buď $T \in \mathcal{L}(H)$ normální operátor.

(m1) I pro normální operátory platí Weylovo kriterium: $\sigma_{ap}(T) = \sigma(T)$.

Návod. Jestliže $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$, je podle věty 8.2 operátor $T - \lambda I$ prostý a má uzavřený obor hodnot. Použitím cvičení 8.28.k dostáváme, že i operátor $T^* - \overline{\lambda} I$ je prostý a podle cvičení 8.28.l

$$\mathcal{R}(T-\lambda I) = \overline{\mathcal{R}(T-\lambda I)} = \mathcal{R}(T-\lambda I)^{\perp\perp} = \ker(T^* - \overline{\lambda} I)^{\perp} = \{0\}^{\perp} = H\,,$$

což nám vše říká, že $\lambda \notin \sigma(T)$. ♣

(m2) Ukažte, že platí také tvrzení Rayleighovy věty 8.9: $\|T\| = \sup\bigl\{|(Tx,x)| : \|x\| = 1\bigr\}$ $(= r(T))$.

Návod. Označme $W(T) := \bigl\{|(Tx,x)| : \|x\| = 1\bigr\}$ a $w(T) := \sup\bigl\{|\lambda| : \lambda \in W(T)\bigr\}$. Zřejmě $w(T) \le \|T\|$. Je-li $|\lambda| > w(T)$, je

$$\bigl\|(\lambda I - T)x\bigr\|\,\|x\| \ge \bigl|\bigl((\lambda I - T)x, x\bigr)\bigr| \ge \bigl(|\lambda| - w(T)\bigr)\,\|x\|^2$$

pro každé $x \in H$. Odtud plyne, že $\lambda \notin \sigma_{ap}(T) = \sigma(T)$, tedy i nerovnost $r(T) \le w(T)$. K dokončení nyní stačí použít závěr v 8.28.j. ♣

(m3) **Poznámka.** Buď T operátor na Hilbertově prostoru H. Množině $W(T)$ se obvykle říká *numerický obor hodnot* operátoru T a $w(T)$ pak *numerický poloměr* T. Podle *Toeplitz-Hausdorffovy věty* je množina $W(T)$ vždy konvexní. Protože vždy $\frac{1}{2}\|T\| \le w(T) \le \|T\|$, je funkce $w : T \mapsto w(T)$ ekvivalentní norma na $\mathcal{L}(H)$. My jsme právě ukázali, že v případě normálního operátoru T je přímo $w(T) = \|T\|$. Protože vždy $\sigma(T) \subset \overline{W(T)}$, je i $\operatorname{co}\sigma(T) \subset \overline{W(T)}$ (připomeňme, že v $\mathbf{R}^n$ konvexní a uzavřený konvexní obal kompaktní množiny splývají, viz třeba *13.6.a). Jako zajímavost uveďme, že A. Witner se v [1929] domníval, že pro normální operátor T je $\operatorname{co}\sigma(T) = \overline{W(T)}$, právě když $w(T) = \|T\|$. Jak poznamenává P. Halmos v [*1982], nemusí tomu tak být.

(n) Buď $\{T_\gamma\}$ třída navzájem komutujících normálních kompaktních operátorů. Potom existuje ortonormální báze H , v níž každý prvek je vlastní vektor každého operátoru T_γ.

Návod. Porovnejte s poznámkou 8.23.b a využijte Zornovo lemma.. ♣

(o) Nechť H, K jsou Hilbertovy prostory, $h \in H$, $k \in K$ a $T : x \mapsto (x,h)\,k$ pro $x \in H$. Nalezněte T^*.

(p) Nechť X, Y jsou Banachovy prostory, $\varphi \in X^*$, $y \in Y$ a $L : x \mapsto \varphi(x)\,y$. Nalezněte (banachovsky) adjungovaný operátor L' k L.

(q) Nechť $h \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$. Pro $f \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ položte $Tf := h * f$ (konvoluce h a f). Ukažte, že $Tf \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ a $\|Tf\|_2 \le \|h\|_1\,\|f\|_2$. Ukažte, že $T \in \mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}))$ a že T je normální. Nalezněte T^* a zjistěte, kdy T je hermiteovský. Je-li h spojitá na $\mathbf{R}$ či v $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$, je operátor T kompaktní.

Návod. Vlastnosti konvoluce můžete konzultovat v [LM], 26.18–26.20. Jinak si vzpomeňte na Fredholmovy integrální operátory. ♣

(r) Nechť K je kompaktní operátor na nekonečně dimenzionálním Hilbertově prostoru H. Ukažte, že $0 \in \sigma_{ap}(K)$.

Návod. Je-li $\{e_n\}$ nekonečná ortonormální soustava v H, víme, že $e_n \xrightarrow{w} 0$. Podle 4.11 je $Ke_n \to 0$, což neříká nic jiného než že $0 \in \sigma_{ap}(K)$. ♣

(s) Ukažte, že $\partial\sigma(T) \subset \sigma_{ap}(T)$ pro libovolný operátor $T \in \mathcal{L}(X)$.

Návod. Volte $\lambda \in \partial\sigma(T)$. Existuje posloupnost $\{\lambda_n\} \subset \varrho(T)$ tak, že $\lambda_n \to \lambda$. Zpočátku dokažte, že $\bigl\|(\lambda_n I - T)^{-1}\bigr\| \to \infty$. Kdyby tomu tak nebylo, existovalo by $M > 0$ tak, že (po eventuálním vybrání vhodné podposloupnosti) $\bigl\|(\lambda_n I - T)^{-1}\bigr\| \le M$ pro všechna n. Nalezněte k tak, aby $|\lambda_k - \lambda| < \frac{1}{M}$. Potom $\bigl\|(\lambda I - T) - (\lambda_k I - T)\bigr\| \le \bigl\|(\lambda_k I - T)^{-1}\bigr\|^{-1}$, odkud plyne, že $\lambda \in \varrho(T)$ (můžete porovnat s 6.25.b).

Budte nyní $\|x_n\| = 1$ voleny tak, aby $\alpha_n := \bigl\|(\lambda_n I - T)^{-1}x_n\bigr\| > \bigl\|(\lambda_n I - T)^{-1}\bigr\| - \frac{1}{n}$. Potom $\alpha_n \to \infty$ a pro prvky $y_n := \frac{1}{\alpha_n}(\lambda_n I - T)^{-1}x_n$ platí, že $\|y_n\| = 1$ a $\bigl\|(\lambda I - T)y_n\bigr\| \to 0$. ♣

(t) Uveďme krátké cvičení na funkční kalkulus pro normální kompaktní operátory, který byl popsán v 8.27. Nejdříve si však řekněme, že operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ se zove *pozitivní*, jestliže $(Tx,x) \ge 0$ pro všechna $x \in H$.

(t1) Ukažte, že kompaktní normální operátor je pozitivní, právě když všechna jeho vlastní čísla jsou nezáporná.

(t2) Je-li T kompaktní hermiteovský operátor na H, existují jednoznačně určené pozitivní kompaktní operátory T^+ a T^- tak, že $T = T^+ - T^-$ a $T^+T^- = T^-T^+ = 0$.

Návod. Položte $T^+ = f(T)$, kde $f(\lambda) = \lambda^+$. ♣

(t3) Je-li T pozitivní kompaktní operátor, existuje jednoznačně určený pozitivní kompaktní operátor A tak, že $A^2 = T$.

Návod. Položte $A = f(T)$, kde $f(\lambda) = \sqrt{\lambda}$. ♣

9. Funkční kalkulus

V předchozích kapitolách jsme se již setkali s funkčním kalkulem pro polynomy či pro kompaktní hermiteovské nebo normální operátory. Oč jde? Je-li f (komplexní) funkce (komplexní proměnné) a T operátor, řekněme na Hilbertově prostoru, je otázka, jak definovat $f(T)$. Chtěli bychom třeba definovat e^T, $\sin T$, $\sqrt{T}$ a další funkce od operátorů. Zdá se, že čím obecnější bude funkce f, třeba i nespojitá, tím speciálnější bude muset být operátor T, abychom mohli rozumným způsobem definovat $f(T)$. A naopak, $f(T)$ budeme schopni definovat, bude-li funkce f co nejspeciálnější, kupříkladu polynom, byť T by byl hodně obecný operátor.

Než přejdeme k vlastní teorii, zaveďme několik dalších pojmů.

9.1. Involuce. Buď $\mathcal{A}$ algebra nad tělesem $\mathbf{F}$. *Involucí* na $\mathcal{A}$ rozumíme zobrazení $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ mající následující vlastnosti (místo $*(a)$ píšeme a^*):

(a) $(a^*)^* = a$,
(b) $(ab)^* = b^* a^*$,
(c) $(a + b)^* = a^* + b^*$, $(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*$

pro všechna $a, b \in \mathcal{A}$ a $\lambda \in \mathbf{F}$.

Uveďme příklady involucí. Klasickými příklady jsou involuce tvoření komplexně sdružených čísel $\alpha \mapsto \overline{\alpha} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ či hermiteovsky adjungovaného zobrazení $T \mapsto T^* : \mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}(H)$. V Banachově algebře $\mathcal{C}(K)$ (všechna označení jsou z 6.5) je involucí zobrazení $f \mapsto \overline{f}$, zatímco zobrazení $f(x) \mapsto \overline{f(-x)}$ je involucí v Banachově algebře $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$ opatřené konvolucí. Poslední příklad vede k netriviálnímu zobecnění, viz třeba [LM], 19.23. Mezi příklady involuce patří také identické zobrazení, uvažujeme-li komutativní algebry nad reálnými čísly.

9.2. Homomorfizmy. Každé zobrazení, které zachovává všechny operace mezi algebrami, nazveme *homomorfizmem*. Tedy zobrazení $\Phi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ je homomorfizmus, jestliže

$$\Phi(a + b) = \Phi a + \Phi b\,,\ \Phi(\lambda a) = \lambda \Phi a\,,\ \Phi(ab) = \Phi a\, \Phi b\,.$$

Jsou-li navíc algebry $\mathcal{A}_1$ a $\mathcal{A}_2$ opatřeny involucí, nazveme *$*$-homomorfizmem* každý homomorfizmus zachovávající také involuci: $\Phi a^* = (\Phi a)^*$.

9.3. Funkční kalkulus. Ujasněme si, co chápeme pod pojmem „funkční kalkulus“.

Buď tedy $\mathcal{A}$ Banachova algebra (s involucí) mající jenotku e. Volme pevně prvek $a \in \mathcal{A}$. Dále předpokládejme, že $\mathcal{H}$ je algebra komplexních funkcí (s involucí) taková, že definiční obor každé funkce z $\mathcal{H}$ obsahuje spektrum $\sigma(a)$.

Zobrazení $\Phi : \mathcal{H} \to \mathcal{A}$ nazveme *funkčním kalkulem*, jestliže splňuje následující podmínky, v nichž místo $\Phi(f)$ píšeme $f(a)$:

(a) Φ je $*$-homomorfizmem,
(b) $f(\sigma(a)) = \sigma(f(a))$ pro každou funkci $f \in \mathcal{H}$,
(c) je-li $p \in \mathcal{H}$ polynom, $p(t) = a_0 + a_1 t + \dots a_n t^n$, je $p(a) = a_0 e + a_1 a + \cdots + a_n a^n$.

Podmínka (b), která říká, že „spektrum obrazu“ je „obraz spektra“, bývá v různých funkčních kalkulech někdy též nazývána *větou o obrazu spektra*. Přihlédneme-li k (a), lze podmínku (c) formulovat ekvivalentně tak, že $f(a) = e$, pokud $f(t) = 1$ a $f(a) = a$ v případě $f(t) = t$. Nejsou-li algebry vybaveny involucí, požadujeme samozřejmě v podmínce (a), aby zobrazení Φ bylo pouze homomorfizmem (anebo v reálném případě můžeme vzít za involuci identitu).

Funkční kalkulus může leckdy splňovat i další požadavky. Aniž dbáme příliš na přesnost, uveďme některé z nich:

(d) $f \circ g(a) = f(g(a))$,

(e) jestliže $f_n \to f$ v nějakém smyslu, potom $f_n(a) \to f(a)$,
(f) jestliže $f(t) = \sum_n \alpha_n t^n$, potom $f(a) = \sum_n \alpha_n a^n$,
(g) pokud $b \in \mathcal{A}$ komutuje s a, potom b komutuje i s $f(a)$,
(h) $\|f\| = \|f(a)\|$, lze-li mluvit o normě $\|f\|$,
(i) Φ je prosté.

9.4. Příklady. V odstavci 6.21 jsme uvedli příklad funkčního kalkulu pro polynomy a libovolné prvky (Banachových) algeber. Na druhé straně, v 8.27 jsme definovali funkční kalkulus pro normální kompaktní operátory na Hilbertových prostorech, dokonce i pro případ libovolných omezených funkcí.

V dalším ukážeme ještě dva důležité příklady funkčních kalkulů: Dunfordův pro funkce holomorfní na okolí spektra libovolného prvku Banachovy algebry a Rieszův pro spojité funkce na spektru hermiteovských operátorů (či malinko obecněji, na spektru hermiteovských prvků $\mathcal{C}^*$-algeber). Podotkněme však, že terminologie označování funkčních kalkulů není jednotná a lze se setkat i s úplně opačným pojmenováním těchto kalkulů.

Na závěr ještě zavedeme Borelův funkční kalkulus pro hermiteovské operátory fungující dokonce pro nespojité funkce.

Než přejdeme k vlastnímu výkladu, uveďme některé pojmy a tvrzení z komplexní analýzy a vektorového integrování, jež budeme používat.

9.5. Trocha komplexní analýzy. V dalším buď γ *uzavřená rektifikovatelná křivka* (spojité zobrazení intervalu $[0,1]$ do $\mathbf{C}$, počáteční a koncový bod splývají a γ má konečnou délku). Je-li γ taková křivka, označme symbolem $[\gamma] = \{\gamma(t) \in \mathbf{C} : t \in [0,1]\}$ její obraz. Pro $z \in \mathbf{C} \setminus [\gamma]$ definujeme *index bodu z vzhledem ke křivce* γ předpisem

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Funkce $n(\gamma, \cdot)$ nabývá pouze celočíselných hodnot, je konstantní na každé komponentě $\mathbf{C} \setminus [\gamma]$ a je rovna 0 na neomezené komponentě $\mathbf{C} \setminus [\gamma]$.

Říkáme, že uzavřená rektifikovatelná křivka γ je *positivně orientována*, jestliže $n(\gamma, \cdot)$ nabývá na $\mathbf{C} \setminus [\gamma]$ pouze hodnot 0 či 1. Množiny

$$\operatorname{ins} \gamma := \{z \in \mathbf{C} \setminus [\gamma] : n(\gamma, z) = 1\} \quad \text{a} \quad \operatorname{out} \gamma := \{z \in \mathbf{C} \setminus [\gamma] : n(\gamma, z) = 0\}$$

značí pak *vnitřek* a *vnějšek* γ.

Positivně orientovaným *cyklem* nazveme kolekci $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ uzavřených rektifikovatelných křivek, jejichž grafy jsou po dvou disjunktní a pro něž funkce $n(\Gamma, z) := \sum_j n(\gamma_j, z)$ opět nabývá pouze hodnot 0 či 1 pro $z \in \mathbf{C} \setminus [\Gamma]$, kde $[\Gamma] := \bigcup_j [\gamma_j]$. I pro cyklus Γ definujeme analogicky *vnitřek* a *vnějšek* jako

$$\operatorname{ins} \Gamma := \{z \in \mathbf{C} \setminus [\Gamma] : n(\Gamma, z) = 1\} \quad \text{a} \quad \operatorname{out} \Gamma := \{z \in \mathbf{C} \setminus [\Gamma] : n(\Gamma, z) = 0\}.$$

Následující důležitou větu uvádíme bez důkazu. Lze jej však nalézt třeba v W. Rudin [*1977] (věta 13.5) anebo v J.B. Conway [*1978].

Věta. *Nechť $K \subset G \subset \mathbf{C}$, K kompakt, G otevřená. Potom existuje (dokonce nekonečně diferencovatelný) positivně orientovaný cyklus Γ tak, že*

$$K \subset \operatorname{ins} \Gamma \quad a \quad \mathbf{C} \setminus G \subset \operatorname{out} \Gamma.$$

9.6. Riemann-Gravesův křivkový integrál. Buď X Banachův prostor. Je-li γ rektifikovatelná křivka a f spojitá funkce na $[\gamma]$ s hodnotami v X, definujeme křivkový integrál $\int_\gamma f$ jako limitu

$$\lim_{\nu D \to 0} \sum_{i=1}^n f\big(\gamma(t_i)\big) \big(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\big),$$

kde $D := \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1\}$ je dělení intervalu $[0,1]$ a $\nu D := \max\{t_i - t_{i-1} : i = 1, \dots, n\}$. V důsledku spojitosti funkce f limita vždy existuje a je to prvek našeho Banachova prostoru X. Pokud by čtenáře zajímaly další podrobnosti z teorie vektorové integrace, lze odkázat na skripta [LM].

Konečně, je-li $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ cyklus, kde jednotlivé křivky γ_j jsou rektifikovatelné a f je opět funkce spojitá na okolí $[\Gamma]$ s hodnotami v X, definujeme

$$\int_\Gamma f = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f.$$

9.7. Dunfordův analytický funkční kalkulus. Začněme tento odstavec motivačním příkladem. Buď x prvek Banachovy algebry $\mathcal{A}$, $k = 0, 1, \dots$ a $f : \lambda \mapsto \lambda^k R_\lambda(x)$ funkce definovaná na rezolventě $\varrho(x)$ s hodnotami v $\mathcal{A}$. Nechť

$$\gamma(t) = R\,e^{2\pi i t}\,, \quad t \in [0,1]$$

je pozitivně orientovaná kružnice s poloměrem $R > \|x\|$. Protože funkce f je spojitá na okolí $[\gamma]$ a $R_\lambda(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x^n$ pro $|\lambda| > \|x\|$ podle důsledku 6.9, dostáváme

$$\int_\gamma f = \int_\gamma \lambda^k \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x^n \, d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \int_\gamma \lambda^{k-n-1} \, d\lambda = 2\pi i \, x^k \,.$$

Při výpočtu jsme použili faktu, že uvedená řada konverguje stejnoměrně na $[\gamma]$ (pro záměnu řady a integrálu), že pro $n \neq k$ funkce λ^{k-n-1} má primitivní funkci (a tudíž $\int_\gamma \lambda^{k-n-1}\, d\lambda = 0$), a že $n(\gamma, 0) = 1$.

Z výše uvedeného lehce vyplývá, že

$$p(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma p(\lambda) R_\lambda(x) \, d\lambda$$

pro libovolný polynom p.

Buď nyní opět x prvek Banachovy algebry $\mathcal{A}$. Označme symbolem $\mathrm{Hol}(x)$ množinu všech komplexních funkcí, které jsou holomorfní na okolí spektra $\sigma(x)$. Definiční obory funkcí z $\mathrm{Hol}(x)$ mohou být ovšem různé. Systém $\mathrm{Hol}(x)$ tvoří algebru, nikoliv však Banachovu algebru.

Vedeni předchozím příkladem, budeme nyní definovat funkční kalkulus pro funkce z $\mathrm{Hol}(x)$. Je-li tedy funkce $f \in \mathrm{Hol}(x)$ definovaná na otevřené množině $G \supset \sigma(x)$, existuje podle věty v 9.5 pozitivně orientovaný cyklus Γ tak, že $\sigma(x) \subset \operatorname{ins}\Gamma$ a $\mathbf{C} \setminus G \subset \operatorname{out}\Gamma$. Položme

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda) R_\lambda(x) \, d\lambda \,.$$

Nyní je ovšem nutné si uvědomit (a také dokázat), že uvedená definice nezávisí na volbě cyklu Γ. To však není nikterak těžké, podstata důkazu spočívá na Cauchyově větě, která samozřejmě platí i pro vektorové funkce.

Základní vlastnosti zobrazení $f \mapsto f(x)$ jsou obsaženy v následující větě.

9.8. Věta. *Buď x prvek Banachovy algebry $\mathcal{A}$. Zobrazení $\Phi : f \mapsto f(x)$ z $\mathrm{Hol}(x)$ do $\mathcal{A}$ je funkčním kalkulem. Navíc toto zobrazení je spojité v následujícím smyslu: Jsou-li f_n funkce holomorfní na otevřené množině G obsahující spektrum $\sigma(x)$ a $f_n \to f$ lokálně stejnoměrně na G, potom $f_n(x) \to f(x)$.*

Důkaz. Linearita zobrazení Φ je zřejmá, pro důkaz, že Φ zachovává i násobení se podstatným způsobem využije rezolventní identita. K tomu je zapotřebí přidat i něco ne úplně triviálního z komplexní analýzy (minimálně Cauchyovu větu pro zobrazení do Banachových prostorů). Důkazuchtivého čtenáře můžeme odkázat třeba na J.B. Conway [1985].

Volme nyní pevně $f \in \mathrm{Hol}(x)$. Je-li $\lambda \in \sigma(x)$, definujme funkci $g \in \mathrm{Hol}(x)$ vztahem $f(\lambda) - f(\xi) = (\lambda - \xi) g(\xi)$. Potom $f(\lambda)e - f(x) = (\lambda e - x) g(x)$ a v případě, že $f(\lambda) \in \varrho(f(x))$, existovala by inverze k $f(\lambda)e - f(x)$, a tedy i k $\lambda e - x$. Tím jsme ukázali, že $f(\sigma(x)) \subset \sigma(f(x))$. Jestliže $\mu \notin f(\sigma(x))$, leží funkce $h : \xi \mapsto \frac{1}{f(\xi) - \mu}$ v $\mathrm{Hol}(x)$. Protože $h(\xi)\,(f(\xi) - \mu) = 1$, je $h(x)\,(f(x) - \mu e) = e$. Jelikož analogicky $(f(x) - \mu e)\,h(x) = e$, vidíme, že $\mu \in \varrho(f(x))$. Tedy $\sigma(f(x)) \subset f(\sigma(x))$, čímž jsme dokázali větu o obrazu spektra.

Příklad 9.7 nám říká, že $f(x)$ v případě polynomu f je přesně ten prvek $\mathcal{A}$, který bychom přirozenou definicí očekávali. Je tedy Φ funkční kalkulus.

Zbývá ověřit spojitost. Podejme ideu důkazu. Nechť tedy $\{f_n\}$ je posloupnost holomorfních funkcí na otevřené množině $G \supset \sigma(x)$ konvergujících na G lokálně stejnoměrně k f. Předpokládejme, že Γ je cyklus v G s vlastností $\sigma(x) \subset \operatorname{ins}\Gamma$. Označme d délku cyklu Γ a odhadujme

$$\begin{aligned}
\big\|f_n(x) - f(x)\big\| &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f_n(\lambda) R_\lambda(x) \, d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda) R_\lambda(x) \, d\lambda \right\| = \\
&= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \big(f_n(\lambda) - f(\lambda)\big) R_\lambda(x) \, d\lambda \right\| \le \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \Big\| \big(f_n(\lambda) - f(\lambda)\big) R_\lambda(x) \Big\| \, d\lambda \le \\
&\le \frac{d}{2\pi} \, \max\big\{ |f_n(\lambda) - f(\lambda)| : \lambda \in [\Gamma] \big\} \, \max\big\{ \|R_\lambda(x)\| : \lambda \in [\Gamma] \big\} \; \to 0 \,.
\end{aligned}$$

Jednotlivé kroky a detaily je ovšem třeba dobře promyslet. ■

V následující větě dokážeme, že Dunfordův analytický funkční kalkulus je vpodstatě jednoznačně určen.

9.9. Věta. *Buď x prvek Banachovy algebry $\mathcal{A}$. Splňuje-li zobrazení $\Psi : \mathrm{Hol}(x) \to \mathcal{A}$ požadavky*

(a) *Ψ je homomorfizmus (tj. zachovává vektorové operace a součin),*
(b) *$\Psi(p) = p(x)$, v případě, kdy p je polynom,*
(c) *pokud G je otevřená množina obsahující spektrum $\sigma(x)$ a $\{f_n\}$ posloupnost holomorfních funkcí na G konvergující lokálně stejnoměrně k funkci f na G, potom $\Psi(f_n) \to \Psi(f)$,*

potom $\Psi(g) = g(x)$ pro každou funkci $g \in \mathrm{Hol}(x)$.

Důkaz. Z požadavků (a) a (b) odvodíme, že $\Psi(h) = h(x)$ pro každou racionální funkci h s póly mimo $\sigma(x)$. Je-li nyní $f \in \mathrm{Hol}(x)$ holomorfní na otevřené množině $G \supset \sigma(x)$, existují podle Rungeho věty D.1 racionální funkce f_n s póly mimo $\sigma(x)$ tak, že $f_n \to f$ lokálně stejnoměrně na G. Užitím předchozího společně s (c) dostáváme tvrzení. ■

9.10. Poznámka. I když pro dvě funkce $f, g \in \mathrm{Hol}(x)$ máme $f = g$ na $\sigma(x)$, nemusí být ještě $f(x) = g(x)$. Stačí uvažovat kvazinilpotentní (či nilpotentní) prvek (dokonce matici).

Další etapou bude vybudování Rieszova funkčního kalkulu pro funkce spojité na spektru hermiteovských operátorů. Můžeme jít dokonce o trochu dále a místo Banachovy algebry $\mathcal{L}(H)$ uvažovat obecnější C^*-algebry. Pro čtenáře, který by se nechtěl zabývat tímto poněkud obecnějším případem, doporučujeme přeskočit následující odstavec. Měl by si ovšem projít cvičení 8.28.j, podle kterého spektrální poloměr $r(T)$ splývá s normou $\|T\|$ v případě, kdy T je normální operátor na Hilbertově prostoru.

9.11. C^*-algebry. *C^*-algebrou* rozumíme Banachovu algebru s involucí (viz 9.1), v níž libovolný prvek x splňuje rovnost $\|x^*x\| = \|x\|^2$. Typickým příkladem je Banachova algebra $\mathcal{L}(H)$ operátorů na Hilbertově prostoru H, kde involucí rozumíme zobrazení $T \mapsto T^*$. Skutečně, víme již, že $\|T\| = \|T^*\|$ a pro $h \in H$, $\|h\| \le 1$ máme

$$\|Th\|^2 = (Th, Th) = (T^*Th, h) \le \|T^*Th\| \, \|h\| \le \|T^*T\| \le \|T^*\| \, \|T\| = \|T\|^2 .$$

Odtud plyne, že $\|T\|^2 = \|T^*T\|$.

Je-li x prvek C^*-algebry, potom $\|x\|^2 = \|x^*x\| \le \|x^*\| \, \|x\|$, odkud $\|x\| \le \|x^*\|$. Protože však $x^{**} = x$, je $\|x\| = \|x^*\|$.

Řekneme, že prvek x je *hermiteovský*, jestliže $x = x^*$ a *normální* v případě, že $xx^* = x^*x$.

9.12. Série cvičení. V následující sérii tvrzení se snažte jednotlivé kroky sami (podle stručných návodů) dokazovat.

(a) Je-li x libovolný prvek C^*-algebry, existují (jednoznačně určené) hermiteovské prvky a, b tak, že $x = a + ib$. Přitom x je normální, právě když $ab = ba$ (srovnej se cvičením 8.28.g2).

(b) Prvek x je invertibilní, právě když x^* je invertibilní. V tom případě $(x^{-1})^* = (x^*)^{-1}$. Odtud plyne, že $\sigma(y) = \overline{\sigma(y^*)}$, a tedy i rovnost pro spektrální poloměry $r(y) = r(y^*)$ pro libovolný prvek y.

(c) Je-li prvek x hermiteovský, je $\|x\|^2 = \|xx^*\| = \|x^2\|$ a použitím Beurlingova vzorečku 6.23 dostáváme, že $r(x) = \|x\|$.

(d) Prvek x^*x je vždy hermiteovský, jak se snadno přesvědčíme.

(e) Je-li a normální, máme

$$\|a\|^2 = \|a^* \, a\| = r(a^* \, a) \le r(a^*) r(a) = r^2(a) \le \|a\|^2 ,$$

(zde jsme použili větu *6.9.d), a tudíž i $r(a) = \|a\|$.

(f) Jestliže x je hermiteovský prvek C^*-algebry, potom spektrum $\sigma(x) \subset \mathbf{R}$ (cvičení 7.23.d). Navíc v tomto případě je prvek $p(x)$ normální pro libovolný (obecně komplexní) polynom p. O tom se lehko přesvědčíme přímým výpočtem (samozřejmě, je-li polynom p reálný, je prvek $p(x)$ dokonce hermiteovský).

Následující lemma je klíčové pro vybudování dalšího funkčního kalkulu. Čtenáře, kterého C^*-algebry nezajímají, se může omezit na případ Banachovy algebry $\mathcal{L}(H)$ operátorů na Hilbertově prostoru H. Jedinou ingrediencí důkazu klíčového lemmatu pak (spolu s větou o obrazu spektra) je tvrzení, že norma operátoru $p(T)$ je rovna spektrálnímu poloměru tohoto operátoru, pokud T je hermiteovský operátor a p je libovolný polynom (důkaz je triviální v případě reálného polynomu a trochu komplikovanější pro komplexní polynom). Připomeňme ještě, že symbolem $\|f\|_{\mathcal{C}(K)}$ značíme normu spojité funkce f na kompaktním prostoru K, kterážto je definována jako $\max\{|f(t)| : t \in K\}$.

9.13. Klíčové lemma. *Je-li x hermiteovský prvek C^*-algebry, potom $\|p(x)\| = \|p\|_{\mathcal{C}(\sigma(x))}$.*

Důkaz. Použitím věty o obrazu spektra 6.22 okamžitě dostáváme

$$\big\|p(x)\big\| = r\big(p(x)\big) = \max\big\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(p(x))\big\} = \max\big\{|p(t)| : t \in \sigma(x)\big\} = \|p\|_{\mathcal{C}(\sigma(x))}\,.$$

■

9.14. Poznámka. Klíčové lemma platí i pro normální prvky. Je-li totiž p polynom, x normální prvek C^*-algebry, je i prvek $p(x)$ normální. O tom se lehko přesvědčíme.

9.15. Rieszův spojitý funkční kalkulus. Buď x hermiteovský prvek C^*-algebry $\mathcal{A}$. Z předchozího klíčového lemmatu plyne, že zobrazení $\varphi : p \mapsto p(x)$, které je lineární, je izometrie. Podle (komplexní verze) Stone-Weierstrassovy věty v D.2 je prostor všech komplexních polynomů $\mathcal{P}$ na spektru $\sigma(x)$ hustý v Banachově prostoru $\mathcal{C}(\sigma(x))$.

Tady se přeci jen na chvíli zastavme a řekněme si, proč tomu tak je. Je více než zřejmé, že systém $\mathcal{P}$ tvoří algebru, odděluje body $\sigma(x)$ (identita je polynom) a obsahuje konstanty. Je-li $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ $(t \in \sigma(x))$ polynom, je $\overline{p(t)} = \overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{t} + \cdots + \overline{a_n}\,\overline{t}^n = \overline{a_0} + \overline{a_1} t + \cdots + \overline{a_n} t^n$ opět polynom z $\mathcal{P}$ (zde jsme využili toho, že x je hermiteovský prvek, a tudíž $\sigma(x) \subset \mathbf{R}$).

Existuje tedy právě jedno spojité rozšíření zobrazení φ na izometrické zobrazení Φ prostoru $\mathcal{C}(\sigma(x))$ do $\mathcal{A}$. Je-li totiž $f \in \mathcal{C}(\sigma(x))$, existuje posloupnost polynomů $\{p_n\}$ tak, že $p_n \rightrightarrows f$ na $\sigma(x)$. Protože

$$\|p_n(x) - p_k(x)\| = \|(p_n - p_k)(x)\| = \|p_n - p_k\|_{\mathcal{C}(\sigma(x))}\,,$$

je posloupnost $\{p_n(x)\}$ cauchyovská a má tedy limitu v $\mathcal{A}$. Tu označme symbolem $f(x)$. Je nutno si ovšem uvědomit, že takto definovaný prvek nezávisí na výběru posloupnosti $\{p_n\}$ (ale to je snadné – máme-li totiž dvě posloupnosti polynomů $\{p_n\}$ a $\{q_n\}$ konvergující na $\sigma(x)$ stejnoměrně k f, má tutéž vlastnost i posloupnost $\{p_1, q_1, p_2, q_2, p_3, \dots\}$ a z předchozího plyne, že pak i posloupnost $\{p_1(x), q_1(x), p_2(x), q_2(x), \dots\}$ má limitu (stejnou pro každou vybranou posloupnost)).

Vlastnosti zobrazení Φ shrňme do následující věty.

9.16. Věta. *Buď $\mathcal{A}$ C^*-algebra a x její hermiteovský prvek. Existuje právě jedno spojité zobrazení $\Phi : \mathcal{C}(\sigma(x)) \to \mathcal{A}$ tak, že $\Phi(p) = p(x)$, je-li p polynom. Zobrazení Φ má tyto vlastnosti:*

(a) *Φ je funkční kalkulus,*
(b) *Φ je izometrie ($\|f\| = \|f(x)\|$),*
(c) *prvek $f(x)$ je vždy normální, přičemž je hermiteovský, právě když funkce f je reálná.*

Důkaz. Všechny vlastnosti se vždy ověří v případě polynomů a pak stačí využít konstrukce zobrazení Φ (hlavně jeho spojitost).

Trochu více práce dá jen věta o obrazu spektra. Mějme tedy $f \in \mathcal{C}(\sigma(x))$. Chceme ukázat, že $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$. Nechť zprvu $\lambda \notin f(\sigma(x))$. Potom funkce $g : t \mapsto \frac{1}{f(t)-\lambda}$ je spojitá na spektru $\sigma(x)$ a $g(t)\,(f(t) - \lambda) = (f(t) - \lambda)\,g(t) = 1$ pro $t \in \sigma(x)$. Odtud podle pravidel funkčního kalkulu dostáváme $g(x)\,(f(x) - \lambda e) = (f(x) - \lambda e)\,g(x) = e$ (e je jednotka $\mathcal{A}$). Vidíme, že $\lambda \in \varrho(f(x))$.

Volme nyní $\lambda \in \sigma(x)$. Ukážeme, že prvek $f(x) - f(\lambda)e$ není invertibilní. Nalezněme tedy posloupnost polynomů $\{p_n\}$ konvergující stejnoměrně k f na spektru $\sigma(x)$. Potom $p_n(x) - p_n(\lambda)e \to f(x) - f(\lambda)e$ (v normě). Protože $p_n(\lambda) \in \sigma(p_n(x))$ podle 6.22, nemůže být prvek $p_n(x) - p_n(\lambda)e$ invertibilní. Přihlédneme-li k větě 6.10, vidíme, že ani prvek $f(x) - f(\lambda)e$ nemůže být invertibilní.

■

Poznámka. V 7.19 jsme podali jiný důkaz existence Rieszova funkčního kalkulu, a to dokonce pro normální prvky C^*-algeber. Využili jsme ovšem mnohem silnějšího matematického aparátu okolo Gelfandovy reprezentace.

9.17. Pozitivní operátory. Připomeňme, že matice A či obecněji operátor A na Hilbertově prostoru se zove *pozitivní*, jestliže příslušná kvadratická forma (Ax, x) je nezáporná pro každý prvek x daného prostoru. Operátor $A \in \mathcal{L}(H)$ je pozitivní, právě když A je hermiteovský a jeho spektrum leží v intervalu $[0, +\infty)$ (držíme se konvence poznámky 8.11). To nahlédneme lehko pomocí cvičení 8.28.f a tvrzení 8.12. Toto pozorování nás vede k definici pozitivních prvků i v případě C^*-algeber. Samozřejmě, čtenář, kterého C^*-algebry nezajímají, se může v dalším opět zaměřit pouze na případ $\mathcal{L}(H)$ operátorů na Hilbertově prostoru.

9.18. Pozitivní prvky C^*-algeber. Řekneme, že prvek a C^*-algebry $\mathcal{A}$ je *pozitivní*, jestliže je hermiteovský a $\sigma(a) \subset [0, +\infty)$.

9.19. Uspořádání v C^*-algebrách. Víme-li, které prvky jsou pozitivní, lze zavést na C^*-algebře $\mathcal{A}$ i *uspořádání*: Řekneme, že $a \leq b$, jestliže prvek $b - a$ je pozitivní.

Následující tvrzení je jednoduchou aplikací věty o obrazu spektra a definice pozitivního prvku.

9.20. Věta. *Buď f spojitá funkce na spektru hermiteovského prvku a. Potom prvek $f(a)$ je pozitivní, právě když f je nezáporná na $\sigma(a)$.*

Důkaz. Stačí si uvědomit, že $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$. ■

9.21. Příklady. V dalším $\mathcal{A}$ bude značit C^*-algebru. Jako motivaci k prvnímu příkladu si připomeňme, že libovolné komplexní číslo lze psát ve tvaru $a + ib$, kde a, b jsou reálná čísla (a libovolný operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ lze psát podle cvičení 8.28.g1 ve tvaru $A + iB$, kde A, B jsou již hermiteovské). Nyní ukážeme, že každý hermiteovský operátor lze rozložit na rozdíl dvou pozitivních, podobně jako je tomu u reálných čísel.

(a) Buď $a \in \mathcal{A}$ hermiteovský prvek. Existují jednoznačně určené pozitivní prvky a^+ a a^-, nazývané *kladnou a zápornou částí* prvku a, tak, že

$$a = a^+ - a^- , \quad a^+ a^- = a^- a^+ = 0 .$$

Důkaz. Definujme reálné funkce u, u^+ a u^- předpisem

$$u(t) = t , \quad u^+(t) = \max(t, 0) , \quad u^-(t) = \max(-t, 0) .$$

Máme $u = u^+ - u^-$ a $u^+ u^- = u^- u^+ = 0$ a stačí tedy položit $a^+ := u^+(a)$ a $a^- := u^-(a)$. Protože $a = u(a)$, plyne z vlastností funkčního kalkulu vše potřebné.

K otázce jednoznačnosti: Jestliže $a = b - c$, kde b, c jsou pozitivní a $bc = cb = 0$, je $a^n = b^n + (-c)^n$, a tudíž i $p(a) = p(b) + p(-c)$ pro každý polynom bez absolutního členu. Najděme nyní takové polynomy p_n, aby $p_n(0) = 0$ a $p_n \rightrightarrows u^+$ na kompaktní množině $\sigma(a) \cup \sigma(b) \cup \sigma(-c)$. Potom ovšem $\lim p_n(a) = u^+(a) = u^+(b) + u^+(-c)$. Ale $u^+(b) = b$, $u^+(-c) = 0$, odkud plyne $b = u^+(a)$. Odtud též $c = u^-(a)$. ■

(b) Buď $a \in \mathcal{A}$. Potom a je pozitivní, právě když existuje pozitivní prvek $h \in \mathcal{A}$ tak, že $a = h^2$. Prvek h je jednoznačně určen.

Důkaz. Je-li a pozitivní a $g(t) = \sqrt{t}$ na $\sigma(a) \subset [0, +\infty)$, stačí položit $h = g(a)$. Z vlastností funkčního kalkulu plyne, že $h^2 = a$ a z věty 9.20 pak, že h je pozitivní. Je-li naopak h pozitivní, lehko se přesvědčíme, že i prvek h^2 je pozitivní. Stačí totiž opět použít větu 9.20 na funkci $f(t) = t^2$.

Pokud jde o jednoznačnost, důkaz lze vést obdobně jako v příkladě (a). ■

9.22. Poznámky. (a) V důkazech jednoznačnosti, a to jak pro rozklad na rozdíl kladné a záporné části tak v případě odmocniny, potřebujeme aplikovat Weierstrassovu větu o hustotě polynomů vhodným způsobem. Měli bychom si uvědomit, že vlastně používáme následující tvrzení.

`Tvrzení.` *Nechť $K \subset [\alpha, \beta]$ je kompakt, $x \in [\alpha, \beta] \setminus K$ a $y \in K$. Označíme-li pro $t \in [\alpha, \beta]$*

$$\mathcal{P}_t := \{p : p \text{ je polynom na } [\alpha, \beta] \text{ a } p(t) = 0\}$$

je množina $\mathcal{P}_x$ hustá v $\mathcal{C}(K)$ a $\mathcal{P}_y$ hustá v $\{f \in \mathcal{C}(K) : f(y) = 0\}$.

Návod. Pokud $f \in \mathcal{C}(K)$, je také $\frac{f(\xi)}{\xi - x} \in \mathcal{C}(K)$ a podle Weierstrassovy věty existuje posloupnost polynomů $\{p_n\}$ stejnoměrně aproximující f na K. Potom samozřejmě $p_n(\xi)(\xi - x) \rightrightarrows f$ na K.

V druhém případě položme $T : f \mapsto f - f(y) : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(K)$. Potom $T(\mathcal{C}(K)) = \{f \in \mathcal{C}(K) : f(y) = 0\}$ a z Weierstrassovy věty a ze spojitosti zobrazení T plyne, že $\{p : p \text{ je polynom na } K\}$ je hustá podmnožina $T(\mathcal{C}(K))$. ♣

(b) Konstrukci odmocniny lze také provádět jinak, a to bez použití funkčního kalkulu. Jeden z přístupů je naznačen v *9.1.d.

(c) Rovněž tak jednoznačnost „odmocniny“ lze odůvodnit relativně elementárně, i když jisté úsilí k tomu potřebujeme. Pokuste se o to.

9.23. Druhá odmocnina. Pozitivní prvek h s vlastností $h^2 = a$, jehož existence a jednoznačnost je zaručena v předchozím odstavci, nazveme *druhou odmocninou* prvku a. O jeho dalších vlastnostech a mírném zobecnění se lze dočíst v odstavci *9.1, kde též zavedeme *n-tou odmocninu*.

V dalším rozšíříme Rieszův funkční kalkulus pro hermiteovské operátory z $\mathcal{L}(H)$ i na nespojité funkce. Je mnoho metod, jak tuto konstrukci provést. Náš postup bude založen na následujícím lemmatu, které říká, jak vlastně poznáme kvadratickou formu.

9.24. Lemma. *Buď H komplexní Hilbertův prostor a $Q : H \to \mathbf{C}$ komplexní funkce na H. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) *existuje právě jeden operátor $A \in \mathcal{L}(H)$ tak, že $Q(x) = (Ax, x)$ pro $x \in H$,*
(ii) *existuje konstanta $C > 0$ tak, že $|Q(x)| \leq C \|x\|^2$, $Q(x+y) + Q(x-y) = 2Q(x) + 2Q(y)$ a $Q(\lambda x) = |\lambda|^2 Q(x)$ pro všechna $x, y \in H$ a $\lambda \in \mathbf{C}$.*

Důkaz. Že kvadratická forma Q splňuje (ii) se celkem lehko ověří. Pokud je naopak splněna podmínka (ii), položme

$$\Psi(x,y) = \frac{1}{4}\big(Q(x+y) - Q(x-y) + iQ(x+iy) - iQ(x-iy)\big) .$$

Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma \in G}$ ortonormální báze H a

$$Ax := \sum_{\gamma \in \Gamma} \Psi(x, e_\gamma)\, e_\gamma ,$$

je již jen rutinní záležitost ověřit, že A je hledaný operátor. Jednoznačnost A plyne ze cvičení 8.28.e. ∎

Poznámky. (a) Čtenář zajisté pozná souvislost kvadratické formy Q s příslušnou *seskvilineární formou* $B : (x,y) \mapsto Q(x,y)$ (což je podle definice lineární forma v první proměnné při fixovaném $y \in H$ a zobrazení $y \mapsto \overline{B(x,y)}$ je lineární při každém pevném $x \in H$). Většina autorů pracuje právě při odvozování následujícího funkčního kalkulu s těmito formami.

(b) Uvažujeme-li H nad reálnými čísly, věta až na jednoznačnost platí také. Stačí dokonce položit $\Psi(x,y) = \frac{1}{4}(Q(x+y) - Q(x-y))$.

9.25. Borelův měřitelný funkční kalkulus. Buď $A \in \mathcal{L}(H)$ hermiteovský operátor. Volme pevně bod $x \in H$ a uvažujme zobrazení

$$f \mapsto \big(f(A)x, x\big) : \mathcal{C}\big(\sigma(A)\big) \to \mathbf{R} .$$

Není těžké ověřit, že toto zobrazení je lineární a nezáporné (je-li $f \geq 0$, je $(f(A)x, x) \geq 0$). Podle Rieszovy věty o reprezentaci (viz třeba D.5) existuje právě jedna (konečná nezáporná) Radonova míra E_x na $\sigma(A)$ tak, že

$$\big(f(A)x, x\big) = \int_{\sigma(A)} f\, dE_x \quad \text{pro všechna} \quad f \in \mathcal{C}(\sigma(A)) .$$

Je-li nyní g omezená (reálná) borelovská funkce na spektru $\sigma(A)$, existuje integrál $\int_{\sigma(A)} g\, dE_x$ (proč?). V další větě ukážeme, že existuje právě jeden hermiteovský operátor G (nezávisející již na x) tak, že poslední integrál je roven hodnotě kvadratické formy (Gx, x). Tento operátor označíme symbolem $g(A)$ a máme tedy definován obraz operátoru A i pro nespojité funkce. Označíme-li (symbolicky) $E = \{E_x\}$, lze (opět symbolicky) psát

$$g(A) = \int_{\sigma(A)} g\, dE .$$

Poznámka. Je samozřejmé, že definice operátoru $g(A)$ v případě spojité funkce g na $\sigma(A)$ není ve sporu s již dříve definovaným operátorem $g(A)$ z Rieszova spojitého funkčního kalkulu.

9.26. Věta. *Buď A hermiteovský operátor na komplexním Hilbertově prostoru H a g omezená borelovská funkce na spektru $\sigma(A)$. Potom existuje právě jeden operátor G tak, že*

$$(Gx, x) = \int_{\sigma(A)} g\,dE_x \quad \text{pro každé} \quad x \in H\,.$$

Operátor G je hermiteovský, právě když g je reálná funkce.

Důkaz. Především, operátor G (pokud existuje) je jednoznačně určen podle cvičení 8.28.e. Přitom G je hermiteovský, právě když g je reálná funkce podle cvičení 8.28.f.

Dokazujme nyní existenci G. Položíme $Q(x) = \int_{\sigma(A)} g\,dE_x$. Použitím lemmatu 9.24 ukážeme, že Q je kvadratická forma. Nechť $|g| \le M$ na $\sigma(A)$. Potom

$$|Q(x)| \le \int_{\sigma(A)} M\,dE_x = M \int_{\sigma(A)} 1\,dE_x = M(x,x) = M\,\|x\|^2\,.$$

Je-li nyní $f \in \mathcal{C}(\sigma(A))$, lehko zjistíme, že

$$\int_{\sigma(A)} f\,dE_{x+y} + \int_{\sigma(A)} f\,dE_{x-y} = 2\int_{\sigma(A)} f\,dE_x + 2\int_{\sigma(A)} f\,dE_y$$

a

$$\int_{\sigma(A)} f\,dE_{\lambda x} = |\lambda|^2 \int_{\sigma(A)} f\,dE_x$$

(nezapomeňte, že operátor $f(A)$ je hermiteovský), a tudíž i

$$E_{x+y} + E_{x-y} = 2E_x + 2E_y \quad \text{a} \quad E_{\lambda x} = |\lambda|^2 E_x$$

v důsledku jednoznačnosti reprezentujících měr v Rieszově větě. Dostáváme tedy, že

$$Q(x+y) + Q(x-y) = 2Q(x) + 2Q(y) \quad \text{a} \quad Q(\lambda x) = |\lambda|^2 Q(x)$$

pro všechna $x, y \in H$. A to je vše, co jsme potřebovali ověřit. ∎

Zobrazení $g \mapsto g(A)$ má všechny rozumné vlastnosti „funkčního kalkulu“, jak vyplývá z následující věty 9.29. Nejdříve však formálně zaveďme označení pro prostor všech omezených borelovských funkcí.

9.27. Prostor $\mathcal{B}^b(K)$. Nechť K je kompaktní prostor. Označme $\mathcal{B}^b(K)$ Banachův prostor všech omezených (reálných či komplexních) borelovských funkcí na K opatřený sup-normou $\|f\|_\infty := \sup\{|f(t)| : t \in K\}$. Definujeme-li navíc na $\mathcal{B}^b(K)$ násobení bodově a involuci $* : \mathcal{B}^b(K) \to \mathcal{B}^b(K)$ předpisem $* : f \mapsto \overline{f}$, tvoří $\mathcal{B}^b(K)$ C^*-algebru. Množinovou charakteristiku $\mathcal{B}^b(K)$ udává následující věta. Uvedeme ji bez důkazu.

9.28. Věta. *Nechť K je metrický kompaktní prostor. Potom $\mathcal{B}^b(K)$ je nejmenší podmnožina prostoru všech (reálných či komplexních) funkcí na K obsahující prostor $\mathcal{C}(K)$ všech spojitých funkcí na K a uzavřená na bodové limity stejně omezených posloupností.*

Aby bylo zcela jasno, říkáme, že množina $\mathcal{F}$ je uzavřená na bodové limity stejně omezených posloupností, jestliže $f \in \mathcal{F}$, kdykoliv $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí z $\mathcal{F}$ bodově konvergující k f a $\sup\{\|f_n\|_\infty : n \in \mathbf{N}\} < \infty$.

9.29. Věta. *Nechť A je hermiteovský operátor na Hilbertově prostoru H a $\mathcal{B}^b(\sigma(A))$ C^*-algebra všech omezených borelovských funkcí na spektru $\sigma(A)$. Potom zobrazení $\Psi : g \mapsto g(A) : \mathcal{B}^b(\sigma(A)) \to \mathcal{L}(H)$ má následující vlastnosti:*

(a) *$\Psi f = f(A)$ v případě, kdy $f \in \mathcal{C}(\sigma(A))$,*
(b) *Ψ je $*$-homomorfizmus,*
(c) *Ψ je spojité zobrazení.*

Náznak důkazu. Pokud jde o rovnost v (a), ta samozřejmě platí. Stačí se podívat na poznámku v 9.25.

Přímo z konstrukce vyplývá, že zobrazení Ψ je lineární. V průběhu důkazu věty 9.26 jsme vlastně ukázali, že pro každé $x \in H$ je $\left|(g(A)x, x)\right| \le \|g\|_\infty \|x\|^2$. Protože prvek $g(A)$ je hermiteovský, je podle Rayleighovy věty 8.9 $\|g(A)\| = \sup\left\{|(g(A)x, x)| : \|x\| \le 1\right\}$. To vše nám neříká nic jiného než že $\|\Psi g\| = \|g(A)\| \le \|g\|_\infty$. Vidíme, že zobrazení Ψ je spojité.

Zde jsme mlčky předpokládali, že g je reálná funkce. Je-li g komplexní, důkaz projde obdobně. Prvek $g(A)$ je normální a stačí použít poznámku 8.14.

Zbývá ukázat, že $\Psi(fg) = \Psi(f) \circ \Psi(g)$ a $\Psi(\overline{f}) = (\Psi(f))^*$ pro libovolné $f, g \in \mathcal{B}^b(\sigma(A))$. Dokazujme pouze první tvrzení, druhé se dokáže obdobným trikem (v této souvislosti připomeňme podobnou techniku používanou při důkazech o zavedení součinové míry v [LM]). Nechť zprvu $g \in \mathcal{C}(\sigma(A))$. Položíme-li $\mathcal{M} := \left\{\varphi \in \mathcal{B}^b(\sigma(A)) : \Psi(\varphi g) = \Psi(\varphi) \circ \Psi(g)\right\}$, dostáváme podle cvičení 9.37.e inkluzi $\mathcal{C}(\sigma(A)) \subset \mathcal{M}$. Ukážeme-li, že množina $\mathcal{M}$ je uzavřená na bodové limity stejně omezených posloupností, bude podle věty 9.28 platit rovnost $\mathcal{M} = \mathcal{B}^b(\sigma(A))$. Jestliže však $\varphi_n \in \mathcal{M}$, $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ pro každé $t \in \sigma(A)$ a $\sup\{\|\varphi_n\|_\infty : n \in \mathbf{N}\} < \infty$, stačí si rozmyslet, že podle známé Lebesgueovy věty o limitním přechodu je

$$\lim\big(\Psi(\varphi_n)(\Psi(g)x), y\big) = \big(\Psi(\varphi)(\Psi(g)x), y\big)$$

pro každou dvojici $x, y \in H$. Pomocí téže věty a předpokladu $\varphi_n \in \mathcal{M}$ máme též pro všechna $x, y \in H$

$$\lim\big(\Psi(\varphi_n)(\Psi(g)x), y\big) = \lim\big(\Psi(\varphi_n g)x, y\big) = \big(\Psi(\varphi g)x, y\big)\,.$$

Odtud již během minuty odvodíme, že $\varphi \in \mathcal{M}$. V dalším kroku předpokládáme, že $f \in \mathcal{B}^b(\sigma(A))$. Opět položíme $\mathcal{B} := \{\varphi \in \mathcal{B}^b(\sigma(A)) : \Psi(f\varphi) = \Psi(f) \circ \Psi(\varphi)\}$. Právě jsme dokázali, že $\mathcal{C}(\sigma(A)) \subset \mathcal{B}$. A protože stejně také odvodíme, že systém funkcí $\mathcal{B}$ je uzavřen na bodové limity stejně omezených posloupností, dostaneme konečně, že $\mathcal{B} = \mathcal{B}^b(\sigma(A))$. ∎

9.30. Poznámky. (a) Pokud jde o spojitost zobrazení $\Psi : g \mapsto g(A)$ a zejména o otázku, jak ho chápat, můžete se podívat na odstavec *9.4. Z něho zde speciálně poznamenejme závěr: *Jestliže A je hermiteovský, $x \in H$ a $\{f_n\} \subset \mathcal{B}^b(\sigma(A))$ omezená posloupnost, $f_n \to f$ bodově na $\sigma(A)$, potom $f_n(A)x \to f(A)x$.*

(b) Uvažujme hermiteovský operátor A na Hilbertově prostoru H a dotkněme se stručně otázky jednoznačnosti zobrazení Ψ. Řekneme pro tento účel, že zobrazení $\Psi : \mathcal{B}^b(\sigma(A)) \to \mathcal{L}(H)$ je $w\tau$-spojité, jestliže pro každou dvojici $x, y \in H$ a každou omezenou posloupnost $\{f_n\}$ v $\mathcal{B}^b(\sigma(A))$ bodově konvergující na $\sigma(A)$ k funkci f je $(\Psi(f_n)x, y) \to (\Psi(f)x, y)$. Jsou-li nyní Ψ_1, Ψ_2 $w\tau$-spojitá zobrazení s vlastností $\Psi_1(f) = \Psi_2(f)$ pro $f \in \mathcal{C}(\sigma(A))$, je $\Psi_1 = \Psi_2$ na $\mathcal{B}^b(\sigma(A))$. To nahlédneme ihned pomocí věty 9.28. Zajisté, označíme-li

$$\mathcal{M} := \left\{\varphi \in \mathcal{B}^b(\sigma(A)) : (\Psi_1(\varphi)x, y) = (\Psi_2(\varphi)x, y) \text{ pro } x, y \in H\right\},$$

je podle předpokladů systém funkcí $\mathcal{M}$ uzavřený na omezenou bodovou konvergenci a obsahuje $\mathcal{C}(\sigma(A))$.

(c) Věta o obrazu spektra pro nespojité funkce již nemusí platit. Podívejme se na následující příklad. Definujme operátor $T \in \mathcal{L}(l^2)$ předpisem

$$Tx := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x, e_n)e_n \quad \text{pro} \quad x \in l^2\,,$$

kde $\{e_n\}$ je posloupnost jednotkových vektorů. Potom T je hermiteovský a $\sigma(T) = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\right\}$. Nechť f je charakteristická funkce jednobodové množiny $\{0\}$. Potom $f(\sigma(T)) = \{0, 1\}$, zatímco $\sigma(f(T)) = \{0\}$. První tvrzení je jasné, pro druhé je nutno si ujasnit, že $f(T) = 0$. To ale plyne z toho, že spojité funkce $c_{[0, \frac{1}{n}]}$ konvergují k f bodově na $\sigma(T)$.

(d) Je-li A hermiteovský prvek a $g \ge 0$ omezená borelovská funkce na spektru $\sigma(A)$, je podle definice prvek $g(A)$ pozitivní. Obecněji, $*$-homomorfizmus mezi C^*-algebrami zachovává pozitivní prvky. Dokážete to? Možná by pomohla charakteristika v *9.1.e.

9.31. Spektrální věta v konečné dimenzi. Abychom lépe pochopili obsah následujících odstavců, vraťme se ještě jednou ke konečné dimenzi. Nechť T je hermiteovský operátor na konečně dimenzionálním Hilbertově prostoru H mající různá vlastní čísla $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k$. Víme (viz 8.16), že existují ortogonální projekce P_j na navzájem ortogonální podprostory $\ker(T - \lambda_j I)$ tak, že

$$T = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j P_j \quad \text{a} \quad I = \sum_{j=1}^{k} P_j\,.$$

Položíme-li nyní $E_{\lambda_j} = P_1 + \cdots + P_j$, $E_\lambda = E_{\lambda_{j-1}}$ pro $\lambda \in [\lambda_{j-1}, \lambda_j)$ a (symbolicky) $E_{\lambda_0} = 0$, jsou E_{λ_j} opět projekce na podprostory $\ker(T - \lambda_1 I) \oplus_o \cdots \oplus_o \ker(T - \lambda_j I)$ podle cvičení 2.55.z. Samozřejmě $P_j = E_{\lambda_j} - E_{\lambda_{j-1}} = E_{\lambda_j} - E_{\lambda_j - 0}$ (kde $E_{\beta-0} = \lim_{\lambda\to\beta-} E_\lambda$), neboť E_λ je konstantní na intervalu $[\lambda_{j-1}, \lambda_j)$. Označíme-li tedy $\delta E_\lambda = E_\lambda - E_{\lambda-0}$, můžeme psát

$$T = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \, \delta E_{\lambda_j} .$$

Není těžké nahlédnout, že potom

$$(Tx, x) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \, (\delta E_{\lambda_j} x, x) \quad \text{pro každé} \quad x \in H ,$$

neboli

$$(Tx, x) = \int_{\mathbf{R}} \lambda \, d\varphi_\lambda ,$$

kde integrál chápeme jako Riemann-Stieltjesův vzhledem k neklesající funkci $\varphi_\lambda := (\delta E_\lambda x, x)$.

9.32. Rozklad jednotky. Zobrazení $\lambda \mapsto E_\lambda$, kde λ probíhá $\mathbf{R}$ a E_λ jsou ortogonální projekce na Hilbertově prostoru H, se nazývá *rozkladem jednotky*, někdy též *spektrální třídou*, na intervalu $[a, b]$, jestliže

(a) $E_\lambda \le E_\mu$, pokud $\lambda \le \mu$,
(b) $E_\lambda = 0$ pro $\lambda < a$, $E_\lambda = I$ pro $\lambda \ge b$,
(c) $\lim_{t\to\lambda+} E_t x = E_\lambda x$ pro každé $x \in H$.

Poznámky. (a) Připomeňme, že symbol $A \le B$ podle definice v 9.19 znamená, že operátor $B - A$ je pozitivní.

(b) Obecněji spektrální třídou se někdy rozumí systém $\{E_\lambda\}$ ortogonálních projekcí na H splňujících podmínky (a) a (c), přičemž podmínka (b) se nahradí podmínkou

(b*) $\lim_{\lambda\to-\infty} E_\lambda x = 0$ a $\lim_{\lambda\to+\infty} E_\lambda x = x$ pro každé $x \in H$.

Za chvíli uvidíme, že každému hermiteovskému operátoru lze přiřadit třídu $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbf{R}}$ ortogonálních projekcí tvořící rozklad jednotky.

9.33. Spektrální rozklad hermiteovského operátoru. Nechť A je hermiteovský operátor na Hilbertově prostoru H. Volme speciální funkce g_λ, $\lambda \in \mathbf{R}$, jako $g_\lambda = c_{(-\infty,\lambda]}$ a položme $E_\lambda = g_\lambda(A)$. Protože $g_\lambda^2 = g_\lambda$ a $g_\lambda \ge 0$, plyne z předchozí věty 9.29 a následné poznámky 9.30.d, že $E_\lambda^2 = E_\lambda$ a $E_\lambda \ge 0$ (speciálně, E_λ je hermiteovský operátor). Pokud je $\lambda \le \mu$, je $g_\lambda \le g_\mu$ a věta 9.29 opět dává, že operátor $E_\lambda - E_\mu$, kterýžto je opět ortogonální projekcí, je pozitivní.

Dále se snadno zjistí, že $E_\lambda = 0$ pro $\lambda < m_A$ a $E_\lambda = I$ pro $\lambda \ge M_A$ (zde čísla m_A, M_A jsou definována jako v 8.12).

Operátory $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbf{R}}$ jsou ortogonální projekce, které tvoří rozklad jednotky. Abychom toto tvrzení ověřili, zbývá ovšem ukázat, že i podmínka (c) z 9.32 je splněna. To je již poněkud obtížnější. Povoláme-li však na pomoc tvrzení z poznámky 9.30.a, zvládneme i to. Volme tedy $\lambda \in \mathbf{R}$. Jestliže položíme $s_n := g_{\lambda+\frac{1}{n}}$, potom $\{s_n\}$ je omezená posloupnost funkcí konvergující na $\mathbf{R}$ bodově k funkci g_λ. Podle zmíněné poznámky je $s_n(A)x \to g_\lambda(A)x = E_\lambda x$ pro každé $x \in H$. Protože pro $t \in (\lambda, \lambda + \frac{1}{n})$ je $g_\lambda \le g_t \le s_n$, plyne z provedených úvah tvrzení (c).

Třídu $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbf{R}}$ nazveme *spektrálním rozkladem* operátoru A.

Poznámka. Označíme-li T_λ kladnou část operátoru $A - \lambda I$ (viz příklad 9.21.a), lze ukázat, že E_λ je projekce prostoru H na jádro $\ker T_\lambda$.

Právě dokázaná tvrzení shrňme do následující důležité věty. A přidejme něco navíc. Protože toto pojetí je již poněkud zastaralé (je to jakási analogie Riemann-Stiltjesova integrálu) a dnes je přeci jen modernější přístup využívající pojmu spektrální míry a (lebesgueovské) integrace vektorových funkcí, nebudeme již žádné důkazy provádět. Více lze pak nalézt v kapitole *9.

9.34. Spektrální věta pro hermiteovské operátory. *Nechť A je hermiteovský operátor na Hilbertově prostoru H, $\lambda \in \mathbf{R}$ a $E_\lambda := c_{(-\infty,\lambda]}(A)$. Potom $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbf{R}}$ je systém ortogonálních projekcí na H tvořící rozklad jednotky.*

Buď dále $x \in H$. Označíme-li $\varphi_x : \lambda \mapsto (E_\lambda x, x)$, je φ_x neklesající funkce na $\mathbf{R}$ a

$$(Ax, x) = \int_{\mathbf{R}} \lambda \, d\varphi_x(\lambda) .$$

Navíc, je-li g omezená borelovská funkce na spektru $\sigma(A)$, je

$$\big(g(A)x, x\big) = \int_{\mathbf{R}} g(\lambda)\, d\varphi_x(\lambda)\,.$$

(Je zbytečné říkat, že uvažované integrály chápeme jako Riemann-Stieltjesovy či Lebesgue-Stieltjesovy.)

9.35. Poznámky. (a) Protože funkce φ_x je konstantní na intervalech $(-\infty, m_A)$ a $(M_A, +\infty)$, uvedené integrály stačí uvažovat přes interval $[m_A, M_A]$.

(b) Rovnosti ve spektrální větě lze zapsat schematicky jako

$$A = \int_{\sigma(A)} \lambda\, dE_\lambda \quad \text{a} \quad g(A) = \int_{\sigma(A)} g(\lambda)\, dE_\lambda\,.$$

Funkce $\lambda \mapsto E_\lambda$ je funkcí z intervalu $[m_A, M_A]$ (přesněji z $\mathbf{R}$) do Banachova prostoru $\mathcal{L}(H)$ a „schematickým" integrálům lze dát dobrý smysl. Čtenáře lze odkázat třeba na skripta [LM], kde je definicím Riemann-Gravesova a „Lebesgueova" integrálů pro zobrazení do Banachových prostorů věnována příslušná partie. Stručný nástin je též v *9.6.

(c) V předchozích odstavcích jsme projekce E_λ přiřadili vlastně každému intervalu $(-\infty, \lambda]$. Uvažováním charakteristických funkcí i dalších množin by nečinilo problém přiřadit projekce i každé borelovské množině. Tomuto přístupu věnujeme samostatné odstavce v *9.5 a další.

(d) Obdobné věty platí i pro normální operátory.

Spektrální věta říkala, že každému hermiteovskému operátoru lze přiřadit příslušnou spektrální třídu ortogonálních projekcí. Platí i opačné tvrzení, každá spektrální třída určuje jistý hermiteovský operátor. O tom vypovídá následující závěrečná věta.

9.36. Věta. *Nechť $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbf{R}}$ je spektrální třída. Potom existuje právě jeden hermiteovský operátor T tak, že $T = \int_{\sigma(T)} \lambda\, dE_\lambda$.*

9.37. Elementární cvičení. (a) Nalezněte spektrální rozklad následujících operátorů:

(a1) T je definován na prostoru $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ předpisem $Tf(t) := f(t+1)$,

(a2) $Tf(t) := tf(t)$ pro $f \in \mathcal{L}^2([-1,1])$,

(a3) T je nulový operátor na Hilbertově prostoru H,

(a4) T je identita na Hilbertově prostoru H,

(a5) $T : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots)$ na prostoru l^2,

(a6) $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ je reprezentován maticí $\begin{pmatrix} 0&1&0\\ 1&0&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}$.

(b) Definujme operátor T na l^2 předpisem

$$T : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (0, 0, x_3, x_4, \dots)\,.$$

Ukažte, že $\|T\| = 1$, že T je hermiteovský a pozitivní, a že $\sqrt{T} = T$.

Návod. Uvažte, že $\sqrt{x} = x$ na $\sigma(T)$. ♣

(c) Nechť H je Hilbertův prostor a $A \in \mathcal{L}(H)$. Nalezněte adjungovaný operátor $\big(e^A\big)^*$. Je-li A hermiteovský, ukažte, že e^A je pozitivní a nalezněte $\sqrt{e^A}$.

(d) Nalezněte příklad nehermiteovského operátoru B na Hilbertově prostoru tak, aby $e^B = I$.

Návod. Uvažujte násobky identity. ♣

(e) Nechť A je hermiteovský operátor na Hilbertově prostoru H a $f, g \in \mathcal{C}(\sigma(A))$. Potom $fg(A) = f(A) \circ g(A)$.

Návod. Využijte větu 9.16. ♣

(f) Nechť T je kompaktní hermiteovský operátor na Hilbertově prostoru H, $T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$ jeho spektrální rozklad z důsledku 8.22 (zde λ_n jsou různá vlastní čísla T, $\lambda_0 = 0$ a P_n jsou projekce H na $\ker(T - \lambda_n I)$). Ukažte, že zobrazení $f \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) P_n$ z 8.27 má všechny vlastnosti obsažené ve větě 9.16. Jednoznačnost Rieszova funkčního kalkulu nám dá, že tento je pak skutečně rozšířením kalkulu z 8.27.

Ukažte také, že Hilbert-Schmidtovu větu ve tvaru důsledku 8.22 lze odvodit pomocí Rieszova kalkulu.

Návod. Protože $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$, jsou funkce $f_n := c_{\{\lambda_n\}}$ spojité na $\sigma(T)$ a $P_n = f_n(T) = \sum_{j=1}^{\infty} f_n(\lambda_j) P_j$.

♣

10. Další třídy operátorů

V této kapitole popíšeme některé další třídy důležitých operátorů na Banachově prostoru X. Protože se jedná spíše o informativní partii, nebudeme se příliš zatěžovat komplikovanějšími důkazy.

K první definici nás přivádí třetí Fredholmova věta, či spíše její důsledek ze cvičení 5.32.p.

10.1. Fredholmovy operátory. Omezený operátor T na Banachově prostoru X (obvykle uvažujme pouze prostory nekonečné dimenze) se nazývá *Fredholmův*, jestliže dimenze jádra $\ker T$ a kodimenze oboru hodnot $\mathcal{R}T$ jsou konečné.

Rozdíl $\dim \ker T - \operatorname{codim} \mathcal{R}T$ se nazývá *index* operátoru T a značí se $\operatorname{ind} T$.

(a) Poznámky. (a1) Připomeňme, že kodimenze prostoru $\mathcal{R}T$ je dimenze faktorprostoru $X/\mathcal{R}T$. Což vyjde nastejno jako dimenze (libovolného) algebraického doplňku $\mathcal{R}T$ v X.

(a2) Protože podle 2.55.n je prostor $(X/\mathcal{R}T)^*$ izomorfní $\mathcal{R}T^{\perp}$ a podle 5.19 víme, že $\mathcal{R}T^{\perp} = \ker T'$, je $\operatorname{ind} T = \dim \ker T - \dim \ker T'$.

(a3) Mnozí autoři označují jako fredholmovské operátory ty, jejichž index je 0. Jiní autoři naopak těmto operátorům říkají *Weylovy*, zatímco místo fredholmovských operátorů používají označení *noetherovské*.

(a4) Fredholmovské operátory tvoří jakýsi „protipól“ ke konečně dimenzionálním operátorům.

(b) Příklady. (b1) Každý operátor tvaru $K - \lambda I$, kde K je kompaktní a $\lambda \neq 0$, je Fredholmův. Jeho index je dokonce 0. Stačí se podívat na třetí Fredholmovu větu 5.28.

(b2) Je-li T invertibilní prvek $\mathcal{L}(X)$ (tj. je-li T prostý a na), je samozřejmě T Fredholmův. Jeho index je opět 0. Identita je vždy fredholmovský operátor.

(b3) V konečné dimenzi jsou všechny lineární operátory fredholmovské (s indexem 0) a tento případ nás moc nezajímá.

(b4) Na separabilním Hilbertově prostoru H s ortonormální bazí $\{e_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ je operátor posunutí $T : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{n-1} e_n$ (klademe $\lambda_0 = 0$) Fredholmův s indexem -1.

(c) Věta. *Každý Fredholmův operátor na Banachově prostoru X má uzavřený obor hodnot.*

Důkaz. Nechť $T \in \mathcal{L}(X)$ je Fredholmův. Protože kodimenze $\mathcal{R}T$ je konečná, existuje konečně dimenzionální (a tedy uzavřený) podprostor $Z \subset X$ tak, že $X = Z \oplus \mathcal{R}T$. Předpokládejme zprvu, že T je prosté zobrazení. Potom zobrazení

$$\eta : X \times Z \to X \quad \text{dané jako} \quad (x, z) \mapsto Tx + z$$

je spojitý izomorfizmus mezi Banachovými prostory. Podle Banachovy věty o otevřeném zobrazení 4.14 je zobrazení η^{-1} spojité. Protože pro $x \in X$ máme odhad $\|x\| = \|\eta^{-1}(Tx)\| \leq \|\eta^{-1}\| \, \|Tx\|$, je $\|Tx\| \geq \frac{1}{\|\eta^{-1}\|} \|x\|$. Vidíme, že zobrazení T je zdola omezené. Lemma 5.2 nám pak snadno řekne, že obor hodnot $\mathcal{R}T$ je uzavřená množina.

Není-li T prosté zobrazení, uvažujme kanonické zobrazení $q : X/\ker T \to X$ dané předpisem $x + \ker T \mapsto Tx$. Zobrazení q má stejný obor hodnot jako T a je prosté. Vpodstatě nyní stačí pokračovat jako v první části důkazu. ■

(d) Poznámka. O uzavřenosti oboru hodnot lineárních operátorů se lze něco více dočíst v *5.3. V našem případě jsme využili jen toho, že $\mathcal{R}T$ měl uzavřený algebraický doplněk v X.

Obecně není pravda, že by obor hodnot spojitého lineárního operátoru byl uzavřenou množinou. Příklad jsme si uvedli v 5.14. Dokonce ani kompaktní operátor nemusí mít uzavřený obor hodnot. Kupříkladu operátor

$$K : \{x_n\} \mapsto (x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \dots)$$

na Hilbertově prostoru l^2 je kompaktní, prostý a jeho obor hodnot je hustý v l^2. Kdyby $\mathcal{R}T$ bylo uzavřenou podmnožinou l^2, bylo by $\mathcal{R}T = l^2$. Potom by ovšem T^{-1} byl opět spojitý lineární operátor na l^2 podle 4.16 a identita $I = T^{-1}T$ by byla kompaktní. Můžete porovnat s *4.1.d.

Není také pravda, že by libovolný podprostor konečné kodimenze byl uzavřený. Uvažujeme-li nenulový lineární funkcionál $L \in X^{\#}$, má jeho jádro $\ker L$ konečnou kodimenzi podle A.4. Stačí nyní vzít za L nespojitý lineární funkcionál na (nekonečně dimenzionálním) Banachově prostoru X. Ten určitě existuje, viz 2.6.c. Potom jádro $\ker L$ není uzavřená množina (podívejte se třeba na větičku v 2.23).

Důkazy následujících vět nejsou nijak zvlášť obtížné, nicméně vyžadují přeci jen trochu práce. Naznačíme hlavní myšlenky, přičemž leckdy použijeme dokázaných výsledků z kapitoly *10. Některé důkazy tím dokonce naznačíme vícerým způsobem, záleží totiž na tom, v jakém pořadí jednotlivé věty dokazujeme.

Za základ použijeme následující Noetherovo kriterium z *10.1.d pro případ $X = Y$.

(e) Noetherovo kriterium. *Operátor T na Banachově prostoru X je Fredholmův, právě když existuje $A \in \mathcal{L}(X)$ tak, že operátory $AT - I$ a $TA - I$ jsou kompaktní.*

Pro důležitou charakteristiku fredholmovských operátorů uvedenou v následující větě si připomeňme, že *Calkinova algebra* $Ca(X)$ je definována jako faktorová Banachova algebra $\mathcal{L}(X)/\mathcal{L}_c(X)$ (srovnej s *6.11). Označíme-li jako obvykle q kanonické zobrazení $\mathcal{L}(X)$ na Calkinovu algebru $Ca(X)$, je každému operátoru T na X přiřazen prvek $q(T)$, který je definován jako třída $T+\mathcal{L}_c(X)$ v $Ca(X)$. Jednotkou v $Ca(X)$ je samozřejmě prvek $q(I) = I + \mathcal{L}_c(X)$.

(f) Atkinsonova věta. *Operátor T na Banachově prostoru X je Fredholmův, právě když $q(T)$ je invertibilní prvek Calkinovy algebry $Ca(X)$.*

Důkaz. Použijeme Noetherovo kriterium z (e): Operátor $T \in \mathcal{L}(X)$ je Fredholmův, právě když existuje $A \in \mathcal{L}(X)$ tak, že operátory $AT - I$ a $TA - I$ jsou kompaktní. Je-li $AT - I$ kompaktní, máme

$$q(A)q(T) = \big(A + \mathcal{L}_C(X)\big)\big(T + \mathcal{L}_c(X)\big) = AT + \mathcal{L}_c(X) = I + \mathcal{L}_c(X) = q(I)\,.$$

Obdobně $q(T)q(A) = q(I)$, pokud operátor $TA - I$ je kompaktní. Je-li tedy T Fredholmův, vidíme, že $q(T)$ je invertibilní prvek $Ca(X)$. Naopak, je-li $q(T)$ invertibilní prvek Calkinovy algebry a $q(A) := \big(q(T)\big)^{-1}$, jsou operátory $AT - I$ a $TA - I$ kompaktní, a tudíž T je Fredholmův. ∎

(g) Věta. *Množina $\mathcal{F}(X)$ všech fredholmovských operátorů je otevřená v $\mathcal{L}(X)$ a zobrazení $T \mapsto \operatorname{ind} T : \mathcal{L}(X) \to \mathbf{Z}$ je spojité.*

Návod. Je-li $q : \mathcal{L}(X) \to Ca(X)$ obvyklé kanonické zobrazení, je podle Atkinsonovy charakteristiky $\mathcal{F}(X) = q^{-1}(U)$, kde U je množina invertibilních prvků Calkinovy algebry $Ca(X)$. Ježto q je spojité zobrazení a U je otevřená množina, je i $\mathcal{F}(X)$ otevřená v $\mathcal{L}(X)$.

Pokud jde o spojitost zobrazení $T \mapsto \operatorname{ind} T$, odvoláme se na *10.1.k. ♣

(h) Věta. *Je-li $K \in \mathcal{L}(X)$ kompaktní a $T \in \mathcal{L}(X)$ Fredholmův, potom i $K + T$ je Fredholmův a $\operatorname{ind}(K + T) = \operatorname{ind} T$.*

Důkaz. Operátor $K + T$ je Fredholmův, stačí použijeme-li Atkinsonovu větu z (f) (a uvědomíme si, že $q(T + K) = q(T)$). Protože podle (g) je zobrazení $T \mapsto \operatorname{ind} T$ spojité, je funkce $h : \lambda \mapsto \operatorname{ind}(T + \lambda K)$ na intervalu $[0, 1]$ spojitá a nabývá pouze celočíselných hodnot. Ježto $h([0, 1])$ je souvislá množina, musí být jednobodová. Tudíž $h(0) = h(1)$. ∎

(k) Nikolského věta. *Buď $T \in \mathcal{L}(X)$ fredholmovský operátor. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) $\operatorname{ind} T = 0$,
(ii) *existuje kompaktní operátor K tak, že $T + K$ je invertibilní,*
(iii) *existuje konečně dimenzionální operátor F tak, že $T + F$ je invertibilní.*

Návod. Ježto invertibilní operátory mají index 0, má podle předchozí věty součet invertibilního a kompaktního operátoru též index 0. Tudíž dostáváme implikace (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i).

Předpokládejme nyní, že $\operatorname{ind} T = 0$. Pokud $\dim\ker T = 0$, je též $\operatorname{codim}\mathcal{R}T = 0$ a operátor T je sám invertibilní (a za F pak stačí vzít nulový operátor $F = 0$).

Podle předpokladů tedy víme, že $X = \mathcal{R}T \oplus M$, kde $\dim M = \dim\ker T < \infty$. Nechť $T_2 : \ker T \to M$ je izomorfizmus mezi těmito podprostory. Protože $\dim\ker T < \infty$, existuje podle vět 2.27 a 2.38 (spojitá) projekce P prostoru X na $\ker T$. Zřejmě $X = \ker T \oplus \ker P$. Nechť T_1 je izomorfním zobrazením $\ker P$ na $\mathcal{R}T$. Položme $B = T + T_2P$. (Je-li $x \in X$, máme $Bx = Tx + T_2Px = TPx + T(I-P)x + T_2Px = T_1(I-P)x + T_2Px$, neboť $Px \in \ker T$.) Potom B je izomorfním zobrazením X na X a $T = B - T_2P$ je hledaný rozklad. Operátor T_2P je totiž konečně dimenzionální. ♣

10.2. Aproximující čísla operátoru z $\mathcal{L}(X,Y)$. Jsou-li X, Y Banachovy prostory a $L \in \mathcal{L}(X,Y)$, položme pro $n = 1, 2, \dots$

$$\alpha_n(L) := \inf\bigl\{\|L - F\| : F \in \mathcal{L}(X,Y), \dim\mathcal{R}F \le n-1\bigr\}.$$

Potom samozřejmě $\|L\| = \alpha_1(L) \ge \alpha_2(L) \ge \cdots \ge 0$. Posloupnost $\{\alpha_n(L)\}$ nazývejme *aproximující posloupností* operátoru L, její jednotlivé prvky pak *aproximujícími čísly* L.

10.3. Singulární čísla kompaktních operátorů. Obdobně jako v *4.2.c lze dokázat následující větu.

(a) Schmidtovo vyjádření kompaktního operátoru. *Nechť H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{L}_c(H_1, H_2)$ kompaktní operátor mezi nimi. Potom existují ortonormální soustavy $\{e_n\}$ v H_1 a $\{f_n\}$ v H_2 a nerostoucí posloupnost nezáporných čísel $\sigma_n(T) \to 0$ tak, že*

$$Tx = \sum_n \sigma_n(T)(x, e_n)\, f_n \quad \textit{pro každé} \quad x \in H_1\,.$$

(b) Poznámka. Uvedená řada konverguje k operátoru T dokonce v normě prostoru $\mathcal{L}(H_1, H_2)$. To nahlédneme snadno, neboť obdobně jako v důsledku 8.22 pro každé $x \in H_1$ a n máme

$$\Bigl\|Tx - \sum_{j=1}^{n} \sigma_j(T)(x, e_j)e_j\Bigr\|^2 \le \sum_{j=n+1}^{\infty} \bigl|\sigma_j(T)(x, e_j)\bigr|^2 \le \bigl(\|x\| \sup\{|\sigma_j(T)| : j > n\}\bigr)^2 \to 0\,.$$

(c) Singulární čísla. Posloupností *singulárních čísel* kompaktního operátoru T rozumíme právě posloupnost $\{\sigma_n(T)\}$ ze Schmidtova rozkladu T. Je tedy $\sigma_n(T) = (Te_n, f_n)$. Na první pohled by se mohlo zdát, že posloupnost $\{\sigma_n(T)\}$ z uvedeného rozkladu není jednoznačně určená (což je ovšem pravda o posloupnostech $\{e_n\}$ a $\{f_n\}$, ty zdaleka jednoznačně určeny nejsou). Ale není tomu tak. Posloupnost $\{\sigma_n(T)\}$ je totiž podle *4.2.c (nerostoucí) posloupností vlastních čísel (pozitivního) operátoru $\sqrt{TT^*}$ a následující větička pak jen dokládá toto tvrzení.

(d) Větička. *Je-li $T \in \mathcal{L}_c(H_1, H_2)$ kompaktní operátor, je $\sigma_n(T) = \alpha_n(T)$ pro každé n.*

Důkaz. Připomeňme, že $\alpha_n(T)$ jsou aproximující čísla operátoru T z odstavce 10.2. Nechť $Tx = \sum_n \sigma_n(T)(x, e_n)f_n$ je Schmidtův rozklad T.

Volíme-li $x \in H_1$ a n přirozené, dostáváme ihned z Besselovy nerovnosti

$$\Bigl\|Tx - \sum_{j=1}^{n-1} \sigma_j(T)(x, e_j)f_j\Bigr\|^2 \le \sum_{j=n}^{\infty} \sigma_j^2(T)|(x, e_j)|^2 \le \sigma_n^2(T)\|x\|^2\,.$$

Odtud plyne, že $\alpha_n(T) \le \sigma_n(T)$.

Potřebujeme dokázat opačnou nerovnost. Volme tedy n a operátor $F \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ tak, aby $\dim F \le n-1$. Určitě existuje takové $h \in H_1$, že $h = \eta_1 e_1 + \cdots + \eta_n e_n$, $\|h\| = 1$ a $F(h) = 0$. Použijeme-li Pythagorovu větu, dostaneme

$$\|T - F\|^2 \ge \bigl\|(T - F)h\bigr\|^2 = \|Th\|^2 = \Bigl\|\sum_{j=1}^{n} \sigma_j(T)\eta_j f_j\Bigr\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2(T)|\eta_j|^2 \ge \sigma_n^2(T)\,.$$

Tím dostaneme potřebnou druhou nerovnost. ■

V případě, kdy T je kompaktní hermiteovský operátor na Hilbertově prostoru H, jsou jeho singulární čísla $\sigma_n(T)$ rovna vlastním hodnotám uspořádaným podle velikosti a s příslušnou násobností. To neplatí již pro operátory, které nejsou hermiteovské. Nicméně platí alespoň následující důležité tvrzení.

(e) Weylova nerovnost. *Nechť T je kompaktní operátor na Hilbertově prostoru H a $\{\lambda_n(T)\}$ posloupnost jeho vlastních čísel počítaných s příslušnou násobností. Potom pro každé $p \in (0, \infty)$ platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n(T)|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^p(T)\,.$$

(f) Poznámka . Důkaz Weylovy nerovnosti lze nalézt v M. Reed and B. Simon [*1978]. Uvedená nerovnost však platí dokonce i pro konečné součty. V tomto případě je ovšem nutno uvažovat posloupnosti vlastních i singulárních čísel srovnaných do nerostoucích posloupností podle absolutní hodnoty. Původní důkaz je v H. Weyl [1949], lze jej nalézt také kupř. v R. Meise und D. Vogt [*1992].

10.4. Hilbert-Schmidtovy operátory. V dalším vydělíme jistou třídu operátorů na Hilbertově prostoru, v jejichž definici se však vyskytnou součty zobecněných řad nezáporných prvků. Čtenář, kterému by tím vznikaly problémy, se může omezit na případ, kdy uvažované prostory jsou separabilní. Pak samozřejmě stačí pracovat se spočetnými systémy a obyčejnými součty řad.

V následujícím výkladu bude H Hilbertův prostor. Přenesení celého výkladu na operátory mezi dvěma Hilbertovými prostory nečiní žádné podstatné obtíže. Naše omezení vyplývá jedině z důvodu jednoduchosti. Začněme s důležitým lemátkem.

(a) Lemma. *Nechť $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ a $\{f_\beta\}_{\beta \in B}$ jsou ortonormální báze H a $T \in \mathcal{L}(H)$. Potom*

$$\sum_{\alpha \in A} \|Te_\alpha\|^2 = \sum_{\beta \in B} \|Tf_\beta\|^2 = \sum_{\alpha \in A} \|T^* e_\alpha\|^2\,.$$

Důkaz. Použijeme-li dvakrát Parsevalovu rovnost z věty 1.34 a možnost přehození sumace (pro nezáporné sčítance), dostaneme

$$\sum_{\alpha \in A} \|Te_\alpha\|^2 = \sum_{\alpha \in A} \left(\sum_{\beta \in B} |(Te_\alpha, f_\beta)|^2 \right) = \sum_{\beta \in B} \left(\sum_{\alpha \in A} |(e_\alpha, T^* f_\beta)|^2 \right) = \sum_{\beta \in B} \|T^* f_\beta\|^2\,.$$

Tato rovnost platí pro libovolné dvě ortonormální báze, speciálně tedy musí platit i

$$\sum_{\beta \in B} \|Tf_\beta\|^2 = \sum_{\beta \in B} \|T^* f_\beta\|^2\,.$$

■

(b) Hilbert-Schmidtovy operátory. Řekneme, že operátor T na Hilbertově prostoru H je *Hilbert-Schmidtův*, existuje-li ortonormální báze $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ prostoru H tak, že $\sum\limits_{\alpha \in A} \|Te_\alpha\|^2 < \infty$. Symbolem $\mathcal{HS}(H)$ označme množinu všech Hilbert-Schmidtových operátorů na H. Pro $T \in \mathcal{HS}(H)$ položme

$$\|T\|_{HS} := \left(\sum_{\alpha \in A} \|Te_\alpha\|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

kde $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ je nějaká ortonormální báze H. Lemma (a) zaručuje, že definice $\|T\|_{HS}$ je nezávislá na volbě této báze.

(c) Tvrzení. *Libovolný Hilbert-Schmidtův T operátor je kompaktní. Navíc*

$$\|T\|_{HS} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\sigma_n^2(T) \right)^{\frac{1}{2}},$$

kde $\{\sigma_n(T)\}$ je posloupnost singulárních čísel T.

Důkaz. Nechť $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ je ortonormální báze H a $T \in \mathcal{HS}(H)$. Je-li K konečná podmnožina A, položme $T_K : x \mapsto \sum\limits_{\alpha\in K}(x, e_\alpha)e_\alpha$ pro $x \in H$. Buď $x \in H$ a $B := A \setminus K$. Protože $x = \sum_\alpha (x, e_\alpha)e_\alpha$, získáme pomocí Schwarzovy nerovnosti odhad

$$\|(T - T \circ T_K)x\| = \Big\|\sum_{\alpha\in B}(x, e_\alpha)Te_\alpha\Big\| \le \Big[\sum_{\alpha\in B}\|Te_\alpha\|^2\Big]^{\frac12}\Big[\sum_{\alpha\in B}|(x, e_\alpha)|^2\Big]^{\frac12} \le \Big[\sum_{\alpha\in B}\|Te_\alpha\|^2\Big]^{\frac12}\|x\|\,.$$

Jelikož $\sum\limits_{\alpha\in A}\|Te_\alpha\|^2 < \infty$, plyne z našeho odhadu, že T je v prostoru $\mathcal{L}(H)$ limitou konečně dimenzionálních operátorů. Musí tedy být kompaktní.

Protože T je kompaktní, existují ortonormální soustavy $\{g_n\}$ a $\{f_n\}$ v H tak, že $Tx = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sigma_n(T)(x, g_n)\,f_n$ pro každé $x \in H$. V H existuje ortonormální báze $\{h_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ obsahující soustavu $\{g_n\}$, stačí se podívat na důkaz věty 1.29. Potom ovšem

$$\|T\|_{HS}^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma}\|Th_\gamma\|^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma}\Big\|\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n(T)(h_\gamma, g_n)f_n\Big\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n^2(T)\,.$$

■

`(d) Příklady.` (d1) Nechť $\{e_n\}$ je ortonormální báze Hilbertova prostoru H, $\{\lambda_n\}$ číselná posloupnost a

$$Tx := \sum \lambda_n(x, e_n)e_n \quad \text{pro} \quad x = \sum (x, e_n)e_n\,.$$

Protože $\|Te_n\|^2 = \|\lambda_n e_n\|^2 = |\lambda_n|^2$, je T Hilbert-Schmidtův, právě když $\{\lambda_n\} \in l^2$. Samozřejmě $\|T\|_{HS} = \left(\sum|\lambda_n|^2\right)^{\frac12}$.

(d2) Je-li opět $\{e_n\}$ ortonormální báze Hilbertova prostoru H, $T \in \mathcal{L}(H)$ a $\alpha_{n,k} := (Te_n, e_k)$, je T Hilbert-Schmidtův, právě když $\sum\limits_{n,k=1}^{\infty}|\alpha_{n,k}|^2 < \infty$. V tomto případě pak

$$\|T\|_{HS} = \left(\sum_{n,k=1}^{\infty}|\alpha_{n,k}|^2\right)^{\frac12}.$$

(d3) Volterrův operátor $Tf(x) := \int_0^x f(s)\,ds$ je Hilbert-Schmidtův na prostoru $L^2([0,1])$.

(d4) Nechť $k \in \mathcal{L}^2([0,1]\times[0,1])$ je integrální jádro a

$$T_k f(x) := \int_0^1 k(s,x)f(s)\,ds \quad \text{pro} \quad f \in \mathcal{L}^2([0,1])\,.$$

V 2.49.c jsme ukázali (dokonce v mnohem obecnějším případě), že T_k je kompaktní operátor. Lze ukázat, že T_k je dokonce Hilbert-Schmidtův a $\|T_k\|_{HS} = \|k\|_{L^2}$.

`(e) Poznámka.` Každý Hilbert-Schmidtův operátor na $L^2([0,1])$ je již integrální operátor vzhledem k nějakému jádru. Přesněji, je-li $T \in \mathcal{HS}(L^2([0,1]))$, existuje jádro $k \in \mathcal{L}^2([0,1]\times[0,1])$ tak, že $T = T_k$. Detaily lze třeba nalézt v C. Swartz [1992]. Není podstatné, že se jedná o interval $[0,1]$, analogické tvrzení platí i pro libovolný prostor s mírou $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$. Důkaz tohoto tvrzení není zas tak obtížný. Stačí položit

$$k(s,t) = \sum_{\alpha,\beta}(Te_\alpha, e_\beta)\overline{e_\alpha(s)}\,e_\beta(t) \quad \text{pro} \quad s,t \in \Omega\,,$$

kde $\{e_\alpha\}$ je ortonormální báze prostoru $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$.

Poslední tvrzení lze využít při důkazu slavné *Schwartzovy věty o jádře*. Vyslovme ji v následujícím znění.

`(f) Schwartzova věta o jádře.` *Nechť $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina, $\mathcal{D}(\Omega)$ vektorový prostor všech $\mathcal{C}^\infty$-hladkých funkcí s kompaktním nosičem na Ω a $B : \mathcal{D}(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega) \to \mathbf{C}$ separátně spojitá bilineární forma. Potom existuje distribuce $D \in \mathcal{D}^*(\Omega\times\Omega)$ tak, že $B(f,g) = D(f\otimes g)$ pro všecha $f, g \in \mathcal{D}(\Omega)$.*

Zde definujeme $f \otimes g : (x,y) \mapsto f(x)g(y)$.

`(g) Větička.` *Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$. Potom operátor T je Hilbert-Schmidtův, právě když T^* je Hilbert-Schmidtův. V tomto případě pak $\|T\| \le \|T\|_{HS} = \|T^*\|_{HS}$.*

Důkaz. Část důkazu je obsažena již v lemmatu (a). Pokud $\|x\| \le 1$ a $\{e_\alpha\}$ je ortonormální báze H, potom

$$\|Tx\|^2 = \sum_\alpha |(Tx, e_\alpha)|^2 = \sum_\alpha |(x, T^* e_\alpha)|^2 \le \|x\|^2 \sum_\alpha \|T^* e_\alpha\|^2 \le \|T\|_{HS}\,.$$

■

`(h) Vlastnosti prostoru` $\mathcal{HS}(H)$. *Prostor $\mathcal{HS}(H)$ opatřený normou $\|.\|_{HS}$ je Hilbertův prostor. Skalární součin je definován jako $(T,S)_{HS} := \sum\limits_{\alpha \in A} (Te_\alpha, Se_\alpha)$ a nezávisí na volbě ortonormální báze $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ prostoru H*

Návod. Nejdříve se musí ověřit, že zobrazení $T \mapsto \|T\|_{HS}$ je skutečně norma na prostoru $\mathcal{HS}(H)$. Ale to, jakož i další tvrzení, je jen snadné cvičení. ♣

`(k) Další vlastnosti` $\mathcal{HS}(H)$. *Prostor $\mathcal{HS}(H)$ tvoří oboustranný (neuzavřený) ideál v $\mathcal{L}(H)$, v němž konečně dimenzionální operátory tvoří hustý podprostor.*

Návod. Je-li $T \in \mathcal{HS}(H)$ a $A, B \in \mathcal{L}(H)$, potom $ATB \in \mathcal{HS}(H)$ a $\|ATB\|_{HS} \le \|A\|\,\|T\|_{HS}\,\|B\|$. To zjistíme vcelku bez námahy přímo z definic. ♣

10.5. Nukleární operátory. Nechť H je Hilbertův prostor. Řekneme, že $T \in \mathcal{L}(H)$ je *nukleární operátor*, jestliže existují posloupnosti $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ v H tak, že $\sum_n \|x_n\|\,\|y_n\| < \infty$ a

$$Tx = \sum_n (x, x_n) y_n \quad \text{pro každé} \quad x \in H\,.$$

Každému takovému vyjádření operátoru T říkejme *nukleární*. Symbolem $\mathcal{N}(H)$ označme prostor všech nukleárních operátorů. Pro $T \in \mathcal{N}(H)$ položme

$$\|T\|_N := \inf\Big\{\sum_n \|x_n\|\,\|y_n\| : Tx = \sum_n (x, x_n) y_n \text{ pro } x \in H \text{ a } \sum_n \|x_n\|\,\|y_n\| < \infty\Big\}\,.$$

`(a) Tvrzení.` *Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je nukleární operátor. Potom T je kompaktní a*

$$\|T\|_N = \sum_{n=1}^\infty \sigma_n(T)\,,$$

kde $\{\sigma_n(T)\}$ je posloupnost jeho singulárních čísel.

Důkaz. Je-li $Tx = \sum_n (x, x_n) y_n$ nukleární vyjádření T, je $\Big\|Tx - \sum\limits_{j=1}^n (x, x_j) y_j\Big\| \le \sum\limits_{j=n+1}^\infty \|x_j\|\,\|y_j\|$. Odtud hned vyvodíme, že T je v prostoru $\mathcal{L}(H)$ limitou konečně dimenzionálních operátorů, a tedy kompaktní. Nechť $Tx = \sum_n \sigma_n(T)(x, e_n) f_n$ je Schmidtovo vyjádření T. Využitím Hölderovy nerovnosti a reflexivity Hilbertových prostorů dostáváme pro každé n odhad

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n \sigma_j(T) &= \sum_{j=1}^n (Te_j, f_j) = \sum_{j=1}^n \Big|\sum_{k=1}^\infty (e_j, x_k)\,(y_k, f_j)\Big| \le \\ &\le \sum_{k=1}^\infty \Big(\sum_{j=1}^n |(e_j, x_k)|^2\Big)^{\frac12} \Big(\sum_{j=1}^n |(y_k, f_j)|^2\Big)^{\frac12} \le \sum_{k=1}^\infty \|x_k\|\,\|y_k\| \le \|T\|_N\,.\end{aligned}$$

Tím dostáváme jednu nerovnost. Pro důkaz druhé můžeme předpokládat, že $\sum_n \sigma_n(T) < \infty$. Potom ovšem $Tx = \sum_n (x, e_n)\sigma_n(T) f_n$ je nukleární vyjádření T, a tudíž

$$\|T\|_N \le \sum_{n=1}^\infty \|e_n\|\,\|\sigma_n(T) f_n\| = \sum_{n=1}^\infty \sigma_n(T)\,.$$

■

Základní vlastnosti nukleárních operátorů shrňme do následující věty.

(b) Věta. *Prostor $\mathcal{N}(H)$ s normou $\|.\|_N$ je Banachův a je ideálem v $\mathcal{L}(H)$. Libovolný nukleární operátor je Hilbert-Schmidtův a $\|T\|_{HS} \leq \|T\|_N$ pro $T \in \mathcal{N}(T)$.*

Mezi nukleárními a Hilbert-Schmidtovými operátory je velice úzký vztah vyjádřený v následujícím tvrzení.

(c) Tvrzení. *Operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ je nukleární, právě když existují Hilbert-Schmidtovy operátory $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(H)$ tak, že $T = T_1 \circ T_2$. V tom případě $\|T\|_N \leq \|T_1\|_{HS}\|T_2\|_{HS}$.*

Důkaz. Je-li $Tx = \sum_n \sigma_n(T)(x, e_n)f_n$ Schmidtovo vyjádření nukleárního operátoru T, je $\{\sigma_n(T)\} \in l^1$. Stačí pak položit

$$T_1x := \sum_n \sqrt{\sigma_n(T)}(x, e_n)f_n \quad \text{a} \quad T_2x := \sum_n \sqrt{\sigma_n(T)}(x, e_n)e_n$$

pro $x \in H$.

Naopak, nechť $T_1, T_2 \in \mathcal{HS}(H)$. Je-li $T_2x = \sum \sigma_n(T_2)(x, e_n)f_n$ Schmidtovo vyjádření T_2, je $T_1 \circ T_2x = \sum_n \sigma_n(T_2)(x, e_n)T_1f_n$. Protože pomocí Hölderovy nerovnosti máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\sigma_n(T_2)e_n\| \, \|T_1f_n\| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2(T_2)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|T_1f_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|T_2\|_{HS}\|T_1\|_{HS} < \infty\,,$$

je T nukleární a $\|T\|_N \leq \|T_1\|_{HS}\,\|T_2\|_{HS}$. ■

(d) Poznámka. Je-li T nukleární operátor, potom dokonce $\|T\|_N = \inf\{\|A\|_{HS}\|B\|_{HS} : A, B \in \mathcal{HS}(H), T = AB\}$.

10.6. Stopa nukleárního operátoru. Základem tohoto odstavce bude následující lemma.

(a) Lemma. *Nechť $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ a $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ jsou ortonormální báze Hilbertova prostoru H. Je-li T nukleární operátor na H, potom*

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}(Te_\gamma, e_\gamma) = \sum_{\alpha\in A}(Tf_\alpha, f_\alpha)\,.$$

Navíc $\{(Te_\gamma, e_\gamma)\} \in l^1(\Gamma)$.

Důkaz. Nechť $Tx = \sum_n (x, x_n)y_n$ je nukleární vyjádření T. Je-li K konečná podmnožina Γ, dostáváme

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma\in K} |(Te_\gamma, e_\gamma)| &= \sum_{\gamma\in K}\left|\sum_{n=1}^{\infty}(e_\gamma, x_n)(y_n, e_\gamma)\right| \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\gamma\in K}\left|(e_\gamma, x_n)(y_n, e_\gamma)\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|\,\|y_n\| < \infty\,.\end{aligned}$$

V posledním odhadu jsme použili Schwarzovu nerovnost a Parsevalovu rovnost. Tím jsme ukázali, že $\{(Te_\gamma, e_\gamma)\} \in l^1(\Gamma)$. Toto tvrzení spolu s Parsevalovou rovností nás opravňuje k odvození rovnosti

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}(Te_\gamma, e_\gamma) = \sum_{\gamma\in\Gamma}\sum_{n=1}^{\infty}(e_\gamma, x_n)\,(y_n, e_\gamma) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\gamma\in\Gamma}(y_n, e_\gamma)\,(e_\gamma, x_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(y_n, x_n)\,.$$

Vidíme, že inkriminovaný součet nezávisí na volbě ortonormální báze ani na volbě nukleárního vyjádření. ■

(b) Poznámka . Povšimněte si, že jsme vlastně dokázali více. Je-li $\{e_\gamma\}$ ortonormální báze našeho Hilbertova prostoru H a $Tx = \sum_n (x, x_n)y_n$ nukleární vyjádření T, potom $\sum_\gamma (Te_\gamma, e_\gamma) = \sum_n (y_n, x_n)$. Navíc řada vpravo konverguje absolutně ($\sum_n |(y_n, x_n)| \leq \sum_n \|x_n\|\,\|y_n\| < \infty$).

(c) Stopa . Nechť T je nukleární operátor na H. Definujme jeho *stopu* předpisem

$$\operatorname{tr}(T) := \sum_{\gamma \in \Gamma} (Te_\gamma, e_\gamma)\,,$$

kde $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je libovolná ortonormální báze prostoru H. Předchozí lemma nám říká, že tento uvedený součet existuje a nezávisí na volbě ortonormální báze.

(d) **Poznámka.** Je-li $(a_{i,j})$ matice, víme, že součet prvků na diagonále je invariantní vzhledem k ortogonálním či unitárním transformacím. Je-li totiž $(a_{i,j})$ maticí lineárního zobrazení T v Hilbertově prostoru H konečné dimenze a $\{e_n\}$ je libovolná ortonormální báze v H, potom $\sum_k a_{kk} = \sum_k (Te_k, e_k)$. Nekonečně rozměrnou analogií k tomuto postřehu bylo vlastně základní lemma (a).

Stopa nukleárního zobrazení tedy zobecňuje součet diagonálních prvků matice. Navíc z lineární algebry víme, že stopa matice, tedy součet prvků na diagonále, je roven součtu vlastních čísel této matice počítaných s příslušnou násobností. I v nekonečné dimenzi máme analogii: V.R. Lidskii [1959] ukázal, že $\operatorname{tr}(T) = \sum_n \lambda_n(T)$ pro každý nukleární operátor T na Hilbertově prostoru. Zde $\{\lambda_n(T)\}$ je posloupnost vlastních čísel operátoru T počítaných, pochopitelně, s jejich násobností.

(e) Větička. *Zobrazení* $\operatorname{tr} : T \mapsto \operatorname{tr}(T)$ *je spojitá lineární forma na prostoru* $\mathcal{N}(H)$ *a* $\|\operatorname{tr}\| = 1$.

Důkaz. Linearita tr je zřejmá. Je-li $Tx = \sum_n \sigma_n(T)(x, e_n) f_n$ Schmidtovo vyjádření T, dá důkaz lemmatu (a) ihned odhad

$$|\operatorname{tr}(T)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(T)(f_n, e_n) \right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(T) = \|T\|_N\,.$$

Odtud $\|\operatorname{tr}\| \le 1$. Je-li $Tx = (x, e)e$, kde $\|e\| = 1$, je T nukleární, $\|T\|_N = 1$ a $\operatorname{tr}(T) = 1$. ∎

(f) Větička. *Jsou-li T a S Hilbert-Schmidtovy operátory na H, je* $(T, S)_{HS} = \operatorname{tr}(S^*T)$.

Důkaz. Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ ortonormální báze H, je

$$\operatorname{tr}(S^*T) = \sum_{\gamma\in\Gamma} (S^*Te_\gamma, e_\gamma) = \sum_{\gamma\in\Gamma} (Te_\gamma, Se_\gamma) = (T, S)_{HS}\,.$$

∎

10.7. Duály k $\mathcal{L}_c(H)$ a $\mathcal{N}(H)$. Buď H Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Víme, že T je nukleární operátor, právě když posloupnost jeho aproximujících čísel $\{\alpha_n(T)\}$ leží v l^1, zatímco T je kompaktní, právě když $\{\alpha_n(T)\} \in c_0$. Dále víme, že duál k prostoru c_0 je izometricky-izomorfní s l^1. Definujeme-li pro $\alpha = \{\alpha_n\} \in l^1$ funkcionál L_α na c_0 předpisem $L_\alpha : \{x_n\} \mapsto \sum_n \alpha_n x_n$, je $L_\alpha \in (c_0)^*$ a zobrazení $\alpha \mapsto L_\alpha$ je právě ono izometricky-izomorfní zobrazení l^1 na $(c_0)^*$. Proto se dívejme na následující větu, již uvedeme bez důkazu, jako na jakousi analogii, pouze nekonečnému součtu $\sum_n$ bude odpovídat stopa tr. Snad jenom připomeňme, že prostor $\mathcal{N}(H)$ tvoří (oboustranný) ideál v $\mathcal{L}(H)$.

(a) Duál k $\mathcal{L}_c(H)$. *Nechť $T \in \mathcal{N}(H)$ je nukleární operátor a $L_T : S \mapsto \operatorname{tr}(TS)$ pro $S \in \mathcal{L}_c(H)$. Potom $L_T \in (\mathcal{L}_c(H))^*$ a zobrazení $T \mapsto L_T$ je izometricky-izomorfním zobrazením $\mathcal{N}(H)$ na $(\mathcal{L}_c(H))^*$.*

Je tedy duál $(\mathcal{L}_c(H))^*$ prostoru všech kompaktních operátorů na H izometricky-izomorfní prostoru $\mathcal{N}(H)$ všech nukleárních operátorů.

Analogií tvrzení, že duál k prostoru l^1 je izometricky-izomorfní prostoru l^∞ (osvěžte si, jak je realizováno toto zobrazení), je následující věta, která říká, že duálem k prostoru nukleárních operátorů $\mathcal{N}(H)$ je prostor $\mathcal{L}(H)$ všech operátorů na H.

(b) Duál k $\mathcal{N}(H)$. *Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je operátor na H a $M_T : S \mapsto \operatorname{tr}(TS)$ pro $S \in \mathcal{N}(H)$. Potom $M_T \in (\mathcal{N}(H))^*$ a zobrazení $T \mapsto M_T$ je izometricky-izomorfním zobrazením $\mathcal{L}(H)$ na $(\mathcal{N}(H))^*$.*

10.8. Schattenovy třídy. Je-li H Hilbertův prostor a $p \in [1,\infty)$, definujeme

$$\mathcal{S}_p(H) := \left\{K \in \mathcal{L}_c(H) : \{\sigma_n(K)\} \in l^p\right\}.$$

Zde $\{\sigma_n(K)\}$ je opět posloupnost singulárních čísel K.

Pro $T \in \mathcal{S}_p(H)$ položme

$$\|T\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^p(T)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Podle předešlých výsledků vidíme, že Hilbert-Schmidtovy operátory splývají s třídou $\mathcal{S}_2(H)$, zatímco prostor nukleárních operátorů je přesně roven třídě $\mathcal{S}_1(H)$.

10.9. Tvrzení. *Je-li $p \in [1,\infty)$, tvoří $\mathcal{S}_p(H)$ vzhledem k normě $\|.\|_p$ Banachův prostor. Prostor $\mathcal{S}_p(H)$ je též ideálem v $\mathcal{L}(H)$.*

10.10. Poznámky. (a) Nebylo by žádným problémem definovat Hilbert-Schmidtovy či nukleární operátory anebo též Schattenovy třídy pro operátory mezi dvěma Hilbertovými prostory. Jak jsme již poznamenali, my jsme se omezili na případ operátorů na jednom Hilbertově prostoru pouze z důvodů jednoduššího vyjadřování.

(b) Nechť T je kompaktní operátor na Hilbertově prostoru H a $\{\lambda_n(T)\}$ posloupnost jeho vlastních čísel počítaných s příslušnou násobností. Potom z Weylových nerovností v 10.3.c a vyjádření norem v 10.4.c či 10.5.a dostáváme, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n(T)| \leq \|T\|_N \quad \text{a} \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n(T)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|T\|_{HS},$$

přičemž první nerovnost platí v případě, kdy T je nukleární, druhá pak pro Hilbert-Schmidtův operátor T. Odtud speciálně plyne, že $\{\lambda_n(T)\} \in l^1$, pokud T je nukleární a $\{\lambda_n(T)\} \in l^2$ pro operátor T, který je Hilbert-Schmidtův.

(c) Některé třídy operátorů lze zavést i v případě Banachových prostorů. A to samozřejmě tak, aby nově definované pojmy splývaly s již zavedenými v Hilbertových prostorech. Zmiňme se stručně o nich.

Operátor T na Banachově prostoru X se nazývá ***nukleární***, existují-li posloupnosti $\{x_n\}$ v X a $\{\varphi_n\}$ v X^* tak, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\|\,\|x_n\| < \infty \quad \text{a} \quad Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)x_n$$

pro každé $x \in X$. ***Nukleární normu*** takového operátoru definujeme jako

$$\|T\|_N := \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\|\,\|x_n\| : Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)x_n \text{ pro každé } x \in X\right\},$$

kde infimum se tedy bere přes všechna možná „nukleární“ vyjádření operátoru T.

Nukleární operátory na Banachově prostoru X tvoří opět uzavřený vektorový podprostor v $\mathcal{L}_c(X)$ a jsou ideálem v $\mathcal{L}(X)$. Posloupnost $\{\lambda_n(T)\}$ vlastních čísel nukleárního operátoru T (počítaných s příslušnou násobností) již nemusí ležet v prostoru l^1. Vždy však $\{\lambda_n(T)\} \in l^2$. Jestliže pro každý nukleární operátor T na Banachově prostoru X posloupnost $\{\lambda_n(T)\}$ leží v l^1, potom X je již izomorfní Hilbertovu prostoru. To ukázali W.B. Johnson, H. König, B. Maurey a J.R. Retheford v [1979].

Pro nukleární operátory na Banachových prostorech bychom chtěli definovat i jejich stopu. Je-li tedy $Tx = \sum_n \varphi_n(x)x_n$ nukleární vyjádření T, jsme v pokušení definovat $\mathrm{tr}(T) = \sum_n \varphi_n(x_n)$. Tato definice ovšem závisí na nukleárním vyjádření T a není tedy vůbec jasné, je-li korektní. Platí zajímavá věta, podle níž Banachův prostor X má aproximační vlastnost z *2.18, právě když pro každý nukleární operátor T na X definice $\mathrm{tr}(T)$ nezávisí na nukleárním vyjádření T.

Je-li T nukleární operátor na Banachově prostoru X, je T' nukleární operátor na X^* a $\|T'\|_N \leq \|T\|_N$. Opačná implikace obecně neplatí. Je-li X reflexivní, pak samozřejmě ano. Je-li X Banachův prostor, pro nějž X^* má aproximační vlastnost a $T \in \mathcal{L}(X)$ je takový operátor, že T' je nukleární, potom i T je nukleární a $\|T\|_N = \|T'\|_N$. Existují dokonce konečně dimenzionální operátory T, pro něž $\|T'\|_N < \|T\|_N$. Existují také operátory T, které nejsou nukleární, ačkoliv pro ně T' je nukleární. Příklad takového operátoru lze třeba najít na prostoru X majícím aproximační vlastnost a separabilní duál, nikoliv však omezenou aproximační vlastnost. Jak jsme se zmínili v *2.18, takový prostor sestrojili T. Figiel a W.B. Johnson v [1973]. Detaily o těchto problémech lze nalézt v A. Defant and K. Floret [*1993].

(d) Pokud jde o analogii Hilbert-Schmidtových operátorů v Banachových prostorech, vhodným kandidátem by mohly být 2-*sčítající operátory*. Ty, dokonce v obecnější poloze, zavedeme v *10.8. Platí totiž věta, že v případě Hilbertových prostorů jsou Hilbert-Schmidtovy operátory právě 2-sčítající operátory. Přitom operátor T na Banachově prostoru X je 2-sčítající, jestliže má následující vlastnost: Kdykoliv $\{x_n\}$ je taková posloupnost v X, že $\sum_n |\varphi(x_n)|^2 < \infty$ pro každé $\varphi \in X^*$, potom $\sum_n \|Tx_n\|^2 < \infty$. 2-sčítající operátory nemusejí být kompaktní, ale složení dvou 2-sčítajících operátorů je nukleární, a tedy kompaktní. To odpovídá tvrzení (c) z 10.5.

10.11. Elementární cvičení. (a) Nechť $T \in \mathcal{L}(X)$ je fredholmovský operátor a $T' \in \mathcal{L}(X^*)$ k němu (banachovsky) adjungovaný. Ukažte, že T' je Fredholmův a $\operatorname{ind} T = -\operatorname{ind} T'$.

Návod. Především obor hodnot $\mathcal{R}T'$ je uzavřený, neboť $\mathcal{R}T$ je uzavřený. K tomu se stačí podívat na *5.3.c. Tudíž $\mathcal{R}T' = (\ker T)^\perp$ (viz tamtéž). Dále využijte toho, že prostor $X^*/\mathcal{R}T' = X^*/(\ker T)^\perp$ je podle 2.55.n izomorfní s $(\ker T)^*$, a že $\ker T' = (\mathcal{R}T)^\perp$ s přihlédnutím k větě 5.19. ♣

(b) Ukažte, že index hermiteovského fredholmovského operátoru na Hilbertově prostoru je roven 0.

Návod. Použijte (a). ♣

(c) Nechť X je Banachův prostor l^p ($p \in [1, \infty]$) anebo c_0. Definujme následující operátory na X:

$$\begin{aligned} T_1 : \{x_n\} &\mapsto (0, \dots, 0, x_1, x_2, \dots) \quad (k \text{ nul}), \\ T_2 : \{x_n\} &\mapsto (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots) \quad (k \text{ pevné}), \\ T_3 : \{x_n\} &\mapsto (0, \dots, 0, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots) \quad (k \text{ nul}). \end{aligned}$$

Ukažte, že operátory T_1, T_2 i T_3 jsou fredholmovské a spočtěte jejich index.

(d) Nechť H je Hilbertův prostor a μ Radonova míra na w-kompaktní množině $S := \{x \in H : \|x\| \le 1\}$. Splňuje-li lineární operátor T na H nerovnost

$$\|Tx\| \le \int_S \big|(x, s)\big| \, d\mu(s)$$

pro každé $x \in H$, je T Hilbert-Schmidtův operátor.

Návod. Volte ortonormální bázi $\{e_\gamma\}$ v H. Pomocí Parsevalovy rovnosti a Hölderovy nerovnosti ukažte, že

$$\sum_\gamma \|Te_\gamma\|^2 \le \sum_\gamma \mu(S) \int_S \big|(e_\gamma, s)\big|^2 \, d\mu(s) \le (\mu(S))^2 .$$

♣

(e) Spočtěte singulární čísla následujících operátorů:

(e1) $H = l^2$, $T : \{x_n\} \mapsto \{\alpha_n x_n\}$ pro $\{x_n\} \in l^2$, kde $\{\alpha_n\} \in c_0$ je daná posloupnost,
(e4) $H = l^2$, $R : (x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots)$,
(e3) Volterrova operátoru z 10.4.d3.

(f) Nechť $T \in \mathcal{L}(X)$ je operátor na Banachově prostoru X. Ukažte, že následující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) $\mathcal{R}T$ je uzavřený podprostor v X konečné kodimenze,
(ii) existuje $K \in \mathcal{L}(X)$ tak, že $TK - I$ je kompaktní operátor,
(iii) obraz $q(T)$ v Calkinově algebře $Ca(X)$ má pravou inverzi,
(iv) existuje právě jeden operátor $S \in \mathcal{L}(X)$ tak, že TS je projekce X na $(\ker T')^\perp$ a $I - TS$ je konečně dimenzionální.

Poznámka. Je-li některá z těchto podmínek splněna, nazývá se T *pravý Fredholmův operátor* (na rozdíl od levého, nikoliv však nepravého).

11. Neomezené operátory

V této kapitole nám půjde o studium lineárních operátorů, které nemusejí být omezené. Ty hrají důležitou roli v různých fyzikálních problémech, zejména v kvantové teorii pole. Je jasné, že se nemůžeme zcela oprostit od topologické struktury daného prostoru a topologických vlastností uvažované třídy operátorů. Uvidíme, že zcela přirozeným požadavkem je studovat operátory s uzavřeným grafem. Začněme nejprve s opakováním.

11.1. Součin Banachových a Hilbertových prostorů. Na kartézském součinu (konečně mnoha) Banachových prostorů lze definovat různým způsobem normu. Většina přirozených definic, které jsou uvedeny v *1.10, vede k ekvivalentním normám.

Je-li nyní H Hilbertův prostor, lze na kartézském součinu $H \times H$ zavést součinovou topologii opět pomocí různých součinových norem, avšak pouze norma

$$\|(a,b)\|_{H\times H} := \sqrt{\|a\|_H^2 + \|b\|_H^2}$$

splňuje rovnoběžníkové pravidlo a $H \times H$ se s touto normou stává Hilbertovým prostorem. Je dobré si uvědomit, že skalární součin v $H \times H$ je dán jako

$$(a,b)\,(x,y) = (a,x) + (b,y)\,.$$

Připomeňme ještě, že konvergence prvků v kartézském součinu je konvergencí po jednotlivých složkách.

11.2. Uzavřené operátory. Řekneme, že lineární operátor T definovaný na podmnožině D_T Banachova prostoru X je *uzavřený*, jestliže D_T je (lineární) podprostor X a

$$\operatorname{graf} T := \big\{[x, Tx] : x \in D_T\big\}$$

je uzavřená podmnožina $X \times X$. Poslední podmínka neříká nic jiného, než že je splněna implikace

$$\{x_n\} \subset D_T\,,\ [x_n, Tx_n] \to [x,g],\ \text{potom } x \in D_T \quad \text{a} \quad Tx = g\,,$$

což se dá ještě přepsat takto

$$x_n \in D_T\,,\ x_n \to x\,,\ Tx_n \to g,\ \text{potom } x \in D_T \quad \text{a} \quad Tx = g\,.$$

11.3. Příklady. (a) Uvažujme prostor $X := \mathcal{C}([0,1])$ s obvyklou supremovou normou a jeho podmnožinu $D_T := \{f \in X : f' \in X\}$. Pro $f \in D_T$ položme $Tf = f'$. Operátor T je zřejmě lineární na D_T (což je hustý podprostor X, neboť obsahuje všechny polynomy), avšak T není omezený. Není totiž těžké zkonstruovat posloupnost funkcí $\{f_n\} \subset X$ takovou, že $f_n \rightrightarrows 0$ a přitom posloupnost $\{f_n'\}$ zdaleka nekonverguje (stejnoměrně) k nule.

Ukážeme, že T je uzavřený. Nechť tedy $f_n \in D_T$, $f_n \to f$ a $f_n' \to g$ (konvergence jsou stejnoměrné). Chceme ukázat, že $f \in D_T$ a $f' = g$. A tady si stačí jen vzpomenout na jednu ze základních vět kurzu analýzy o derivování limitní funkce.

(b) Nechť nyní $H = L^2(\mathbf{R})$, $D_T = \{f \in H : xf(x) \in H\}$. (Zde i v dalším si dovolujeme menší licenci. Pracujeme totiž zpravidla s funkcemi, i když myslíme třídy ekvivalentních funkcí. Tedy správně je D_T lineární podprostorem H tvořený třídami funkcí, přičemž v jedné třídě jsou všechny funkce z $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$, které jsou si rovny skoro všude na $\mathbf{R}$.) Zřejmě D_T je hustý (obsahuje spojité funkce s kompaktním nosičem) lineární podprostor H. Pro $f \in H$ položme $Tf(x) = xf(x)$. Operátor T je lineární a neomezený. K důkazu posledního tvrzení si stačí uvědomit, že funkce $f_n := c_{(n,n+1)}$ mají normu 1 a že

$$\|Tf_n\|^2 = \int_{\mathbf{R}} |Tf_n|^2 = \int_n^{n+1} x^2 \to +\infty\,.$$

Poněkud obtížnější je úvaha, proč T je uzavřený. Ale ani to není extrémně těžké. Předpokládejme tedy, že $f_n \in D_T$, $f_n \xrightarrow{L^2} f$ a $Tf_n \xrightarrow{L^2} g$. Potom z posloupnosti $\{f_n\}$ lze vybrat její podposloupnost $\{g_k\}$ tak, aby $g_k(x) \to f(x)$ a $xg_k(x) \to g(x)$ pro skoro všechna $x \in \mathbf{R}$. Tudíž $xf(x) = g(x)$ skoro všude na $\mathbf{R}$. Vidíme, že $xf(x) \in L^2(\mathbf{R})$ a $Tf = g$.

V dalším se soustředíme na zavedení adjungovaného operátoru. V teorii omezených operátorů jsme striktně rozlišovali mezi banachovsky a hilbertovsky adjungovanými operátory. Vpodstatě bychom mohli i pro neomezené operátory budovat paralelní teorie. Protože však teorie neomezených operátorů má více aplikací v Hilbertových prostorech, omezíme se pouze na ně.

Zopakujme si, že v případě lineárního omezeného operátoru $T \in \mathcal{L}(H)$ existuje ke každému $h \in H$ právě jedno h^* tak, že $(Tx,h) = (x,h^*)$ pro všechna $x \in H$. Můžeme tedy položit $T^*h = h^*$. Operátor T^* jsme pak nazývali adjungovaným k T. Jaká je situace pro lineární neomezené operátory?

11.4. Adjungované operátory. Nechť D_T je lineární podprostor Hilbertova prostoru H a $T : D_T \to H$ lineární zobrazení. Definujme

$$D_{T^*} = \big\{h \in H : \text{existuje právě jedno}\, h^* \in H\, \text{tak, že}\, (Tx,h) = (x,h^*)\, \text{pro všechna}\, x \in D_T\big\}\,.$$

Dále definujme operátor $T^* : D_{T^*} \to H$ předpisem $T^*h = h^*$ a nazývejme T^* *adjungovaným* operátorem k T.

11.5. Poznámky. (a) Při takto zavedené definici by se mohlo stát, že definiční obor D_{T^*} je prázdná množina. Proto se obvykle adjungované operátory definují pro ty operátory T, které mají svůj definiční obor D_T hustý v H. Takové operátory se často nazývají *hustě definované*. Následující větička 11.6 ukazuje, proč je dobré se na tyto operátory omezit.

(b) Pokud není D_{T^*} prázdná množina, je vždy D_{T^*} lineární podprostor H. Může se ovšem stát, jak uvidíme v příkladu 11.19.c, že $D_{T^*} = \{0\}$.

(c) Nechť T je hustě definovaný operátor na H a $h \in H$. Rozmyslete si, že $h \in D_{T^*}$, právě když funkcionál $x \mapsto (Tx, h)$ je spojitý na D_T.

(d) Je-li $T \in \mathcal{L}(H)$, je $D_{T^*} = H$ a T^* je stejně definován pro omezené i neomezené operátory.

11.6. Větička. *Nechť T je lineární operátor definovaný na podprostoru D_T Hilbertova prostoru H. Potom D_T je hustý v H, právě když D_{T^*} je neprázdný. V tom případě je i operátor T^* lineární.*

Důkaz. Nechť $\overline{D_T} = H$. Jestliže $(Tx, h) = (x, h_1^*) = (x, h_2^*)$ pro jistá $h, h_1^*, h_2^* \in H$ a všechna $x \in D_T$, potom ze spojitosti skalárního součinu a hustoty D_T v H lehce vyplyne, že $h_1^* = h_2^*$. Tedy $0 \in D_{T^*}$.

Předpokládejme, že $\overline{D_T} \neq H$. Ježto $\overline{D_T}$ je vlastní uzavřený podprostor H, existuje nenulový prvek $g \in (\overline{D_T})^\perp$. Ukážeme, že $D_{T^*} = \emptyset$. Nechť $h \in D_{T^*}$. Existuje tedy h^* tak, že $(Tx, h) = (x, h^*)$ pro každé $x \in D_T$. Potom ovšem i $(Tx, h) = (x, h^* + g)$ pro každé $x \in D_T$. Protože $h^* \neq h^* + g$, dostáváme spor s definicí D_{T^*}.

Zbývá tudíž ověřit pouze linearitu T^*, ale to je snadné. Jsou-li totiž $h_1, h_2 \in D_{T^*}$ a $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$, je

$$(Tx, \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2) = (x, \lambda_1 T^* h_1 + \lambda_2 T^* h_2)$$

pro každé $x \in D_T$ (lehko zjistíme pouhým rozepsáním), odkud již tvrzení snadno plyne. ∎

11.7. Symetrické a samoadjungované operátory. Nechť $A : D_A \to H$ a $B : D_B \to H$ jsou lineární operátory. Symbolem $A \subset B$ budeme rozumět, že $D_A \subset D_B$ a $Ax = Bx$ pro každé $x \in D_A$. Samozřejmě, $A = B$, jestliže $A \subset B$ i $B \subset A$.

Řekneme, že lineární operátor T definovaný na hustém podprostoru D_T Hilbertova prostoru H je *symetrický*, jestliže $T \subset T^*$. V případě, že dokonce $T = T^*$, nazveme T *samoadjungovaným*.

11.8. Poznámka. Pokud chceme rozvíjet rozumnou teorii neomezených operátorů využívající pojmu adjungovaného operátoru, věta 11.6 nás upozorňuje, že se musíme soustředit na operátory definované na hustých podmnožinách daného prostoru.

Dále si uvědomme, že T je symetrický, právě když $(Tk, h) = (k, Th)$ pro všechny dvojice $h, k \in D_T$.

Je-li T hustě definovaný, zajímá nás samozřejmě, kdy i T^* je hustě definovaný. To nemusí být vždy, podívejte se třeba na cvičení 11.19.a. Je-li T symetrický, je $T \subset T^*$ a T^* je samozřejmě hustě definovaný. Operátor T^* je hustě definovaný třeba i v případě, kdy T je uzavřený. O tom vypovídá cvičení 11.19.f.

11.9. Větička. *Nechť T je lineární operátor definovaný na hustém podprostoru H. Potom adjungovaný operátor T^* je uzavřený.*

Důkaz. Nechť $\{h_n\} \subset D_{T^*}$, $h_n \to h$ a $T^* h_n \to g$. Potřebujeme dokázat, že $h \in D_{T^*}$. Buď tedy $x \in D_T$. Ze spojitosti skalárního součinu plyne, že

$$(Tx, h_n) \to (Tx, h) \quad \text{a} \quad (x, T^* h_n) \to (x, g)\,.$$

Ovšem $(Tx, h_n) = (x, T^* h_n)$, odkud $(Tx, h) = (x, g)$. Z hustoty D_T dostáváme, že $h \in D_{T^*}$ (nezapomeňte na jednoznačnost!) a že $g = T^* h$. ∎

11.10. Hellinger-Toeplitzova věta. *Každý symetrický operátor definovaný na celém Hilbertově prostoru H je již omezený (a hermiteovský).*

Důkaz. Nechť T je symetrický operátor a $D_T = H$. Potom nutně $T = T^*$. Stačí použít větu 4.19 o uzavřeném grafu. Je-li $h_n \in H$, $h_n \to 0$ a $T h_n \to g$, potřebujeme dokázat, že $g = 0$. Ale to je snadné, neboť

$$(g, g) = (\lim T h_n, g) = \lim\,(T h_n, g) = \lim\,(h_n, Tg) = (\lim h_n, Tg) = 0\,.$$

Jiná myšlenka důkazu. Ježto $T = T^*$ a T^* je uzavřený podle předchozí větičky 11.9, je uzavřený i operátor T. ∎

U neomezených operátorů podstatným způsobem záleží na jejich definičním oboru. Bylo by dobré si pečlivě prostudovat následující příklady.

11.11. Příklady. (a) Uvažujme reálný Hilbertův prostor $H := L^2([0,1])$. Dále D_T definujme jako množinu těch absolutně spojitých funkcí f na $[0,1]$, jejichž derivace f' (ta existuje skoro všude!) také leží v $L^2([0,1])$ a jež splňují podmínku $f(0) = f(1) = 0$ (porovnejte s definicí Sobolevova prostoru v 1.10.g). Množina D_T je hustá v $L^2([0,1])$. To plyne z faktu, že množina $\{p : p \text{ je polynom } p(0) = p(1) = 0\}$ je podmnožinou D_T. Potom totiž D_T je množina uniformně hustá v $\{f \in \mathcal{C}([0,1]) : f(0) = f(1) = 0\}$, a tudíž D_T je hustá podmnožina $L^2([0,1])$.

Položme $Tf = f'$ pro $f \in D_T$. Ukážeme, že T je uzavřený a neomezený operátor na H. Neomezenost je jasná, stačí uvažovat posloupnost funkcí $\{f_n := \frac{1}{n} \sin \pi nx\}$ a spočítat příslušné normy $\|f_n\|_2$ i $\|f'_n\|_2$.

Předpokládejme nyní, že $f_n \in D_T$, $f_n \xrightarrow{L^2} f$ a $Tf_n \xrightarrow{L^2} g$. Položíme-li $h(x) = \int_0^x g$, je h absolutně spojitá funkce na $[0,1]$. Protože i funkce f_n jsou absolutně spojité, máme $f_n(x) = \int_0^x f'_n$. Volme $x \in [0,1]$. Pomocí Hölderovy nerovnosti dostáváme odhad

$$|f_n(x) - h(x)| = \left| \int_0^x (f'_n - g) \right| \le \int_0^1 |f'_n - g| \le \left(\int_0^1 |f'_n - g|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le \|f'_n - g\|_{L^2} \to 0\,.$$

Vidíme, že $f_n \rightrightarrows h$ na $[0,1]$. Potom ovšem $f_n \xrightarrow{L^2} h$. Protože ale $f_n \xrightarrow{L^2} f$, musí být $f = h$ skoro všude. Protože funkce f je určena pouze jako prvek $L^2([0,1])$, lze předpokládat, že $f = h$. Tudíž $f \in AC([0,1])$ a $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,1]$. Potom ovšem $f(0) = f(1) = 0$ a ze známé věty analýzy o derivování neurčitého integrálu plyne, že $f' = g$ skoro všude. Je tedy $f \in D_T$ a $Tf = g$.

Tvrdíme nyní, že

$$D_{T^*} = \left\{h \in AC([0,1]) : h' \in L^2([0,1])\right\} \quad \text{a} \quad T^*h = -h'$$

pro $h \in D_{T^*}$. Zkusme tedy volit $g \in D_{T^*}$. Jestliže $h := T^*g$, $G : x \mapsto \int_0^x h$ a $f \in D_T$, integrace per partes pro absolutně spojité funkce (viz [LM], 23.13) dá

$$\int_0^1 f'g = (Tf, g) = (f, T^*g) = (f, h) = \int_0^1 fh = [fG]_0^1 - \int_0^1 f'G = -\int_0^1 f'G\,.$$

Odtud dostáváme, že $\int_0^1 f'(g + G) = 0$. Jinými slovy, funkce $g + G$ je kolmá na každou funkci f' pro $f \in D_T$. Ještě jinak,

$$g + G \in \{f' : f \in D_T\}^\perp = \left\{\varphi \in H : \textstyle\int_0^1 \varphi = 0\right\}^\perp = \{1\}^{\perp\perp}\,.$$

Tudíž $g + G$ musí být konstatní funkce na $[0,1]$. Takže $g = \text{konst} - G$ je absolutně spojitá funkce na $[0,1]$ a $g' = -G' = -h \in H$. Tím jsme ukázali jednu inkluzi. Současně jsme dostali, že $T^*g = h = -g'$.

Předpokládejme nyní, že $h \in AC([0,1])$ a $h' \in L^2([0,1])\}$. Chceme ukázat, že $h \in D_{T^*}$. Ale to je snadné, neboť pro $f \in D_T$ máme

$$(Tf, h) = \int_0^1 f'h = [fh]_0^1 - \int_0^1 fh' = -\int_0^1 fh' = (f, -h')\,.$$

Snad si ještě musíme uvědomit, že $\overline{D_T} = H$.

(b) Uvažujme opět (komplexní) Hilbertův prostor $H := L^2([0,1])$. Položme

$$D_T := \left\{f \in AC([0,1]) : f(0) = f(1) = 0\right\} \quad \text{a} \quad Tf = if'$$

pro $f \in D_T$. Obdobně jako v (a) uvážíme, že D_T je hustý podprostor H. Také lze ukázat, že

$$D_{T^*} = \left\{h \in AC([0,1]) : h' \in L^2([0,1])\right\} \quad \text{a} \quad T^*h = ih'\,.$$

Tudíž $D_T \subset D_{T^*}$, $D_T \neq D_{T^*}$ a $T = T^*$ na D_T. Jinými slovy, operátor T je symetrický, nikoliv však samoadjungovaný.

(c) Pozměňme nepatrně předchozí příklad tím, že změníme „okrajové podmínky". Nechť tedy $H = L^2([0,1])$ a

$$D_T := \{f \in AC([0,1]) : f(0) = f(1)\} \quad \text{a} \quad Tf = if'$$

pro $f \in D_T$. V tomto případě

$$D_{T^*} = D_T \quad \text{a} \quad T^*h = ih'$$

pro $h \in D_{T^*}$. Vidíme, že operátor T je samoadjungovaný.

V dalším se opět vrátíme do Banachových prostorů, přičemž se hlavně budeme věnovat pojmu spektra.

11.12. Inverze operátoru. Nechť T je lineární operátor definovaný na hustém podprostoru D_T Banachova prostoru X. Řekneme, že T *má inverzi*, jestliže existuje omezený operátor $B : D_B \subset\subset X \to X$ tak, že $TB = I$ a $BT \subset I$.

Rozmyslete, že nemohou existovat dva různé operátory B mající právě uvedenou vlastnost. Pokud tedy T má inverzi, nazveme operátor B z definice *inverzí* operátoru T. Inverzi budeme značit obvyklým symbolem T^{-1}.

11.13. Poznámka. Protože $D_I = X$ a má být $TB = I$, máme nutně $D_B = X$, a tudíž $B \in \mathcal{L}(X)$. Tím je snad částečně vysvětleno, proč v definici inverze požadujeme, aby operátor B byl omezený. Mnozí autoři říkají, že T je *omezeně invertibilní*, má-li inverzi ve výše uvedeném smyslu. V definici invertibility nemůžeme samozřejmě požadovat, aby také bylo $BT = I$. To je snad každému jasné.

Samozřejmě v případě, kdy T je omezený operátor, je nová definice ve shodě s definicí inverze pro omezené operátory.

11.14. Věta. *Operátor T má inverzi, právě když T je na D_T prostý, $\mathcal{R}T = X$ a T je uzavřený.*

Důkaz. Předpokládejme, že T je invertibilní. Existuje tedy $B \in \mathcal{L}(X)$ tak, že $TB = I$ a $BT \subset I$. Ze vztahu $TB = I$ lehce vyplyne, že $\mathcal{R}T = X$ a ze vztahu $BT \subset I$ pak, že T je prostý. Protože, $\{[h, Th] : h \in D_T\} = \{[Bk, k] : k \in X\}$ a B je omezený operátor, musí být T uzavřený.

Je-li nyní T uzavřený, prostý a na, existuje množinová inverze k T a stačí položit $B : y \mapsto T^{-1}y$. Potom samozřejmě je B lineární a zobrazuje X na D_T. Protože T je uzavřený, je i B uzavřený a podle věty o uzavřeném grafu 4.19 je B omezený. Lehko se zjistí, že $B(Tx) = x$ pro $x \in D_T$ a $TB = I$ na X. ∎

11.15. Rezolventa a spektrum. Nechť opět T je lineární operátor definovaný na hustém podprostoru $D_T \subset X$. Jeho *rezolventu* $\varrho(T)$ definujeme jako

$$\{\lambda \in \mathbf{C} : T - \lambda I \quad \text{má inverzi}\}\,.$$

Spektrum $\sigma(T)$ je pak doplňkem rezolventy v $\mathbf{C}$. Spektrum obsahuje *bodové spektrum* $\sigma_p(T)$, které je definováno jako množina těch $\lambda \in \mathbf{C}$, pro něž existuje netriviální řešení rovnice $Tx = \lambda x$, tedy takové $x \in D_T$, pro něž $x \neq 0$, $Tx = \lambda x$.

Na rozdíl od omezených operátorů, spektrem může být i prázdná množina či celé $\mathbf{C}$. Ilustrativní příklady jsou uvedeny v 11.18. Pro neomezené operátory však platí alespoň následující tvrzení.

11.16. Věta. *Spektrum uzavřeného lineárního operátoru T je vždy uzavřená množina v $\mathbf{C}$ a funkce $\lambda \mapsto (T - \lambda I)^{-1}$ je analytická na $\varrho(T)$*

Nezapomeňte, že tato „rezolventní" funkce má hodnoty v X.

Důkaz. Nemělo by činit velké potíže přenést důkaz provedený pro omezené operátory. ∎

O tom, jak může vypadat spektrum uzavřeného symetrického či samoadjungovaného operátoru vypovídá následující věta a příklady. Důkaz této věty není příliš obtížný, nicméně ho nebudeme uvádět a lze jej nalézt například v J.B. Conway [*1985]. Snad jen podotkněme, že základní ingrediencí je tvrzení, podle kterého $\dim \ker(T^* - \lambda I)$ je konstantní na každé z polorovin $\{\lambda \in \mathbf{C} : \mathrm{Im}\ \lambda > 0\}$ a $\{\lambda \in \mathbf{C} : \mathrm{Im}\ \lambda < 0\}$, pokud T je uzavřený symetrický operátor.

11.17. Věta. *Nechť H je Hilbertův prostor. Je-li T uzavřený symetrický operátor na $D_T \subset\subset H$, je $\sigma(T)$ buďto $\mathbf{C}$, $\{\lambda : \mathrm{Im}\ \lambda \geq 0\}$, $\{\lambda : \mathrm{Im}\ \lambda \leq 0\}$, anebo podmnožina $\mathbf{R}$ (s obvyklou konvencí).*

Je-li T navíc samoadjungovaný, je $\sigma(T) \subset \mathbf{R}$.

11.18. Spektrum neomezeného operátoru. (a) Uvažujte Banachův prostor $X = \mathcal{C}([0,1])$, jeho (hustý) podprostor $D_T := \{f \in X : f' \in X\}$ a operátor derivování T definovaný jako $Tf = f'$ pro $f \in D_T$. Ukažte, že $\sigma_p(T) = \mathbf{C}$.

Návod. Je-li λ libovolné komplexní číslo, má diferenciální rovnice $f' = \lambda f$ nenulové řešení $f(t) = e^{\lambda t} \in D_T$. ♣

(b) Opět budeme pracovat v prostoru $X = \mathcal{C}([0,1])$. Na jeho podprostoru $D_T := \{f \in X : f' \in X, f(0) = 0\}$ uvažujme operátor $T : f \mapsto f'$. Ukažte, že $\sigma(T) = \emptyset$.

Návod. Ověřte, že pro libovolné $\lambda \in \mathbf{C}$ je operátor $T - \lambda I$ uzavřený, prostý a na (načež stačí použít větu 11.14). Uzavřenost T byla dokázána v příkladu 11.3.a, odkud plyne ihned i uzavřenost $T - \lambda I$. Pokud $Tf = \lambda f$ pro $f \in D_T$, máme $f(t) = Ke^{\lambda t}$ pro jistou konstantu K. Podmínka $f \in D_T$ pak dá $K = 0$. Tudíž operátor $T - \lambda I$ je prostý. Konečně, je-li $g \in X$, má diferenciální rovnice $f' - \lambda f = g$ řešení $f(t) = \int_0^t e^{\lambda(t-\xi)} g(\xi)\, d\xi$ (nezapomeňte, že $f(0) = 0$). Tím je dokázáno, že $\mathcal{R}(T - \lambda I) = X$. ♣

(c) Uvažujte nyní Hilbertův prostor $H = L^2([0, 2\pi])$ a jeho (hustý) podprostor

$$D_T = \left\{f \in H : f \in AC([0,2\pi]), f' \in L^2([0,2\pi]) \text{ a } f(0) = 0\right\}.$$

Pro $f \in D_T$ položte $Tf = if'$ (uvědomte si, že každá absolutně spojitá funkce má integrovatelnou derivaci skoro všude, ta ovšem nemusí ještě ležet v $L^2([0,2\pi])$). Ukažte, že $\sigma(T) = \emptyset$.

Návod. Pro komplexní λ položte

$$S_\lambda g(t) = i \int_0^t e^{-i\lambda(t-\xi)} g(\xi)\, d\xi$$

($g \in H$ a $t \in [0, 2\pi]$) a ukažte, že operátor S_λ je inverzí k $T - \lambda I$. K tomu nejdříve ukažte, že S_λ je definován na celém prostoru H, je na něm lineární a omezený. Dále, $S_\lambda g \in D_T$, neboť $S_\lambda g$ je absolutně spojitá funkce a $S_\lambda g(0) = 0$.

Dále volte $f \in D_T$, $t \in [0, 2\pi]$ a ukažte, že $S_\lambda(Tf - \lambda f)(t) = f(t)$. K tomu použijte větu o integraci per partes pro absolutně spojité funkce (viz [LM], 23.13).

Na druhé straně, je-li $g \in H$, není těžké spočítat, že $(T - \lambda I)S_\lambda g = g$. ♣

(d) Modifikujeme-li předchozí příklad a položíme $H = L^2([0, 2\pi])$,

$$D_T = \left\{f \in H : f \in AC([0,2\pi]), f' \in L^2([0,2\pi]) \text{ a } f(0) = f(1)\right\}$$

a $Tf = if'$ pro $f \in D_T$, je $\sigma(T) = \mathbf{Z}$.

Návod. Pro celé číslo k funkce e^{-ikt} řeší rovnici $Tf = kf$. Operátor T je samoadjungovaný a rovnice $Tf - \lambda f = g$ má řešení pro každé $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}$. Odtud vyplývá, že tato λ leží v $\varrho(T)$. ♣

(e) Pokud $H = L^2([0, 2\pi])$,

$$D_T = \left\{f \in H : f \in AC([0,2\pi]) \text{ a } f' \in L^2([0,2\pi])\right\}$$

a $Tf = if'$ pro $f \in D_T$, je $\sigma(T) = \mathbf{C}$.

Návod. Pohledem na funkci $e^{-i\lambda t}$ zjistíte, že každé komplexní číslo λ je vlastním číslem operátoru T. ♣

11.19. Elementární cvičení. (a) Na Hilbertově prostoru $H := \mathcal{L}^2([0,1])$ uvažujte operátor $T : f \mapsto f(0)$ definovaný na (hustém) podprostoru $\mathcal{C}([0,1])$. Ukažte, že T není uzavřený. Definiční obor D_{T^*} není hustý v H, je totiž $D_{T^*} = \{h \in H : \int_0^1 g = 0\}$ (což je přesně ortogonální doplněk k podprostoru všech konstantních funkcí na $[0,1]$). Dále ukažte, že $T^* = 0$ na D_{T^*}.

(b) Nechť $H = L^2([-1,1])$, $D_T := \mathcal{C}^1([-1,1])$, $D_S := \left\{f \in H : f \in AC([-1,1]), f' \in H\right\}$, $Tf = f'$ pro $f \in D_T$ a $Sf = f'$ pro $f \in D_S$. Ukažte, že T i S jsou hustě definované operátory, T není uzavřený, zatímco S je.

(c) Nalezněte příklad operátoru T tak, aby $D_{T^*} = \{0\}$.

Návod. Nechť $H = L^2\big([0,\frac{1}{2}]\big)$. Definujme operátor T na $D_T := \mathcal{C}([0,\frac{1}{2}])$ předpisem $Tf(x) := \sum\limits_{n=2}^{\infty} f(\frac{1}{n})x^n$ (uvedená řada konverguje stejnoměrně). Zřejmě T je hustě definovaný lineární operátor. Volme $h \in H$ a předpokládejme, že h^* je takový prvek H, pro nějž $(Tf,h) = (f,h^*)$ pro každé $f \in D_T$. Volme $n \geq 2$ a posloupnost funkcí $f_j \in \mathcal{C}\big([0,\frac{1}{2}]\big)$ tak, aby $0 \leq f_j \leq 1$, $f_j(\frac{1}{n}) = 1$ a $\operatorname{supt} f_j \subset [0,\frac{1}{2}] \cap [\frac{1}{n} - \frac{1}{j}, \frac{1}{n} + \frac{1}{j}]$. Protože $(Tf_j,h) = (f_j,h^*)$, zjistíme limitním přechodem $j \to \infty$, že $(h,x^n) = 0$. Odtud vyplyne, že $h = 0$ (skoro všude).

Lehkou modifikací můžeme získat i jiný příklad. Nechť $\{e_n\}$ je ortonormální báze prostoru $L^2(\mathbf{R})$ a $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ prostor všech nekonečně diferencovatelných funkcí na $\mathbf{R}$ s kompaktním nosičem (viz 1.10.g). Pro $f \in D_T := \mathcal{D}(\mathbf{R})$ položme $Tf(x) := \sum_n f(n)e_n$ (jedná se o konečný součet, protože f má kompaktní nosič). Nechť opět $h, h^* \in L^2(\mathbf{R})$, $(Tf,h) = (f,h^*)$ pro každou funkci $f \in D_T$. Volme n a posloupnost funkcí $f_j \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ tak, aby $f_j(n) = 1$ a $\operatorname{supt} f_j \subset [n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}]$. Obdobným trikem jako výše zjistíme, že $(h,e_n) = 0$. ♣

Pokuste se najít operátor T na l^2 tak, aby $D_{T^*} = \{0\}$.

(d) Najděte adjungovaný operátor T^* a jeho definiční obor D_{T^*} na Hilbertově prostoru H v následujících případech:

(d1) $H = L^2([0,1])$, $D_T = \big\{f \in H : \int_0^1 |f(s^2)|^2\,ds < \infty\big\}$, $Tf(x) = f(x^2)$,
(d2) $H = L^2([0,1])$, $D_T = \mathcal{C}([0,1])$, $Tf(x) = xf(0)$,
(d3) $H = L^2((0,\infty))$, $D_T = \mathcal{D}((0,\infty))$, $Tf = f'$,
(d4) $H = L^2([0,\infty))$, $D_T = \{f \in H : f' \in H, f(0) = 0\}$,
(d5) $H = L^2(\mathbf{R}^n)$, $D_T = \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, $T = \Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ je Laplaceův operátor.

(e) Nechť T je hustě definovaný lineární operátor na H. Jestliže T^* je hustě definovaný, potom $T \subset T^{**}$.

Návod. Je-li $x \in D_T$ a $h \in D_{T^*}$, je $(Tx,h) = (x,T^*h)$. Tudíž funkcionál $h \mapsto (T^*h,x)$ je spojitý na D_{T^*}. Protože D_{T^*} je hustý, neznamená to nic jiného než $x \in D_{T^{**}}$ a $(x,T^*h) = (T^{**}x,h)$. Nyní využijte hustotu D_{T^*} v H. ♣

(f) Nechť $T : D_T \to H$ je hustě definovaný a uzavřený. Potom definiční obor D_{T^*} je rovněž hustý a $T^{**} = T$.

Návod. Definujme na kartézském součinu $H \times H$ operátor $\mathcal{V}$ předpisem $\mathcal{V} : (x,y) \mapsto (-y,x)$. Ukažte, že $\mathcal{V}$ je unitární operátor na $H \times H$ (zachovává skalární součin v $H \times H$ a je na). Dále ukažte, že $\operatorname{graf} T^* = \big(\mathcal{V}(\operatorname{graf} T)\big)^{\perp}$. Je-li tedy T uzavřený, máme $H \times H = \operatorname{graf} T^* \oplus \mathcal{V}(\operatorname{graf} T)$. Odtud odvoďte, že jediný prvek z H kolmý na D_{T^*} musí být 0. ♣

(g) Nechť $D_T := \big\{\{x_n\} \in l^2 : \text{pouze pro konečně mnoho } n \text{ je } x_n \neq 0\big\}$ a $T : \{x_n\} \mapsto \{nx_n\}$ pro $\{x_n\} \in D_T$. Ukažte, že operátor T je neomezený i neuzavřený.

Položme dále $D_S := \{\{x_n\} \in l^2 : \sum_n n^2\,|x_n|^2 < \infty\}$. Pro $\{x_n\} \in D_S$ položme $S(\{x_n\}) = \{nx_n\}$. Ukažte, že S je uzavřený operátor a $T \subset S$.

(h) Nechť $T : D_T \subset H \to H$ je uzavřený lineární prostý operátor. Ukažte, že $T^{-1} : \mathcal{R}T \to D_T$ je uzavřený.

(k) Ukažte, že operátor $T : \{x_n\} \mapsto \{\frac{x_n}{n}\}$ definovaný na prostoru l^2 je omezený a samoadjungovaný. Dále ukažte, že jeho inverze $T^{-1} : \mathcal{R}T \to l^2$ je neomezený samoadjungovaný operátor. Není to ve sporu s Banach-Steinhausovou větou 4.4?

12. Teorie semigrup

Teorie semigrup omezených lineárních operátorů je dnes rozsáhlou disciplinou využívající mnoha obecných principů funkcionální analýzy a nacházející hezké aplikace v teorii parciálních diferenciálních rovnic, teorii pravděpodobnosti a potenciálu, matematické fyzice či biologii. V této kapitole podáme pouze základy teorie, čtenář zajímající se o další prohloubení by se měl obrátit k dalším monografiím či učebnicím určeným teorii semigrup.

Začněme s částečnou motivací. Z úvodních kurzů matematické analýzy víme, že exponenciální funkce a^x je jedinou spojitou funkcí f na $\mathbf{R}$, která splňuje funkcionální identitu

$$f(x+y) = f(x)\,f(y) \quad \text{pro} \quad x,y \in \mathbf{R} \quad , \quad f(0) = 1\,.$$

Zde každému reálnému číslu x se přiřadila reálná hodnota $f(x)$ a zkoumalo se, jaké funkce splňují uvedenou funkcionální rovnici.

Jen na okraj uveďme, že i za daleko obecnějších předpokladů než je spojitost, je řešením uvedené rovnice pouze exponenciální funkce. Stačí třeba předpokládat, že f je pouze měřitelná či omezená na nějakém intervalu.

V dalším se soustředíme na případ, kdy reálným hodnotám (a omezíme se pouze na hodnoty z intervalu $[0,+\infty)$) přiřadíme operátory na nějakém Banachově či Hilbertově prostoru. A budeme opět zkoumat „řešení" obdobné rovnice.

12.1. Semigrupa operátorů. Buď X Banachův prostor a I identické zobrazení na X. Třída $\{T_t\}_{t\geq 0}$ omezených operátorů na X se nazývá (jednoparametrická) *semigrupa operátorů* (na X), jestliže

(a) $T_0 = I$,
(b) $T_s\,T_t = T_{s+t}$ pro $s,t\in[0,+\infty)$.

Uvědomme si, že s operací skládání tvoří $\{T_t\}$ skutečně (algebraickou) pologrupu.

Semigrupu operátorů $\{T_t\}_{t\geq 0}$, kterou budeme zkráceně označovat pouze $\{T_t\}$, splňující navíc podmínku spojitosti $\lim_{t\to 0_+} T_t x = x$ pro každé $x\in X$, nazveme $\mathcal{C}_0$*-semigrupou*. Někteří autoři též používají v tomto případě pro $\{T_t\}$ označení *silně spojitá* semigrupa.

Dále, semigrupa $\{T_t\}$ se nazývá *kontrakční* (možná bychom měli říkat správněji ve shodě s kapitolou 23 *neexpanzivní*), jestliže $\|T_t\|\leq 1$ pro každé $t\geq 0$ a *stejnoměrně spojitou*, jestliže $\lim_{t\to 0_+}\|T_t - I\| = 0$.

Každá stejnoměrně spojitá semigrupa je samozřejmě i $\mathcal{C}_0$-semigrupou.

12.2. Příklady. (a) Je-li $X = \mathbf{R}$ a $T_t = e^t$, dostáváme semigrupu zmíněnou v úvodu.

(b) Je-li A omezený operátor na Banachově prostoru X, je $\{e^{tA}\}$ stejnoměrně spojitá semigrupa operátorů.

Na tomto místě bychom si mohli připomenout, že $e^{tA} := \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(tA)^n}{n!}$, přičemž uvedená řada konverguje v prostoru $\mathcal{L}(X)$ pro každé $t\geq 0$. Evidentně $T_0 = I$ a pomocí cvičení 6.25.b dostáváme $T_sT_t = T_{s+t}$. Z odhadu $\|T_t - I\|\leq t\|A\|e^{t\|A\|}$ nám pak vyplývá, že $\{T_t\}$ je stejnoměrně spojitá semigrupa.

(c) Je-li A (obecně neomezený) samoadjungovaný operátor na Hilbertově prostoru X a

$$T_t = e^{itA}\,,$$

je $\{T_t\}$ semigrupa operátorů.

(d) Buď X Banachův prostor všech omezených stejnoměrně spojitých funkcí na $\mathbf{R}$ opatřený sup-normou. Pro $t\geq 0$ a $f\in X$ položme

$$T_t f(z) = f(t+z) \quad \text{pro} \quad z\in\mathbf{R}\,.$$

Potom $\{T_t\}$ je $\mathcal{C}_0$-semigrupa.

(e) Uvažujme Hilbertův prostor $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ a semigrupu

$$T_t f(z) = f(t+z) \quad \text{pro} \quad z\in\mathbf{R}$$

definovanou na něm. Potom $\{T_t\}$ tvoří $\mathcal{C}_0$-semigrupu, která není stejnoměrně spojitá. To proto, že $\|T_t - I\| = 2$ pro $t > 0$.

12.3. Grupy operátorů. Podobně jako semigrupy operátorů lze definovat i grupy operátorů. V tomto případě přiřadíme každému $t\in\mathbf{R}$ operátor T_t na X tak, aby opět byly splněny podmínky obdobné (a) a (b) z 12.1. Inverzním prvkem k T_t ve smyslu teorie grup je T_{-t}, tvoří tedy $\{T_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ skutečně grupu.

Otázky, kdy $\mathcal{C}_0$-semigrupu operátorů (definovanou na $[0,+\infty)$) lze rozšířit na grupu (definovanou na $\mathbf{R}$), se dotkneme krátce v *12.1.c.

Jako základ odvození mnoha vlastností semigrupy operátorů bude sloužit následující lemma.

12.4. Lemma. *Je-li $\{T_t\}$ $\mathcal{C}_0$-semigrupa, existuje $M\geq 1$ a $\omega\geq 0$ tak, že*

$$\|T_t\|\leq M\,e^{\omega t} \quad \textit{pro každé} \quad t\geq 0\,.$$

Důkaz. Nejdříve nalezneme takové konstanty $M\geq 1$ a $\delta > 0$, aby $\|T_t\|\leq M$ pro každé $t\in[0,\delta]$. To není obtížné, jinak bychom totiž nalezli posloupnost $t_n\to 0$, pro niž $\|T_{t_n}\|\to +\infty$. Potom ovšem $T_{t_n}x \to x$ pro každé $x \in X$, tudíž posloupnost $\{\|T_{t_n}x\|\}$ by byla omezená pro každé $x \in X$ a z principu stejnoměrné omezenosti 4.2 by byla omezená i posloupnost $\{\|T_{t_n}\|\}$.

Nyní stačí položit $\omega = \frac{1}{\delta}\log M$. Skutečně, volíme-li $t \geq 0$, lze psát $t = n\delta + \varepsilon$, kde n je přirozené a $0 \leq \varepsilon < \delta$, a tedy

$$\|T_t\| \leq \|T_\delta^n\|\,\|T_\varepsilon\| \leq \|T_\delta\|^n\|T_\varepsilon\| \leq M^n\,M = M\,e^{n\log M} = M\,e^{n\omega\delta} \leq M\,e^{\omega t}\,.$$

■

12.5. Poznámka. Je-li $\{T_t\}$ $\mathcal{C}_0$-semigrupa, položme

$$\omega_0 := \inf\big\{\omega \in \mathbf{R} : \text{existuje } M \geq 0 \text{ tak, že } \|T_t\| \leq M\,e^{\omega t} \text{ pro každé } t \geq 0\big\}\,.$$

Potom ω_0, které by mohlo být rovno i $-\infty$, se někdy nazývá *růstovou konstantou* dané semigrupy.

12.6. Věta. *Semigrupa operátorů $\{T_t\}$ na X je $\mathcal{C}_0$-semigrupou, právě když zobrazení $t \mapsto T_t x : [0,+\infty) \to X$ je spojité na intervalu $[0,+\infty)$ pro každé $x \in X$.*

Důkaz. Nechť zprvu $\{T_t\}$ je $\mathcal{C}_0$-semigrupa. Volme $x \in X$ a $s \in (0,\infty)$. Není těžké ukázat, že uvedené zobrazení je spojité v s zprava. Skutečně, máme

$$\|T_{s+h}x - T_s x\| = \|T_s(T_h x) - T_s x\| \leq \|T_s\|\,\|T_h x - x\| \to 0$$

pro $h \to 0_+$. Pro důkaz spojitosti zleva použijeme obdobný odhad spolu s předchozím lemmatem (jež zaručuje existenci jakýchsi konstant M a ω). Dostáváme

$$\|T_{s-h}x - T_s x\| \leq \|T_{s-h}\|\,\|T_h x - x\| \leq M\,e^{\omega(s-h)}\|T_h x - x\|\,,$$

kde pravá strana nerovnosti konverguje k 0 pro $h \to 0_+$.

Pokud jde o opačnou implikaci, spojitost v bodě 0_+ říká, že $\{T_t\}$ je $\mathcal{C}_0$-semigrupa. ■

12.7. Generátor semigrupy. *Infinitesimálním generátorem*, krátce jen *generátorem*, semigrupy $\{T_t\}$ nazveme lineární operátor A, jehož definiční obor je

$$\mathcal{D}_A := \Big\{x \in X : \lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}(T_t x - x) \quad \text{existuje}\Big\}$$

a jenž je na $\mathcal{D}_A$ definován předpisem

$$Ax := \lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}(T_t x - x)\,.$$

Není těžké si rozmyslet, že $\mathcal{D}_A$ je lineární podprostor X a A je na něm lineární operátor.

12.8. Příklady. (a) Je-li A omezený operátor na Banachově prostoru X a $T_t := e^{tA}$, plyne z odhadu

$$\Big\|\Big(\frac{1}{t}(T_t - I) - A\Big)x\Big\| \leq \|A\|\,\|x\|\,\max\big\{\|T_s - I\| : s \in [0,t]\big\}\,,$$

že A je generátor semigrupy $\big\{e^{tA}\big\}$.

(b) Je-li A generátor semigrupy $\{T_t\}$ z příkladu 12.2.d, potom

$$D_A = \big\{f \in X : \text{existuje } f' \text{ všude na } \mathbf{R} \text{ a } f' \in X\big\} \quad \text{a} \quad Af = f'\,.$$

To není těžké nahlédnout.

(c) Uvažujeme-li semigrupu z příkladu 12.2.e, je definičním oborem jejího generátoru A Sobolevův prostor $W^{1,2}(\mathbf{R})$, přičemž $Af = f'$.

12.9. Derivace zobrazení. Pro potřeby dalšího výkladu zaveďme následující označení. Je-li f zobrazení do Banachova prostoru definované na pravém okolí bodu $t \in \mathbf{R}$, označme symbolem $D^+f(t)$ derivaci zprava f v bodě t (pokud existuje), tedy

$$D^+f(t) := \lim_{h\to 0_+}\frac{f(t+h) - f(t)}{h}\,.$$

Obdobně definujeme i derivaci zleva $D^-f(t)$ a pokud $D^+f(t) = D^-f(t)$, označme tuto společnou hodnotu symbolem $Df(t)$.

Při tomto označení není hodnota infinitesimálního generátoru Ax pro $x \in \mathcal{D}_A$ nic jiného než derivace zprava zobrazení $t \to T_t x$ v bodě $t = 0$. Jak se vyjádří derivace v ostatních bodech intervalu $(0,\infty)$ vypovídá následující lemma.

12.10. Lemma. *Nechť A je generátor $\mathcal{C}_0$-semigrupy operátorů $\{T_t\}$ na Banachově prostoru X, $x \in \mathcal{D}_A$ a $t > 0$. Potom $T_t x \in \mathcal{D}_A$ a*

$$D\,T_t x = AT_t x = T_t Ax\,.$$

Důkaz. Volíme-li $h > 0$, máme

$$\frac{T_{t+h}x - T_t x}{h} = \frac{T_h - I}{h}(T_t x) = T_t\Big(\frac{T_h - I}{h}x\Big)\,.$$

Odtud je vidět, že $T_t x \in \mathcal{D}_A$ a limitní přechod $h \to 0_+$ dá

$$D^+\,T_t x = AT_t x = T_t Ax\,.$$

Zbývá dokázat, že derivace zleva zobrazení $s \to T_s x$ existuje v bodě t a je rovna $T_t Ax$. Volme tedy opět $h > 0$ a odhadujme

$$\left\|\frac{T_{t-h}x - T_t x}{-h} - T_t Ax\right\| \le \left\|T_{t-h}\Big(\frac{T_h x - x}{h} - Ax\Big)\right\| + \big\|T_{t-h}Ax - T_t Ax\big\|\,.$$

Oba výrazy na pravé straně jdou k nule, neboť v prvním z nich je $\|T_{t-h}\|$ omezená funkce na intervalu $[0,t]$ podle lemmatu 12.4 a $x \in \mathcal{D}_A$, zatímco druhý výraz jde k nule podle věty 12.6. ■

12.11. Něco málo o integrálu. V dalším budeme potřebovat integrovat funkce s hodnotami v Banachově prostoru. Této problematice je věnována celá kapitola v [LM], tam čtenář nalezne vše potřebné. Protože nám půjde především o integraci spojitých vektorových funkcí, je lhostejno, jaký druh integrálu zavedeme (Riemann-Gravesův, Bochnerův či Pettisův). Rozhodněme se třeba pro následující pojetí.

Nechť $f : [a,b] \to X$ je spojité zobrazení intervalu $[a,b]$ do Banachova prostoru X. Řekneme, že prvek $x \in X$ je *integrálem* zobrazení f, jestliže

$$\varphi(x) = \int_a^b \varphi\big(f(s)\big)\,ds \quad \text{pro každé} \quad \varphi \in X^*\,.$$

Protože $s \to \varphi(f(s))$ je spojitá reálná funkce, nemáme problémy s existencí integrálu $\int_a^b \varphi(f(s))\,ds$. Není také žádný problém s jednoznačností prvku x, víme, že prvky duálu X^* oddělují body prostoru X.

Místo x budeme používat označení $\int_a^b f(s)\,ds$.

V dalším pouze shrňme základní vlastnosti námi zavedeného integrálu.

`Vlastnosti integrálu.` *Předpokládejme, že f je spojité zobrazení $[a,b]$ do Banachova prostoru X.*

(a) *Integrál $\int_a^b f(s)\,ds$ vždy existuje.*
(b) $\|\int_a^b f(s)\,ds\| \le \int_a^b \|f(s)\|\,ds$.
(c) *Je-li $A \in \mathcal{L}(X)$ spojitý lineární operátor na X, potom $A\big(\int_a^b f(s)\,ds\big) = \int_a^b A\big(f(s)\big)\,ds$.*
(d) *Je-li $F : t \mapsto \int_a^t f(s)\,ds$ pro $t \in [a,b]$ a $x \in (a,b)$, potom $DF(x) = f(x)$, jinými slovy $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(s)\,ds = f(x)$.*
(e) *Existuje-li spojitá derivace Df na $[a,b]$, potom $f(b) - f(a) = \int_a^b Df$; speciálně, je-li $Df = 0$ na $[a,b]$, je f na intervalu $[a,b]$ konstantní.*

Návod. Tvrzení v (a) plyne ze stejnoměrné spojitosti zobrazení f a definice Riemannova integrálu pro reálné funkce. Přeci jen prozraďme myšlenku, přičemž pro jednoduchost zápisu uvažujme $[a,b] = [0,1]$. Volme $\varphi \in X^*$, n a označme $M := \{1, 2, \ldots, 2^n\}$. Definujme riemannovský součet

$$\sigma_n := \frac{1}{2^n}\sum_{j\in M} f\Big(\frac{j}{2^n}\Big)\,.$$

Využitím stejnoměrné spojitosti f na $[0,1]$ zjistíme po troše námahy s odhady, že posloupnost $\{\sigma_n\}$ je cauchyovská v X. Existuje tedy $\sigma := \lim \sigma_n$. Potom

$$\varphi(\sigma) = \lim \varphi(\sigma_n) = \lim \frac{1}{2^n}\sum_{j\in M}\varphi\Big(f\Big(\frac{j}{2^n}\Big)\Big) = \int_0^1 \varphi\big(f(t)\big)\,dt\,,$$

kde jsme použili jednu z možných definic Riemannova integrálu ze spojité funkce. Tudíž σ je hledaným integrálem $\int_0^1 f(s)\,ds$.

Pokud jde o (b), podle Hahn-Banachovy věty nalezneme $\varphi \in X^*$ tak, aby $\|\varphi\| \le 1$ a $\varphi(\int_a^b f(s)\,ds) = \|\int_a^b f(s)\,ds\|$. Potom $\|\int_a^b f(s)\,ds\| = \varphi(\int_a^b f(s)\,ds) = \int_a^b \varphi(f(s))\,ds \le \int_a^b |\varphi(f(s))|\,ds \le \int_a^b \|f(s)\|\,ds$.

Tvrzení (c) je skoro zřejmé a pro důkaz (d) opět využijeme spojitost f a odhad v (b).

Konečně k (e). Volme $\varphi \in X^*$. Nečiní problém ověřit, že $\varphi\big(Df(s)\big) = D\big(\varphi\circ f\big)(s) = (\varphi\circ f)'(s)$ pro každé $s \in [a,b]$ (v krajních bodech pochopitelně jednostranné derivace). Potom

$$\int_a^b \varphi\big(Df(s)\big)\,ds = \int_a^b (\varphi\circ f)'(s)\,ds = (\varphi\circ f)(b) - (\varphi\circ f)(a) = \varphi\big(f(b) - f(a)\big)\,,$$

čili $\int_a^b Df(s)\,ds = f(b) - f(a)$. ♣

Jako aplikaci předchozího si vyslovme následující větičku.

12.12. Větička. *Nechť A je generátor $\mathcal{C}_0$-semigrupy $\{T_t\}$ na Banachově prostoru X, $x \in D_A$ a $t > 0$. Potom*

$$T_t x - x = \int_0^t T_s A x \, ds = \int_0^t A T_s x \, ds \, .$$

Návod. Stačí dát dohromady lemma 12.10 a (e) z předchozího odstavce. Snad jen pro ověření předpokladů poznamenejme, že funkce $F : s \mapsto T_s x$ je na intervalu $[0, t]$ spojitá. ♣

Platí však silnější tvrzení. Dobře se podívejte na rozdíly proti předchozí větičce v předpokladech i v závěru.

12.13. Tvrzení. *Nechť A je generátor $\mathcal{C}_0$-semigrupy $\{T_t\}$ na Banachově prostoru X, $x \in X$ a $t > 0$. Potom $\int_0^t T_s x \, ds \in D_A$ a*

$$A\Big(\int_0^t T_s x \, ds \Big) = T_t x - x \, .$$

Důkaz. Opět s existencí integrálu $\int_0^t T_s x \, ds$ není problém. Jak jsme poznamenali v předchozím důkazu, víme totiž, že funkce $s \mapsto T_s x$ je na intervalu $[0, t]$ spojitá. Volme $h > 0$. Potom

$$\frac{T_h - I}{h} \int_0^t T_s x \, ds = \frac{1}{h} \int_0^t \big(T_{s+h} - T_s \big) x \, ds = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T_s x \, ds - \frac{1}{h} \int_0^h T_s x \, ds \, .$$

Podle předchozího konverguje pravá strana pro $h \to 0_+$ k $T_t x - x$. Tudíž jednak $\int_0^t T_s x \, ds \in D_A$ a současně vidíme, že platí uvedená rovnost. ■

12.14. Věta. *Buď A generátor $\mathcal{C}_0$-semigrupy $\{T_t\}$. Potom A je hustě definovaný a uzavřený.*

Důkaz. Volme $x \in X$ a položme $x_n = \int_0^{\frac{1}{n}} T_s x \, ds$. Podle předchozího tvrzení 12.13 dostáváme, že $x_n \in \mathcal{D}_A$ a $A x_n = T_{\frac{1}{n}} x - x$. Podíváme-li se na tvrzení (d) v 12.11, vidíme, že $n x_n \to x$. Tudíž $\overline{\mathcal{D}_A} = X$.

Nyní ukážeme, že A je uzavřený operátor. Nechť tedy $z_n \in \mathcal{D}_A$, $z_n \to z$ a $A z_n \to y$. Potom

$$T_t z_n - z_n = \int_0^t T_s A z_n \, ds \, ,$$

jak plyne z větičky 12.12. Limitní přechod pro $n \to \infty$ vede k rovnosti $T_t z - z = \int_0^t T_s y \, ds$. Abychom zdůvodnili limitní přechod za integračním znamením musíme si uvědomit, že posloupnost $T_s A z_n$ konverguje na intervalu $[0, t]$ stejnoměrně k $T_s y$ podle lemmatu 12.4. Je totiž $\|T_s A z_n - T_s y\| \le \|T_s\| \, \|A z_n - y\| \le M \, e^{\omega t} \, \|A z_n - y\|$ pro $s \in [0, t]$ a vhodné konstanty M a ω. Odtud plyne, že

$$\frac{T_t z - z}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t T_s y \, ds \, .$$

Limitním přechodem za pomoci (d) z 12.11 konečně dostáváme, že $z \in \mathcal{D}_A$ a $Az = T_0 y = y$. ■

Každá semigrupa operátorů určuje jednoznačně infinitesimální generátor. O tom, že dvě různé semigrupy nemohou mít tentýž generátor, vypovídá následující věta.

12.15. Věta. *Nechť $\mathcal{C}_0$-semigrupy operátorů $\{T_t\}$ a $\{S_t\}$ mají stejný generátor A. Potom $\{T_t\} = \{S_t\}$.*

Důkaz. Volme $t > 0$ a $x \in \mathcal{D}_A$. Podle lemmatu 12.10 je funkce $F : s \mapsto T_{t-s} S_s x$ diferencovatelná na intervalu $[0, t]$ a derivováním složeného zobrazení dostáváme

$$DF = -A T_{t-s} S_s x + T_{t-s} A S_s x = 0 \, ,$$

neboť A komutuje s T_{t-s}.

Pokusme se přeci jen uvedenou rovnost podrobněji zdůvodnit. Volme tedy $x \in D_A$, $t > 0$ a $h > 0$. Potom

$$\frac{F(s+h)-F(s)}{h} = T_{t-s-h}\Big(\frac{S_{s+h}x - S_s x}{h}\Big) + \frac{T_{t-s-h}(S_s x) - T_{t-s}(S_s x)}{h}\,.$$

Podle lemmatu 12.10 je $S_s x \in D_A$ a limita druhého výrazu pro $h \to 0$ je $-AT_{t-s}S_s x$ (je to vlastně derivace zobrazení $u \mapsto T_{t-u}S_s x$ v bodě $u = s$). Totéž lemma 12.10 nám říká, že $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}(S_{s+h}x - S_s x) = AS_s x$. Použijeme-li ještě lemma 12.4, vyjde limita prvního výrazu rovna $T_{t-s}AS_s x$.

Tudíž F musí být konstantní podle 12.11.e, speciálně $F(0) = F(t)$. Vidíme, že $T_t = S_t$ na $\mathcal{D}_A$. Protože však $\mathcal{D}_A$ je hustý v X a operátory T_t a S_t jsou omezené, musí být $T_t = S_t$ na X. ■

Situaci, kdy generátor semigrupy operátorů je dokonce spojitý, lze charakterizovat jednoduše. V tomto případě je i struktura dané semigrupy snadno popsatelná. Platí totiž následující věta.

12.16. Věta. *Nechť A je generátor $\mathcal{C}_0$-semigrupy operátorů $\{T_t\}$ na Banachově prostoru X. Potom A je omezený, právě když semigrupa $\{T_t\}$ je stejnoměrně spojitá. V tomto případě*

$$T_t = e^{tA} \quad \textit{pro} \quad t \geq 0\,.$$

Důkaz. Nechť A je omezený generátor semigrupy $\{T_t\}$. Protože A je také generátorem stejnoměrně spojité semigrupy $\{e^{At}\}$ z příkladu 12.2 (to lehko zjistíme přímým výpočtem), musí být podle předchozí věty $T_t = e^{At}$, a semigrupa $\{T_t\}$ je tedy stejnoměrně spojitá.

Obráceně, nechť semigrupa $\{T_t\}$ je stejnoměrně spojitá. Ihned odvodíme, že funkce $f : t \mapsto \|T_t\|$ je omezená na libovolném intervalu $[0, \Delta]$. Jistě, f je omezená na jistém intervalu $[0, \delta]$, a tudíž využitím semigrupové vlastnosti (b) zjistíme, že je omezená i na libovolném intervalu $[0, n\delta]$. Dále si uvědomíme, že $\lim\limits_{h\to 0} T_{t+h} = T_t$ v každém bodě $t \in (0, \infty)$. To plyne z odhadů $\|T_{t+h} - T_t\| \leq \|T_t\|\,\|T_h - I\|$ a $\|T_{t-h} - T_t\| \leq \|T_{t-h}\|\,\|T_h - I\|$ platných pro každé $h > 0$.

Takže k vlastnímu důkazu. Protože $\lim\limits_{t\to 0_+} \frac{1}{t}\int_0^t T_s\,ds = T_0 = I$ podle 12.11.d (jak jsme právě konstatovali, funkce $s \mapsto T_s$ je spojitá!), existuje $t > 0$ tak, že $\|I - \frac{1}{t}\int_0^t T_s\,ds\| < 1$. Tudíž operátor $\frac{1}{t}\int_0^t T_s\,ds$, a tím pádem i operátor $B := \int_0^t T_s\,ds$, je invertibilní. Tady si musíme uvědomit, že B je prvkem prostoru $\mathcal{L}(X)$ (integrujeme funkci $s \mapsto T_s$ s hodnotami v $\mathcal{L}(X)$) a podívat se, pokud jsme již pozapomněli, na lemma 5.7. Volme $0 < h < t$. Máme

$$\frac{T_h - I}{h}B = \frac{1}{h}\Big(\int_0^t T_{s+h}\,ds - \int_0^t T_s\,ds\Big) = \Big(\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T_s\,ds - \int_0^h T_s\,ds\Big)\,.$$

Pravá strana konverguje pro $h \to 0_+$ v prostoru $\mathcal{L}(X)$ k (omezenému) operátoru $T_t - I$. Tudíž existuje i $\lim\limits_{h\to 0_+} \frac{T_h - I}{h}$ (a je rovna operátoru $(T_t - I)B^{-1}$). Tím spíše existuje $\lim\limits_{h\to 0_+} \frac{T_h x - x}{h}$ pro každé $x \in X$. Vidíme, že $D_A = X$ a A je omezený lineární operátor. ■

Nyní uvedeme souvislost semigrup s rezolventní funkcí a tím se dostaneme i k dalšímu pohledu na semigrupy operátorů. Vraťme se však nejdříve k inverzím u neomezených operátorů.

12.17. Rezolventa. Nechť X je Banachův prostor. Lineární operátor L definovaný na $\mathcal{D}_L \subset\subset X$ je *invertibilní*, existuje-li omezený operátor $B \in \mathcal{L}(X)$ tak, že

$$LB = I \quad \text{a} \quad BL \subset I\,.$$

Je-li L invertibilní, je operátor B z uvedené definice jednoznačně určen a nazývá se *inverzí* k L. Značí se symbolem L^{-1}. Ve větě 11.14 jsme dokázali, že operátor L je invertibilní, právě když L je prostý, na a uzavřený.

Rezolventní množinu $\varrho(L)$ definujeme jako množinu těch $\lambda \in \mathbf{C}$, pro něž $\lambda I - L$ je invertibilní. Pro $\lambda \in \varrho(L)$ značme

$$R(\lambda, L) := (\lambda I - L)^{-1}\,,$$

a je-li operátor L fixován, používejme též pro inverzi $(\lambda I - L)^{-1}$označení G_λ .

12.18. Rezolventní identita. *Buď L lineární operátor definovaný na podprostoru $\mathcal{D}_L$ Banachova prostoru X a $\mu, \lambda \in \varrho(L)$. Potom*

$$G_\lambda - G_\mu = (\mu - \lambda)G_\lambda G_\mu = (\mu - \lambda)G_\mu G_\lambda .$$

Důkaz. Je samozřejmé, že $G_\lambda x \in \mathcal{D}_L$ pro každé $x \in X$. Odtud plyne, že

$$(\mu - \lambda)G_\lambda G_\mu = G_\lambda(\mu I - L + L - \lambda I)G_\mu = G_\lambda(\mu I - L)G_\mu - G_\lambda(\lambda I - L)G_\mu = G_\lambda - G_\mu .$$

Pouhou záměnou λ a μ dostáváme druhou rovnost. ∎

12.19. Věta. *Nechť L je hustě definovaný lineární operátor na X. Jestliže $(0, +\infty) \subset \varrho(L)$ a $\|\lambda G_\lambda\| \le 1$ pro každé $\lambda > 0$ (tj. λG_λ jsou kontrakce), potom $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda G_\lambda(x) = x$ pro každé $x \in X$.*

Důkaz. Buď nejprve $x \in \mathcal{D}_L$ a $\lambda > 0$. Potom

$$\lambda G_\lambda x - x = G_\lambda(\lambda x - (\lambda I - L)x) = G_\lambda L x .$$

Dostáváme tedy odhad $\|\lambda G_\lambda x - x\| \le \frac{1}{\lambda}\|Lx\|$, odkud plyne tvrzení v případě, kdy $x \in \mathcal{D}_L$. Protože však $\|\lambda G_\lambda - I\| \le 2$ pro každé $\lambda > 0$ a $\mathcal{D}_L$ je hustou podmnožinou X, dostáváme tvrzení již snadnou úvahou. ∎

12.20. Věta. *Buď A generátor kontrakční $\mathcal{C}_0$-semigrupy operátorů $\{T_t\}$ na Banachově prostoru X. Potom operátor $\lambda I - A$ je invertibilní pro každé $\lambda > 0$ a pro $x \in X$ platí*

$$R(\lambda, A)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} T_s x \, ds .$$

Důkaz. Především si ujasněme, o jaký integrál se jedná. Volme $x \in X$ a $\lambda > 0$. Funkce $s \mapsto T_s x : [0, \infty) \to X$ je spojitá, tudíž tamtéž je spojitá i funkce $s \mapsto e^{-\lambda s} T_s x$. Podíváme-li se na 12.11, máme pro každé $k > 0$ odhad $\| \int_0^k e^{-\lambda s} T_s x \, ds\| \le \int_0^k e^{-\lambda s} \|T_s x\| \, ds \le \frac{1}{\lambda}\|x\|$. Položíme-li tedy

$$\mathcal{L}_\lambda x := \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} T_s x \, ds := \lim_{k \to \infty} \int_0^k e^{-\lambda s} T_s x \, ds ,$$

je $\mathcal{L}_\lambda$ omezený lineární operátor na X a $\|\mathcal{L}_\lambda\| \le \frac{1}{\lambda}$.

Uvažujme nyní $\mathcal{C}_0$-semigrupu $\left\{e^{-\lambda t} T_t\right\}$. Není těžké ověřit, že se skutečně jedná o $\mathcal{C}_0$-semigrupu a že $A - \lambda I$ je její generátor.

Volme ještě $t > 0$. Použijeme-li větičku 12.12 a tvrzení 12.13, dostaneme

$$x - e^{-\lambda t} T_t x = \int_0^t e^{-\lambda s} T_s (\lambda I - A) x \, ds \quad \text{a} \quad x - e^{-\lambda t} T_t x = (\lambda I - A) \int_0^t e^{-\lambda s} T_s x \, ds ,$$

přičemž první rovnost platí pro každé $x \in D_A$, zatímco druhá pro každé $x \in X$. Nyní stačí provést v obou rovnostech limitní přechod $t \to \infty$. Z první nerovnosti dostaneme, že $\mathcal{L}_\lambda(\lambda I - A)x = x$ pro $x \in D_A$. Druhá rovnost pak dá tvrzení, že $\mathcal{L}_\lambda x \in D_A$ a $(\lambda I - A)\mathcal{L}_\lambda = I$. Tudíž $\mathcal{L}_\lambda$ je inverzí k $(\lambda I - A)$ pro $\lambda > 0$. ∎

12.21. Poznámky. (a) Je-li A generátor $\mathcal{C}_0$-semigrupy $\{T_t\}$ na Banachově prostoru X, je vždy $\varrho(A)$ neprázdná množina. Označíme-li

$$s(A) := \sup \{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(A)\} ,$$

je $s(A) \le \omega_0$, kde ω_0 je růstová konstanta semigrupy $\{T_t\}$ z 12.5. Je-li $\operatorname{Re} \lambda > \omega_0$ a $x \in X$, máme i v tomto případě $R(\lambda, A)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} T_s x \, ds$. Speciálně tvrzení předchozí věty 12.20 platí i pro případ $\operatorname{Re} \lambda > 0$, důkaz je skoro stejný.

(b) Integrál $\int_0^\infty e^{-\lambda s} T_s \, ds$ se někdy nazývá *Laplaceovou transformací* semigrupy $\{T_t\}$.

Další věta charakterizuje generátory kontrakčních semigrup a patří mezi nejdůležitější v této oblasti.

12.22. Hille-Yosidova věta. *Nechť A je lineární operátor definovaný na podprostoru $\mathcal{D}_A$ Banachova prostoru X. Následující podmínky jsou ekvivaletní:*

(i) *existuje kontrakční $\mathcal{C}_0$-semigrupa operátorů na X, pro niž A je jejím generátorem,*
(ii) *A je hustě definovaný, $(0,+\infty) \subset \varrho(A)$ a $\|R(\lambda, A)\| \le \frac{1}{\lambda}$ pro $\lambda > 0$.*

Pokud je některá z těchto podmínek splněna, je A uzavřený a daná $\mathcal{C}_0$-semigrupa je jím jednoznačně určená.

Důkaz. Je-li A generátorem kontrakční $\mathcal{C}_0$-semigrupy operátorů, je A uzavřený a hustě definovaný podle věty 12.14. Věta 12.20 pak říká, že $(0,\infty) \subset \varrho(A)$ a dává současně odhad $\|R(\lambda, A)\| \le \frac{1}{\lambda}$ platný pro každé $\lambda > 0$.

Důkaz implikace (ii) $\Rightarrow$(i) je obtížnější. Myšlenka je následující. Označíme-li pro $\lambda > 0$

$$A_\lambda := \lambda A R(\lambda, A) = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I$$

tak zvané *Yosidovy aproximace* generátoru A, je podle věty 12.19 $\lim\limits_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = Ax$ pro každé $x \in D_A$. Dále se ukáže, že A_λ je generátorem stejnoměrně spojité kontrakční semigrupy $\left\{e^{tA_\lambda}\right\}_{t\ge 0}$. Pomocí vhodných odhadů pak dostaneme, že $\lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x$ existuje pro každé $x \in D_A$, přičemž konvergence je stejnoměrná v proměnné t na omezených intervalech. Označíme-li pro $x \in D_A$ a $t > 0$ tuto limitu jako $T_t x$, poměrně lehko se odvodí, že $\{T_t\}$ je kontrakční $\mathcal{C}_0$-semigrupa. Zbývá pak ukázat, že A je jejím generátorem. Označme proto B generátor semigrupy $\{T_t\}$. Z definice zjistíme, že $A \subset B$. Víme, že $1 \in \varrho(A) \cap \varrho(B)$ (jednou podle předpokladu v (ii), podruhé podle věty 12.20). Protože však $A \subset B$, je $(I-B)D_A = (I-A)D_A = X$. Tudíž $D_B = (I-B)^{-1}X = D_A$, což vede konečně k rovnosti $A = B$. ■

Hille-Yosidovu větu je možno ještě dále zobecňovat. Důkaz následující věty jen naznačíme.

12.23. Feller-Miyadera-Phillipsova věta. *Nechť X je Banachův prostor a A lineární operátor definovaný na podprostoru $\mathcal{D}_A \subset X$. Následující podmínky jsou ekvivaletní:*

(i) *existuje taková $\mathcal{C}_0$-semigrupa $\{T_t\}$ operátorů na X, že pro jisté konstanty $M > 0$ a $\omega \in \mathbf{R}$ platí $\|T_t\| \le Me^{\omega t}$ pro každé $t \ge 0$ a taková, že A je jejím generátorem,*
(ii) *A je uzavřený a hustě definovaný, existují konstanty $M > 0$ a ω tak, že $(\omega, +\infty) \subset \varrho(A)$ a $\left\|(R(\lambda, A))^n\right\| \le \frac{M}{(\lambda-\omega)^n}$ pro každé $\lambda > \omega$ a n .*

Návod. Jestliže $\mathcal{C}_0$-semigrupa $\{T_t\}$ splňuje podmínku $\|T_t\| \le e^{\omega t}$ pro jisté $\omega \ge 0$, potom $\{S_t\}$, kde $S_t := e^{-\omega t}T_t$, je kontrakční $\mathcal{C}_0$-semigrupa. Stačí použít Hille-Yosidovu větu.

Obecná věta se pak získá vhodným přenormováním prostoru X. Definujeme-li totiž

$$\|x\|_* := \sup\left\{e^{-\omega t}\|T_t x\| : t \in [0,\infty)\right\} \quad \text{pro} \quad x \in X\,,$$

je $\|x\| \le \|x\|_* \le M\|x\|$. A i tento případ se pak převede vhodným způsobem na Hille-Yosidovu větu. ♣

12.24. Poznámka. Ke každé semigrupě jsme přiřadili její generátor pomocí jistého vzorečku. Zajímá nás i obrácená úloha, a sice jak vyjádřit danou semigrupu pomocí jejího generátoru. To lze více způsoby. Jeden z nich je obsažen v důkazu Hille-Yosidovy věty 12.22. Je-li A generátor $\mathcal{C}_0$-semigrupy $\{T_t\}$, nejdříve zadefinujeme Yosidovy aproximace A_λ. Potom

$$T_t x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x \quad \text{pro} \quad x \in X \quad \text{a} \quad t > 0\,.$$

Jinou možnost skýtá *exponenciální formulka*. Podle ní pro každé $x \in X$ a $t > 0$ platí

$$T_t(x) = \lim_{n\to\infty}\left(I - \frac{t}{n}A\right)^{-n}x = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{t}\,R\left(\frac{n}{t}, A\right)\right)^n(x)\,,$$

přičemž konvergence je stejnoměrná na omezených intervalech v $(0,\infty)$.

12.25. Abstraktní Cauchyova úloha. Nechť X je Banachův prostor, $A : D_A \subset X \to X$ uzavřený lineární operátor a $x \in X$. Uvažujme následující *abstraktní Cauchyovu úlohu*

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = Au(t) & \text{pro } t \ge 0,\\ u(0) = x\,. \end{cases}$$

Řešením této úlohy rozumíme každé zobrazení $u : [0,\infty) \to X$ takové, že

$$u(0) = x\,, \quad u(t) \in D_A \quad \text{a} \quad Du(t) = Au(t) \quad \text{pro každé} \quad t > 0\,.$$

Obvykle se ještě požaduje, aby zobrazení u bylo spojitě diferencovatelné, tedy aby $t \mapsto Du(t)$ bylo spojité zobrazení z $[0,\infty)$ do X.

Základní větou udávající souvislost mezi řešením abstraktní Cauchyovy úlohy a použitím teorie semigrup můžeme vyslovit v následujícím tvaru. O její důkaz se nebudeme pokoušet.

(a) Věta. *Nechť $A : D_A \subset X \to X$ je uzavřený lineární operátor na Banachově prostoru X. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *rezolventa $\varrho(A)$ je neprázdná a pro každé $x \in D_A$ existuje právě jedno řešení uvedené abstraktní Cauchyovy úlohy,*

(ii) *existuje $\mathcal{C}_0$-semigrupa $\{T_t\}$, pro niž A je jejím generátorem.*

Pokud je jedna z těchto podmínek splněna, je $u(t) = T_t x$ pro každé $t \in [0,\infty)$.

(b) Poznámky. (b1) Z předchozích výsledků plyne, že pokud A je generátorem $\mathcal{C}_0$-semigrupy $\{T_t\}$ a $x \in D_A$, potom $u(t) := T_t x$ je jediným řešením abstraktní Cauchyovy úlohy. Tedy implikaci (ii) $\Rightarrow$ (i) máme vlastně dokázanou.

(b2) Pokud bychom v uvedené větě netrvali na jednoznačnosti řešení či by nám stačilo hledat řešení jen pro jistou hustou podmnožinu D_A (anebo bychom netrvali na spojitě diferencovatelném řešení), nemuseli bychom se nutně omezovat na případ, kdy „pravá strana“ A je generátorem jisté $\mathcal{C}_0$-semigrupy.

(b3) Nechť u je řešením abstraktní Cauchyovy úlohy. Protože $u(t) \in D_A$ pro $t > 0$ a protože u je spojité zobrazení v bodě $t = 0$, abstraktní Cauchyova úloha nemůže mít řešení, pokud $x \notin \overline{D_A}$.

(b4) Pokud A je opět generátorem $\mathcal{C}_0$-semigrupy $\{T_t\}$ a $x \notin D_A$, potom zobrazení $u : t \mapsto T_t x : [0,\infty) \to X$ můžeme nazvat *zobecněným řešením* abstraktní Cauchyovy úlohy.

12.26. Elementární cvičení. (a) Na prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ zadejme operátory T_t předpisem

$$T_t f(\xi) := f\Big(\frac{\xi}{1+t\xi}\Big) \quad \text{pro} \quad f \in \mathcal{C}([0,1]),\ \xi \in [0,1],\ t \ge 0\,.$$

Ukažte, že $\{T_t\}$ tvoří $\mathcal{C}_0$-semigrupu. Jejím generátorem je operátor $A = -\xi^2\,\frac{d}{d\xi}$.

(b) Na Hilbertově prostoru $H := \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ uvažujme operátor $A : f(t) \mapsto tf(t)$ s definičním oborem $D_A := \{f \in H : t \mapsto tf(t) \in H\}$. Ukažte, že A je uzavřený hustě definovaný operátor, který není generátorem žádné $\mathcal{C}_0$-semigrupy.

Návod. Ukažte, že $\varrho(A) = \emptyset$. ♣

(c) Uvažujme Hilbertův prostor l^2. Pro $x = \{x_n\} \in l^2$ a $t \ge 0$ položme $T_t x := \{e^{-nt}x_n\}$. Ukažte, že $\{T_t\}$ tvoří $\mathcal{C}_0$-semigrupu, jejíž generátor A je definován na množině $D_A := \{\{x_n\} : \{nx_n\} \in l^2\}$ předpisem $A : \{x_n\} \mapsto \{-nx_n\}$.

(d) Nechť $H = \mathcal{L}^2([0,2\pi])$, $D_A := \{f \in AC([0,2\pi]) : f' \in AC([0,2\pi]), f'' \in H, f(0) = f(2\pi), f'(0) = f'(2\pi)\}$ a $A : f \mapsto f''$ pro $f \in D_A$. Ukažte, že A je hustě definovaný operátor. Dále pomocí integrace per partes ukažte, že $(Af, f) \le 0$ pro každé $f \in H$ (v terminologii *12.2 to říká, že A je disipativní). Dále ukažte, že $1 \in \varrho(A)$. Lumer-Phillipsova věta v *12.2.c říká, že A je generátorem jisté kontrakční semigrupy $\{T_t\}$.

Jak tuto semigrupu popsat? Je-li $\varphi_n : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}$ standardní ortonormální báze H, stačí definovat operátory T_t na jejích prvcích. Ukažte, že $T_t\varphi_n = e^{-n^2 t}\varphi_n$.

(e) Na Banachově prostoru $L^p([0,\infty))$, kde $p \in [1,\infty)$, uvažujme operátory T_t definované předpisem

$$T_t f(s) = f(s+t) \quad \text{pro} \quad t \ge 0, s \ge 0\,.$$

Ukažte, že $\{T_t\}$ tvoří kontrakční $\mathcal{C}_0$-semigrupu. Definiční obor D_A generátoru této semigrupy je tvořen všemi funkcemi z $L^p([0,\infty))$, které jsou absolutně spojité na každém kompaktním intervalu v $[0,\infty)$. Přitom $Af = f'$ pro $f \in D_A$.

Návod. Zřejmě $\|T_t\| \le 1$. Volíme-li $f \in L^p([0,\infty))$ a $\varepsilon > 0$, najdeme spojitou funkci φ na $[0,\infty)$ s nosičem v intervalu $[0,K]$ tak, aby $\|f - \varphi\| < \varepsilon$. Stejnoměrná spojitost φ dá existenci takového $\delta > 0$, že

$$\sup\big\{|T_t\varphi(s) - \varphi(s)| : s \in [0,\infty)\big\} < \varepsilon \quad \text{pro každé} \quad t \in [0,\delta]\,.$$

Poté stačí využít odhad

$$\|T_t f - f\| \le \|T_t\|\,\|f - \varphi\| + \|T_t\varphi - \varphi\| + \|f - \varphi\|\,,$$

abychom ukázali, že zobrazení $t \mapsto T_t f$ je spojité v 0_+. Dále volte opět $f \in D_A$ a $h > 0$ a pokuste se o odhad

$$\left\|\frac{T_h f - f}{h} - f'\right\|^p \le \int_0^1 \big\|T_{sh}f' - f'\big\|^p\,ds\,.$$

♣

C. Lokálně konvexní prostory

13. Topologické vektorové prostory

Při zkoumání Banachových prostorů jsme se zajímali o vektorový prostor opatřený jednou normou. V této kapitole budeme zkoumat, zhruba řečeno, vektorové prostory s mnoha normami. To je užitečné z vícero důvodů. Jednak jsou prostory, v nichž přirozenou konvergenci nemůžeme popsat pomocí konvergence v jedné normě (třeba prostor $\mathcal{C}([0,1])$ s topologií bodové konvergence anebo prostor všech holomorfních funkcí s topologií stejnoměrné konvergence na kompaktech), či prostory, jako je prostor všech distribucí, které nemohou vzniknout jako duály k Banachovým prostorům.

Další motivací je poznatek, že v nekonečně dimenzionálním Banachově prostoru uzavřená jednotková koule není nikdy kompaktní. V těchto prostorech pak spojité lineární funkcionály nemusejí na omezených uzavřených množinách nabývat svého maxima, což je ku škodě třeba při vyšetřování různých extremálních úloh. Jedna z možností, jak tento defekt překlenout, je změna původní topologie tak, aby jednotková koule se v ní stala kompaktní a spojité lineární funkcionály by v ní byly stále spojité. To lze někdy docílit, ovšem vzniklá topologie již nemůže být topologií Banachova prostoru.

Chceme-li tedy zkoumat vektorové prostory opatřené nějakou topologií, je samozřejmě nutné svázat vektorové operace s topologickými vlastnostmi. To nás vede k následující velice přirozené definici.

13.1. Topologický vektorový prostor. *Topologickým vektorovým prostorem* rozumíme vektorový prostor X (nad tělesem $\mathbf{F}$) s topologií τ, pro niž vektorové operace

$$[x,y] \mapsto x+y \quad \text{a} \quad [\lambda,x] \mapsto \lambda\, x$$

z $X \times X$ do X a $\mathbf{F} \times X$ do X jsou spojité. V dalším budeme používat úmluvu, že *lineární topologií* na vektorovém prostoru X rozumíme každou topologii, v níž X je topologickým vektorovým prostorem.

13.2. Příklady. (a) Každý normovaný lineární prostor s topologií odvozenou od normy je příkladem topologického vektorového prostoru. Rovněž každá pseudonorma na vektorovém prostoru W určuje na W topologii, při níž W tvoří topologický vektorový prostor.

(b) Nechť na vektorovém prostoru X je zadána *translačně invariantní* metrika ϱ, tj. metrika splňující podmínku

$$\varrho(x,y) = \varrho(x+z, y+z)$$

pro každou trojici $x,y,z \in X$. Ta samozřejmě určuje na X (metrickou) topologii. Jestliže navíc zobrazení $[\lambda,x] \mapsto \lambda x$ je spojité, potom topologie na X určená metrikou ϱ je lineární. Ověřte!

(c) Rozmyslete si, proč (netriviální) vektorový prostor s diskrétní topologií (v ní jsou všechny množiny otevřené) netvoří topologický vektorový prostor.

(d) Další příklady jsou uvedeny v 13.13, 14.20 15.2, *14.1, *14.13, *17.3 či *14.16.

13.3. Metrické lineární prostory. Topologickým vektorovým prostorům, které vzniknou z nějaké metriky, říkáme také *metrické lineární prostory*. Obdobně definujeme *pseudometrické lineární prostory*. Později uvidíme (Kakutaniho věta *14.13.e), že každý metrizovatelný topologický vektorový prostor lze získat již z translačně invariantní metriky.

13.4. Topologie pomocí filtrů okolí. Topologii na dané množině je možno zadat mnoha způsoby, kupříkladu tím, že určíme, které množiny jsou otevřené, anebo tím, že popíšeme uzávěry množin. V tomto odstavečku se soustředíme na vytváření topologií pomocí filtrů okolí bodů.

Nejdříve označení. Je-li τ topologie na X a $z \in X$, nechť

$$\tau(z) := \{A \subset X : z \text{ je vnitřním bodem množiny } A\}$$

značí systém všech okolí bodu z. Potom zřejmě

(a) $\tau(z)$ tvoří filtr množin (viz C.1 v Appendixu) obsahujících bod z,
(b) je-li $A \in \tau(z)$, existuje $U \in \tau(z)$, $U \subset A$, s vlastností, že $U \in \tau(y)$ pro každé $y \in U$

(za množinu U bereme pochopitelně vnitřek množiny A).

Obráceně, předpokládejme, že systém $\{\tau(z)\}_{z\in X}$ splňuje podmínky (a) a (b). Potom na X existuje právě jedna topologie σ tak, že systém okolí $\sigma(z)$ splývá s námi zadaným filtrem $\tau(z)$ v každém bodě $z \in X$.

Shrňme, abychom zadali topologii na množině X, stačí v každém bodě X určit filtr tak, aby tento systém filtrů splňoval výše uvedenou podmínku (b).

Každý filtr je ovšem určen také některou ze svých bází (viz Appendix, C.2), nemusíme tedy vždy zadat celý filtr, stačí určit některou jeho bázi. Tak kupříkladu při určení topologie normovaného lineárního prostoru stačí v každém bodě z zadat bázi $\{U(z,\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$, kde samozřejmě $U(z,\varepsilon) := \{x : \|z - x\| < \varepsilon\}$. Poznamenejme, že někdy místo báze filtru používáme též označení *fundamentální systém okolí*.

13.5. Topologické vektorové prostory pomocí filtrů okolí. Není těžké si uvědomit, že v topologickém vektorovém prostoru X jsou vektorové operace

$$x \mapsto x + x_0 \quad \text{a} \quad x \mapsto \lambda_0 x$$

dokonce homeomorfizmy pro každé $x_0 \in X$ a $\lambda_0 \in \mathbf{F}$, $\lambda_0 \neq 0$. Odtud lehko plyne, že pro filtry okolí platí $\tau(z) = z + \tau(0)$ v každém bodě $z \in X$ (zde pochopitelně definujeme součet bodu z a filtru $\mathcal{F}$ jako filtr $\{z + F : F \in \mathcal{F}\}$). Pro určení topologie topologického vektorového prostoru stačí tedy zadat filtr $\tau(0)$ okolí nuly, nebo vlastně jen jeho bázi. Okolí libovolného bodu jsou pak tvořena „posunutým“ filtrem $\tau(0)$.

A protože v definici topologického vektorového prostoru klademe další podmínky na spojitost vektorových operací, lze očekávat, že jak filtr okolí nuly $\tau(0)$, tak i topologie τ, mohou mít další speciální vlastnosti. Tomu tak skutečně je. Abychom však příslušné vlastnosti odvodili, potřebujeme nejdříve zavést další pojmy.

13.6. Vyvážené a pohlcující množiny. Množina V ve vektorovém prostoru W je *vyvážená*, jestliže $\lambda V \subset V$ pro každé $|\lambda| \leq 1$. Uvědomme si, že pro každou vyváženou množinu V platí $V = -V$.

Podmnožinu P vektorového prostoru W nazveme *pohlcující*, jestliže ke každému bodu $x \in W$ lze nalézt $\varepsilon > 0$ tak, aby úsečka $[0, \varepsilon x]$ ležela celá v P. Každá pohlcující množina obsahuje tedy 0. Je-li P vyvážená, je pohlcující, právě když $W = \bigcup_{\lambda>0} \lambda P$. Je-li P konvexní či vyvážená, je P pohlcující, právě když $W = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} nP$.

13.7. von Neumannova věta. *Buď (X, τ) topologický vektorový prostor. Potom filtr okolí nuly $\tau(0)$ má následující vlastnosti:*

(a) *ke každému $U \in \tau(0)$ existuje $V \in \tau(0)$ tak, že $V + V \subset U$,*
(b) *každá množina z $\tau(0)$ je pohlcující,*
(c) *$\tau(0)$ má bázi tvořenou vyváženými množinami.*

Důkaz. Všechna tvrzení plynou přímo z definice spojitosti vektorových operací.

(a) Stačí si uvědomit, že zobrazení $f : [x, y] \mapsto x + y$ je spojité v bodě $[0, 0]$. Skutečně, zadáme-li okolí $U \in \tau(0)$, existují okolí $V_1, V_2 \in \tau(0)$ tak, že $x + y \in U$, pokud $x \in V_1$ a $y \in V_2$ (uvědomte si, že $f(0, 0) = 0$ a nezapomeňte, jak je definována topologie na kartézském součinu $X \times X$). Nyní stačí položit $V = V_1 \cap V_2$.

(b) Pro důkaz tohoto tvrzení volte $x \in X$ a využijte toho, že zobrazení $g : \lambda \mapsto \lambda x$ je spojité v bodě 0, přičemž $g(0) = 0$.

(c) Nechť $B \in \tau(0)$. Protože zobrazení $h : [\lambda, x] \mapsto \lambda x$ je spojité v bodě $[0, 0]$ a $h(0, 0) = 0$, lze nalézt $\varepsilon > 0$ a množinu $U \in \tau(0)$ tak, aby $\lambda U \subset B$ pro každé $|\lambda| \leq \varepsilon$. Položíme-li nyní $V = \bigcup\{\lambda U : |\lambda| \leq \varepsilon\}$, je zajisté $V \subset B$, $V \in \tau(0)$ (neboť $\lambda U \in \tau(0)$) a V je vyvážená. To nahlédneme takto - volíme-li $x \in V$ a $|\mu| \leq 1$, je $x \in \lambda U$ pro nějaké $|\lambda| \leq \varepsilon$, a tudíž $\mu x \in (\mu\lambda) U \subset V$. ■

13.8. Poznámka-von Neumannovy axiomy. V předešlé větě jsme ukázali, jaké vlastnosti má filtr okolí nuly $\tau(0)$ v libovolném topologickém vektorovém prostoru. Naopak lze očekávat, že zadáme-li v bodě 0 vektorového prostoru W nějaký filtr $\mathcal{N}$ s dalšími rozumnými vlastnostmi a definujeme-li topologii τ na W pomocí 13.4 tak, aby okolí libovolného bodu tvořil „posunutý“ filtr $\mathcal{N}$, dostaneme jednoznačně určenou topologii, při níž W bude topologický vektorový prostor. Tomu tak vskutku je a topologické vektorové prostory lze často zadat pomocí tak zvaných *von Neumannových axiomů*.

Věta. *Nechť $\mathcal{N}$ je filtr na vektorovém prostoru X. Potom na X existuje lineární topologie τ tak, že $\mathcal{N} = \tau(0)$, právě když filtr $\mathcal{N}$ má následující vlastnosti:*

(a) *ke každému $U \in \mathcal{N}$ existuje $V \in \mathcal{N}$ tak, že $V + V \subset U$,*
(b) *každá množina z $\mathcal{N}$ je pohlcující,*
(c) *$\mathcal{N}$ má bázi tvořenou vyváženými množinami.*

Přitom $\tau(x) = x + \mathcal{N}$ pro každé $x \in X$.

Důkaz. V předchozí větě jsme již dokázali, že filtr $\tau(0)$ má uvedené vlastnosti.

Dokazujme tedy opačnou implikaci, kdy na X je zadán filtr $\mathcal{N}$ s vlastnostmi (a), (b) a (c). Definujeme-li topologii τ na X zadáním filtrů okolí tak, že $\tau(x) := x + \mathcal{N}$, lehko se ověří, že τ je (translačně invariantní) topologie na X. Především z (b) a (c) plyne, že každá množina z $\mathcal{N}$ obsahuje 0. Tudíž $\tau(x)$ je filtr množin obsahujících x. Je-li $U \in \tau(x)$, $U = x + V$, kde $V \in \mathcal{N}$, existuje podle (a) množina $W \in \mathcal{N}$ tak, že $W + W \subset V$. Máme-li potom $y \in x + W$, je $y + W \subset U$, a tedy $U \in \tau(y)$.

Zbývá ověřit, že vektorové operace jsou τ-spojité. Pro součet stačí ukázat, že je spojitý v bodě $(0, 0)$. Ale to je snadné pomocí vlastnosti (a). Dokazujme nyní spojitost násobení $(\lambda, x) \to \lambda x$ v bodě $(\lambda_0, x_0) \in \mathbf{F} \times X$. Volme tedy $U \in \tau(0)$ a najděme $V \in \tau(0)$ tak, aby $V + V \subset U$. Pomocí (b) najděme $\varepsilon > 0$ tak, aby $[-2\varepsilon x_0, 2\varepsilon x_0] \subset V$. Potom $(\lambda - \lambda_0)x_0 \in V$ pro $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$. Dále nalezněme n tak velké, aby $n > |\lambda_0| + \varepsilon$. Existuje vyvážená množina $W \in \mathcal{N}$ tak, že $W + \cdots + W \subset V$ (n sčítanců). Potom pro $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ a $x - x_0 \in V$ máme $\lambda(x - x_0) \in \lambda W = n(\frac{\lambda}{n} W) \subset nW \subset W + \cdots + W \subset V$. Jinými slovy, pro takové dvojice (λ, x) je $\lambda x - \lambda_0 x_0 \in V + V \subset U$. ■

Nyní uvedeme některé topologické vlastnosti specifické pro lineární topologie.

13.9. Věta. *Každá lineární topologie je regulární.*

Důkaz. Lze říci, že topologie na daném prostoru je regulární, jestliže filtr okolí každého bodu má bázi tvořenou uzavřenými množinami. Je-li tedy τ lineární topologie na X, stačí ukázat, že filtr $\tau(0)$ má bázi tvořenou uzavřenými množinami. Volme $U \in \tau(0)$ libovolně. Podle von Neumannovy věty existuje okolí nuly $V \in \tau(0)$ tak, že $V + V \subset U$. Stačí ukázat, že $\overline{V} \subset U$. Je-li tedy $y \in \overline{V}$, je $(y + V) \cap V \neq \emptyset$, neboť $y + V$ je okolím y. Protože i $-V \in \tau(0)$, je také $(y - V) \cap V \neq \emptyset$. Tudíž $y \in V + V$, a tedy i $y \in U$. ■

13.10. Poznámka. Každá lineární topologie je dokonce úplně regulární. Důkaz tohoto tvrzení je však již poměrně obtížnější. Jde o to, že každý topologický vektorový prostor (dokonce každá topologická grupa — viz 6.11.b) (X, τ) je uniformizovatelný, a tudíž jeho topologie τ je úplně regulární. Ona uniformita $\mathcal{U}$ se dá popsat pomocí okolí diagonály jako $\mathcal{U} := \{U_V : U_V = \{(x, y) \in X \times X : y - x \in V\}, V \in \tau(0)\}$. Pokud vás zajímají detaily, lze nahlédnout kupříkladu do S.K. Berberian [*1974].

Topologie, které nejsou Hausdorffovy, nemají příliš hezké vlastnosti. Proto je dobré vědět, kdy lineární topologie je Hausdorffova. Následující věta dává odpověď.

13.11. Věta. *Nechť τ je lineární topologie na X. Potom τ je Hausdorffova, právě když $\{0\}$ je τ-uzavřená množina, což je právě v případě, kdy*

$$\{0\} = \bigcap \{U : U \in \tau(0)\}.$$

Důkaz. Je-li τ Hausdorffova, nemůže v průniku všech okolí bodu 0 ležet žádný jiný bod než 0. Nechť tedy $\{0\} = \bigcap\{U : U \in \tau(0)\}$. Abychom ukázali, že τ je Hausdorffova, stačí oddělit otevřenými množinami bod 0 a libovolný bod $z \in X \setminus \{0\}$. Jsme-li tedy v této situaci, existuje $U \in \tau(0)$ tak, že $z \notin U$. Podle předchozí věty 13.9 najdeme uzavřené okolí $V \in \tau(0)$ tak, aby $V \subset U$. Potom otevřené množiny $\operatorname{Int} V$ a $X \setminus V$ oddělují body 0 a z. ■

Závěrem ukážeme na příkladech, že příliš obecné lineární topologie mohou ztrácet důležité vlastnosti Banachových prostorů. Může se totiž stát, že na nich neexistují žádné netriviální spojité lineární formy a že prvky duálu tedy nemusejí oddělovat body. Než přejdeme k příkladům, definujme explicite pojem duálu.

13.12. Duál topologického vektorového prostoru. *Duálem* X^* topologického vektorového prostoru X rozumíme podprostor jeho algebraického duálu tvořený všemi spojitými lineárními formami na X. Zdůrazněme, že pokud X není zrovna normovaným lineárním prostorem, nemáme na X^* definovánu žádnou topologii. Teprve později v 17.16 zavedeme (v případě lokálně konvexního prostoru) na X^* jistou silnou topologii. A to takovým způsobem, aby v případě normovaného lineárního prostoru tato dala „normovou“ topologii na X^*.

13.13. Další příklady lineárních topologií.

(a) `Prostor s`. Nechť $\mathbf{s}$ je vektorový prostor všech posloupností (reálných či komplexních čísel) s obvyklými vektorovými operacemi definovanými po souřadnicích. Pro $x = \{x_j\} \in \mathbf{s}$ položme

$$\mathsf{q}(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|x_j|}{1+|x_j|}\,.$$

Uvedená řada evidentně konverguje. Snažte se dokazovat postupně následující tvrzení.

(a1) `Tvrzení.` *Funkce $\varrho(x,y) := \mathsf{q}(x-y)$ definovaná pro $x, y \in \mathbf{s}$ je translačně invariantní metrikou na* $\mathbf{s}$.

Návod. Abychom ověřili trojúhelníkovou nerovnost, všimněme si, že funkce $t \mapsto \frac{t}{1+t}$ je na intervalu $(-1,\infty)$ rostoucí (má tam kladnou derivaci). ♣

(a2) `Tvrzení.` *Je-li $x = \{x_j\} \in \mathbf{s}$, označme $p_j(x) = x_j$ j-tou složku x. Ukažte, že posloupnost $\{z_n\} \subset \mathbf{s}$ konverguje k 0 ve smyslu konvergence v metrickém prostoru $(\mathbf{s},\varrho)$, právě když $\lim\limits_{n\to\infty} p_j(z_n) = 0$ pro každé $j \in \mathbf{N}$.*

Návod. K důkazu jedné implikace využijte odhad $\mathsf{q}(x) \geq \frac{1}{2^j}\frac{|p_j(x)|}{1+|p_j(x)|}$. Jestliže naopak $\lim p_j(z_n) = 0$ pro každé $j \in \mathbf{N}$ a $\varepsilon > 0$ máme předepsáno, určíme m tak, aby $\sum\limits_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \varepsilon$. Dále nalezneme n_0 tak, aby $|p_j(z_n)| < \frac{\varepsilon}{m}$ pro každé $j = 1,\ldots,m$ a $n \geq n_0$. Potom pro $k \geq n_0$ je $\mathsf{q}(z_k) \leq 2\varepsilon$. (Můžete též porovnat s *14.13.b.) ♣

(a3) `Tvrzení.` *Prostor $(\mathbf{s},\varrho)$ je úplný metrický lineární prostor.*

Návod. Úplnost $\mathbf{s}$ získáme ihned z (a2) a úplnosti $\mathbf{R}$ či $\mathbf{C}$.

Zbývá ověřit jen spojitost násobení skalárem. Předpokládejme tedy, že $z_n \to z$ v $\mathbf{s}$ a $\lambda_n \to \lambda$. Využijeme (a2) a odhad

$$|p_j(\lambda_n z_n - \lambda z)| \leq |\lambda_n|\,|p_j(z_n - z)| + |\lambda_n - \lambda|\,|p_j(z)|\,.$$

♣

(a4) **Poznámka.** Spojité lineární formy na prostoru $\mathbf{s}$ mají tvar $\varphi(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ pro $x = \{x_n\} \in \mathbf{s}$, kde množiny $\{n : \alpha_n \neq 0\}$ jsou konečné.

Zajisté, každá forma φ uvedeného tvaru je lineární a spojitá (neboť funkcionály p_j jsou spojité). Je-li $\varphi \in \mathbf{s}^*$ a $e_n \in \mathbf{s}$ standardní „jednotkový“ vektor, položme $\alpha_n := \varphi(e_n)$. Volíme-li $x_n := 0$, pokud $\alpha_n = 0$ a $x_n := \frac{1}{\alpha_n}$ v opačném případě, je $x := \{x_n\} \in \mathbf{s}$ a $\varphi(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \varphi(e_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \alpha_n$. Musí tedy množina $\{n : \alpha_n \neq 0\}$ být konečná.

Pro $\alpha = \{\alpha_n\} \in c_{00}$ (viz *1.1.b) a $\{x_n\} \in \mathbf{s}$ položme $\varphi_\alpha := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$. Potom zobrazení $\Psi : \alpha \to \varphi_\alpha$ je prosté lineární zobrazení prostoru c_{00} na $\mathbf{s}^*$. V tomto duchu tedy můžeme ztotožnit duál k prostoru $\mathbf{s}$ s (neúplným) normovaným lineárním prostorem c_{00}. Jelikož (zatím) na duálu $\mathbf{s}^*$ nemáme žádnou topologii, nelze nic říci o spojitosti zobrazení Ψ.

(b) `Prostor` $\mathcal{M}$. Nechť $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s konečnou mírou. Symbolem $\mathcal{M}$ označíme prostor všech (ekvivalentních tříd) $\mathcal{S}$-měřitelných funkcí, pro něž definujeme

$$\varrho(f,g) := \int_\Omega \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\,d\mu\,.$$

Ukažte, obdobně jako v (a), že $\mathcal{M}$ tvoří úplný metrický lineární prostor.

(b1) **Poznámka.** Posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje v prostoru $\mathcal{M}$ k funkci f, právě když $f_n \to f$ v míře. Pro osvěžení zopakujme definici konvergence v míře. Jsou-li f_n a f $\mathcal{S}$-měřitelné a skoro všude konečné funkce na Ω a $M_n(\varepsilon) := \{\omega \in \Omega : |f(\omega) - f_n(\omega)| \geq \varepsilon\}$, konverguje posloupnost $\{f_n\}$ k f *v míře*, jestliže $\lim M_n(\varepsilon) = 0$ pro každé $\varepsilon > 0$. O tom, jakožto i o zobecnění na případy měr, které nejsou konečné, se lze dočíst v [LM] (speciálně cvičení 12.8).

Z nerovnosti

$$\varepsilon\mu(\Omega) + \mu(M_n(\varepsilon)) \geq \varrho(f_n, f) \geq \int_{M_n(\varepsilon)} \frac{|f_n - f|}{1+|f_n - f|}\,d\mu \geq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\mu(M_n(\varepsilon))$$

pak plyne zmíněné tvrzení o charakteru konvergence v prostoru $\mathcal{M}$.

Prostor $\mathcal{M}$ má i další zajímavou vlastnost, kterou popíšeme pro jednoduchost ve speciálním případě, kdy za $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ vezmeme prostor $[0,1]$ s Lebesgueovou mírou λ. Na $\mathcal{M}$ máme totiž definováno navíc i násobení, a to bodově. Nedá příliš práce ukázat, že operace násobení $(f,g) \to f\,g$ je spojitá. Tvoří tedy prostor $\mathcal{M}$ *topologickou algebru*. Na rozdíl od věty 6.10 z teorie Banachových algeber však množina invertibilních prvků $\mathcal{M}$ nemusí být otevřená. Je snad zbytečné říkat, že $f \in \mathcal{M}$ je *invertibilní*, existuje-li $g \in \mathcal{M}$ tak, že $f\,g = 1$ (vše se rozumí skoro všude), přičemž není těžké ověřit, že f je invertibilní, právě když $\lambda\{x \in [0,1] : f(x) = 0\} = 0$. Víte-li toto, stačí volit $f_n := c_{[\frac{1}{n},1]}$ a ujasnit si, že $f_n \to 1$ v míře, že f_n nejsou invertibilní, zatímco funkce $f = 1$ je.

(c) **Prostor $\mathbf{L^p}$ pro $\mathbf{0 < p < 1}$** . Uvažujme prostor s mírou $(X, \mathcal{S}, \mu)$ a $p \in (0,1)$. Označíme-li $\mathcal{L}^p$ množinu všech μ-měřitelných funkcí f na X, pro něž integrál $\int_X |f|^p \, d\mu$ je konečný a položíme-li

$$\varrho(f,g) = \int_X |f-g|^p \, d\mu \quad \text{pro} \quad f,g \in \mathcal{L}^p \,,$$

tvoří $(\mathcal{L}^p, \varrho)$ pseudometrický prostor (pro důkaz trojúhelníkové nerovnosti využijte vztahu $(a+b)^p \le a^p + b^p$ platného pro libovolné nezáporné a,b). Po ztotožnění funkcí rovnajících se μ-skoro všude dostaneme obvyklým postupem dokonce metrický prostor L^p. Dokazujte následující tvrzení.

(c1) **Tvrzení.** *$\mathcal{L}^p$ je pseudometrický lineární prostor.*

(c2) **Tvrzení.** *Prostor L^p je úplný.*

Návod. Důkaz může probíhat stejně jako v klasickém případě, viz třeba [LM], 10.6. ♣

(c3) **Tvrzení.** *Je-li $X = [0,1]$ a μ Lebesgueova míra, jsou $\emptyset$ a $\mathcal{L}^p$ jediné otevřené konvexní podmnožiny $\mathcal{L}^p$.*

Návod. Nechť C je neprázdná otevřená konvexní množina v $\mathcal{L}^p$. Předpokládejme, že $0 \in C$, a tedy i $\{f \in \mathcal{L}^p : \varrho(f,0) < \varepsilon\} \subset C$ pro jisté $\varepsilon > 0$. Volme nyní $f \in \mathcal{L}^p$. Zkonstruujeme-li funkce $g_1, \dots, g_n$ v $\mathcal{L}^p$ tak, aby $\varrho(g_j, 0) < \varepsilon$ pro každé $j = 1, \dots, n$ a $f = \frac{1}{n}(g_1 + \dots + g_n)$, bude $f \in C$ díky konvexitě C. Ale sestrojit funkce g_j již není nikterak těžké. Najdeme n tak velké, aby $n^{p-1}\varrho(f,0) < \varepsilon$ a dělení $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ intervalu $[0,1]$ s vlastností $\int_{x_{j-1}}^{x_j} |f|^p = \frac{1}{n}\varrho(f,0)$. Potom stačí položit $g_j(t) = nf(t)c_{(x_{j-1},x_j]}(t)$. ♣

(c4) **Tvrzení.** *Je-li X a μ jako v (c3), je $(\mathcal{L}^p)^* = \{0\}$.*

Návod. Viz cvičení 13.15.g. ♣

(d) **Prostor $\mathcal{C}([\mathbf{0},\mathbf{1}])$ s konvergencí v míře.** Nechť $X = \mathcal{C}([0,1])$ je vektorový prostor všech spojitých funkcí na $[0,1]$ a λ je Lebesgueova míra. Položíme-li

$$\varrho(f,g) := \inf\{\varepsilon > 0 : |f(t) - g(t)| \le \varepsilon \text{ pro } t \in [0,1] \setminus B \text{ , kde } \lambda B = \varepsilon\}$$

pro $f,g \in \mathcal{C}([0,1])$, je ϱ translačně invariantní metrika na X a (X, ϱ) tvoří metrický lineární prostor.

(d1) **Tvrzení.** *Konvergence v metrice ϱ není opět nic jiného než konvergence v míře.*

(d2) **Tvrzení.** *Označíme-li $B_\varepsilon = \{f \in X : \varrho(f,0) \le \varepsilon\}$, je konvexní obal množiny B_ε roven celému prostoru X.*

(d3) **Tvrzení.** $X^* = \{0\}$.

Návod. Lze použít (d2) a cvičení 13.15.g. Anebo jinak. Nechť $\varphi \in X^*$, $\varphi \ne 0$. Volme $n \in \mathbf{N}$ a z hustoty lineárních kombinací charakteristických funkcí intervalů v X najděme interval $(a_n, b_n) \subset [0,1]$ délky menší než $\frac{1}{n}$ tak, aby $\delta_n := \varphi(c_{(a_n,b_n)}) \ne 0$. Položíme-li $f_n := \frac{1}{\delta_n} c_{(a_n,b_n)}$, máme na jedné straně $f_n \to 0$ v míře, na druhé pak $\varphi(f_n) = 1$. ♣

(e) **Poznámka.** Podobně můžete také uvažovat prostor X všech reálných (skoro všude konečných) měřitelných funkcí na $[0,1]$ opatřený metrikou

$$\varrho^*(f,g) := \sup\{\varepsilon > 0 : \lambda\{t \in [0,1] : |f(t) - g(t)| \ge \varepsilon\} < \varepsilon\} \,.$$

Jaký je vztah ϱ a ϱ^*? Ukažte opět, že (X, ϱ^*) je metrický lineární prostor, v němž konvergence není ničím jiným než konvergencí v míře.

Topologii tohoto prostoru můžete též zadat bází okolí 0 tvořenou množinami typu

$$\{f \in X : \lambda\{x \in [0,1] : |f(x)| > \alpha\} < \beta\}\,, \text{ kde } \alpha\,, \beta > 0\,.$$

Opět $X^* = \{0\}$. Důkaz posledního tvrzení můžete vést stejně jako v (d) či můžete také postupovat následovně. Volte $\varphi \in X^*$ a podle 14.24 nalezněte takové $\delta > 0$, aby φ byl omezený funkcionál na B_δ. Dále ukažte, že $\varphi(h) = 0$ pro každou jednoduchou funkci h na X (uvědomte si, že $\varphi(h) = 0$, pokud h je charakteristická funkce měřitelné množiny mající míru menší než δ). Dále využijte hustoty jednoduchých funkcí v X. ♣

(f) Hardyho prostory $H_p(\mathbf{D})$ pro $0 < p < 1$. Hardyho prostory $H_p(\mathbf{D})$ pro $p \in (0,1)$, které jsme zavedli v *1.1.g, s definicí vhodné metriky (analogie (c)) jsou dalším příkladem úplných metrických lineárních prostorů. Tyto prostory jsou zajímavé tím, že nejsou lokálně konvexní, ale na druhé straně mají dost netriviálních spojitých lineárních forem. Kupříkladu volíme-li $z \in \mathbf{D}$ pevně, je zobrazení $f \mapsto f(z)$ prvek $\big(H_p(\mathbf{D})\big)^*$.

13.14. Varování. V obecných topologických prostorech nemusejí platit tvrzení, která známe z teorie normovaných lineárních prostorů. Jedním z důvodů je absence některých variant Hahn-Banachovy věty. A to je i jeden z okamžiků, který nás v následující kapitole povede k zavedení lokálně konvexních prostorů, tedy jisté podtřídy topologických vektorových prostorů. Tato podtřída má již značně bohatší strukturu umožňující dokazovat další věty.

Aniž nyní definujeme některé nové pojmy, připomeňme explicitně, že v topologických vektorových prostorech:

(a) prvky duálu nemusí oddělovat body původního prostoru,
(b) konečně dimenzionální podprostory nemusí mít topologické doplňky,
(c) reflexivní prostor nemusí být úplný,
(d) reflexivita (silného) duálu nemusí implikovat reflexivitu původního prostoru,
(e) uzavřený podprostor reflexivního prostoru nemusí být reflexivní,
(f) kompaktní konvexní množiny nemusí mít žádné extremální body,
(g) konvexní obal omezené množiny nemusí být omezená množina.

13.15. Elementární cvičení. (a) Nechť $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ je vektorový prostor všech spojitých funkcí na $\mathbf{R}$. Pro $\varepsilon > 0$ a $g \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$ položme

$$U(g,\varepsilon) = \Big\{f \in \mathcal{C}(\mathbf{R}) : \sup_{t\in\mathbf{R}} |f(t) - g(t)| < \varepsilon\Big\}\,.$$

Potom $\{U(g,\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ je bází okolí funkce g v jisté topologii τ na $\mathcal{C}(\mathbf{R})$. Rozhodněte, zda τ je lineární topologií na $\mathcal{C}(\mathbf{R})$.

Návod. Ukažte, že ač součet je spojitou funkcí, násobek skalárem již nemusí být. Anebo také, že okolí 0 nejsou pohlcující. ♣

(b) Ukažte, že funkce

$$\varrho(f,g) := \sup_{t\in\mathbf{R}} \frac{|f(t) - g(t)|}{1 + |f(t) - g(t)|}$$

je metrikou na prostoru $\mathcal{C}(\mathbf{R})$. Je $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ v ní metrickým lineárním prostorem?

Návod. Ukažte, že množiny $V\varepsilon := \{f \in \mathcal{C}(\mathbf{R}) : \varrho(f,0) < \varepsilon\}$, které tvoří bázi okolí nulové funkce, nejsou pro $\varepsilon < 1$ pohlcující množiny. Anebo si rozmyslete, zda násobek skalárem je spojitý. ♣

(c) Nechť A, B jsou podmnožiny topologického vektorového prostoru. Dokazujte následující tvrzení:

(c1) $A + B$ je kompaktní, pokud A i B jsou kompaktní,
(c2) $A + B$ je uzavřená, pokud A je kompaktní a B uzavřená,
(c3) $A + B$ nemusí být uzavřená, jsou-li A, B pouze uzavřené,
(c4) $A + B$ je otevřená, je-li A otevřená a B libovolná,
(c5) $A + B$ je vyvážená, jsou-li A, B vyvážené.

(d) Nechť ϱ je translačně invariantní metrika na vektorovém prostoru X. Je-li $\mathcal{N}$ filtr mající bázi

$$\big\{\{x \in X : \varrho(x,0) < \varepsilon\} : \varepsilon > 0\big\}\,,$$

nemusí ještě $\mathcal{N}$ splňovat von Neumannovy axiomy.

Návod. Podívejte se na příklad v (b) či uvažujte diskrétní metriku na vektorovém prostoru.. ♣

(e) Nechť $U \in \tau(0)$, $W := \bigcap\{\lambda U : |\lambda| = 1\}$. Ukažte, že W je opět okolí 0.

Návod. Uvažujte vyvážené okolí $V \in \tau(0)$, $V \subset U$ a ukažte, že $V \subset W$. ♣

(f) Nechť τ je lineární topologie na X a $A \subset X$. Potom $\overline{A} = \bigcap\{A + U : U \in \tau(0)\}$.

Návod. Víme, že $x \in \overline{A}$, právě když $V \cap A \neq \emptyset$ pro každou množinu V z báze filtru $\tau(x)$. Vzhledem k von Neumannově větě je tedy x bodem uzávěru množiny A, právě když $(x + U) \cap A \neq \emptyset$ pro každé vyvážené okolí U bodu 0. Protože však $U = -U$, vidíme, že $x \in \overline{A}$, právě když $x \in A + U$. (Poznamenejme, že argument využívající existenci vyváženého okolí U byl pohodlný. Stačilo však použít faktu, že $-U \in \tau(0)$, pokud $U \in \tau(0)$.) ♣

(g) Jsou-li $\emptyset$ a X jediné otevřené konvexní množiny v topologickém vektorovém prostoru X, je $X^* = \{0\}$.

Návod. Buď $\varepsilon > 0$ a $\varphi \in X^*$. Protože $\varphi^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon)$ je otevřená konvexní neprázdná množina, musí být $\varphi^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon) = X$, a tudíž $|\varphi| < \varepsilon$ na X. ♣

(h) Ukažte, že každý topologický vektorový prostor je souvislý.

Návod. Je-li X topologický vektorový prostor, je $X = \{\mathbf{F}x : x \in X\}$, kde $\mathbf{F}$ je $\mathbf{R}$ či $\mathbf{C}$. Jakožto spojitý obraz souvislé množiny je každá z množin $\mathbf{F}x$ souvislá. A protože 0 je společným bodem všech těchto množin, musí být jejich sjednocení souvislá množina. ♣

(i) Na $\mathbf{R}$ definujme *Sorgenfreyovu topologii* τ_s následujícím způsobem: Množina G leží v τ_s, jestliže ke každému $x \in G$ existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $[x, x + \varepsilon) \subset G$. Rozvažte, zda $(\mathbf{R}, \tau_s)$ tvoří topologický vektorový prostor.

14. Lokálně konvexní topologie

V posledních příkladech minulé kapitoly jsme viděli, že duální prostory k topologickým vektorovým prostorům mohly mít málo spojitých lineárních forem k tomu, aby tyto oddělovaly body původního prostoru. Proto poměrně širokou třídu topologických vektorových prostorů zúžíme, čímž dostaneme prostory s bohatší strukturou duálu. Navíc tato třída prostorů je právě tou, jejichž topologie jsou určeny soustavou pseudonorem.

14.1. Lokálně konvexní prostory. *Lokálně konvexním prostorem* rozumíme takový topologický vektorový prostor (X, τ), jehož filtr okolí nuly $\tau(0)$ má bázi tvořenou konvexními množinami.

Každý normovaný lineární prostor je lokálně konvexní. Otevřené koule $U(0, \varepsilon)$ jsou konvexní pro každé $\varepsilon > 0$ a tvoří bázi filtru okolí nuly. Poznamenejme, že rovněž tak uzavřené koule se středem v počátku tvoří bázi filtru okolí nuly.

Prostor $L^p([0,1])$ pro $p \in (0,1)$ z 13.13.c není lokálně konvexní. S dalšími příklady lokálně konvexních prostorů se setkáme v průběhu dalšího výkladu.

Než přejdeme dále, zaveďme dva nové pojmy.

14.2. Absolutně konvexní množiny a barely. Jsme-li ve vektorovém prostoru, množinám, které jsou současně konvexní a vyvážené, budeme říkat *absolutně konvexní*. Není těžké si rozmyslet, že množina A je absolutně konvexní, právě když $\lambda A + \mu A \subset A$, kdykoliv $|\lambda| + |\mu| \leq 1$.

Jako ilustrativní cvičení si dokažte, že konvexní obal vyvážené množiny je absolutně konvexní množina. Pro pohodlí připomeňme, že *konvexní obal* $\operatorname{co} A$ množiny A ve vektorovém prostoru je definován jako průnik všech konvexních množin obsahujících A. Je tedy $\operatorname{co} A$ nejmenší konvexní množinou obsahující A a můžeme jej popsat jako

$$\operatorname{co} A = \Big\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : x_1, \dots, x_n \in A, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\Big\}.$$

Pohybujeme-li se nyní v topologickém vektorovém prostoru, lze zkoumat i další pojmy. *Uzavřeným konvexním obalem* množiny A rozumíme průnik všech uzavřených konvexních množin obsahujících A. Tato množina, kterou značíme $\overline{\operatorname{co}}A$, je tedy nejmenší uzavřenou a konvexní množinou obsahující A. Jako ne těžké, nikoliv však triviální cvičení ukažte, že $\overline{\operatorname{co}}A = \overline{\operatorname{co} A}$, a že množina $\overline{\operatorname{co}}A$ je vždy absolutně konvexní, pokud A je vyvážená.

Barelem v topologickém vektorovém prostoru nazveme každou pohlcující, absolutně konvexní a uzavřenou množinu. Podotkněme, že každý barel obsahuje 0.

V normovaných lineárních prostorech je barelem určitě každá uzavřená koule se středem v počátku.

14.3. Věta. *V každém lokálně konvexním prostoru existuje báze filtru okolí nuly tvořená barely.*

Důkaz. Buď $\tau(0)$ filtr okolí nuly lokálně konvexního prostoru X a $U \in \tau(0)$. Naším cílem je najít barel B v $\tau(0)$ tak, aby $B \subset U$. To ale nebude těžké, uvědomíme-li si, že filtr $\tau(0)$ má báze tvořené jak vyváženými množinami, tak i uzavřenými či konvexními. Podle věty 13.9 existuje uzavřená množina $F \in \tau(0)$, $F \subset U$. Podle definice lokální konvexity existuje dále konvexní množina $C \in \tau(0)$, $C \subset F$. Konečně, podle von Neumannovy věty 13.7 nalezneme vyváženou množinu $V \in \tau(0)$ tak, aby $V \subset C$. Položíme-li nyní $B = \overline{\text{co}}V$, je zřejmě $B \in \tau(0)$ uzavřená a pohlcující množina, která je podle 14.2 absolutně konvexní. Dále pak máme

$$B = \overline{\text{co}}V \subset \overline{\text{co}}C = \overline{C} \subset \overline{F} = F \subset U\,.$$

■

14.4. Poznámka o von Neumannových axiomech. Vyslovíme větu o zadávání lokálně konvexních topologií pomocí filtrů okolí nuly, která je analogická von Neumannově větě v 13.7.

Věta. *V lokálně konvexním prostoru (X, τ) existuje báze $\mathcal{B}$ filtru $\tau(0)$ mající následující vlastnosti:*

(a) *každý prvek $\mathcal{B}$ je pohlcující a absolutně konvexní,*
(b) *jestliže $U \in \mathcal{B}$ a $\lambda \neq 0$, je $\lambda U \in \mathcal{B}$.*

Naopak, je-li $\mathcal{B}$ báze nějakého filtru na vektorovém prostoru X mající vlastnosti (a) a (b) (stačí dokonce pro $\lambda = \frac{1}{2}$), potom existuje právě jedna lokálně konvexní topologie τ na X, pro niž $\mathcal{B}$ je báze filtru $\tau(0)$.

Důkaz. Za $\mathcal{B}$ lze vzít všechny barely patříci do $\tau(0)$. Ty tvoří podle předchozí věty 14.3 bázi filtru okolí 0.

Jestliže $\mathcal{B}$ je báze nějakého filtru s vlastnostmi (a) a (b), stačí s přihlédnutím k větě v 13.8 ukázat, že ke každé množině $B \in \mathcal{B}$ existuje $U \in \mathcal{B}$ tak, že $U + U \subset B$. Je-li však množina $B \in \mathcal{B}$ zadána, stačí položit $U = \frac{1}{2}B$. Potom $U \in \mathcal{B}$ a $U + U = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B \subset B$ v důsledku konvexity množiny B. ■

Jak jsme uvedli, v lokálně konvexních prostorech má filtr okolí nuly bázi tvořenou barely. Každý barel obsahuje 0, avšak nemusí být okolím nuly. Jako ilustraci uveďme následující příklad dokonce normovaného lineárního prostoru.

14.5. Příklad. Nechť

$$X := \big\{f \in \mathcal{C}([0,1]) : \text{existuje } \alpha_f > 0 \text{ tak,že } |f(x)| \leq \alpha_f x \text{ pro všechna } x \in [0,1]\big\}\,.$$

Zřejmě X je podprostor Banachova prostoru $\mathcal{C}([0,1])$, v němž množina

$$B := \big\{f \in X : |f(x)| \leq 3x \text{ pro všechna } x \in [0,1]\big\}$$

je barel, který není okolím nulové funkce.

Jiné příklady lze nalézt v *14.1.

14.6. Barelované prostory. Lokálně konvexní prostor se nazve *barelovaným*, jestliže každý jeho barel je okolím nuly.

Následující věta vyčleňuje důležitou třídu lokálně konvexních prostorů, které jsou barelované.

14.7. Věta. *Každý lokálně konvexní prostor (X, τ), který je 2. kategorie, je barelovaný.*

Důkaz. Nechť B je barel v X. Protože $X = \bigcup_n nB$, existuje přirozené k tak, že množina kB má neprázdný vnitřek. Tudíž existuje i $y \in \operatorname{Int} B$. Můžeme tedy nalézt vyvážené okolí 0 tak, aby $y + V \subset B$. Ukážeme-li, že $V \subset B$, jsme hotovi. Ale to je již snadné. Je-li $x \in V$, je

$$x = \frac{1}{2}(y + x) + \frac{1}{2}(-y + x) \in \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B \subset B\,,$$

kde jsme využili toho, že B je absolutně konvexní a $V = -V$. ■

14.8. Poznámky. (a) Podle předchozí věty je každý Banachův prostor barelovaný. To platí i o širší třídě *Fréchetových prostorů*, což jsou úplně metrizovatelné lokálně konvexní prostory (prostory, jejichž topologie je vytvořená nějakou úplnou metrikou). Příkladem Fréchetova prostoru je prostor $\mathbf{s}$ z 13.13.a.

(b) Barelované prostory tvoří důležitou třídu lokálně konvexních prostorů. Platí v nich totiž následující tvrzení.

`Banach-Steinhausova věta.` *Je-li $\{T_n\}$ posloupnost spojitých lineárních funkcionálů na barelovaném prostoru X a $T_n x \to Tx$ pro každé $x \in X$, potom i T je spojitý lineární funkcionál.*

(c) Jako dobré cvičení nalezněte posloupnost $\{T_n\}$ v příkladech 14.5 a *14.1, pro niž tvrzení Banach-Steinhausovy věty neplatí.

(d) Existují barelované normované lineární prostory, které jsou 1. kategorie. Příklad lze nalézt v W.L.C. Sargent [1953]. W. Orlicz v [*1992] uvádí, že prostor $\{f \in \mathcal{C}([0,1]) : f$ je $\mathcal{C}^\infty$ na $[0,1] \setminus S_f$, kde S_f je spočetná$\}$ opatřený sup-normou je také příkladem barelovaného prostoru 1. kategorie.

(e) Z důkazu poslední věty plyne, že barely i v topologických vektorových prostorech 2. kategorie jsou okolími 0.

V dalším budeme potřebovat něco málo znát o Minkowském funkcionálu. Zopakujme tedy základní fakta.

14.9. Minkowského funkcionál ve vektorových prostorech. Nechť W je vektorový prostor. Reálnou funkci p na W nazveme *konvexním funkcionálem*, jestliže

(a) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ pro každé $x \in W$ a $\lambda \geq 0$,
(b) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ pro každé $x, y \in W$.

Zřejmě $p(0) = 0$ pro každý konvexní funkcionál.

Pseudonormou rozumíme každý konvexní funkcionál, splňující silnější podmínku

(aa) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ pro každé $\lambda \in \mathbf{F}$.

Pro libovolnou pohlcující množinu $A \subset W$ definujeme

$$p_A(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\}.$$

Funkci p_A, která je nezáporným konvexním funkcionálem, je-li A navíc konvexní, a pseudonormou v případě, kdy A je absolutně konvexní, nazýváme *Minkowského funkcionálem* množiny A (všechna tvrzení pořádně ověřte!).

Minkowského funkcionál absolutně konvexních množin má skoro všechny vlastnosti normy, nemusí však být $x = 0$, pokud $p_A(x) = 0$.

Následující lemma říká, zhruba, že množina A je pro Minkowského funkcionál p_A něco jako jednotková koule. To není zase až tak překvapující, uvědomíme-li si, jak vypadá Minkowského funkcionál pro uzavřenou jednotkovou kouli v Banachově prostoru. Je-li totiž A uzavřená jednotková koule Banachova prostoru X, je $p_A(x) = \|x\|$ pro každé $x \in X$, a tudíž $A = \{x \in X : p_A(x) \leq 1\}$.

`Lemma.` *Buď $A \subset W$ pohlcující konvexní množina. Potom*

$$\{x \in W : p_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in W : p_A(x) \leq 1\}.$$

Důkaz. Jedná se vpodstatě o aplikaci definice p_A. Je nutno si uvědomit, že pro konvexní množinu C obsahující 0 a $\alpha \in (0,1)$, je $\alpha C \subset C$ (je-li totiž $x \in \alpha C$, je $\frac{x}{\alpha} \in C$ a tudíž celá úsečka $[0, \frac{x}{\alpha}] \subset C$; na ní samozřejmě leží i bod x). ■

14.10. Minkowského funkcionál v topologických vektorových prostorech. Nyní předpokládejme, že na vektorovém prostoru máme navíc zavedenu topologii. Uvedeme lemma, které říká, za jakých podmínek je konvexní funkcionál spojitý.

`(a) Lemma.` *Buď p konvexní funkcionál na topologickém vektorovém prostoru (X, τ). Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *p je spojitý,*
(ii) *p je spojitý v 0,*
(iii) *množina $\{x \in X : p(x) < 1\}$ je otevřená,*
(iv) $\{x \in X : p(x) < 1\} \in \tau(0)$.

Důkaz. Zřejmě (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iv) (víme již, že $p(0) = 0$) a (i) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv).

Je-li splněna podmínka (iv) a $\varepsilon > 0$ je zadáno, je $U_\varepsilon := \{z \in X : p(z) < \varepsilon\} = \varepsilon\{x \in X : p(x) < 1\}$ okolím 0. Ježto $p(z) < \varepsilon$ pro $z \in U_\varepsilon$, je p spojitý v 0.

Konečně, platí-li (ii), $x_0 \in X$ a $\varepsilon > 0$ jsou zadány, najdeme vyvážené okolí V bodu 0 tak, aby $p(z) < \varepsilon$ pro $z \in V$. Využijeme-li nerovnosti

$$|p(x) - p(y)| \leq \max\bigl(p(x-y), p(y-x)\bigr),$$

dostáváme, že $|p(x) - p(x_0)| < \varepsilon$ pro každé $x \in x_0 + V$ (uvědomte si, že $x - x_0, x_0 - x \in V$). ■

(b) Věta. *Minkowského funkcionál konvexní a pohlcující podmnožiny A topologického vektorového prostoru (X,τ) je spojitý, právě když A je okolím nuly. V tomto případě pak*

$$\operatorname{Int} A = \{x \in X : p_A(x) < 1\} \quad a \quad \overline{A} = \{x \in X : p_A(x) \le 1\}\,.$$

Důkaz. Víme již, že p_A je konvexní funkcionál. Je-li navíc spojitý, je podle předchozího $\{x \in X : p_A(x) < 1\} \subset A$ a $\{x \in X : p_A(x) < 1\} \in \tau(0)$. Opačně, je-li $A \in \tau(0)$ a $\varepsilon > 0$, je pro $t \in \varepsilon A$ zřejmě $p_A(t) \le \varepsilon$, a tudíž p_A je spojitý v 0.

Ježto množina $\{x \in X : p_A(x) < 1\}$ je otevřená a je obsažena v A, je $\{x \in X : p_A(x) < 1\} \subset \operatorname{Int} A$. Buď nyní z takový bod, že $p_A(z) \ge 1$. Je-li V okolí bodu z, existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $(1+\varepsilon)z \in V$. Potom ovšem $p_A((1+\varepsilon)z) = (1+\varepsilon)p_A(z) \ge 1+\varepsilon > 1$, a tudíž $(1+\varepsilon)z \notin A$. Tím jsme ukázali, že $\{x \in X : p_A(x) < 1\} \supset \operatorname{Int} A$.

Zřejmě $\overline{A} \subset \{x \in X : p_A(x) \le 1\}$ a zbývá dokázat opačnou inkluzi. Nechť $p_A(y) = 1$. Potom existují $\lambda_n > 1$, $\lambda_n \to 1$ tak, že $y \in \lambda_n A$. Protože tedy $\frac{y}{\lambda_n} \in A$ a $\frac{y}{\lambda_n} \to y$, je $y \in \overline{A}$. ■

(c) Poznámka. Z této věty poměrně snadno plyne, že lokálně konvexní prostory jsou úplně regulární. Aniž k tomu používáme teorii uniformních prostorů (můžete porovnat s poznámkou 13.10).

Podstatnou otázkou je, jak poznáme, že topologie daného lokálně konvexního prostoru vznikne z nějaké normy. Jinými slovy, hledáme podmínky, aby daný prostor byl normovatelný. Důležitým nástrojem k odpovědi je pojem omezené množiny.

14.11. Omezené množiny. Podmnožina D topologického vektorového prostoru (X,τ) se nazve *omezenou*, jestliže ke každému okolí nuly $V \in \tau(0)$ existuje takové $\lambda > 0$, že $D \subset \lambda V$.

14.12. Poznámky. (a) Daná definice omezené množiny náleží von Neumannovi [1935]. S ní je ekvivaletní, možná překvapivě, původní přirozená Banachova definice (uvedená v S. Mazur and W. Orlicz [1933]): Množina D je omezená, jestliže $\lambda_n x_n \to 0$, kdykoliv $x_n \in D$ a $\lambda_n \to 0$. Ta silně připomíná základní větu z kurzu analýzy, podle níž součin dvou posloupností, z nichž jedna je omezená a druhá jde k 0, konverguje také k 0. Ekvivalence obou definic a další vlastnosti omezených množin jsou uvedeny ve cvičení *14.15.

(b) Za chvíli ukážeme, že koule v normovaných lineárních prostorech jsou omezené množiny i podle von Neumannovy definice. Tomu zdaleka tak není v případě metrických lineárních prostorů jak ukazuje následující příklad 14.13.b.

14.13. Příklady a varování. Tento odstavec by si každý pro dobré pochopení měl řádně rozmyslet.

(a) Omezené a metricky omezené množiny. Podmnožina D normovaného lineárního prostoru X je omezená podle von Neumannovy definice, právě když existuje $K > 0$ tak, že $D \subset U(x,K)$, tedy právě když je omezená ve smyslu definice v metrických prostorech. (Zopakujme, že množina M v metrickém prostoru je *metricky omezená*, má-li konečný průměr $\operatorname{diam} M$.) To lze říci ještě jinak. Množina D je omezená, právě když $\sup\{\|x\| : x \in D\} < \infty$.

(b) Omezenost versus metrická omezenost. Předpokládejme, že topologie τ topologického vektorového prostoru X je metrizovatelná, tedy že existuje metrika ϱ na X tak, že topologie jí generovaná je právě τ. Potom na X máme definovány dva pojmy omezenosti. Jednak je to omezenost ve smyslu topologických vektorových prostorů (von Neumannova definice) a jednak „metrická omezenost“. Mezi těmito pojmy není obecně žádný vztah.

Kupříkladu v metrickém lineárním prostoru $\mathbf{s}$ z 13.13.a je celý prostor $\mathbf{s}$ zajisté množina metricky omezená, neboť její průměr je 1. Na druhé straně tato množina není omezená podle von Neumannovy definice. Není totiž obsažena v žádném vlastním okolí nuly.

Jiným příkladem může sloužit reálná osa $\mathbf{R}$ uvažovaná s metrikou $\varrho(x,y) := \min(1, |x-y|)$.

Topologie metrizovatelného topologického vektorového prostoru X může být generována vícero metrikami. Podle 14.22 a následné poznámky (anebo přímo podle Kakutaniho věty *14.14) pak existuje dokonce translačně invariantní metrika generující topologii prostoru X. Je-li tedy topologie topologického vektorového prostoru X generována translačně invariantní metrikou ϱ, je každá omezená podmnožina X i metricky ϱ-omezená. Vskutku, buď A omezená množina v X. Množina $U := \{x \in X : \varrho(x,0) < 1\}$ je okolím 0. Najděme vyvážené okolí nuly V, $V \subset U$ a n tak, aby $A \subset nV$. Volme $a \in A$. Potom $a \in nV$, tedy $\frac{a}{n} \in V$, odkud $\varrho(\frac{a}{n}, 0) < 1$. Využitím translační invariance dostáváme $\varrho(a,0) \le n\,\varrho(\frac{a}{n}, 0) < n$. A jsme hotovi.

Obecně se může stát, že omezená podmnožina metrizovatelného topologického prostoru nemusí být metricky omezená. Příklady pocházející od O. Kalendy a S. Hencla jsou uvedeny ve cvičeních 14.30.g a h.

`(c) Kompaktnost a omezenost.` Připojme ještě jedno varování. Každá kompaktní podmnožina metrizovatelného topolgického vektorového prostoru X je metricky omezená (toto tvrzení platí v libovolném metrickém prostoru). V *14.15.d se v rámci procvičení bude dokazovat, že kompaktní podmnožiny topologických vektorových prostorů jsou omezené (podle von Neumannovy definice). Toto cvičení bude vyžadovat menší práci, nelze se odvolat na zmíněnou obecnou větu z teorie metrických prostorů.

`(d) Omezenost podprostorů.` Podprostory bývají zřídka omezené. Je-li totiž M podprostor topologického vektorového prostoru X, je M omezená množina, právě když $M \subset \overline{0}$. Pokud je tedy X Hausdorffův a M jeho netriviální podprostor, není M omezenou množinou.

14.14. Kolmogorovovo kriterium normovatelnosti. *Lokálně konvexní prostor je normovatelný, právě když je Hausdorffův a existuje v něm omezené okolí nuly.*

Důkaz. V každém normovaném lineárním prostoru je $\{x : \|x\| \le 1\}$ omezené okolí nuly.

Předpokládejme nyní, že U je omezené okolí 0 v Hausdorffově lokálně konvexním prostoru (X, τ). Protože barely tvoří bázi okolí nuly a každá podmnožina omezené množiny je také omezená, existuje dokonce omezený barel $D \in \tau(0)$. Minkowského funkcionál p_D je pseudonorma. Stačí tedy dokázat, že je dokonce norma a že topologie jím generovaná splývá s původní topologií τ na X. Podle předchozího víme, že $D = \{x \in X : p_D(x) \le 1\}$. Je-li nyní $p_D(x) = 0$ a $x \ne 0$, existuje $V \in \tau(0)$ tak, že $x \notin V$ (to plyne z toho, že X je Hausdorffův). Potom ovšem množina $E := \{nx : n \in \mathbf{N}\}$ je neomezená (neboť není $E \subset nV$ pro žádné n), což je ve sporu s tím, že $nx \in D$ pro každé n (neboť $p_D(nx) = 0$) a D je omezená.

Stačí tedy dokázat, že topologie daná normou p_D, označme ji třeba τ_p, a τ splývají. K tomu si uvědomíme, že jsou-li τ a σ dvě lokálně konvexní topologie na X, potom splývají, právě když filtry okolí nuly $\tau(0)$ a $\sigma(0)$ splývají.

Nechť tedy $G \in \tau(0)$. Existuje takové n, že $D \subset nG$. Tudíž $\{x \in X : p_D(x) < \frac{1}{n}\} \subset \frac{1}{n}D \subset G$, z čehož vidíme, že $G \in \tau_p(0)$.

Je-li naopak $U \in \tau_p(0)$, existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $\{x \in X : p_D(x) < \varepsilon\} \subset U$, a protože $\{x \in X : p_D(x) < \varepsilon\}$ je τ-otevřená, je $U \in \tau(0)$. ∎

Dostáváme se k nejdůležitější části této kapitoly. Ukážeme totiž, že lokálně konvexní topologie jsou přesně ty, které jsou určeny soustavou jistých pseudonorem. To nám v mnoha případech dává další možnost zadání lokálně konvexních topologií. Čtenář by vlastně celou teorii mohl začít studovat až v tomto okamžiku, aniž by cokoliv věděl z předchozích úvah. Začněme tedy znovu od začátku.

Poznamenejme ještě, že celý výklad je možno vést rozličnými cestami. Ukážeme zde na poměrně jednoduchý přístup, další rozšíření a souvislosti jsou pak uvedeny ve cvičeních kapitoly *14.

Začneme s předběžnými topologickými úvahami.

14.15. Systém $\mathfrak{B}$. Uvažujme kolekci pseudonorem $\mathcal{P}$ na vektorovém prostoru X. Pro každou konečnou množinu $F \subset \mathcal{P}$ a každé $\varepsilon > 0$ položme

$$U_{F,\varepsilon} := \{x \in X : p(x) < \varepsilon \text{ pro všechna } p \in F\}.$$

Dále uvažujme systém množin

$$\mathfrak{B} := \{U_{F,\varepsilon} : F \subset \mathcal{P} \text{ je konečná množina a } \varepsilon > 0\}.$$

Vše, co budeme potřebovat v dalším o systému $\mathfrak{B}$ vědět, shrnuje následující tvrzení.

14.16. Vlastnosti systému $\mathfrak{B}$. *Systém množin $\mathfrak{B}$ má následující vlastnosti:*

(a) $0 \in U$ *pro každé* $U \in \mathfrak{B}$,
(b) *ke každým dvěma množinám* $U_1, U_2 \in \mathfrak{B}$ *existuje* $U \in \mathfrak{B}$ *tak, že* $U \subset U_1 \cap U_2$,
(c) *ke každému* $U \in \mathfrak{B}$ *existuje* $V \in \mathfrak{B}$ *tak, že* $V + V \subset U$,
(d) *libovolná množina z* $\mathfrak{B}$ *je pohlcující a absolutně konvexní,*
(e) *ke každému* $U \in \mathfrak{B}$ *a každému* $\lambda > 0$ *existuje* $V \in \mathfrak{B}$ *tak, že* $\lambda V \subset U$.

Důkaz. Dokázat daná tvrzení není nikterak těžké. Stačí si chvilku pohrát s definicemi. Zkusme to. Tvrzení v (a) je samozřejmé, libovolná pseudonorma má v bodě 0 hodnotu 0. Pro ověření (b) si stačí uvědomit, že je-li množina U_1 určena konečnou množinou F_1 a $\varepsilon_1 > 0$ a U_2 dvojicí F_2, ε_2, stačí za U vzít množinu z $\mathfrak{B}$ určenou $F_1 \cup F_2$ a $\min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Je-li $U = U_{F,\varepsilon} \in \mathfrak{B}$ a $V := U_{F,\frac{\varepsilon}{2}}$, je $V + V \subset U$.

Z vlastností pseudonormy plyne ihned, že množiny z $\mathfrak{B}$ musejí být vyvážené a konvexní. Je-li $U = U_{F,\varepsilon} \in \mathfrak{B}$ a $x \in X$, je jistě $x \in \lambda U$ pro $\lambda > \frac{1}{\varepsilon}\max\{p(x) : p \in F\}$.

Konečně pro ověření (e) se stačí podívat na inkluzi $\lambda U_{F,\frac{\varepsilon}{\lambda}} \subset U_{F,\varepsilon}$. ∎

Poznámka. S přihlédnutím k (a) a (b) vidíme, že systém $\mathfrak{B}$ tvoří bázi nějakého filtru. Podíváme-li se na von Neumannovy axiomy v 13.8 a 14.4, je jasné, že $\mathfrak{B}$ určuje na X jednoznačně lokálně konvexní topologii, v níž $\mathfrak{B}$ je bází filtru okolí 0. My se však na minulost nechceme odvolávat, pokračujme tedy ve výkladu dál.

14.17. Topologie generovaná systémem pseudonorem. Nechť $\mathcal{P}$ je kolekce pseudonorem na vektorovém prostoru X. Definujme systém $\mathfrak{B}$ jako v 14.16. Řekneme, že množina $G \subset X$ leží v systému τ, jestliže ke každému $z \in G$ existuje $U \in \mathfrak{B}$ tak, že $z + U \subset G$. Jinak řečeno, $G \in \tau$, jestliže ke každému $z \in G$ existuje $\varepsilon > 0$ a $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$ tak, že

$$z + \big(\{x \in X : p_1(x) < \varepsilon\} \cap \dots \cap \{x \in X : p_n(x) < \varepsilon\}\big) \subset G\,.$$

Ukážeme, že τ tvoří lokálně konvexní topologii na X. Nazvěme ji *topologií generovanou kolekcí pseudonorem* $\mathcal{P}$.

14.18. Věta. *Systém množin τ tvoří na X topologii, v níž vektorové operace jsou spojité.*

Důkaz. Zřejmě $\emptyset, X \in \tau$. Jsou-li $G_1, G_2 \in \tau$ a $x \in G_1 \cap G_2$, existují $U_1, U_2 \in \mathfrak{B}$ tak, že $x + U_1 \subset G_1$ a $x + U_2 \subset G_2$. Podle (b) v 14.16 existuje $U \in \mathfrak{B}$ tak, že $U \subset U_1 \cap U_2$. Potom evidentně $x + U \subset G_1 \cap G_2$. Je tedy $G_1 \cap G_2 \in \tau$. Neméně snadno ukážeme, že systém τ je uzavřen na libovolná sjednocení. Tvoří tedy τ topologii.

Označme $f : (x, y) \mapsto x + y$ zobrazení z $X \times X$ do X. Volme otevřenou množinu $G \in \tau$. Chceme ukázat, že množina $f^{-1}(G)$ je otevřená v kartézském součinu topologických prostorů $(X, \tau) \times (X, \tau)$. Nechť tedy $(x, y) \in f^{-1}(G)$. Ježto $x + y \in G$, existuje $U \in \mathfrak{B}$ tak, že $x + y + U \subset G$. Vlastnost (c) v 14.16 nám zaručí existenci $V \in \mathfrak{B}$ s vlastností $V + V \subset U$. Potom zřejmě $(x + V) \times (y + V) \subset f^{-1}(G)$ (pro nevěřící: $f(x + v_1, y + v_2) = x + y + v_1 + v_2 \in x + y + V + V \subset x + y + U \subset G$), což jsme chtěli ukázat.

Důkaz spojitosti násobení skalárem je poněkud pracnější. Nicméně označme $g : (\lambda, x) \mapsto \lambda x$ zobrazení z $\mathbf{F} \times X$ do X a volme opět otevřenou množinu $G \subset X$. Je-li $(\lambda, x) \in g^{-1}(G)$, tj. $\lambda x \in G$, existuje $U \in \mathfrak{B}$ tak, že $\lambda x + U \subset G$. Najděme $V \in \mathfrak{B}$ tak, aby $V + V \subset U$. Protože V je pohlcující, existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $\varepsilon x \in V$. Ježto V je také vyvážená, dostáváme $(\beta - \lambda)x \in V$ pro každé β splňující $|\beta - \lambda| < \varepsilon$ (nezapomeňte, že $\varepsilon x \in V$ a $\left|\frac{\beta-\lambda}{\varepsilon}\right| < 1$). Vyváženost množin z $\mathfrak{B}$ spolu s vlastností (e) z 14.16 nám zaručí existenci $W \in \mathfrak{B}$ s vlastností $\beta W \subset V$ kdykoliv $|\beta| \le |\lambda| + \varepsilon$. Potom $\{\beta \in \mathbf{F} : |\beta - \lambda| < \varepsilon\} \times (x + W) \subset g^{-1}(G)$, což jsme potřebovali k otevřenosti množiny $g^{-1}(G)$ v $\mathbf{F} \times X$ dokázat. Když už jsme u detailů, ověřme přeci jen poslední inkluzi. Je-li totiž β z ε-okolí λ a $w \in W$, máme $g(\beta, x + w) = \beta(x + w) = (\beta - \lambda)x + \beta w + \lambda x \in V + V + \lambda x \subset \lambda x + U \subset G$. ∎

Další vlastnosti topologie τ shrnuje následující věta.

14.19. Věta. *Topologie τ generovaná kolekcí pseudonorem $\mathcal{P}$ na vektorovém prostoru X je lokálně konvexní. Systém množin $\mathfrak{B}$ tvoří bázi filtru $\tau(0)$ okolí 0.*

Každá pseudonorma z kolekce $\mathcal{P}$ je v této topologii spojitá. Topologie τ je nejmenší lokálně konvexní topologií na X, v níž jsou všechny pseudonormy z $\mathcal{P}$ spojité.

Topologie τ je Hausdorffova, právě když ke každému $z \neq 0$ existuje $p \in \mathcal{P}$ tak, že $p(z) \neq 0$.

Přitom posloupnost $\{x_n\}$ (obecněji zobecněná posloupnost $\{x_\gamma\}$) konverguje k prvku x, $x_n \xrightarrow{\tau} x$, právě když $p(x_n - x) \to 0$ (respektive $p(x_\gamma - x) \to 0$) pro každé $p \in \mathcal{P}$.

Důkaz. Tvrzení, že $\mathfrak{B}$ tvoří bázi filtru $\tau(0)$ plyne přímo z definice. Množina G je okolím 0 v topologii τ, existuje-li $U \in \mathfrak{B}$ tak, že $U \subset G$. Protože množiny z $\mathfrak{B}$ jsou konvexní, je topologie τ lokálně konvexní (toto může čtenář zajímající se pouze o topologie generované systémem pseudonorem vzít přímo za definici).

Podle lemmatu 14.10.a je pseudonorma $p \in \mathcal{P}$ spojitá, právě když $\{x \in X : p(x) < 1\} \in \tau(0)$. Podle toho je tedy každá pseudonorma z $\mathcal{P}$ τ-spojitá (neboť, pro osvětlení, $\{x \in X : p(x) < 1\} \in \mathfrak{B} \subset \tau(0)$). Pokud nějaká lokálně konvexní topologie θ na X činí všechny pseudonormy z $\mathcal{P}$ spojité, musí obsahovat všechny množiny $\{x \in X : p(x) < \varepsilon\}$, kde $p \in \mathcal{P}$ a $\varepsilon > 0$, a tudíž také jejich konečné průniky. Tedy filtr $\theta(0)$ okolí nuly obsahuje systém $\mathfrak{B}$ a θ musí mít více otevřených množin než τ.

K Hausdorffovosti topologie τ. Nechť je splněna uvedená podmínka. Jsou-li $x \neq y$, existuje podle předpokladu $c > 0$ a $p \in \mathcal{P}$ takové, že $p(x - y) = c$. Potom disjunktní otevřené množiny $\{t \in X : p(t - y) < \frac{c}{2}\}$ a $\{t \in X : p(t - y) > \frac{c}{2}\}$ oddělují body x a y. Naopak, je-li topologie τ Hausdorffova a $z \neq 0$, existuje okolí $V \in \tau(0)$ neobsahující z. Existují tudíž $\varepsilon > 0$ a $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}$ tak, že

$$\{x \in X : p_1(x) < \varepsilon, \ldots, p_n(x) < \varepsilon\} \subset V\,.$$

Musí tedy existovat index j, pro nějž $p_j(z) \geq \varepsilon$.

Pokud nyní $x_n \xrightarrow{\tau} x$, což je vzhledem ke spojitosti vektorových operací totéž jako $x_n - x \xrightarrow{\tau} 0$, plyne ze spojitosti každé pseudonormy $p \in \mathcal{P}$ v 0, že $p(x_n - x) \to 0$. Obráceně, nechť $p(x_n - x) \to 0$ pro každé $p \in \mathcal{P}$. Je-li $U \in \tau(0)$ okolí nuly, existují podle zavedení topologie τ takové $\varepsilon > 0$ a $p_1, \ldots, p_k \in \mathcal{P}$, že

$$\{t \in X : p_j(t) < \varepsilon\,, j = 1, \ldots, k\} \subset U\,.$$

Podle předpokladu můžeme nalézt n_0 tak, aby $p_j(x_n - x) < \varepsilon$ pro každé $j = 1, \ldots, k$ a $n \geq n_0$. Tudíž pro tato n máme $x_n - x \in U$. ■

Poznámka. Topologie τ je také nejmenší topologií, či nejmenší lineární topologií, na X, pro niž jsou všechny pseudonormy z $\mathcal{P}$ spojité. Je-li totiž σ topologie, v níž jsou všechny pseudonormy z $\mathcal{P}$ spojité, plyne z předešlého, že σ obsahuje systém $\mathfrak{B}$. Tudíž pro každé $x \in X$ je $x + \mathfrak{B} \subset \sigma$, a tedy $\tau \subset \sigma$.

Nyní uvedeme další příklady lokálně konvexních topologií, které tentokráte budeme zadávat systémem pseudonorem.

14.20. Příklady. (a) Nechť $\mathcal{C}(T)$ je prostor všech spojitých funkcí na úplně regulárním topologickém prostoru T. Pro každou kompaktní množinu $K \subset T$ položme

$$p_K(f) = \max\{|f(t)| : t \in K\}\,, \quad f \in \mathcal{C}(T)\,.$$

Potom $\{p_K\}_K$ tvoří soustavu pseudonorem (indexovanou všemi kompaktními podmnožinami T), která podle předchozího generuje lokálně konvexní topologii τ na $\mathcal{C}(T)$. Ta bývá někdy nazývána *kompaktně-otevřenou* topologií a mezi její některé základní vlastnosti patří následující:

(a1) $f_n \xrightarrow{\tau} f$, právě když posloupnost $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně k f na každé kompaktní množině $K \subset T$,

(a2) topologie τ prostoru $\mathcal{C}(T)$ je metrizovatelná (viz níže 14.22), právě když $T = \bigcup_n K_n$, kde $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \ldots$ je posloupnost kompaktů s vlastností, že každý kompakt $K \subset T$ je obsažen v některé z množin K_n; speciálně, je-li T lokálně kompaktní, je prostor $(\mathcal{C}(T), \tau)$ metrizovatelný, právě když T je σ-kompaktní.

(b) Nechť G je otevřená podmnožina komplexní roviny $\mathbf{C}$ a $\mathcal{H}(G)$ prostor všech holomorfních funkcí na G. Zadáme-li na $\mathcal{H}(G)$ topologii τ pomocí systému pseudonorem

$$p_K(h) := \max\big\{|h(t)| :\, t \in K\big\}\,,$$

kde K probíhá všechny kompaktní podmnožiny G, dostaneme lokálně konvexní topologii, která je samozřejmě restrikcí otevřeně-kompaktní topologie z prostoru $\mathcal{C}(G)$ v (a). Není těžké ukázat, že τ je metrizovatelná a $\mathcal{H}(G)$ s ní tvoří Fréchetův prostor. Topologie τ není normovatelná. O těchto i dalších vlastnostech se lze dočíst v *14.16.

(c) Nechť X je Banachův prostor. Na Banachově prostoru $\mathcal{L}(X)$ všech operátorů na X se kromě standardní normy dávající topologii τ_p „stejnoměrné“ konvergence uvažují i další lokálně konvexní topologie. Jedna z nich, τ_{SOT}, je zadána systémem pseudonorem

$$p_x : L \mapsto \|Lx\| \text{ , kde } \quad L \in \mathcal{L}(X) \quad \text{a} \quad x \in X \,.$$

Není těžké si rozmyslet, že posloupnost operátorů $\{L_n\}$ konverguje v topologii τ_{SOT} k L, právě když $L_n x \to Lx$ pro každé $x \in X$. Tedy topologie τ_{SOT}, které se říká *silná operátorová topologie*, je topologií bodové konvergence.

Jiná z mnoha dalších topologií na $\mathcal{L}(X)$ je *slabá operátorová topologie* τ_{WOT} zadaná pseudonormami

$$p_{x,\varphi} : L \mapsto |\varphi(Lx)| \quad \text{pro} \quad L \in \mathcal{L}(X) \quad \text{a} \quad x \in X,\ \varphi \in X^* \,.$$

V případě Hilbertova prostoru H se slabá operátorová topologie na $\mathcal{L}(H)$ zadává kolekcí pseudonorem

$$p_{h,k} : L \mapsto |(Lh, k)| \,, L \in \mathcal{L}(H) \quad \text{a} \quad h, k \in H \,.$$

Posloupnost operátorů $\{L_n\}$ na Hilbertově prostoru konverguje ve slabé operátorové topologii τ_{WOT} k operátoru L, právě když $(L_n x, y) \to (Lx, y)$ pro každou dvojici $x, y \in H$.

Zřejmě $\tau_{WOT} \subset \tau_{SOT} \subset \tau_p$.

(d) V tomto příkladu bude Z libovolná množina. Budeme uvažovat vektorový prostor $\mathbf{R}^Z$ všech reálných funkcí na Z. *Tichonovova topologie* τ na $\mathbf{R}^Z$ bude určena kolekcí pseudonorem $\{p_t\}_{t \in Z}$, kde

$$p_t(f) = |f(t)| \quad \text{pro} \quad f \in \mathbf{R}^Z \,.$$

(Zobecněná) posloupnost funkcí f_n konverguje v Tichonovově topologii k f, právě když konverguje bodově.

Ve speciálním případě $Z = \mathbf{R}$ je tedy Tichonovova topologie na $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ topologií bodové konvergence, která není metrizovatelná. To lze nahlédnout třeba takto: Označíme-li E množinu všech reálných funkcí na $\mathbf{R}$, které nabývají jenom hodnot 0 či 1, přičemž hodnoty 0 pouze na konečné množině, leží funkce $g = 0$ v uzávěru $\overline{E}$. Skutečně, zadáme-li libovolné okolí $U \in \tau(0)$, existují $\varepsilon > 0$ a konečná množina F tak, že

$$\left\{h \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} : |h(y)| < \varepsilon \text{ pro } y \in F\right\} \subset U \,.$$

Potom funkce $h_{\varepsilon,F}$, která je rovna 0 na F a 1 jinde, zajisté leží v $E \cap U$. Na druhé straně neexistuje žádná posloupnost funkcí $\{f_n\} \subset E$, která by v Tichonovově topologii konvergovala ke g. Porovnejte tvrzení o metrizovatelnosti $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ s následující větou 14.22.

(e) Uvažujme otevřenou podmnožinu Ω prostoru $\mathbf{R}^n$. Posloupnost kompaktních množin $\{K_n\}$ nazveme *vyčerpáním* množiny Ω, jestliže $\bigcup\limits_n K_n = \Omega$ a $K_n \subset \operatorname{Int} K_{n+1}$. Ekvivalentně, jestliže $\bigcup\limits_n K_n = \Omega$ a ke každé kompaktní množině $K \subset \Omega$ existuje index n tak, že $K \subset \operatorname{Int} K_n$.

Symbolem $\mathcal{D}(\Omega)$ označme vektorový prostor všech nekonečně diferencovatelných funkcí na Ω majících kompaktní nosič v Ω. Tedy

$$\mathcal{D}(\Omega) := \left\{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) : \operatorname{supt} \varphi := \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}} \text{ je kompakt}\right\}.$$

Pokud $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\{K_n\}$ je vyčerpání Ω a $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ je posloupnost celých nezáporných čísel, položme ještě $K_0 = \emptyset$ a

$$p_\alpha(\varphi) := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sup\left\{|D^j \varphi(x)| : |j| \le \alpha_n,\ x \in K_n \setminus K_{n-1}\right\}.$$

Je-li $j = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ n-tice celých nezáporných čísel (tzv. multiindex), klademe $|j| = j_1 + \dots + j_n$ a symbolem D^j označme diferenciální operátor

$$\frac{\partial^{|j|}}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}}.$$

Poznamenejme, že definice pseudonormy p_α je korektní (při dané funkci φ se jedná vlastně o konečný součet). Kolekce pseudonorem vytváří na prostoru $\mathcal{D}(\Omega)$ lokálně konvexní topologii τ, která nezávisí na volbě vyčerpání $\{K_n\}$. Následující větička pak popisuje konvergenci posloupností v této topologii.

Větička. *Posloupnost funkcí $\{\varphi_k\}$ z $\mathcal{D}(\Omega)$ konveruje k 0 v topologii τ, právě když existuje kompaktní množina $K \subset \Omega$ tak, že* $\operatorname{supt}\varphi_k \subset K$ *pro každé k a $D^j\varphi_k \rightrightarrows 0$ stejnoměrně na K pro každý multiindex j.*

Návod. Nechť $\{K_n\}$ je vyčerpání Ω. Předpokládejme, že uvedená podmínka je splněna a $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$. Existuje tedy index N tak, že $\operatorname{supt}\varphi_k \subset K_N$ pro každé k. Potom

$$\begin{aligned} p_\alpha(\varphi_k) &= \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \sup\left\{|D^j\varphi_k(x)| : |j| \le \alpha_n,\ x \in K_n \setminus K_{n-1}\right\} \\ &\le \max(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \sup\left\{|D^j\varphi_k(x)| : |j| \le \max(\alpha_1, \dots, \alpha_N)\ ,\ x \in K_N\right\} \to 0\,. \end{aligned}$$

Předpokládáme-li naopak, že $\{\varphi_k\}$ je taková posloupnost z $\mathcal{D}(\Omega)$, pro niž $p_\alpha(\varphi_k) \to 0$ pro každé α, je zajisté $D^j\varphi_k \rightrightarrows 0$ pro každý multiindex j na každém kompaktu $K \subset \Omega$. Zbývá ukázat existenci kompaktu $K \subset \Omega$ tak, aby $\operatorname{supt}\varphi_k \subset K$ pro každé k. Kdyby neexistoval, nalezli bychom rostoucí posloupnost indexů $\{k_m\}$ tak, aby $\varepsilon_m := \sup\{|\varphi_{k_m}(x)| : x \in K_m \setminus K_{m-1}\} > 0$. Stačí pak volit posloupnost $\alpha := \{\alpha_n\}$ tak, aby $\alpha_n \ge \frac{1}{\varepsilon_n}$. Potom totiž $p_\alpha(\varphi_{k_m}) \ge \alpha_m\,\varepsilon_m = 1$. ♣

Poznámky. (a) Spojité lineární formy na prostoru $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ se nazývají *distribuce*. Vzhledem k tomu, že spojité lineární formy a sekvenciálně spojité lineární formy na prostoru $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ splývají a vzhledem k charakteristice konvergence v prostoru $\mathcal{D}(\Omega)$ v právě uvedené větičce, lze definovat distribuce také zcela elementárně. Tomuto přístupu a dalším vlastnostem distribucí je věnována celá kapitola skript [LM].

(b) Topologie τ na $\mathcal{D}(\Omega)$ může být samozřejmě generována i jiným systémem pseudonorem. Sami ukažte, že kupříkladu systémem pseudonorem

$$p_\alpha(\varphi) = \sup\left\{|D^\alpha\varphi(x)| : x \in \Omega\right\} \quad \text{a} \quad q_\alpha(\varphi) = \sup\left\{\alpha_n \sup\left\{|\varphi(x)| : x \in K_n \setminus K_{n-1}\right\}\right\}$$

lze popsat topologii τ na $\mathcal{D}(\Omega)$.

(c) V mnoha monografiích, zejména starších, se topologie τ na $\mathcal{D}(\Omega)$ zavádí jako *induktivní limita* lokálně konvexních prostorů $\mathcal{D}_K(\Omega)$, přičemž na prostoru $\mathcal{D}_K(\Omega)$ všech funkcí z $\mathcal{D}(\Omega)$ majících nosič v pevné kompaktní množině $K \subset \Omega$ se uvažuje zcela přirozená lokálně konvexní topologie daná stejnoměrnou konvergencí na K všech možných derivací generovaná soustavou pseudonorem

$$p_j(g) := \max\left\{|D^j g(x)| : x \in K\right\}\ ,$$

kde j probíhá množinu všech multiindexů. Distribucí se pak rozumí taková lineární forma na $\mathcal{D}(\Omega)$, jejíž zúžení je spojité na každém prostoru $\mathcal{D}_K(\Omega)$. Dychtivému čtenáři doporučujeme skripta [Jel] k dalšímu studiu teorie distribucí.

(d) Některým dalším vlastnostem prostoru $\mathcal{D}(\Omega)$ je věnován odstavec *14.18.

(f) Důležitými příklady lokálně konvexních topologií jsou slabé topologie na X a X^*. Těm bude věnována celá následující kapitola.

Z předchozího plyne, že libovolná kolekce pseudonorem na vektorovém prostoru generuje lokálně konvexní topologii. Důležitá následující věta říká, že každý lokálně konvexní prostor můžeme získat tímto způsobem.

14.21. Věta. *Každá lokálně konvexní topologie τ je generována nějakou kolekcí pseudonorem.*

Důkaz. Podle věty 14.14 barely tvoří bázi filtru okolí 0. Víme také, že Minkowského funkcionál každého barelu $B \in \tau(0)$ je τ-spojitý. Protože navíc $B = \{x : p_B(x) \le 1\}$, topologie generovaná soustavou pseudonorem $\{p_B :\ B \in \tau(0) \text{ je barel}\}$ dává právě původní topologii τ. ■

Další věta udává, kdy daný lokálně konvexní prostor je metrizovatelný. Podotkněme přitom, že je velký rozdíl mezi normovatelností a metrizovatelností — každý normovatelný prostor je metrizovatelný, zdaleka však ne obráceně. A ještě poznámka — protože lokálně konvexní prostory nemusejí být Hausdorffovy, uvedeme podmínky pseudometrizovatelnosti. Prostor je samozřejmě metrizovatelný, právě když je pseudometrizovatelný a Hausdorffův.

14.22. Pseudometrizovatelnost lokálně konvexních prostorů. *Pro lokálně konvexní prostor (X, τ) jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) *X je pseudometrizovatelný,*
(ii) *existuje spočetná báze filtru okolí nuly $\tau(0)$,*
(iii) *topologie τ je generována dokonce translačně invariantní pseudometrikou,*
(iv) *topologie τ je generována spočetně mnoha pseudonormami.*

Důkaz. Implikace (iii) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iv) jsou zřejmé. Zbývá dokázat, že (iv) $\Rightarrow$ (iii). Nechť tedy $\{p_n\}_n$ je systém spočetně mnoha pseudonorem generujících topologii τ. Potom není těžké ověřit, že funkce

$$\varrho(x,y) := \sum_n 2^{-n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)} \quad \text{pro} \quad x,y \in X$$

je pseudometrika na X invariantní vůči translacím. Abychom ukázali, že topologie generovaná ϱ splývá s původní topologií τ, stačí opět ověřit (podobně jako v důkazu Kolmogorovova kriteria 14.14), že filtry okolí nuly jsou stejné.

Bázi okolí nuly v topologii generované ϱ tvoří množiny $G_n := \{x \in X : \varrho(x,0) < 2^{-n}\}$. Protože však pseudonormy p_n jsou τ-spojité, je i funkce $x \mapsto \varrho(x,0)$ τ-spojitá, a tudíž každá množina G_n leží v $\tau(0)$.

Obráceně, protože při uvedeném označení je $G_{n+1} \subset \{x \in X : p_n(x) < 1\}$, je každá z množin $\{x \in X : p_n(x) < 1\}$ (jejichž konečné průniky leží v bázi filtru $\tau(0)$) okolím 0 v topologii generované ϱ. Poslední inkluzi není těžké dokázat, je-li totiž $p_n(x) \geq 1$, je $\frac{p_n(x)}{1+p_n(x)} \geq \frac{1}{2}$, tudíž i $\varrho(x,0) \geq 2^{-n-1}$ a x nemůže ležet v G_{n+1}. ■

14.23. Poznámka. Obdobné tvrzení platí i pro topologické vektorové prostory, důkaz však využívá hlubších vět. Čtenáře odkazujeme kupříkladu na C. Swartz [*1992], též porovnejte *14.14.

14.24. Spojitost lineárních funkcionálů. *Nechť X je topologický vektorový prostor a f lineární funkcionál na X. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *f je spojitý,*
(ii) *f je spojitý v 0,*
(iii) *jádro* $\ker f$ *je uzavřená množina,*
(iv) *zobrazení $x \mapsto |f(x)|$ je spojitá pseudonorma na X,*
(v) *existuje U okolí bodu 0 tak, že $|f(x)| \leq 1$ pro $x \in U$.*

Je-li topologie X generována systémem pseudonorem $\mathcal{P}$, je dále ekvivalentní:

(vi) *existují $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$ a $K > 0$ tak, že $|f(x)| \leq K \max\{p_1(x), \dots, p_n(x)\}$ pro každé $x \in X$.*

Návod. Není co řešit v případě, kdy f je nulový funkcionál. Jinak zřejmě (iii) $\Leftarrow$ (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (ii). Nechť $\ker f$ je uzavřená množina a $f(z) = 1$. Najděme vyvážené okolí nuly U tak, aby $(z+U) \cap \ker f = \emptyset$. Potom $U \subset \{x \in X : |f(x)| < 1\}$ (zajisté, je-li totiž $|f(x)| \geq 1$, je $\frac{-x}{f(x)} \in U$, a tedy $z - \frac{-x}{f(x)} \in (z+U) \cap \ker f$). Ukázali jsme tedy, že (iii) $\Rightarrow$ (v). Předpokládáme-li (ii), k $\varepsilon = 1$ existují $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in I$ tak, že $|f(x)| \leq 1$, pokud $\max\bigl(p_{\alpha_1}(x), \dots, p_{\alpha_n}(x))\bigr) \leq 1$. Odtud plyne (vi). Konečně implikace (vi) $\Rightarrow$ (iv) je skoro zřejmá. ♣

14.25. Topologický duál. Jak jsme se již zmínili, třída lokálně konvexních prostorů má tu důležitou vlastnost, že prvky duálů oddělují body. Na závěr této kapitoly uvedeme tedy dvě tvrzení Hahn-Banachova typu.

Nemusíme snad zdůrazňovat, že symbol X^* značí vektorový prostor všech spojitých lineárních funkcionálů na lokálně konvexním prostoru X a že X^* se nazývá *(topologický) duál* k X. Poznamenejme ale, že na X^* nemáme (zatím) žádnou topologii, samozřejmě s výjimkou, pokud se zrovna nejedná o duál k Banachovu prostoru X.

14.26. Věta. *Nechť X je Hausdorffův lokálně konvexní prostor. Potom prvky X^* oddělují body X: Jsou-li $x, y \in X$, $x \neq y$, existuje $\varphi \in X^*$ tak, že $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.*

Důkaz. Stačí oddělit 0 a z, $z \neq 0$. Podle vět 14.21 a 14.19 existuje spojitá pseudonorma p na X, $p(z) > 0$. Algebraická verze Hahn-Banachovy věty 2.16 nám pak zaručuje existenci takové lineární formy f na X, že $f(z) = p(z)$ a $|f| \leq p$ všude na X. Z poslední nerovnosti ihned plyne, že i f je spojitá v 0, a protože f je lineární, je $f \in X^*$. ■

Předchozí věta 14.26 je speciálním případem obecnější následující věty Hahn-Banachova typu. Její důkaz není pochopitelně již tak přímočarý.

14.27. Malá Mazurova věta. *Nechť M je uzavřená konvexní podmnožina reálného lokálně konvexního prostoru (X,τ). Jestliže $0 \in M$ a $x_0 \notin M$, existuje $f \in X^*$ tak, že $f(x_0) > 1$ a $f \le 1$ na M.*

Je-li navíc M absolutně konvexní, lze volit f tak, aby dokonce $|f| \le 1$ na M.

Důkaz. Protože M je uzavřená, existuje barel $V \in \tau(0)$ tak, že $M \cap (x_0 + V) = \emptyset$. Potom zřejmě $(M + \frac{V}{2}) \cap (x_0 + \frac{V}{2}) = \emptyset$ (kdyby totiž $m + \frac{1}{2}y = x_0 + \frac{1}{2}z$ pro $m \in M$ a $y, z \in V$, potom by využitím absolutní konvexity V bylo $m = x_0 + \frac{1}{2}(y - z) \in x_0 + V$). Tedy množina $U := \overline{M + \frac{V}{2}}$ neobsahuje bod x_0. Protože dále $0 \in M$, je $\frac{V}{2} \subset U$, a U je tudíž uzavřené konvexní okolí 0. (Je-li M absolutně konvexní, je dokonce $U \in \tau(0)$ barel.) Podle věty 14.10.b je Minkowského funkcionál p_U spojitý a $U = \{x \in X : p_U(x) \le 1\}$. Vidíme, že $p_U(x_0) > 1$ a užitím algebraické verze Hahn-Banachovy věty 2.16 (přesněji poznámky 2.17) dostáváme lineární funkcionál $f \in X^{\#}$ s vlastnostmi

$$f(x_0) = p_U(x_0) > 1 \quad \text{a} \quad f(x) \le p_U(x) \quad \text{pro} \quad x \in X$$

(za předpokladu absolutní konvexity M dokonce $|f| \le p_U$ na X). Nyní si stačí uvědomit, že $M \subset U$ a ukázat, že f je spojitý funkcionál. To je zřejmé v případě, kdy $|f| \le p_U$ na X. V obecném případě však alespoň vždy máme $-p_U(-x) \le f(x) \le p_U(x)$ pro každé $x \in X$ a i to již stačí ke spojitosti f v nule. ■

14.28. Důsledek. *Nechť M je podprostor lokálně konvexního prostoru X takový, že $M^\perp = \{0\}$. Potom je M hustý v X.*

Zde samozřejmě $M^\perp := \{\varphi \in X^* : \varphi = 0 \text{ na } M\}$.

Důkaz. Pokud $x \in X \setminus \overline{M}$, najdeme podle předešlé malé Mazurovy věty $f \in X^*$ tak, aby $f \le 1$ na $\overline{M}$ a $f(x) > 1$. Protože tedy $f(\overline{M})$ je vlastní podprostor $\mathbf{R}$, musí být $f(\overline{M}) = \{0\}$. Takže jsme nalezli nenulovou formu $f \in M^\perp$. ■

14.29. Poznámky. (a) Pomocí malé Mazurovy věty lze odvodit řadu dalších vět o oddělování konvexních množin v lokálně konvexních prostorech. Některé z nich, pod názvem geometrické Hahn-Banachovy věty, jsou uvedeny v *14.7.

(b) Malinké zobecnění malé Mazurovy věty, v němž se nepožaduje, aby $0 \in M$, dá kupříkladu existenci spojité lineární formy $f \in X^*$ a $\varepsilon > 0$ s vlastnostmi $f(m) \le f(x_0) - \varepsilon < f(x_0)$ pro každé $m \in M$.

(c) Při aplikaci Hahn-Banachovy věty v předchozích důkazech jsme vlastně používali její verzi v reálných prostorech. Uvažujeme-li daný lokálně konvexní prostor nad tělesem komplexních čísel, musíme trochu upravit závěr tvrzení. Nalezneme totiž $f \in X^*$ tak, že $\operatorname{Re} f(x_0) > 1$ a $\operatorname{Re} f \le 1$ na M.

14.30. Elementární cvičení. (a) Nechť X, Y jsou topologické vektorové prostory a $f : X \to Y$ spojité lineární zobrazení. Je-li $D \subset X$ omezená množina, je omezená i množina $f(D)$.

(b) V Hilbertově prostoru l^2 definujme následující operátory

$$T_n : \{x_n\} \mapsto (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n \text{ nul}}, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots) \quad \text{a} \quad S_n : \{x_n\} \mapsto (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n \text{ nul}}, x_1, x_2, \ldots)\,.$$

Ukažte, že $T_n, S_n \in \mathcal{L}(l^2)$. Dále ukažte, že $T_n \to 0$ v silné operátorové topologii τ_{SOT}. Protože však $\|T_n\| = 1$, nemůže posloupnost operátorů $\{T_n\}$ konvergovat k 0 v normě prostoru $\mathcal{L}(l^2)$.

Posloupnost $\{S_n\}$ konverguje k 0 ve slabé operátorové topologii τ_{WOT}, nekonverguje však v silné operátorové topologii (natož pak v normě).

Návod. První tvrzení o posloupnosti $\{T_n\}$ dokáže snad každý. Pokud jde o ověření $S_n \to 0$ v topologii τ_{WOT}, použijte Fréchet-Rieszovu větu 2.9 a Schwarzovu nerovnost 1.12. Volíme-li $x = (1, 0, \ldots)$, je $\|S_n x - S_k x\| = \sqrt{2}$. Nemůže tedy posloupnost $\{S_n\}$ konvergovat v topologii τ_{SOT}. ♣

(c) Buď L^p topologický vektorový prostor z příkladu 13.13.c ($p \in (0,1)$) a $B_1 = \{f \in L^p : \varrho(f, 0) \le 1\}$. Ukažte, že B_1 je omezená množina.

Návod. Využijte toho, že množiny $B_\lambda := \{f \in L^p : \varrho(f, 0) \le \lambda\}$ tvoří bázi filtru okolí nuly v L^p a $B_1 = \lambda^{-\frac{1}{p}} B_\lambda$. ♣

(d) Na prostoru l^2 uvažujme pseudonormy

$$p_x(y) := \sum_n |x_n y_n| \,, \quad \text{kde} \quad y = \{y_n\} \in l^2$$

indexované body $x = \{x_n\} \in l^2$. Nechť τ je topologie generovaná systémem pseudonorem $\{p_x\}_{x \in l^2}$, w slabá topologie na l^2 a n normová topologie l^2. Ukažte, že $w \subset \tau \subset n$, přičemž inkluze jsou ostré.

Návod. Nechť $\varphi \in (l^2)^*$. Podle Fréchet-Rieszovy věty 2.9 existuje $x \in l^2$ tak, že $|\varphi(y)| = |(y,x)| \le p_x(y) \le \|x\|\,\|y\|$ pro každé $y \in l^2$. Odtud plyne, že τ je silnější topologie než w a slabší než n. Dále ukažte, že $e_n \to 0$ v topologii τ. ♣

(e) Na Banachově prostoru $(l^1, \|.\|_1)$ všech absolutně konvergentních posloupností $x = \{x_n\}$ uvažujte lokálně konvexní topologii τ generovanou systémem pseudonorem

$$p_n : x \mapsto |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \,, \quad n \in \mathbf{N} \,.$$

Ukažte, že (l^1, τ) je metrizovatelný lokálně konvexní prostor, který je 1. kategorie.

Návod. Uzavřená jednotková koule $\{x \in l^1 : \|x\|_1 \le 1\}$ je uzavřená a řídká v topologii τ. ♣

(f) Do prostoru $\mathcal{D}(\Omega)$ z příkladu 14.20.e zaveďme lokálně konvexní topologii η pomocí soustavy pseudonorem

$$p_j(\varphi) := \max\left\{|D^j\varphi(x)| : x \in \Omega\right\},$$

kde j probíhá množinu všech multiindexů. Ukažte, že topologie η je metrizovatelná a že prostor $\mathcal{D}(\Omega)$ v této topologii není sekvenciálně úplný (ve smyslu definice *13.3).

Návod. Uvažujte následující posloupnost $\{f_n\}$ hladkých funkcí na $\Omega = \mathbf{R}$: $f_n = 0$ na $(-\infty, 0] \cup [n, \infty)$, $f_n(1) = f_n(2) = \cdots = f_n(n-1) = 0$, $|f_n| \le \frac{1}{2^j}$ na intervalu $[j-1, j]$ a $f_n(\frac{2j-1}{2}) = \frac{1}{2^j}$ pro $j = 1, \ldots, n$.

Jako užitečné cvičení ukažte, že posloupnost $\{f_n\}$ netvoří omezenou množinu v prostoru $(\mathcal{D}(\Omega), \eta)$. ♣

O. Kalenda

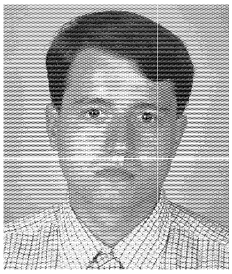
(g) Uveďme následující *Kalendův příklad* vztahující se k diskusi v 14.13. Uvažujme normovaný lineární prostor c_{00} z příkladu *1.1.b. Definujme posloupnost funkcí $\{s_n\}$ předpisem

$$s_n(x) = \begin{cases} x & \text{pro} \quad x \in [-1, 1]\,, \\ 1 + n(x-1) & \text{pro} \quad x \in [1, \infty)\,, \\ -1 + n(x+1) & \text{pro} \quad x \in (-\infty, -1]\,. \end{cases}$$

Pro $x = \{x_n\}$ a $y = \{y_n\}$ z c_{00} položme

$$\varrho(x, y) := \sup\left\{|s_n(x_n) - s_n(y_n)| : n \in \mathbf{N}\right\}$$

(ve skutečnosti se jedná o supremum z konečné množiny). Není těžké ukázat, že ϱ je korektně definovaná metrika na c_{00}. Pomocí nerovnosti $|a - b| \le |s_n(a) - s_n(b)| \le n|a - b|$ platné pro každé $a, b \in \mathbf{R}$ a $n \in \mathbf{N}$ ukažte, že ϱ a původní max-norma $\|.\|$ generují na c_{00} tutéž topologii. Stačí prostě ověřit, že $\varrho(z_n, z) \to 0$, právě když $\|z_n - z\| \to 0$. Množina $D := \{x \in c_{00} : \|x\| \le 2\}$ je ve smyslu von Neumannovy definice omezená v prostoru c_{00}. Ale není omezená v metrice ϱ, neboť $\varrho - \operatorname{diam} D = \infty$. Stačí si uvědomit, že $\varrho(2e_n, 0) = s_n(2) = n + 1$ (kde e_n je standardní vektor mající nenulovou hodnotu 1 pouze na n-tém místě).



S. Hencl

(h) Také následující *Henclův příklad* metriky na l^2, v níž existuje omezená množina, která není metricky omezená, je zajímavý. Definujme funkce

$$f_k(t) = \begin{cases} t, & |t| \le 1, \\ 1 + k(|t| - 1), & |t| > 1. \end{cases}$$

Pro $x = \{x_n\}$ a $y = \{y_n\}$ z l^2 položme

$$d(x, y) := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x_k) - f_k(y_k)|^2\right)^{1/2}.$$

Zřejmě d je metrika na l^2 a $d(x,y) \ge \|x - y\|$. Nechť $x \in l^2$ je libovolné. Existuje $n = n(x) \in \mathbf{N}$ tak, že $|x_k| < 1/2$ pro všechna $k \ge n$. Je-li $y \in l^2$, $\|y - x\| < \frac{1}{2}$, potom pro všechna $k \ge n$ je $|y_k| \le 1$. Odtud dostaneme, že

$$|f_k(x_k) - f_k(x)| \le \begin{cases} k|x_k - y_k| \le n|x_k - y_k|, & k < n, \\ |x_k - y_k| \le n|x_k - y_k|, & k \ge n, \end{cases}$$

takže $d(x,y) \le n(x)\,\|y - x\|$ pro $\|y - x\| \le \frac{1}{2}$. Tedy vzdálenost d určuje stejnou topologii jako standardní norma na l^2, ale normová koule o poloměru 3 je d-neomezená, neboť $d(2e_n, 0) = 1 + n$ pro všechna $n = 1, 2, \ldots$.

(i) Je-li f nespojitý lineární funkcionál na topologickém vektorovém prostoru X, je $\ker f$ hustý podprostor X.

Návod. Především f je nenulový funkcionál. Tudíž $H := \ker f$ je maximální vlastní podprostor X podle A.4. Protože podle charakteristiky v 14.24 H není uzavřený, a protože $\overline{H}$ je podprostor X, musí být $\overline{H} = X$. ♣

(ii) Ukažte, že lokálně konvexní prostor X je barelovaný, právě když neexistuje řídká absolutně konvexní množina $B \subset X$ tak, že $X = \bigcup\{nB : n \in \mathbf{N}\}$.

Návod. Není-li X barelovaný, existuje barel B, který není okolím nuly. Ten musí být řídký, neboť B je uzavřená a konvexní množina. A protože B je pohlcující a vyvážená, je $X = \bigcup nB$. Předpokládejme, že X je barelovaný a $B \subset X$ řídká absolutně konvexní množina s vlastností $X = \bigcup nB$. Potom $\overline{B}$ je barel, tedy okolí 0. Takže $\overline{B}$ má neprázdný vnitřek, což je spor s řídkostí B. ♣

15. Slabé topologie a poláry

Slabé topologie tvoří důležitý nástroj při zkoumání mnoha problémů v teorii Banachových prostorů.

Víme, že omezené uzavřené podmnožiny Banachových prostorů nekonečné dimenze nemusejí být kompaktní. To je způsobeno, velice hrubě řečeno, tím, že v Banachových prostorech je příliš mnoho otevřených množin na to, aby z pokrytí třeba jednotkové koule bylo možno vybrat konečné podpokrytí. Cílem je tedy „vyházet přebytečné" otevřené množiny tak, aby koule již byly kompakty. Nechceme se ale zbavit zase příliš mnoha otevřených množin, musí jich zůstat dost k tomu, aby neubylo spojitých lineárních funkcionálů. Tím se nám skutečně podaří získat rozumné topologie, které budou lokálně konvexní, ale nevzniknou z žádné normy. Dostaneme právě ty topologie, v nichž konvergence se shoduje se slabou konvergencí zavedenou v třetí kapitole: Posloupnost $\{x_n\}$ konverguje slabě k x, symbolicky $x_n \stackrel{w}{\to} x$, právě když $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ pro každý spojitý lineární funkcionál.

Na tomto místě přidejme hned varování — protože slabé topologie v nekonečně dimenzionálních prostorech jsou „silně" nemetrizovatelné, nestačí k jejich popisu zadat konvergenci posloupností (a je třeba pracovat se zobecněnými posloupnostmi).

To je jeden z motivů, proč budeme studovat slabé topologie. Ty je možno zavést v různém stupni obecnosti a přitom volit různé metodické postupy výkladu. Od zcela abstraktní teorie až po studium konkrétních topologií. My zvolíme střední cestu. Neomezíme se však jen na Banachovy prostory, budeme postupovat obecněji v lokálně konvexních prostorech.

V dalším budeme předpokládat, že všechny lokálně konvexní prostory jsou Hausdorffovy.

Osvěžme si však nejprve pojem kanonického vnoření X do druhého duálu, což budeme potřebovat k lepšímu porozumění dalšího výkladu. V případě Banachova prostoru X toto zobrazení ε bylo definováno v 2.29. Současně jsme odvodili, že ε je prosté, izomorfní a izometrické zobrazení X na vektorový podprostor $\varepsilon X \subset X^{**}$. Jak jsme již uvedli, v případě lokálně konvexního prostoru X, na (topologickém) duálu X^* nemáme (zatím) žádnou topologii, nelze tedy vůbec mluvit o druhém (topologickém duálu) k X. Označme tedy $X^{*\#}$ algebraický duál k X^* a definujme kanonické vnoření X do $X^{*\#}$.

15.1. Kanonické vnoření X do $X^{*\#}$. Je-li X lokálně konvexní prostor, definujme *kanonické vnoření* ε prostoru X do $X^{*\#}$ předpisem $\varepsilon : x \mapsto \varepsilon_x$, kde ε_x je definováno jako $\varepsilon_x(\varphi) := \varphi(x)$ pro $\varphi \in X^*$.

Rozmyslete si sami, že zobrazení ε je lineární a prosté. O jeho spojitosti nemá (zatím) smyslu mluvit.

15.2. Slabé topologie. Buď X lokálně konvexní prostor. Uvažujme na X lokálně konvexní topologii zadanou systémem pseudonorem $\{p_\varphi\}_{\varphi \in X^*}$, kde

$$p_\varphi : x \mapsto |\varphi(x)| \,, \quad x \in X$$

pro $\varphi \in X^*$. Tuto lokálně konvexní topologii budeme nazývat *slabou topologií* na X a označovat symbolem $\sigma(X, X^*)$. V případě, kdy X je normovaný lineární prostor a nebude hrozit nedorozumění, jí budeme též říkat *w-topologie* a označovat jednoduše písmenem w.

Zopakujme, že (zobecněná) posloupnost $\{x_n\}$ slabě konverguje k x, symbolicky $x_n \stackrel{\sigma(X,X^*)}{\to} x$ anebo $x_n \stackrel{w}{\to} x$, jestliže $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$ pro každý spojitý lineární funkcionál $\varphi \in X^*$.

Jak lze popsat bázi $\sigma(X,X^*)(0)$ filtru okolí 0 v topologii $\sigma(X,X^*)$? Protože prostor X^* je uzavřen na násobení skaláry, je $p_{\varepsilon\varphi} = \varepsilon p_\varphi$ pro $\varepsilon > 0$, a bázi $\sigma(X,X^*)(0)$ tvoří tedy množiny

$$\bigl\{x \in X : |\varphi_1(x)| < 1\,, \ldots, |\varphi_n(x)| < 1,\ \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in X^*\bigr\}\,.$$

Podobně zavádíme slabou topologii $\sigma(X^*,X)$ na X^*. Ta bude generována systémem pseudonorem $\{p_x\}_{x\in X}$, kde pro $x \in X$

$$p_x : \varphi \mapsto |\varphi(x)|\,, \quad \varphi \in X^*\,.$$

Tato $\sigma(X^*,X)$-topologie bude v případě normovaných lineárních prostorů také označována symbolem w^*.

Protože však $\sigma(X^*,X)$-topologie je generována také systémem pseudonorem

$$p_x : \varphi \mapsto |\varepsilon_x(\varphi)|\,,$$

budeme ji také někdy označovat symbolem $\sigma(X^*,\varepsilon X)$. Je tedy $\sigma(X^*,\varepsilon X)$ totéž co $\sigma(X^*,X)$.

Obdobně jako výše lze popsat konvergenci v $\sigma(X^*,X)$-topologii a bázi filtru okolí 0.

15.3. Varování. Uvažujme pro jednoduchost případ Banachova prostoru X. Na jeho duálu X^* máme nyní definovány dvě „slabé" topologie — jednou je w^*, kterou jsme označili také jako $\sigma(X^*,\varepsilon X)$, a dále „slabou" w-topologii odvozenou z X^{**}, což je vlastně v našem označení topologie $\sigma(X^*,X^{**})$. Tyto topologie, samozřejmě v případě nereflexivního prostoru X, jsou podstatně různé!

A ještě jednu poznámku. Jak uvidíme později, teorie pro w či w^* topologie nejsou zcela symetrické.

V dalším výkladu bychom se mohli omezit při studiu slabých topologií pouze na případ $\sigma(X,X^*)$-topologie na X a $\sigma(X^*,X)$-topologie na X^*. Leckterá tvrzení bychom pak ale museli vyslovovat na dvakrát, důkazy by se též prodloužily. Přistoupíme proto k obecnějšímu pohledu na teorii slabých topologií. Čtenář, kterého tato obecnost nezajímá, si docela dobře může představit pod níže zavedenou $\sigma(X,M)$-topologií topologii $\sigma(X,X^*)$ na lokálně konvexním (či dokonce na Banachově) prostoru X.

15.4. Obecné slabé topologie. Nechť X je vektorový prostor a M vektorový podprostor jeho (algebraického) duálu $X^\#$. Na X definujme *slabou topologii* $\sigma(X,M)$ jako lokálně konvexní topologii generovanou systémem pseudonorem $\{p_f\}_{f\in M}$, kde $p_f(x) = |f(x)|$ pro $x \in X$ a $f \in M$. Bázi okolí nuly tvoří množiny

$$\bigl\{x \in X : \max\bigl(|f_1(x)|, \ldots, |f_n(x)|\bigr) \le 1\,, f_1, \ldots, f_n \in M\bigr\}\,.$$

15.5. Představa. Abychom si udělali trochu představu o slabých topologiích, předpokládejme pro jednoduchost, že w je slabá topologie na nekonečně dimenzionálním normovaném lineárním prostoru X. Je-li U slabé w-okolí 0, existují $f_1, \ldots, f_n \in X^*$ tak, že $\{x \in X : |f_1(x)| < 1, \ldots, |f_n(x)| < 1\} \subset U$. Množina $M := \bigcap_{i=1}^n \ker f_i$ je bezesporu uzavřeným lineárním podprostorem X obsaženým v U. Ukážeme, že M je netriviální. Kdyby totiž $M = \{0\}$, každá spojitá lineární forma $f \in X^*$ by splňovala $\bigcap_{i=1}^n \ker f_i \subset \ker f$. Podle základního lemmatu v A.5 by potom f byla lineární kombinací forem $f_1, \ldots, f_n$, jinými slovy prostor X^* by měl konečnou dimenzi. A má-li X^* konečnou dimenzi, má ji i původní prostor X. Dokázali jsme tedy následující větu, jejíž zobecnění na případ lokálně konvexních topologií by zajisté nečinilo žádné potíže.

15.6. Věta. *Buď X normovaný lineární prostor nekonečné dimenze. Potom každé slabé w-okolí prvku 0 obsahuje netriviální uzavřený podprostor.*

Speciálně, každé slabé w-okolí 0 musí být neomezenou množinou v prostoru X.

15.7. Poznámka. Každé w-okolí nuly je také podle 14.13.d w-neomezenou množinou. Odtud podle Kolmogorovova kriteria 14.14 speciálně plyne, že slabá w-topologie na nekonečně dimenzionálním normovaném lineárním prostoru není normovatelná.

15.8. Příklad. Ve světle posledního postřehu si lze již lehko vysvětlit, proč kupříkladu posloupnost prvků ortonormální báze separabilního Hilbertova prostoru nekonečné dimenze konverguje k 0, či obecněji proč 0 leží ve slabém w-uzávěru jednotkové sféry $S_X := \{x \in X : \|x\| = 1\}$. Je-li totiž U libovolné w-okolí nulového prvku, obsahuje U netriviální podprostor. A ten nutně musí protnout sféru S_X. Každé w-okolí 0 tedy obsahuje body S_X.

Podobně bychom mohli vysvětlit, proč vlastně slabým w-uzávěrem jednotkové sféry S_X je dokonce celá uzavřená jednotková koule $\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$. Tvrzení a pořádný důkaz uvedeme v 16.17.

15.9. Poznámky. (a) Jedná se o zobecnění předchozích definic. Tam jsme jednak uvažovali případ (lokálně konvexního) prostoru X a volba $M = X^*$ vedla k pojmu $\sigma(X, X^*)$-topologie na X.

Nyní si uvědomme, jak byla definována w^* čili $\sigma(X^*, X)$-topologie. Ta byla generována systémem pseudonorem

$$p_x : \varphi \mapsto |\varphi(x)| \, , \varphi \in X^* \, ,$$

kde x probíhalo prostor X.

Jak je podle obecné definice definována topologie $\sigma(X^*, \varepsilon X)$? Ta je generována systémem pseudonorem

$$p_F : \varphi \mapsto F(\varphi) \, , \varphi \in X^* \, ,$$

kde F probíhá nyní množinu εX.

Je-li však $F \in \varepsilon X$, existuje právě jedno $x \in X$ tak, že $\varepsilon(x) = F$, kterážto poslední rovnost říká, že pro každé $\varphi \in X^*$ platí $\varphi(x) = F(\varphi)$.

Závěr — slabá topologie $\sigma(X^*, X)$ není nic jiného, než $\sigma(X^*, \varepsilon X)$-topologie. Je tedy i ona speciálním případem obecné definice pro případ X^* a $M = \varepsilon X$.

Tato poznámka byla značně zdlouhavá, nicméně velmi podstatná pro pochopení dalšího. Znovu zopakujme, že v případě Banachova prostoru X máme na X^* zatím definovány tyto topologie:
— w^*-topologii $\sigma(X^*, \varepsilon X)$,
— w-topologii $\sigma(X^*, X^{**})$,
— „normovou“ topologii.

(b) Mnozí autoři jdou ještě dále a uvažují dvojice vektorových prostorů (E, F) svázaných nedegenerovanou bilineární formou b (v našem případě $b(x, f) = f(x)$), na nichž definují obecné slabé $\sigma(E, F)$-topologie. Vzhledem k tomu, že se nedostane o moc obecnější přístup, který podle mého není navíc pro nespecialisty ani moc přehledný, nebudeme se jím vůbec zabývat.

15.10. Popis duálů. První otázkou je, jak vypadá (topologický) duál k X, uvažujeme-li jej se slabou topologií. Odpověď není příliš těžká. Ukážeme, že $(X, \sigma(X, X^*))^* = X^*$. Především si uvědomme, že lineární forma f na X je spojitá v lokálně konvexní topologii τ, právě když příslušná pseudonorma $p_f := |f|$ je τ-spojitá. To plyne z toho, že jak f tak i p_f jsou spojité, právě když jsou spojité v 0 (viz 14.24 a 14.10.a). Tedy každá $f \in X^*$ je i $\sigma(X, X^*)$-spojitá na X. Naopak, protože slabá topologie w je neslabší topologií, při níž jsou spojité všechny pseudonormy p_f, $(f \in X^*)$, leží každá $\sigma(X, X^*)$-spojitá lineární forma na X v X^*.

15.11. Izomorfizmus topologických vektorových prostorů. Topologické vektorové prostory X a Y jsou *izomorfní*, existuje-li prosté homeomorfní zobrazení X na Y, které zachovává algebraické operace. Přesněji bychom mohli třeba používat názvu *TVS-izomorfizmus*, někteří autoři používají též termínu *homeomorfní izomorfizmus*

15.12. Poznámka o duálu. Připojme na tomto místě další poznámku. Je-li X lokálně konvexní prostor, nebo třeba dokonce Banachův prostor, je otázka, co myslíme pod výrokem, že duál k X je roven Y. Striktně vzato, X^* je prostor všech spojitých lineárních forem na X, v případě Banachova prostoru mající dokonce svoji normu. Řekneme-li tedy, že duál X^* je roven prostoru Y, rozumíme tím, že existuje izomorfní zobrazení X^* na Y. Je-li X navíc Banachův, většinou chceme, aby toto zobrazení bylo také izometrické.

Příklad: Duál k prostoru $\mathcal{C}[0, 1]$ s max-normou je prostor všech Radonových měr na $[0, 1]$. Ono izometricko-izomorfní zobrazení je dáno Rieszovou větou o reprezentaci. Anebo také duálem k témuž prostoru je prostor všech „normalizovaných“ funkcí s konečnou variací na $[0, 1]$, zobrazení je dáno pomocí Stieltjesova integrálu.

Z tohoto pohledu se musíme dívat na výrok, že duál k prostoru (X^*, w^*) je X, anebo také εX. Koneckonců, v případě Banachova prostoru X jsou X a εX izometricky-izomorfní.

Obecnější odpověď charakterizující duály ve slabých topologiích je obsažena v následující větě.

15.13. Věta. *Buď X vektorový prostor a M podprostor jeho algebraického duálu $X^{\#}$. Potom $\big(X, \sigma(X, M)\big)^* = M$. Tedy topologie $\sigma(X, M)$ je nejmenší topologií na X, při níž jsou všechny funkcionály z M spojité.*

Topologie $\sigma(X, M)$ je Hausdorffova, právě když ke každému $z \in X$, $z \neq 0$ existuje funkcionál $f \in M$ tak, že $f(z) \neq 0$.

Důkaz. Obdobně jako výše se dokáže, že každý prvek z M musí být $\sigma(X,M)$-spojitý. (Raději zopakujme — je-li $f \in M$, je příslušná pseudonorma p_f spojitá v topologii $\sigma(X,M)$ podle definice. Protože $p_f = |f|$, je lineární funkcionál f $\sigma(X,M)$-spojitý v bodě 0, a tedy $\sigma(X,M)$-spojitý na celém prostoru X.)

Buď naopak f lineární $\sigma(X,M)$-spojitý funkcionál na X. Je tedy speciálně spojitý v 0. Uvědomíme-li si, jak vypadá báze okolí nuly v $\sigma(X,M)$-topologii, existují (třeba k $\varepsilon = 7$) funkcionály $f_1,\dots,f_n \in M$ tak, že

$$|f(t)| < 7 \quad \text{pro všechna} \quad t \in \big\{x \in X : |f_1(x) < 1, \dots, |f_n(x)| < 1\big\}\,.$$

Odtud speciálně plyne, že $\bigcap\limits_{j=1}^{n} \ker f_j \subset \ker f$ (je-li $f_1(t) = \cdots = f_n(t) = 0$, je i $f_j(kt) = 0$ pro každé $j = 1,\dots,n$ a $k \in \mathbf{N}$, tudíž i $|f(kt)| < 7$ pro každé $k \in \mathbf{N}$). Podle (známé?) věty z lineární algebry (viz A.5 v Appendixu) musí tedy být $f = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n$, odkud již plyne, že $f \in M$.

Pokud jde o charakteristiku hausdorffovosti topologie $\sigma(X,M)$, stačí konsultovat větu 14.19.
■

15.14. Poláry a bipolára. Buď opět X vektorový prostor a M podprostor $X^{\#}$. Pro libovolnou množinu $A \subset X$ definujeme (absolutní) ***poláru*** A° (v M) předpisem

$$A^\circ := \big\{f \in M : |f(x)| \le 1 \quad \text{pro} \quad x \in A\big\}\,.$$

V případě, kdy A je dokonce podprostor normovaného lineárního prostoru X (a $M = X^*$), splývá polára A° s anihilátorem $A^\perp$, neboť v tom případě $\{f \in X^* : |f(x)| \le 1 \ \text{pro}\ x \in A\} = \{f \in X^* : f(x) = 0 \text{ pro } x \in A\}$.

Je-li $A = \{x \in X : \|x\| \le 1\}$ uzavřená jednotková koule v normovaném lineárním prostoru X, je její polárou uzavřená jednotková koule duálu X^*, neboť $A^\circ = \big\{f \in X^* : |f(x)| \le 1 \text{ pro } \|x\| \le 1\big\} = \big\{f \in X^* : \|f\| \le 1\big\}$.

Obdobně definujeme ***poláru*** ${}^\circ B$ množiny $B \subset M$ jako

$${}^\circ B = \{x \in X : |f(x)| \le 1 \text{ pro } f \in B\}\,.$$

Konečně, symbolem $A^{\circ\circ}$ označíme ***bipoláru*** množiny $A \subset X$, kterážto je definována jako polára z poláry: $A^{\circ\circ} := {}^\circ(A^\circ)$.

15.15. Vlastnosti poláry. *Nechť X je vektorový prostor, $M \subset\subset X^{\#}$ a B podmnožina M. Potom polára ${}^\circ B$ je $\sigma(X,M)$-uzavřená absolutně konvexní podmnožina X obsahující* 0.

Důkaz. Protože každý funkcionál z M je $\sigma(X,M)$-spojitý a ${}^\circ B = \bigcap\limits_{f \in B} \{x \in X : |f(x)| \le 1\}$, je polára ${}^\circ B$ množina $\sigma(X,M)$-uzavřená. Jsou-li nyní $x, y \in {}^\circ B$, $|\lambda| + |\mu| \le 1$ a $f \in B$, je

$$\big|f(\lambda x + \mu y)\big| \le |\lambda|\,|f(x)| + |\mu|\,|f(y)| \le |\lambda| + |\mu| \le 1\,,$$

odkud již plyne, že $\lambda x + \mu y \in {}^\circ B$. Evidentně $0 \in {}^\circ B$. ■

Zopakujme nyní definici absolutně konvexního obalu množiny.

15.16. Absolutně konvexní obal. Je-li A podmnožina vektorového prostoru W, definujeme ***absolutně konvexní obal*** αA jako průnik všech absolutně konvexních množin obsahujících množinu A. Protože průnik absolutně konvexních množin je absolutně konvexní, je tedy αA nejmenší absolutně konvexní množina obsahující A.

Je-li nyní A podmnožina vektorového prostoru X a $M \subset\subset X^{\#}$, je podle předešlého $A^{\circ\circ}$ absolutně konvexní množina. Protože $A \subset A^{\circ\circ}$ (což se triviálně ověří z definice), je i $\alpha A \subset A^{\circ\circ}$. Dále víme, že bipolára $A^{\circ\circ}$ je $\sigma(X,M)$- uzavřená množina. Musí tedy být $\overline{\alpha A}^{\sigma(X,M)} \subset A^{\circ\circ}$. O tom, že se bipolára dá dokonce charakterizovat jako nejmenší $\sigma(X,M)$-uzavřená absolutně konvexní množina obsahující A vypovídá následující věta.

15.17. Věta o bipoláře. *Buď X vektorový prostor, $M \subset\subset X^{\#}$ a $A \subset X$. Potom*

$$A^{\circ\circ} = \overline{\alpha A}^{\sigma(X,M)}\,.$$

Důkaz. Podle právě provedených úvah stačí ověřit pouze jednu inkluzi. Nechť tedy $x \notin \overline{\alpha A}^{\sigma(X,M)}$. Protože $\overline{\alpha A}^{\sigma(X,M)}$ je $\sigma(X,M)$-uzavřená absolutně konvexní množina obsahující 0, existuje podle malé Mazurovy věty 14.27 $f \in M$ (nezapomeňte, že M je duál k lokálně konvexnímu prostoru $(X,\sigma(X,M))$ podle věty 15.13) s vlastnostmi

$$f(x) > 1 \quad \text{a} \quad |f| \le 1 \quad \text{na} \quad \overline{\alpha A}^{\sigma(X,M)}\,.$$

Tím jsme našli $f \in A^{\circ}$ s vlastností $f(x) > 1$. Tudíž $x \notin A^{\circ\circ}$. ∎

Uvedeme nyní další větu, mající mnoho aplikací v různých partiích moderní analýzy.

15.18. Slabé uzávěry konvexních množin. *Předpokládejme, že X je vektorový prostor a M podprostor $X^{\#}$. Je-li τ lokálně konvexní topologie na X, pro niž $(X,\tau)^* = M$ a $C \subset X$ konvexní množina, je $\overline{C}^{\tau} = \overline{C}^{\sigma(X,M)}$.*

Důkaz. Podle věty 15.13 je $\sigma(X,M) \subset \tau$, tedy $\overline{C}^{\tau} \subset \overline{C}^{\sigma(X,M)}$. Předpokládáme-li bez újmy na obecnosti, že $0 \in C$, je $\overline{C}^{\tau}$ τ-uzavřená konvexní množina obsahující 0. Jestliže $x \notin \overline{C}^{\tau}$, existuje podle malé Mazurovy věty 14.27 takový funkcionál $f \in M$, že $f(x) > 1$ a $f \le 1$ na $\overline{C}^{\tau}$. Protože však f je také $\sigma(X,M)$-spojitý, je $f(\overline{C}^{\sigma(X,M)}) \subset \overline{f(C)} \subset (-\infty, 1]$, a protože $f(x) > 1$, je $x \in X \setminus \overline{C}^{\sigma(X,M)}$. ∎

Tuto část zakončíme jednou z nejdůležitějších vět z oblasti slabých topologií. Uvedeme ji pro $\sigma(X^*,X)$-topologii, ale i obecnější formulace by byla možná (viz *15.1).

15.19. Alaoglu-Bourbakiho věta. *Nechť U je okolí nuly v lokálně konvexním prostoru X. Potom jeho polára U° je $\sigma(X^*,X)$-kompaktní podmnožina X^*.*

Důkaz. Buď $z \in X$. Protože U je pohlcující množina, existuje $\lambda_z > 0$ tak, že $z \in \lambda_z U$. Volíme-li $f \in U^{\circ}$, máme tedy $|f(z)| \le \lambda_z$. Uvažujme nyní kartézský součin $\prod_{x\in X} [-\lambda_x, \lambda_x]$. Protože $\sigma(X^*,X)$-topologie na X^* je topologií bodové konverence na X, lze pomocí zobrazení $\Theta : f \mapsto \{f(x)\}_{x\in X}$ vnořit (množinově i topologicky) U° do prostoru $T := \prod_{x\in X} [-\lambda_x, \lambda_x]$ (jenom poznamenejme, možná zbytečně, že T obsahuje i jiné funkce než lineární).

Pořádněji, uvažujme na $T = \prod_{x\in X} [-\lambda_x, \lambda_x]$ topologii kartézského součinu, jejíž popis lze nalézt v Appendixu. Zobrazení $\Theta : U^{\circ} \to T$ dané předpisem $\Theta : f \mapsto \{f(x)\}_{x\in U}$ je evidentně prosté. Zobrazení $\Theta^{-1} : \Theta(U^{\circ}) \to (X^*, \sigma(X^*,X))$ je spojité podle definice topologií na T a X^*. Stačí tedy ukázat, že množina $\Theta(U^{\circ})$ je kompaktní v T. Potom samozřejmě $U^{\circ} = \Theta^{-1}(\Theta(U^{\circ}))$ bude $\sigma(X^*,X)$-kompaktní v X^*.

Podle Tichonovovy věty B.8 je $\prod_{x\in X} [-\lambda_x, \lambda_x]$ kompaktní prostor. K dokončení důkazu si stačí uvědomit, že $\Theta(U^{\circ})$ je jeho $\sigma(X^*,X)$-uzavřená podmnožina. Nechť tedy $\{f_\gamma\}$ je zobecněná posloupnost v $\Theta(U^{\circ})$ a $f_\gamma \to f$ v součinové topologii. Musíme ukázat, že f je lineární a spojitý funkcionál na X a $|f(x)| \le 1$ pro všechna $x \in U$. Protože $f_\gamma \to f$ bodově na X a f_γ jsou lineární funkcionály, je i f lineární. A protože pro $x \in U$ je $|f_\gamma(x)| \le 1$, je samozřejmě i $|f(x)| \le 1$. Vidíme současně, že f je omezený funkcionál na U. Ale podle předpokladu je U okolím nuly, tudíž f je spojitý (viz 14.24). ∎

V následujícím odstavci shrneme naše výsledky pro případ lokálně konvexního prostoru X, kdy specifikujeme $M = X^*$.

15.20. Shrnutí. Nechť (X,τ) je lokálně konvexní prostor, $X^* = (X,\tau)^*$. Potom:

(a) Na X existuje nejmenší topologie $\sigma(X,X^*)$, pro niž jsou všechny funkcionály z X^* spojité (tedy $\sigma(X,X^*) \subset \tau$, $(X,\sigma(X,X^*))^* = X^*$ a $\sigma(X,X^*)$ je nejmenší ze všech topologií majících tuto vlastnost).

(b) Topologie τ i $\sigma(X, X^*)$ mají stejné uzavřené konvexní množiny.
(c) Je-li $A \subset X$, je $A^{\circ\circ} = \overline{\alpha A}^{\sigma(X,X^*)}$.
(d) Na X^* existuje nejmenší topologie $\sigma(X^*, X)$, pro niž jsou zobrazení $\varphi \mapsto \varphi(x)$ spojitá pro každé $x \in X$. Přitom $(X^*, \sigma(X^*, X))^* = \varepsilon X$.
(e) Je-li $U \in \tau(0)$, je polára U° $\sigma(X^*, X)$-kompaktní množinou.

Samozřejmě speciální pozornost si zaslouží případ normovaných lineárních či Banachových prostorů. Věnujme mu proto následující samostatnou kapitolu.

15.21. Elementární cvičení. (a) Nechť X je vektorový prostor a M vektorový podprostor $X^{\#}$, $A \subset X$ a A° její polára v M. Následující výroky jsou ekvivalentní:

(i) A je $\sigma(X, M)$-omezená množina,
(ii) $f(A)$ je omezená podmnožina $\mathbf{R}$ či $\mathbf{C}$ pro každé $f \in M$,
(iii) polára A° je pohlcující množina,
(iv) polára A° je barel.

Návod. Lehce se ukáže, že podmínky (i) a (ii) jsou ekvivalentní (stačí se inspirovat lemmatem 17.10). Můžete též porovnat s *14.3.d. Potom i (iii) je s nimi ekvivalentní. Ze (iv) samozřejmě plyne (iii) a k důkazu (iii) $\Rightarrow$ (iv) použijte 15.15. ♣

(b) Víme, že v normovaném lineárním prostoru X

$$\|x\| = \max\{|f(x)| : f \in X^*,\ \|f\| \le 1\}$$

pro každé $x \in X$ (duální vyjádření normy v 2.24).

Je-li X lokálně konvexní prostor a $B \in \tau(0)$ absolutně konvexní, platí pro Minkowského funkcionál rovnost

$$p_B(x) = \max\{|f(x)| : f \in B^\circ\}$$

opět pro každé $x \in X$.

Návod. Buď $x \in X$ Zřejmě $|f(x)| \le p_B(x)$, právě když $f \in B^\circ$. Odtud

$$\sup\{|f(x)| : f \in B^\circ\} = \sup\{|f(x)| : |f(x)| \le p_B(x)\} \le p_B(x)\,.$$

Pro druhou nerovnost nalezněte podle Hahn-Banachovy věty $\varphi \in X^*$ tak, aby $\varphi(x) = p_B(x)$. ♣

(c) Buď X vektorový prostor a M podprostor $X^{\#}$ oddělující body X. Ukažte, že množina $B \subset X$ je $\sigma(X, M)$-omezená, právě když je $\sigma(X, M)$-prekompaktní.

Návod. Je-li B $\sigma(X, M)$-prekompaktní a $\varphi \in M$, je $\varphi(B)$ omezená podmnožina skalárů, a tudíž je prekompaktní. Dále využijte toho, že $T := \prod_{\varphi \in M} \overline{\varphi(B)}$ je podle Tichonovovy věty B.8 kompakt. Nyní je zapotřebí vnořit B do T a chvíli pracovat. Detaily lze najít třeba v L. Narici and E. Beckenstein [*1985], odst. 9.2.1. ♣

(d) Je-li U okolí nuly v lokálně konvexním prostoru X, je jeho polára U° $\sigma(X^*, X)$-omezená množina v X^*.

Návod. Použijte Alaoglu-Bourbakiho větu 15.19 a *14.15.d. ♣

16. Slabé topologie v Banachových prostorech

Zprvu zopakujme znovu definice slabých topologií.

16.1. Slabé topologie v Banachových prostorech. *Slabá* neboli *w-topologie* Banachova (anebo obecněji normovaného lineárního) prostoru X je generována systémem pseudonorem

$$p_\varphi : x \mapsto |\varphi(x)|\,, \quad \varphi \in X^*\,,$$

a podobně *slabá** neboli *w^*-topologie* na jeho duálu X^* pak systémem pseudonorem

$$p_x : \varphi \mapsto |\varphi(x)|\,, \quad x \in X\,.$$

V našem dřívějším označení je tedy w-topologie na X totéž jako $\sigma(X, X^*)$-topologie, zatímco w^*-topologii na X^* jsme označovali jako $\sigma(X^*, X)$ nebo také $\sigma(X^*, \varepsilon X)$. Nezapomeňte také, že na duálu X^* máme dvě topologie: slabou w-topologii (vlastně $\sigma(X^*, X^{**})$) a w^*-topologii, které obecně (v nereflexivních prostorech) jsou různé.

Jak vypadají slabá okolí 0 v prostoru X? Množina G je w-okolím 0, existují-li funkcionály $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in X^*$ tak, že

$$\{x \in X : |\varphi_1(x)| \le 1, \dots, |\varphi_n(x)| \le 1\} \subset G\,.$$

Obdobně, V je okolím 0 ve w^*-topologii, existují-li $x_1, \dots, x_n \in X$ tak, že

$$\{\varphi \in X^* : |\varphi(x_1)| \le 1, \dots, |\varphi(x_n)| \le 1\} \subset V\,.$$

Jak vypadá konvergence v těchto topologiích? Posloupnost $\{x_n\}$ konverguje slabě k x v prostoru (X, w), právě když $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ pro každou spojitou lineární formu $\varphi \in X^*$. Podobně, $\varphi_n \overset{w^*}{\to} \varphi$, právě když $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$ pro každé $x \in X$.

Shrňme nyní nejdůležitější věty pro případ Banachových či normovaných lineárních prostorů.

16.2. Věta. *Nechť C je konvexní podmnožina normovaného lineárního prostoru X. Potom C je uzavřená, právě když je w-uzavřená.*

Důkaz. Stačí se odvolat na větu 15.18. ■

16.3. Poznámka. Analogická věta neplatí pro w^*-topologie na X^*. Můžete se podívat na cvičení 16.18.a či 16.18.l. Jiný příklad je ukryt v poznámce 18.10.b.

A uveďme ještě další příklad. Je-li X nereflexivní Banachův prostor, je εX vlastní uzavřený podprostor X^{**} (podívejte se třeba na 2.55.k). Podle Golstineova lemmatu, které za chvíli odvodíme v 16.8, je však εX w^*-hustá podmnožina v X^{**}.

16.4. Anihilátory a poláry. Je-li A podmnožina normovaného lineárního prostoru X, definovali jsme v 15.14 její poláru A° v X^*. V případě, kdy A je dokonce podprostor, zavedli jsme v 5.18 také jeho anihilátor $A^\perp$. Víme, že v tomto případě oba pojmy splývají: $A^\circ = A^\perp$. Obdobně máme definovány (zpětné) poláry a anihilátory pro podmnožiny či podprostory X^*.

Nečiní žádný problém rozšířit definici anihilátoru i pro libovolné podmnožiny X. Prostě $A^\perp := \{\varphi \in X^* : A \subset \ker \varphi\}$. Máme-li takto definován anihilátor, ihned vidíme, že $A^\perp = (\operatorname{lin} A)^\perp$, kde samozřejmě $\operatorname{lin} A$ značí lineární obal množiny A. Obdobné úvahy můžeme udělat i pro (zpětné) anihilátory duálu X^*. Dáme-li nyní dohromady právě řečené s větou 15.17 o bipoláře, a vezmeme-li k tomu v potaz větu 16.2, dostaneme následující tvrzení.

16.5. Věta. *Nechť X je normovaný lineární prostor, $A \subset X$ a $B \subset X^*$. Potom*

$$^\perp(A^\perp) = \overline{\operatorname{lin} A} \quad a \quad (^\perp B)^\perp = \overline{\operatorname{lin} B}^{w^*}\,.$$

16.6. Alaogluova věta. *Je-li E normovaný lineární prostor, je uzavřená jednotková koule $\{f \in E^* : \|f\| \le 1\}$ w^*-kompaktní. Obecněji, každá omezená w^*-uzavřená podmnožina E^* je w^*-kompaktní.*

Důkaz. Stačí si uvědomit, že jednotková koule v E je okolím nuly a jednotková koule v E^* je její polárou. Dovětek je skoro samozřejmý, každá omezená množina se totiž vejde do nějaké uzavřené koule. ■

16.7. Varování. Není pravdou, že by uzavřená jednotková koule Banachova prostoru X byla w-kompaktní. To nastane, jak za okamžik uvidíme, právě v případě, kdy X je reflexivní. Následující Goldstineovo lemma je základem důkazu této Banach-Bourbakiho charakteristiky reflexivních prostorů.

16.8. Goldstineovo lemma. *Buď X normovaný lineární prostor. Potom εB_X je $\sigma(X^{**}, X^*)$-hustá podmnožina $B_{X^{**}}$ a εX je $\sigma(X^{**}, X^*)$-hustý podprostor X^{**}.*

Důkaz. Stačí zřejmě dokázat jen první tvrzení (neboť potom $\sigma(X^{**}, X^*)$-uzávěr množiny εX obsahuje $B_{X^{**}}$).

Označme tedy $C := \overline{\varepsilon B_X}^{\sigma(X^{**},X^*)}$. Podle Alaogluovy věty 16.6 je $B_{X^{**}}$ $\sigma(X^{**}, X^*)$-kompaktní množina, tudíž $C \subset B_{X^{**}}$. Nechť nyní $F \in B_{X^{**}} \setminus C$. Protože C je absolutně konvexní $\sigma(X^{**}, X^*)$-uzavřená množina obsahující nulový prvek X^{**}, existuje podle malé Mazurovy věty 14.27 $\Lambda \in \big(X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*)\big)^*$ tak, že $\Lambda(F) > 1$ a $|\Lambda| \le 1$ na C. Podle věty 15.13 existuje $\varphi \in X^*$ tak, že

$g(\varphi) = \Lambda(g)$ pro každé $g \in X^{**}$. Máme tedy existenci $\varphi \in X^*$ s vlastnostmi $\|\varphi\| = \|\Lambda\|$, $F(\varphi) > 1$ a $|g(\varphi)| \le 1$ pro $g \in C$. Odtud dostáváme, že

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x)| : x \in B_X\} = \sup\{|\varepsilon_x(\varphi)| : x \in B_X\} \le \sup\{|g(\varphi)| : g \in C\} \le 1\,.$$

To ale vede ke sporu, neboť potom $1 < F(\varphi) \le \|F\|\,\|\varphi\| \le 1$.

Jiný důkaz. K důkazu můžeme také využít větu o bipoláře. Tu ovšem musíme trochu uzpůsobit naší situaci. Zkušenější čtenář z věty 15.17 odvodí následující důsledek: *Je-li X Banachův prostor a B absolutně konvexní podmnožina X^{**}, je $\overline{B}^{\sigma(X^{**},X^*)} = ({}^\circ B)^\circ$.*

Protože εB_X je samozřejmě absolutně konvexní množina, podle právě řečeného máme $\overline{\varepsilon B_X}^{\sigma(X^{**},X^*)} = ({}^\circ\varepsilon B_X)^\circ$. Stačí si tedy jen uvědomit, že $({}^\circ\varepsilon B_X)^\circ = B_{X^{**}}$. Ale to je snadné. Především pouze z definice zjistíme, že $(B_X)^\circ = {}^\circ\varepsilon B_X$. A obdobně jako v 15.14 dostaneme, že $B_{X^{**}} = (B_{X^*})^\circ$. Úhrnem pak máme $B_{X^{**}} = (B_{X^*})^\circ = ((B_X)^\circ)^\circ = ({}^\circ\varepsilon B_X)^\circ$. ∎

Existuje celá řada nutných a postačujících podmínek, podle kterých poznáme, zda daný Banachův prostor je reflexivní. Zde se omezíme jenom na jednu z nich. O některých ostatních viz 16.15.

16.9. Banach-Bourbakiho charakteristika reflexivity. *Banachův prostor X je reflexivní, právě když jeho uzavřená jednotková koule $\{x \in X : \|x\| \le 1\}$ je w-kompaktní.*

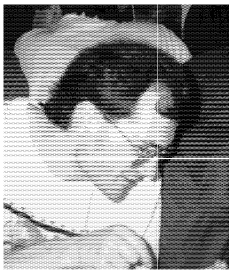
Důkaz. Je-li X reflexivní, je $\varepsilon B_X = B_{X^{**}}$. Podle Alaoglu-Bourbakiho věty 15.19 je jednotková koule $B_{X^{**}}$ $\sigma(X^{**}, X^*)$-kompaktní množina. Protože ale (X, w) a εX s restrikcí topologie $\sigma(X^{**}, X^*)$ jsou homeomorfní (uvědomte si třeba, jak vypadají konvergence v těchto prostorech), musí být B_X w-kompaktní.

Pro důkaz opačné implikace použijeme Goldstineovo lemma 16.8. Je-li totiž jednotková koule B_X w-kompaktní, odvodíme lehko, že $\varepsilon B_X = B_{X^{**}}$, a tudíž i $\varepsilon X = X^{**}$. ∎

16.10. Důsledek. *Omezené uzavřené konvexní podmnožiny reflexivního Banachova prostoru jsou w-kompaktní.*

Důkaz. Je-li M taková množina, jistě se vejde do nějaké uzavřené koule. Ta je w-kompaktní podle předešlé věty. Nyní si stačí vzpomenout na tvrzení, že uzavřené konvexní množiny jsou také w-uzavřené (pro eventuální pomoc nalistujte větu 16.2). Ovšemže každá w-uzavřená podmnožina w-kompaktní množiny je sama také w-kompaktní. ∎

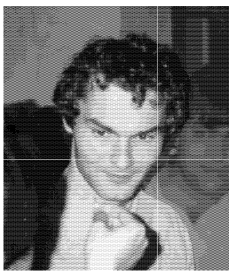
Slabé topologie v nekonečně dimenzionálních prostorech jsou nemetrizovatelné (viz *16.1). Nicméně mají některé příjemné vlastnosti metrických topologií. Jednou z nich je platnost analogie Mazurovy věty (podle níž je uzavřený konvexní obal kompaktní množiny v Banachově prostoru opět kompakt, viz *13.6.c) pro slabé topologie (viz *13.6.d a *13.6.e). Nás však nyní bude zajímat, že pro slabé topologie různé pojmy kompaktnosti splývají. Udělejme odbočku a uveďme definice.



P. Habala

16.11. Kompaktnost v topologických prostorech. Buď T (Hausdorffův) topologický prostor. Řekneme, že množina $K \subset T$ je

- *kompaktní*, jestliže z každého pokrytí množiny K otevřenými množinami lze vybrat konečné podpokrytí K,
- *spočetně kompaktní*, jestliže z každého spočetného pokrytí množiny K otevřenými množinami lze vybrat konečné podpokrytí K,
- *sekvenciálně kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti prvků K lze vybrat konvergentní podposloupnost, jejíž limita leží v K.



P. Hájek

Zatímco v metrických prostorech všechny tyto pojmy splývají, obecně pouze kompaktní či sekvenciálně kompaktní množiny jsou i spočetně kompaktní. Eberlein ukázal, že pro slabou w-topologii každá spočetně kompaktní množina je sekvenciálně kompaktní a Šmuljan zase, že w-spočetně kompaktní množiny jsou w-kompaktní. Shrňme tato tvrzení do následující věty, podáme ji bez důkazu. Ten je poměrně obtížný a lze jej nalézt třeba v [HHZ] či J. Diestel [1984]. Snad jen ještě připomeňme, že množina je relativně kompaktní, relativně spočetně kompaktní či relativně sekvenciálně kompaktní, jestliže její uzávěr je kompaktní, spočetně kompaktní či sekvenciálně kompaktní.

16.12. Eberlein-Šmuljanova věta. *Pro slabou topologii w na Banachově prostoru X pojmy kompaktní, spočetně kompaktní a sekvenciálně kompaktní množiny splývají. Taktéž relativně kompaktní, relativně spočetně kompaktní a relativně sekvenciálně kompaktní množiny jsou totožné ve slabé w-topologii na X.*

16.13. Varování. Obdobné tvrzení neplatí pro w^*-topologii na X^*. Můžeme třeba argumentovat následovně. Každý kompaktní (Hausdorffův) topologický prostor T lze homeomorfně vnořit pomocí zobrazení $\kappa : t \mapsto \varphi_t$, kde $\varphi_t : f \mapsto f(t)$ pro $f \in \mathcal{C}(T)$, do prostoru $(\mathcal{C}(T))^*$ uvažovaného s w^*-topologií. To jsme ukázali v *15.3. Protože ne každý kompaktní prostor je sekvenciálně kompaktní, nemohou kompaktní a sekvenciálně kompaktní množiny v $\big((\mathcal{C}(T))^*, w^*\big)$ splývat.

Jiný příklad. Nechť Γ je nespočetná množina a $l^1(\Gamma)$ Banachův prostor jako v 1.10.f. Potom duál k $l^1(\Gamma)$ je izometricky-izomorfní s $l^\infty(\Gamma)$. Uzavřená jednotková koule v prostoru $l^\infty(\Gamma)$ je w^*-kompaktní, není však w^*-sekvenciálně kompaktní.

Je-li však X separabilní Banachův prostor, potom každá w^*-kompaktní podmnožina X^* je i w^*-sekvenciálně kompaktní. Podle věty *16.2.d je totiž každá w^*-kompaktní podmnožina uvažovaná s w^*-topologií metrizovatelná.

Kombinujeme-li poslední Eberlein-Šmuljanovu větu s Banach-Bourbakiho charakteristikou reflexivních prostorů 16.9, dostáváme následující větu. Můžete ji porovnat s tvrzením v 4.9.

16.14. Eberlein-Šmuljanova charakteristika reflexivity. *Banachův prostor je reflexivní, právě když z každé jeho omezené posloupnosti lze vybrat w-konvergentní podposloupnost.*

Existuje celá řada nutných a postačujících podmínek, aby Banachův prostor X byl reflexivní. Uveďme zde některé z nich.

16.15. Charakteristiky reflexivních Banachových prostorů. *Následující podmínky jsou ekvivalentní pro Banachův prostor X:*

(i) *X je reflexivní,*
(ii) *X^* je reflexivní,*
(iii) *uzavřená jednotková koule B_X je w-kompaktní,*
(iv) *slabé topologie w^* a $\sigma(X^*, X^{**})$ splývají na X^*,*
(v) *z každé omezené posloupnosti v X lze vybrat w- konvergentní podposloupnost,*
(vi) *každý funkcionál z X^* nabývá na B_X své normy ,*
(vii) *je-li Y vlastní uzavřený podprostor X, existuje $x \in X$, $\|x\| = 1$ tak, že $\operatorname{dist}(x, Y) \geq 1$,*
(viii) *libovolná omezená, uzavřená a konvexní podmnožina X^* je w^*-kompaktní,*
(ix) *součet libovolných dvou konvexních omezených uzavřených podmnožin X je uzavřený.*

Charakteristice reflexivity pomocí podmínky (ii) se říká *Pettisova věta*, ekvivalence (i) a (iii) je Banach-Bourbakiho věta z 16.9, ekvivalence s (v) je Eberlein-Šmuljanova věta 16.14, (vi) pak udává důležitou *Jamesovu charakteristiku reflexivity*. Podmínka (ix) náleží V. Kleeovi, můžete se podívat na odstavec *1.16.

Náznak důkazů. Reflexivita X skoro ihned implikuje reflexivitu X^*. Podívejte se třeba na *2.11. Tam je též dokázána opačná implikace. Můžeme argumentovat také následovně.

Nechť X^* je reflexivní. Protože εX je uzavřená podmnožina X^{**}, je i $\sigma(X^{**}, X^{***})$-uzavřená v X^{**} (viz 16.2). Z reflexivity X^* plyne, že εX je $\sigma(X^{**}, X^*)$-uzavřená množina v X^{**}. Ale podle Goldstineova lemmatu 16.8 je současně εX $\sigma(X^{**}, X^*)$-hustá podmnožina X^{**}. Tudíž musí být $\varepsilon X = X^{**}$.

Banach-Bourbakiho charakteristika reflexivity (iii) je obsažena v 16.9 a v 16.14 pak Eberlein-Šmuljanova věta udávající ekvivalenci (i) a (v).

Z (iii) okamžitě plyne (vi), neboť každý funkcionál z X^* je i w-spojitý. Důkaz implikace (vi) $\Rightarrow$ (i) je silně netriviální, původní práce jsou R.C. James [1957], [1964c] a [1964d]. Důkaz pro případ separabilního prostoru X je v [HHZ].

Ostatní ekvivalentní podmínky jsou uvedeny spíše pro zajímavost. ■

16.16. Charakteristiky prostorů konečné dimenze. Jako porovnání s předchozími charakteristikami reflexivních prostorů uveďme následující větu.

Věta. *Pro Banachův prostor X jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) $\dim X < \infty$,
(ii) $\dim X^{\#} < \infty$,
(iii) $X^* = X^{\#}$,

(iv) *uzavřená jednotková koule B_X je kompaktní,*
(v) *každá bezpodmínečně konvergentní řada v X je absolutně konvergentní,*
(vi) *slabá topologie splývá na X s normovou topologií,*
(vii) *slabá topologie na X je metrizovatelná.*

Návod. Ekvivalence (i) a (iii) je obsažena v poznámce 2.6.c, z lineární algebry je dále známo, že $\dim X = \dim X^{\#}$. Podle Rieszovy věty 5.12 má prostor X konečnou dimenzi, je-li jeho jednotková koule B_X kompaktní. Pro důkaz ekvivalence (i), (vi) a (vii) použijte *16.1, (iii) a *1.12.a.

Takže zbývá jedině důkaz hluboké implikace (v) $\Rightarrow$ (i). Tady se musíme odvolat na následující větu. ♣

Dvoretzky-Rogersova věta. *Jestliže každá bezpodmínečně konvergentní řada v Banachově prostoru X je absolutně konvergentní, má již X konečnou dimenzi.*

(Řada je *bezpodmínečně konvergentní*, konverguje-li po každém přerovnání. Konverguje-li dokonce řada z norem jejích prvků, říkáme, že řada *konverguje absolutně*.)

16.17. Slabé uzávěry jednotkových sfér. Slabé topologie mají celou řadu vlastností, které mohou začátečníka překvapit. K jedněm z těch kuriozních patří fakt, že slabý uzávěr jednotkové sféry nekonečně dimenzionálního prostoru je roven celé uzavřené jednotkové kouli. Odborník nad tím nijak nežasne. Jednak si vzpomene na příklad ortonormální báze separabilního Hilbertova prostoru či na posloupnost Radonových měr $\frac{1}{2}(\varepsilon_{-\frac{1}{n}} - \varepsilon_{\frac{1}{n}})$ z odstavce 3.9, které ukazují, že nulové prvky se mohou dostat do slabých uzávěrů jednotkových sfér. A dále si uvědomí, že slabá okolí jsou vlastně „veliká", obsahují totiž netriviální nadroviny. Následující věta, pokud se i s důkazem dobře promyslí, může vnést trochu světla do problematiky slabých topologií.

(a) Věta. *Je-li X normovaný lineární prostor nekonečné dimenze, potom slabý uzávěr jednotkové sféry $S_X := \{x \in X : \|x\| = 1\}$ je celá uzavřená jednotková koule B_X.*

Důkaz. Volme bod $z \in B_X$, $\|z\| < 1$ a jeho w-okolí U. Na základě postřehu v 15.5, existuje netriviální uzavřený podprostor $M \subset\subset X$ tak, že $z + M \subset U$. Protože $(z + M) \cap S_X \neq \emptyset$ (uvažujte nějakou přímku $Z := \{z + \lambda x : \lambda \in \mathbf{R}\}$, kde $x \in M$, $x \neq 0$ a ukažte, že Z musí mít společný bod s S_X), je i $U \cap S_X \neq \emptyset$. ■

(b) Věta. *Nechť X je normovaný lineární prostor nekonečné dimenze. Potom w^*-uzávěr jednotkové sféry S_{X^*} je roven B_{X^*}.*

Důkaz. Zkuste si promyslet sami. ■

(c) Poznámka. Z předchozí věty též vyplývá, že v případě nekonečně rozměrného prostoru X se 0 dostane do w^*-uzávěru sféry S_{X^*}. V příkladě 3.9.c jsme dokonce v jednom konkrétním prostoru sestrojili posloupnost, která k 0 w^*-konvergovala. Platí však dokonce hluboká obecná věta. Uveďme ji, samozřejmě, bez důkazu. Ten lze nalézt v J. Diestel [*1984].

(d) Josefson-Nissenzweigova věta. *Nechť X je nekonečně dimenzionální Banachův prostor. Potom existuje taková posloupnost $\{\varphi_n\} \subset S_{X^*}$, že $\varphi_n \xrightarrow{w^*} 0$.*

(e) Ještě poznámka. Platí dokonce silnější tvrzení, jednotková sféra S_{X^*} je w^*-sekvenciálně hustá v B_{X^*} (za podmínky $\dim X = \infty$). Věnujme tomuto tvrzení samostatné cvičení 16.18.n. Analogie nemusí platit pro slabé sekvenciální uzávěry sfér S_X. Stačí si vzpomenout na Schurovo lemma *3.2. Pokud máme posloupnost $x_n \in S_{l^1}$ a $x_n \xrightarrow{w} x$, potom i $x_n \to x$, a tudíž $\|x\| = 1$. Prostor l^1, či obecněji prostory se Schurovou vlastností, v nichž slabá a silná konvergence posloupností splývají, jsou výjimečné. Platí totiž následující tvrzení.

(f) Věta. *Nechť X je nekonečně dimenzionální Banachův prostor. Potom ke každému $x \in B_X$ existují $x_n \in S_X$ tak, že $x_n \xrightarrow{w} x$, právě když X nemá Schurovu vlastnost.*

16.18. Elementární cvičení. (a) Prostor $\mathcal{C}([0,1])$ je vlastní uzavřený podprostor Banachova prostoru $L^\infty([0,1])$. Ukažte nicméně, že $\mathcal{C}([0,1])$ je $\sigma(L^\infty, L^1)$-hustá podmnožina $L^\infty([0,1])$.

Návod. Nechť $f \in \big(\mathcal{C}([0,1])\big)^\perp$. Ukážeme-li, že $f = 0$, bude tvrzení dokázáno s přihlédnutím k důsledku 14.28. Protože ale $\int_0^1 hf = 0$ pro každou funkci $h \in \mathcal{C}([0,1])$, odvodíme (pomocí limitních vět), že $\int_0^1 c_A f = 0$ pro každou borelovskou množinu $A \subset [0,1]$. Jinými slovy, $\int_A f = 0$ pro každou takovou množinu A. Odtud již plyne, že $f = 0$ skoro všude (vpodstatě věta 8.17 z [LM]). ♣

(b) Ukažte, že norma $x \mapsto \|x\|$ na normovaném lineárním prostoru X je slabě zdola polospojitá funkce.

Poznámka. Toto tvrzení není přímým důsledkem 3.14.g, neboť obecně v Heineho charakteristice spojitosti či zdola polospojitosti nevystačíme s posloupnostmi.

Návod. Musíme ukázat, že množina $P_\alpha := \{x \in X : \|x\| \le \alpha\}$ je slabě uzavřená. Díky spojitosti normy je P_α uzavřená množina a díky konvexitě normy i konvexní. Stačí tedy použít 16.2. ♣

(c) Ukažte, že norma na nekonečně dimenzionálním normovaném lineárním prostoru není slabě spojitá v žádném bodě.

Návod. Jednotková sféra je ve w-topologii hustá G_δ podmnožina B_X. Hustotu jsme dokázali v 16.17, druhé tvrzení plyne z rovnosti $S_X = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in B_X : \|x\| > 1 - \frac{1}{n}\}$. ♣

(d) Nechť X je Banachův prostor. Ukažte, že jeho duální norma na X^* je w^*-zdola polospojitá.

Návod. Využijte Alaoglu-Bourbakiho větu. ♣

(e) Nechť Y je uzavřený podprostor reflexivního Banachova prostoru X a $x_0 \in X$. Ukažte, že existuje $y_0 \in Y$ tak, že $\|x_0 - y_0\| = \operatorname{dist}(x_0, Y)$.

Návod. Uvědomte si, že funkce $x \mapsto \|x - x_0\|$ je slabě zdola polospojitá. Nevíte-li si dále rady, podívejte se na větu 21.15. ♣

(f) Nechť X je nekonečně dimenzionální normovaný lineární prostor. Ukažte, že X je 1. kategorie ve slabé w-topologii a jeho duál X^* je 1. kategorie ve w^*-topologii.

Návod. Označme $S_n := \{x \in X : \|x\| \le n\}$. Potom $X = \bigcup S_n$, přičemž každá z množin S_n je w-uzavřená (norma je slabě zdola polospojitá funkce podle (b)). Volme n a ukažme, že S_n je řídká množina. Kdyby totiž $z + \{x \in X : |f_1(x)| < 1, \dots, |f_k(x)| < 1, f_1, \dots, f_k \in X^*\} \subset S_n$, existovalo by $y \in \bigcap_{j=1}^{k} \ker f_j$, $y \ne 0$ (jinak by $\dim X^* \le k$). Tudíž $z + \lambda y \in S_n$ pro každé λ, a tedy $\|z + \lambda y\| \le n$ pro každé λ. Což je spor. Ostatně, podívejte se též na 15.6. ♣

(g) Buď K omezená w-uzavřená podmnožina Banachova prostoru X. Potom K je w-kompaktní, právě když $\operatorname{dist}(K, A) > 0$ pro každou w-uzavřenou množinu A disjunktní s K.

Návod. Je-li K w-kompaktní a A w-uzavřená, $A \cap K = \emptyset$, je množina $A - K$ w-uzavřená (viz *1.16.b), a tedy i uzavřená v normě. Protože $A - K$ neobsahuje 0, je $\operatorname{dist}(0, A - K) > 0$. Ale $\operatorname{dist}(0, A - K) = \operatorname{dist}(A, K)$.

Nechť K není w-kompaktní. Eberlein-Šmuljanova věta 16.12 zaručí existenci prosté posloupnosti $\{x_n\} \subset K$ bez hromadného bodu. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $\{x_n\}$ leží na (silné) hranici $\partial_{\|\cdot\|} K$ (tato hranice je w-hustá v K, ale není relativně w-kompaktní). Zvolme $y_n \in X \setminus K$ tak, aby $\|y_n - x_n\| < \frac{1}{n}$. Potom množina $A := \{y_n : n \in \mathbf{N}\}$ je w-uzavřená, $A \cap K = \emptyset$ a $\operatorname{dist}(A, K) = 0$. ♣

(h) Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost v normovaném lineárním prostoru X, $x_n \xrightarrow{w} 0$. Potom existuje posloupnost $\{\xi_n\}$ konvexních kombinací prvků x_n tak, že $\xi_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$.

Návod. Použijte 15.18 (či 16.2). ♣

(i) Obdoba (h) neplatí pro w^*-topologii. Uvažujme Banachův prostor c_0, jehož duál izometricky-izomorfně ztotožníme s l^1. Nechť $\varphi_n := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ jsou jednotkové vektory v l^1. Potom $\varphi_n \xrightarrow{w^*} 0$ a libovolná konvexní kombinace z prvků $\{\varphi_n\}$ leží v S_{l^1}.

(j) Uvažujme množinu $A := \{e_k + k e_n : 1 \le k < n\}$ v prostoru l^2. Ukažte, shodně s von Neumannem, že 0 leží ve slabém w-uzávěru A přesto, že žádná posloupnost z A k 0 slabě nekonverguje. Musí však existovat zobecněná posloupnost z A w-konvergující k 0. Najdete nějakou?

Jiný příklad: Nechť $\{e_n\}$ je ortonormální soustava v Hilbertově prostoru H. Položíme-li $B := \{\sqrt{n} e_n : n \in \mathbf{N}\}$, je opět $0 \in \overline{B}^w$, ač žádná posloupnost z B nekonverguje k 0 slabě.

Návod. Žádná nekonečná podmnožina B není omezená. Stačí tedy využít princip stejnoměrné omezenosti. ♣

(k) Nechť $\{e_n\}$ je posloupnost „jednotkových" vektorů v l^1. Uvažujeme-li l^1 jako duál k c_0 (vzpomeňte si, že duál $(c_0)^*$ můžeme izometricky izomorfně ztotožnit s prostorem l^1 — pomocí jakého zobrazení?), ukažte, že $e_n \xrightarrow{w^*} 0$. Na druhé straně posloupnost $\{e_n\}$ nekonverguje k 0 slabě.

Návod. Samozřejmě $e_n(\{x_k\}_k) = x_n \to 0$ pro každou posloupnost $\{x_k\} \in c_0$. Jestliže $\varphi := (1, 1, 1, \dots)$, je $\varphi \in l^\infty$ (což je „duál" k l^1) a $\varphi(e_n) = 1$. ♣

(l) Banachův prostor $L^1([0,1])$ můžeme ztotožnit pomocí zobrazení $f \mapsto f\,d\lambda$ (λ je Lebesgueova míra) s určitým podprostorem M prostoru $\mathcal{M}([0,1])$ všech Radonových měr na $[0,1]$. Ukažte, že M je $\sigma\big(\mathcal{M}([0,1]),\mathcal{C}([0,1])\big)$-hustá podmnožina $\mathcal{M}([0,1])$.

Návod. Postupujte obdobně jako ve cvičení (a): Je-li $f \in \mathcal{C}([0,1])$ taková funkce, že $\int_0^1 fh = 0$ pro každé $h \in \mathcal{L}^1([0,1])$, je $f = 0$ skoro všude. ♣

(m) Nechť Y je podprostor normovaného lineárního prostoru X. Ukažte, že restrikce w-topologie prostoru X na Y je přesně w-topologie na Y. Tedy $\sigma(X,X^*) \restriction Y = \sigma(Y,Y^*)$.

Návod. Nezapomeňte na Hahn-Banachovu větu. ♣

(n) Předpokládejme, že máme již dokázánu Josefson-Nissenzweigovu větu z 16.17.d. Víme tedy, pro každý nekonečně dimenzionální Banachův prostor X existuje posloupnost $\{\varphi_n\} \subset X^*$ tak, že $\varphi_n \overset{w^*}{\to} 0$. Ukažte, že potom též ke každému $f \in B_{X^*}$ existují $f_n \in \mathcal{S}_{X^*}$ s vlastností $f_n \overset{w^*}{\to} f$.

Návod. Nechť tedy X je Banachův prostor, $\dim X = \infty$, $f \in X^*$, $\|f\| \le 1$, $f \ne 0$. Položíme-li $Y := \ker f$, je Y uzavřený podprostor X konečné kodimenze (dokonce jeho kodimenze je 1; pokonsultujte, pokud nevíte, třeba A.4). Nechť P je projekce X na Y. Ta určitě existuje, stačí se podívat na věty *2.5 a 2.38. Nyní použijeme tvrzení Josefson-Nissenzweigovy věty na (nekonečně dimenzionální) Banachův prostor Y. Existují $h_n \in Y^*$ tak, že $\|h_n\| = 1$ a $h_n \overset{w^*}{\to} 0$. Položme $g_n := h_n \circ P$. Potom $g_n \in X^*$, $g_n \overset{w^*}{\to} 0$ a $\|g_n\| \ge 1$ (nezapomeňte, že $\|h_n\| = 1$, $\|P\| \ge 1$ a P je na). Protože $\|f+0g_n\| = \|f\| \le 1 \le \|f+2g_n\|$ a norma je spojitá funkce, existují podle Darbouxovy věty $\alpha_n \in [0,2]$ tak, že $\|f+\alpha_n g_n\| = 1$. Stačí pak položit $f_n := f + \alpha_n g_n$. ♣

17. Topologie souhlasející s dualitou a reflexivita

V předchozích kapitolách jsme studovali vlastnosti slabé topologie w na lokálně konvexním či Banachově prostoru X. Jednou z jejích vlastností bylo, že dávala stejný duál k X jako původní topologie. Navíc w-topologie byla nejmenší ze všech topologií, které měly tuto vlastnost. V této kapitole se budeme zabývat dalšími topologiemi na X, které určují stejný duál. Ukážeme, že mezi nimi existuje i největší, budeme ji nazývat Mackeyho topologií.

Problematiku budeme opět studovat poněkud obecněji. Budeme předpokládat, že X je vektorový prostor a M podprostor jeho algebraického duálu $X^\#$ s vlastností, že ke každému bodu $x \in X$, $x \ne 0$, existuje funkcionál $f \in M$ tak, že $f(x) \ne 0$.

17.1. Přípustné topologie. Řekneme, že lokálně konvexní topologie τ na X je *přípustná*, jestliže $(X,\tau)^* = M$. Jinými slovy, jestliže M je tvořeno právě všemi τ-spojitými lineárními funkcionály.

Tato terminologie je poněkud nestandardní. Většina autorů místo přípustná topologie používá termínu *topologie souhlasející s dualitou* (danou dvojicí (X,M)).

Samozřejmě slabá topologie $\sigma(X,M)$ je přípustná, a jak jsme řekli, je mezi všemi přípustnými topologiemi ta nejmenší. Abychom dokázali existenci i největší přípustné topologie, potřebujeme zopakovat některé pojmy.

17.2. Svaz lokálně konvexních topologií. Na množině $\mathrm{LC}(W)$ všech lokálně konvexních topologií na daném vektorovém prostoru W zaveďme uspořádání dané inkluzí. Je tedy $\tau \prec \sigma$, jestliže každá množina z topologie τ je i v topologii σ. Prostě řečeno, σ má více „otevřených množin“ než τ. Při tomto uspořádání má $\mathrm{LC}(W)$ největší a nejmenší prvek a libovolná podmnožina lokálně konvexních topologií má v $\mathrm{LC}(W)$ infimum i supremum. Je tedy $\mathrm{LC}(W))$ s uspořádáním $\prec$ úplný svaz.

Pokud čtenáře zajímají podrobnosti, nalezne je v B.13 a *17.1.

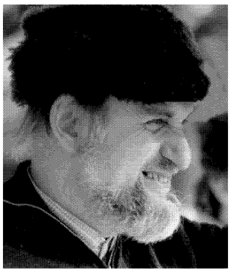
17.3. Svaz podprostorů vektorového prostoru. Nyní něco z algebry. Na množině $\mathrm{Lat}\,W$ všech podprostorů vektorového prostoru W zavedeme opět uspořádání dané inkluzí: Řekneme, že $A \prec B$, pokud $A \subset B$. S takto definovaným uspořádáním obsahuje $\mathrm{Lat}\,W$ největší prvek (jím je celý prostor W) i nejmenší prvek (podprostor sestávající z nulového prvku $\{0\}$). Dále $\mathrm{Lat}\,W$ s uspořádáním $\prec$ je opět úplný svaz — libovolná jeho podmnožina má infimum (což je průnik podprostorů této množiny) i supremum (což samozřejmě není sjednocení). Pro osvěžení: $\sup(A,B) = A + B$.

Pro důkaz hlavní věty potřebujeme následující lemma a postřeh.

17.4. Lemma. Nechť Ψ je třída lineárních topologií na vektorovém prostoru W a p pseudonorma (respektive lineární forma) spojitá vzhledem k $\sup \Psi$. Potom existují $\tau_1, \dots, \tau_n \in \Psi$ tak, že p je spojitá vzhledem k topologii $\sup\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$.

Návod. Množina $U := \{x \in W : p(x) < 1\}$ je okolím 0 v topologii $\sup \Psi$ podle lemmatu 14.10.a. Rozmyslíme-li si, jak vypadá báze topologie Ψ či se podíváme na B.13.b, zjistíme, že existují topologie $\tau_1, \dots, \tau_n \in \Psi$ a τ_j-otevřené množiny $G_j \in \tau_j$, tak, že $G_1 \cap \dots \cap G_n \subset U$. Odtud plyne, že množina U je $\sup\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$-okolí 0. A opětovným použitím lemmatu 14.10.a dostaneme, že p je spojitá pseudonorma v topologii $\sup\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$.

Je-li f lineární forma , je $|f|$ pseudonorma, která je spojitá v nějaké lineární topologii τ, právě když f je spojitá v τ. Odtud pak plyne tvrzení. ♣



J. Jelínek

17.5. Jelínkovo pozorování. *Nechť τ_1, τ_2 jsou lokálně konvexní topologie na vektorovém prostoru X a nechť lineární funkcionál $f \in X^\#$ je spojitý v topologii* $\sup(\tau_1, \tau_2)$. *Potom existují $f_i \in (X, \tau_i)^*$, $i = 1, 2$ tak, že $f = f_1 + f_2$.*

Důkaz. Na $X \times X$ uvažujme lokálně konvexní topologii $\tau = \tau_1 \times \tau_2$ kartézského součinu z *17.4. Ta indukuje na diagonále $D := \{(x,x) : x \in X\}$ topologii

$$\big\{(x,x) \in D : x \in U_1 \cap U_2\big\}, \quad \text{kde} \quad U_1 \in \tau_1\,, U_2 \in \tau_2\,.$$

Není těžké nahlédnout, že lineární forma $(x,x) \mapsto f(x)$ je na D spojitá (je třeba spojitá v $(0,0)$). Podle Hahn-Banachovy věty v *14.5 existuje τ-spojité rozšíření $\tilde f$ formy f na $X \times X$. Položíme-li $f_1(x) := \tilde f(x,0)$ a $f_2(x) := \tilde f(0,x)$, tvoří f_1, f_2 hledaný rozklad. ■

17.6. Věta. *Nechť X je vektorový prostor,* $\mathrm{LC}(X)$ *úplný svaz všech lokálně konvexních topologií na X a* $\mathrm{Lat}\, X^\#$ *úplný svaz všech podprostorů $X^\#$. Potom zobrazení $\tau \mapsto (X,\tau)^* : \mathrm{LC}(X) \to \mathrm{Lat}\, X^\#$ zachovává suprema, tedy*

$$(X, \sup \mathcal{C})^* = \sup\big\{(X,\tau)^* : \tau \in \mathcal{C}\big\} \quad \textit{pro} \quad \mathcal{C} \subset \mathrm{LC}(X)\,.$$

Důkaz. Nechť $\mathcal{C} \subset \mathrm{LC}(X)$. Protože $(X,\tau_1)^* \prec (X,\tau_2)^*$ pro $\tau_1 \prec \tau_2$, je $\sup\{(X,\tau)^* : \tau \in \mathcal{C}\} \prec (X, \sup \mathcal{C})^*$. Buď tedy $f \in (X, \sup \mathcal{C})^*$. Podle lemmatu 17.4 existují $\tau_1, \dots, \tau_n \in \mathcal{C}$ tak, že $f \in \big(X, \sup(\tau_1, \dots, \tau_n)\big)^*$. Potom podle Jelínkova pozorování 17.5 dostáváme

$$f \in (X,\tau_1)^* + \dots + (X,\tau_n)^* = \sup\{(X,\tau_1)^*, \dots, (X,\tau_n)^*\} \prec \sup\{(X,\tau)^* : \tau \in \mathcal{C}\}\,.$$

■

17.7. Věta. *Nechť X je vektorový prostor, $M \subset\subset X^\#$ a $\mathcal{T}$ množina všech přípustných (lokálně konvexních) topologií na X. Potom i (lokálně konvexní) topologie* $\sup \mathcal{T}$ *je přípustná.*

Důkaz. Tvrzení je přímým důsledkem předchozí věty:

$$(X, \sup \mathcal{T})^* = \sup\{(X,\tau)^* : \tau \in \mathcal{T}\} = \sup\{M\} = M\,.$$

■

17.8. Mackeyho topologie. Buď X vektorový prostor a $M \subset\subset X^\#$. Mezi všemi přípustnými lokálně konvexními topologiemi (tj. topologiemi, které dávají duál M) existuje na X podle poslední věty 17.7 největší přípustná topologie. Tuto lokálně konvexní topologii na X značíme $\tau(X,M)$ a nazýváme ji *Mackeyho topologií.*

Následující věta je vlastně samozřejmým důsledkem našeho přístupu k zavedení Mackeyho topologie.

17.9. Mackey-Arensova věta. *Buď X vektorový prostor, $M \subset\subset X^{\#}$ a τ lokálně konvexní topologie na X. Potom $(X,\tau)^* = M$ tehdy a jen tehdy, když $\sigma(X,M) \subset \tau \subset \tau(X,M)$.*

Víme již, že všechny přípustné topologie dávají stejný duál a podle 15.18 mají stejné konvexní uzavřené množiny, V dalším ukážeme, že mají dokonce i stejné omezené množiny. K tomu budeme potřebovat následující charakteristiky omezených množin.

17.10. Lemma. *Nechť $\mathcal{P}$ je systém pseudonorem generující topologii τ lokálně konvexního prostoru X. Množina $D \subset X$ je omezená, právě když množina $p(D)$ je omezená pro každé $p \in \mathcal{P}$.*

Důkaz. Nechť zprvu je D omezená. Volme $p \in \mathcal{P}$ a položme $V := \{x \in X : p(x) \leq 1\}$. Protože pseudonorma p je τ-spojitá, je $V \in \tau(0)$. Existuje tedy $\lambda > 0$ tak, že $D \subset \lambda V$. Tudíž $p(D) \subset p(\lambda V) = \lambda p(V) \subset [0,\lambda]$.

Předpokládejme, že $p(D)$ je omezená podmnožina $\mathbf{R}$ pro každou pseudonormu $p \in \mathcal{P}$. Volme $x_n \in D$, $\lambda_n \to 0$ a $p \in \mathcal{P}$. Potom $p(\lambda_n x_n) = |\lambda_n| p(x_n) \to 0$. To neznamená ale nic jiného, než že $\lambda_n x_n \to 0$. ∎

17.11. Mackeyho věta. *Podmnožina D lokálně konvexního prostoru X je omezená, právě když množina $\varphi(D)$ je omezená pro každé $\varphi \in X^*$.*

Důkaz. Je-li $\varphi \in X^*$ a $D \subset X$ omezená množina, je $\varphi(D)$ omezená podmnožina $\mathbf{R}$. Platí totiž zcela obecně, že spojité lineární zobrazení T topologického vektorového prostoru X do topologického vektorového prostoru Y převádí omezené množiny v X na omezené množiny v Y. Vskutku, je-li $D \subset X$ omezená množina, $y_n \in T(D)$ a $\lambda_n \to 0$, existují $x_n \in D$ tak, že $Tx_n = y_n$. Potom ovšem $\lambda_n x_n \to 0$, a ze spojitosti T dostáváme $\lambda_n y_n = T(\lambda_n x_n) \to 0$.

Naopak, nechť $\varphi(D)$ je omezená množina pro každé $\varphi \in X^*$. Předpokládejme, že lokálně konvexní topologie τ prostoru X je generována systémem pseudonorem $\mathcal{P}$. Volme pevně $p \in \mathcal{P}$. Podle předchozího lemmatu 17.10 stačí ukázat, že množina $p(D)$ je omezená. Uvažujme tedy pseudonormovaný lineární prostor (X,p). Jelikož množina $\varepsilon(D) = \{\varepsilon_x : x \in D\}$ je podle předpokladu bodově omezená na $(X,p)^*$ a $(X,p)^*$ je úplný prostor, plyne z principu stejnoměrné omezenosti (vadí-li vám použít princip stejnoměrné omezenosti 4.2 upravený na případ pseudonormovaného lineárního prostoru, můžete se též podívat na *14.3.c), že množina $\varepsilon(D)$ je omezená v X^{**}. Protože ale zobrazení ε je izometrie (lze postupovat jako v 2.30, rovnost $p(x) = \|\varepsilon_x\|$ se ukáže stejně; není totiž problém zavést normu na duálu a využít Hahn-Banachovu větu pro pseudonormu), je D omezená v (X,p). Nyní si stačí už jenom uvědomit, že $(X,p)^* \subset (X,\tau)^*$. ∎

17.12. Poznámka. Nechť X je lokálně konvexní prostor. Protože $\sigma(X^*,X)$-topologie je generovaná systémem pseudonorem $\{p_x\}_{x\in X}$, kde $p_x : f \mapsto |f(x)|$, plyne z lemmatu 17.10 následující tvrzení: *Množina $B \subset X^*$ je $\sigma(X^*,X)$-omezená, právě když množina $\{|f(x)| : f \in B\}$ je omezená pro každé $x \in X$.* Raději jsme tento důsledek uvedli explicite.

17.13. Mackeyho věta. *Omezené množiny jsou ve všech přípustných topologiích stejné.*

Důkaz. Nechť τ je přípustná topologie (pro dvojici (X,M)): $(X,\tau)^* = M$. Z definice pak ihned plyne, že každá τ-omezená množina je i $\sigma(X,M)$-omezená. Buď tedy D $\sigma(X,M)$-omezená množina. Protože $(X,\tau)^* = (X,\sigma(X,M))^*$, plyne z předchozí Mackeyho věty 17.11, že D je τ-omezená. ∎

17.14. Důsledek. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Potom Mackeyova topologie $\tau(X,X^*)$ splývá s normovou topologií.*

Důkaz. Nechť θ je topologie daná normou v normovaném lineárním prostoru X. Ta je samozřejmě přípustná (s dvojicí (X,X^*)). Podle Mackey-Arensovy věty je tedy $\theta \subset \tau(X,X^*)$.

Buď U $\tau(X,X^*)$-okolí 0. Podle Mackeyho věty 17.13 je $\{x \in X : \|x\| < 1\}$ i omezené $\tau(X,X^*)$-okolí 0, existuje tedy $\lambda > 0$ tak, že $\{x \in X : \|x\| < 1\} \subset \lambda U$. Tudíž $\{x \in X : \|x\| < \frac{1}{\lambda}\} \subset U$ a vidíme, že topologie θ a $\tau(X,X^*)$ mají stejná okolí 0. To stačí k důkazu, že $\theta = \tau(X,X^*)$. ∎

17.15. Poznámky. (a) Existují i větší topologie než je Mackeyho topologie $\tau(X,M)$, které mají stále stejné omezené množiny jako všechny přípustné topologie. Kupříkladu omezené množiny v silné $\beta(X,M)$-topologii jsou stejné jako ve všech přípustných topologiích.

Také v případě Banachova prostoru X omezené množiny v duálu X^* jsou stejné, ať je již uvažujeme vzhledem k normové, w či w^* topologii.

(b) Jako každá lokálně konvexní topologie, musí být i Mackeyho topologie generována nějakým systémem pseudonorem. Označíme-li $\mathcal{K}_m$ systém všech absolutně konvexních $\sigma(M,X)$-kompaktních podmnožin M, potom soustava pseudonorem

$$p_A : x \mapsto \sup\{|f(x)| : f \in A\}\ ,\quad A \in \mathcal{K}_m$$

generuje na X Mackeyovu topologii $\tau(X,M)$.

Protože $\{x \in X : p_A(x) \le 1\} = {}^\circ A$, lze si rozmyslet, že báze okolí 0 Mackeyho topologie $\tau(X,M)$ je tvořena všemi polárami ${}^\circ A$, kde A probíhá systém $\mathcal{K}_m$. Pro popis Mackeyho topologie, jakož i obecnějších topologií, je podstatné, že systém $\mathcal{K}_m$ má následující vlastnosti:

(a) množiny z $\mathcal{K}_m$ jsou $\sigma(M,X)$-omezené,
(b) je-li $A \in \mathcal{K}_m$ a $\lambda > 0$, je též $\lambda A \in \mathcal{K}_m$,
(c) ke každé dvojici $A, B \in \mathcal{K}_m$ existuje $P \in \mathcal{K}_m$ tak, že $A \cup B \subset P$.

(c) Lokálně konvexní prostory opatřené Mackeyho topologií se někdy nazývají *Mackeyho prostory*. Lze ukázat, že kupříkladu každý barelovaný prostor či každý metrizovatelný lokálně konvexní prostor je Mackeyův.

V další části této kapitoly zavedeme ještě jednu důležitou topologii. Musíme si uvědomit, že na duálech lokálně konvexních prostorů nemáme zatím zavedenu žádnou rozumnou topologii, která by v případě normovaného prostoru dala obvyklý (druhý) duál. Uvažujeme-li totiž na X^* slabou či Mackeyho topologii, lze prostor spojitých lineárních forem na X^* ztotožnit s původním prostorem X, tedy druhý duál k X v tomto případě splývá s X.

V dalším budeme opět uvažovat vektorový prostor X a podprostor M jeho algebraického duálu $X^\#$. Máme přitom stále na paměti důležité speciální případy: X je lokálně konvexní prostor a M jeho topologický duál X^*, či za X bereme topologický duál k lokálně konvexnímu prostoru Z a $M = \varepsilon Z \subset Z^{*\#}$.

17.16. Silné topologie. *Silnou topologii* $\beta(X,M)$ na X definujeme pomocí systému pseudonorem

$$p_D : x \to \sup\{|f(x)| : f \in D\}\,,$$

kde D probíhá systém všech $\sigma(M,X)$-omezených množin v M.

Obdobně jako u Mackeyho topologie, i zde je báze okolí 0 v silné topologii $\beta(X,M)$ tvořena všemi polárami ${}^\circ A$, kde A probíhá kolekci všech $\sigma(M,X)$-omezených množin v M.

Je-li X lokálně konvexní prostor, pokud není jinak řečeno, vždy uvažujeme na X^* silnou topologii $\beta(X^*, \varepsilon X)$. Značme ji však tradičně $\beta(X^*, X)$. Tím pádem má nyní smysl uvažovat i druhý duál X^{**} lokálně konvexních prostorů. Že tento splývá s X^{**} definovaným pomocí normy v případě normovaných lineárních prostorů, je obsaženo v následující větě.

17.17. Věta. *Silná topologie $\beta(X,M)$ je větší než Macheyho topologie $\tau(X,M)$.*

Je-li X normovaný lineární prostor, splývá silná topologie $\beta(X^*,X)$ s normovou topologií na X^*. Je-li X Banachův prostor, splývá $\beta(X,X^*)$-topologie s normovou topologií na X.

Důkaz. Protože Mackeyho topologie $\tau(X,M)$ je lokálně konvexní topologií stejnoměrné konvergence na absolutně konvexních $\sigma(X,M)$-kompaktních podmnožinách X a $\beta(X,M)$ je topologií stejnoměrné konvergence na $\sigma(X,M)$-omezených množinách, musí být $\tau(X,M) \subset \beta(X,M)$.

Je-li X normovaný lineární prostor, je podle principu stejnoměrné omezenosti (šikovně aplikovaného jako ve cvičení 4.22.c) množina $D \subset X$ omezená, právě když je $\sigma(X,X^*)$-omezená, tudíž silná topologie $\beta(X^*,X)$ na X^* není nic jiného než normová topologie na X^*.

V případě, kdy X je dokonce Banachův prostor, princip stejnoměrné omezenosti říká, že množina $D \subset X^*$ je omezená, právě když je $\sigma(X^*,X)$-omezená. Ergo $\beta(X,X^*)$ a normová topologie na X splývají. ■

Poznámka. Buď X normovaný lineární prostor. I když silná topologie $\beta(X^*,X)$ splývá s normovou topologií na X^*, nemusí silná topologie $\beta(X,X^*)$ splývat s normovou topologií X. To je zřejmé třeba podle charakteristiky dané v *14.3.g. Podle ní $\beta(X,X^*)$ splývá s normovou topologií na X, právě když prostor X je barelovaný. A ne každý normovaný lineární prostor je barelovaný, viz třeba příklad 14.5.

Pokud je ovšem X Banachův prostor, je X barelovaný podle poznámky 14.8.a. V tomto případě je $\beta(X,X^*)$ normová topologie prostoru X.

17.18. Kanonické vnoření X do $X^{*\#}$. Již poněkolikáté v těchto skriptech zopakujme, že v případě lokálně konvexního prostoru X definujeme *kanonický obraz* prvku $x \in X$ jako ten prvek $\varepsilon_x \in X^{*\#}$, pro nějž $\varepsilon_x(\varphi) = \varphi(x)$ pro $\varphi \in X^*$. *Kanonické vnoření* ε pak prvku $x \in X$ přiřadí ε_x.

V případě, kdy X je normovaný lineární prostor, je ε izometrické a izomorfní zobrazení X do X^{**}. Speciálně, ε je prosté a spojité.

Obecně lze jen říci, že ε je izomorfizmus X na $\varepsilon X \subset X^{*\#}$. Je-li $x \in X$, ukázali jsme také, že ε_x je spojitý lineární funkcionál uvažujeme-li na X^* topologii $\sigma(X^*, X)$ (připomeňme, jestliže $\varphi_n \to 0$ na X^* v $\sigma(X^*, X)$-topologii, potom $\varphi_n(x) \to 0$, což není nic jiného než $\varepsilon_x(\varphi_n) \to 0$). Protože topologie $\beta(X^*, X)$ je větší než topologie $\sigma(X^*, X)$, je ε_x spojitý také v silné topologii. Jinými slovy, $\varepsilon_x \in X^{**}$ a kanonické vnoření ε zobrazuje X do X^{**}.

17.19. Reflexivní a semireflexivní prostory. Řekneme, že (Hausdorffův) lokálně konvexní prostor X je *semireflexivní*, jestliže $\varepsilon X = X^{**}$. Semireflexivní prostor, pro nějž navíc kanonické vnoření X na $\varepsilon X = X^{**}$ je homeomorfní, budeme nazývat *reflexivním*.

Je samozřejmé, že v případě Banachových prostorů pojmy semireflexivity a reflexivity splývají.

17.20. Příklad. Uveďme příklad, z kterého bude vidět, že pro semireflexivní lokálně konvexní prostory již kanonické vnoření nemusí být spojité. Uvažujme nekonečně dimenzionální Hilbertův prostor H. Prostor H opatřený slabou topologií w je lokálně konvexní prostor. Protože H je reflexivní prostor, je $\varepsilon H = H^{**}$. Víme však také, že $H^* = (H, w)^*$. Tedy i druhé duály prostorů H a (H, w) splývají a (H, w) je tudíž semireflexivní. Kanonické vnoření $\varepsilon : (H, w) \to H^{**}$ však není spojité, což je jasné z toho, že slabá a normová topologie na H nesplývají. Kupříkladu $e_n \xrightarrow{w} 0$, pokud $\{e_n\}$ je ortonormální soustava v H, ale $\varepsilon(e_n)$ nekonvergují k 0, neboť $\|\varepsilon(e_n)\| = \|e_n\| = 1$. Není tedy prostor (H, w) reflexivní.

Je celá řada nutných a postačujících podmínek jak charakterizovat semireflexivní či reflexivní prostory. Uveďme jen některé z nich.

17.21. Charakteristiky semireflexivních prostorů. *Následující podmínky jsou ekvivalentní pro lokálně konvexní prostor X:*

(i) *X je semireflexivní,*
(ii) *silná topologie $\beta(X^*, X)$ je přípustná,*
(iii) $\beta(X^*, X) = \tau(X^*, X)$,
(iv) *každá omezená množina $A \subset X$ je relativně $\sigma(X, X^*)$-kompaktní.*

Důkaz. Protože $\tau(X^*, X) \subset \beta(X^*, X)$, jsou podmínky (i), (ii) a (iii) ekvivalentní víceméně podle definic. Předpokládejme, že $\beta(X^*, X) = \tau(X^*, X)$ a že A je omezená podmnožina X. Podle Mackeyho věty 17.13 je A i $\sigma(X, X^*)$-omezená podmnožina X. Potom polára A° je $\beta(X^*, X)$-okolím 0 v X^*, a tedy i $\tau(X^*, X)$-okolím 0. Musí tedy existovat absolutně konvexní $\sigma(X, X^*)$-kompaktní množina $K \subset X$ tak, že $K^\circ \subset A^\circ$. Použijeme-li větu o bipoláře (nezapomeňte, že uzávěry konvexních množin jsou stejné ve všech přípustných topologiích), máme $A \subset A^\circ \subset K^{\circ\circ} = K$.

Nechť je splněna podmínka (iv). Chceme ukázat, že $\beta(X^*, X) \subset \tau(X^*, X)$. Volme tedy absolutně konvexní omezenou množinu $A \subset X$. Existuje $\sigma(X, X^*)$-kompaktní množina $K \subset X$ obsahující A. Potom $K^\circ \subset A^\circ$, a tudíž A° je $\tau(X^*, X)$-okolí 0. Tedy $\beta(X^*, X) \subset \tau(X^*, X)$. ■

17.22. Poznámka. Povšimněte si analogie ekvivalence (i) a (iv) s podmínkou reflexivity pro Banachovy prostory: Banachův prostor je reflexivní, právě když jeho omezené uzavřené podmnožiny jsou slabě kompaktní.

17.23. Věta. *Lokálně konvexní prostor X je reflexivní, právě když je semireflexivní a barelovaný.*

Důkaz. Je-li X reflexivní, je samozřejmě semireflexivní a jeho topologie je právě $\beta(X, X^*)$. Nechť $B \subset X$ je barel. Potom polára B° je $\sigma(X^*, X)$-omezená podmnožina X^* (to plyne z toho, že B je pohlcující množina a tvrzení lze odvodit lehko z *14.3.e). Tudíž $^\circ(B^\circ) = B^{\circ\circ} = B$ je $\beta(X, X^*)$-okolím nuly.

Pro důkaz opačné implikace víme, že X je semireflexivní. Stačí ukázat, že v případě barelovaného prostoru X (ne nutně semireflexivního) restrikce topologie $\beta(X^{**}, X^*)$ na εX je původní topologie na X (při ztotožnění X a εX). A to dá trochu práce. ■

17.24. Poznámka. Podle předchozí věty a příkladu v 17.19 vyplývá, že Hilbertův prostor nekonečné dimenze opatřený slabou topologií nemůže být barelovaný. Najdete v něm barel, který není okolím nuly? Či posloupnost spojitých lineárních funkcionálů konvergující bodově k neomezenému funkcionálu?

17.25. Elementární cvičení. (a) Nechť X je nereflexivní Banachův prostor. Potom $\sigma(X,X^*) \neq \tau(X,X^*)$ a $\tau(X^*,X) \neq \beta(X^*,X)$.

(b) Nechť c_{00} je normovaný lineární prostor z příkladu *1.1.b. Ukažte, že množina $U := \{\{x_n\} \in c_{00} : |x_n| \leq \frac{1}{n}\}$ je silné, nikoliv však normové, okolí 0.

(c) Na (vektorovém) prostoru l^∞ uvažujme w^*-topologii $\sigma(l^1,l^\infty)$. Ukažte, že $X := (l^\infty, w^*)$ je semireflexivní prostor, který však není reflexivní.

Návod. Podle věty 15.13 je $(l^\infty,w^*)^* = l^1$. Silná $\beta(l^1,X)$-topologie na X^* je normová topologie (na l^1). Tudíž $X^{**} = l^\infty$ a silná topologie na X^{**} splývá s normovou topologií l^∞, kterážto je striktně silnější než topologie $\sigma(l^\infty,l^1)$. ♣

(d) Nechť H je nekonečně dimenzionální Hilbertův prostor uvažovaný se slabou topologií w. Ukažte, že omezené w-uzavřené podmnožiny H jsou w-kompaktní. Toto tvrzení ostře kontrastuje s Rieszovou větou 5.12 platnou pro normované lineární prostory.

Návod. Víme již, že (H,w) je semireflexivní. Stačí se podívat na 17.20 a pak na 17.21.

(e) Nechť p_1,p_2 jsou pseudonormy na vektorovém prostoru W a $f \in W^\#$ lineární forma, $|f| \leq p_1 + p_2$ na W. Ukažte, že existují $f_1,f_2 \in W^\#$ tak, že $|f_1| \leq p_1$, $|f_2| \leq p_2$ a $f = f_1 + f_2$.

Návod. Na prostoru $X \times X$ položte $q(x,y) := p_1(x) + p_2(y)$. Zřejmě q je pseudonorma na $X \times X$. Definujeme-li $\varphi(x,x) := f(x)$ pro $(x,x) \in D$, kde D je diagonála v $X \times X$, je $|\varphi| \leq q$ na D. Nyní použijte algebraickou verzi Hahn-Banachovy věty. Porovnejte též s 17.5. ♣

18. Kompaktní konvexní množiny

V této kapitole odvodíme dvě základní věty, které spolu velice úzce souvisejí — Bauerův princip minima a Krejn-Milmanovu větu. Další kapitola pak ukáže některé z překvapivých aplikací těchto vět.

V celé kapitole budeme uvažovat pouze Hausdorffovy lokálně konvexní prostory. Symbol A vyhradíme pro kompaktní konvexní množinu v lokálně konvexním prostoru X. V typickém příkladě uvažujeme reflexivní Banachovův prostor X opatřený slabou topologií w, za A pak bereme jeho konvexní omezenou uzavřenou podmnožinu (kupříkladu jeho uzavřenou jednotkovou kouli). Ta je podle vět minulých kapitol kompaktní ve slabé topologii w prostoru X.

18.1. Extremální body. Nechť C je konvexní podmnožina vektorového prostoru W. Řekneme, že $c \in C$ je jejím *extremálním bodem*, jestliže množina $C \setminus \{c\}$ je stále konvexní. Jinak názorněji řečeno — jestliže C neobsahuje nedegenerovanou úsečku na jejímž vnitřku by bod c ležel. Stačí si rozmyslet, že c je extremálním bodem C, jestliže $x = y$, pokud $x,y \in C$ a $c = \frac{1}{2}(x+y)$.

Množinu všech extremálních bodů C budeme značit $\operatorname{ext} C$.

18.2. Polospojité funkce. Připomeňme základní větu z reálné analýzy, podle níž každá spojitá funkce na kompaktní množině nabývá svého maxima i minima. Lze se ptát, jak vypadají funkce, které na kompaktech musejí nabývat svého maxima. Odpověď je uvedena v následujícím odstavci. Abychom si ozřejmili v něm uvedenou definici, podotkněme, že (reálná) funkce f je spojitá na množině K, jestliže množiny $\{x \in K : f(x) > \alpha\}$ i $\{x \in K : f(x) < \alpha\}$ jsou obě otevřené v K pro každé reálné číslo α.

Nechť f je reálná funkce na topologickém prostoru T. Řekneme, že f je *polospojitá shora* na T, jestliže $\{t \in T : f(t) < \alpha\}$ je otevřená pro každé $\alpha \in \mathbf{R}$ anebo, ekvivalentně, jestliže $\{t \in T : f(t) \geq \beta\}$ je uzavřená pro každé β. Obdobně se definují i *zdola polospojité* funkce a definice se dá rozšířit i na funkce nabývající nekonečných hodnot.

Je-li f polospojitá shora na kompaktu T, nabývá f na T svého maxima — existuje $t_0 \in T$ tak, že $f(t) \leq f(t_0)$ pro každé $t \in T$. Důkaz je snadný — stačí uvažovat t_0 z průniku kompaktních množin $\{t \in T : f(t) \geq \sup_T f - \frac{1}{n}\}$.

V případě konvexních funkcí na konvexních množinách se dá říci mnohem více — body, v nichž se nabývá maxima musejí být extremální.

Snad raději zopakujme, že reálná funkce φ definovaná na konvexní množině C vektorového prostoru W se zove *konvexní*, jestliže množina $\{(x,t) \in W \times \mathbf{R} : x \in C\,,\ \varphi(x) \geq t\}$ je konvexní. Jinými slovy, jestliže

$$\varphi\big(tx + (1-t)y\big) \leq t\,\varphi(x) + (1-t)\,\varphi(y)\,, \quad \text{kdykoliv} \quad x,y \in C\,,\ t \in [0,1]\,.$$

Na otevřených konvexních množinách v $\mathbf{R}^n$ je každá konvexní funkce spojitá, obecně však zdaleka ne. Na nekonečně dimenzionálních prostorech existují kupříkladu nespojité lineární funkcionály. (A každý lineární funkcionál je, samozřejmě, konvexní funkcí.)

H. Bauer

18.3. Bauerův princip maxima. *Nechť A je kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru X. Potom každá konvexní shora polospojitá funkce na A nabývá svého maxima na A na množině* $\operatorname{ext} A$.

Důkaz. Pro $a,b \in X$ označme pro potřeby tohoto důkazu symbolem (a,b) úsečku $\{ta + (1-t)b : 0 < t < 1\}$. Dále nechť $\mathcal{S}$ je třída všech neprázdných uzavřených množin $F \subset A$, které mají tu vlastnost, že obsahují každou úsečku (a,b), pokud jen $(a,b) \cap F \neq \emptyset$. Lehko se hned ukáže, že $\mathcal{S}$ obsahuje samu množinu A, a že $\bigcap_\beta F_\beta \in \mathcal{S}$, kdykoliv $F_\beta \in \mathcal{S}$, $\bigcap_\beta F_\beta \neq \emptyset$. Konečně, jestliže jednobodová množina $\{a\}$ leží v $\mathcal{S}$, je nutně a extremálním bodem A.

Buď nyní $F \in \mathcal{S}$ a g konvexní shora polospojitá funkce na F. Označíme-li $F^* := \{x \in F : g(x) = \sup_F g\}$, je $F^* \in \mathcal{S}$. Neprázdnost F^* je jasná, uzavřenost plyne z rovnosti $F^* = \{x \in F : g(x) \geq \sup_F g\}$. Nechť tedy $x_0 \in (a,b) \cap F^*$. Potom $(a,b) \subset F$ a jsou-li $x,y \in (a,b)$, $x_0 = \lambda x + (1-\lambda)y$, $0 < \lambda < 1$, plyne z konvexity g, že

$$g(x_0) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) \leq \lambda g(x_0) + (1-\lambda)g(x_0) = g(x_0)\,.$$

Tudíž $g(x) = g(y) = g(x_0)$, což znamená, že $x,y \in F^*$.

Definujme nyní na $\mathcal{S}$ uspořádání dané inkluzí. Řekneme, že $F_1 \prec F_2$, pokud $F_1 \supset F_2$. Je zřejmé, že každý maximální prvek $(\mathcal{S},\prec)$ musí být jednobodový. Je-li totiž $F \in \mathcal{S}$, $a,b \in F$, $a \neq b$, existuje podle Hahn-Banachovy věty 14.26 $\varphi \in X^*$, tak, že $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. Aplikujeme-li právě dokázané na (konvexní) funkci φ, dostáváme existenci množiny $F^* \in \mathcal{S}$, $F^* \subset F$, $F^* \neq F$.

Nyní si musíme uvědomit, že $(\mathcal{S},\prec)$ splňuje předpoklady Zornova lemmatu (viz C.5 v Appendixu). Samozřejmě, $\prec$ je uspořádání na $\mathcal{S}$ a je-li $\mathcal{G} \subset \mathcal{S}$ řetězec (tj. jsou-li $F_1, F_2 \in \mathcal{G}$, je vždy buďto $F_1 \prec F_2$ anebo $F_2 \prec F_1$), tvoří $\mathcal{G}$ centrovanou soustavu kompaktů (viz B.5), takže $\bigcap_{F\in\mathcal{G}} F \neq \emptyset$. Podle předchozího je $\bigcap_{F\in\mathcal{G}} F \in \mathcal{G}$ horní závorou prvků z $\mathcal{G}$.

Nyní stačí dát všechny postřehy dohromady a učinit závěr. Nechť tedy f je konvexní shora polospojitá funkce na A. Položme $F := \{x \in A : f(x) = \sup_A f\}$. Podle předchozích úvah je $F \in \mathcal{S}$. Podle Zornova lemmatu existuje maximální prvek M v uspořádání $\prec$ za F (tj. $M \subset F$). Ale M musí být jednobodová množina $\{a\}$, a tudíž $a \in \operatorname{ext} A$. Našli jsme tedy bod $a \in F \cap \operatorname{ext} A$, což neznamená nic jiného, než že v extremálním bodě a nabývá f svého maxima. ∎

18.4. Důsledek. *Nechť A je kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru X. Potom* $\operatorname{ext} A \neq \emptyset$.

Důkaz. Stačí uvažovat funkci $f = 1$ na A a použít Bauerův princip maxima. ∎

Připomeňme, že uzavřený konvexní obal $\overline{\mathrm{co}}A$ je nejmenší uzavřená konvexní množina obsahující množinu A.

18.5. Krejn-Milmanova věta. *Nechť A je kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru X. Potom* $A = \overline{\mathrm{co}}\operatorname{ext} A$.

Důkaz. Samozřejmě $A \supset \overline{\mathrm{co}}\operatorname{ext} A$. Nechť $x_0 \in A \setminus \overline{\mathrm{co}}\operatorname{ext} A$. Protože $\overline{\mathrm{co}}\operatorname{ext} A$ je uzavřená konvexní (neprázdná!) množina, existuje podle malé Mazurovy věty 14.27 $f \in X^*$ tak, že $\sup\{f(t) : t \in A\} < f(x_0)$. To je ale ve sporu s Bauerovým principem maxima 18.3. ∎

18.6. Poznámky a příklady. (a) Na příkladě v $\mathbf{R}^3$ ukažte, že množina extremálních bodů konvexní množiny nemusí být ani uzavřená ani konvexní. Ale množina extremálních bodů kompaktní konvexní podmnožiny $\mathbf{R}^2$ musí být uzavřená. To ukázal G.B. Price [1937].

(b) V $\mathbf{R}^n$ je každý bod kompaktní konvexní množiny konvexní kombinací extremálních bodů. C. Carathéodory ukázal, že ve skutečnosti ne více než $n+1$ extremálních bodů.

(c) Nechť B_X je uzavřená jednotková koule Banachova prostoru X. Žádný bod uvnitř B_X nemůže být extremálním bodem B_X, tedy $\operatorname{ext} B_X \subset \{x \in B_X : \|x\| = 1\}$. Na příkladě Banachova prostoru c_0 je vidět, že množina extremálních bodů B_X může být prázdná. Skutečně, je-li $x = (x_1, x_2, \dots) \in B_{c_0}$, existuje index j tak, že $|x_j| < \frac{1}{6}$. Potom x je středem nedegenerované úsečky (x_-, x_+) ležící celé v B_{c_0}. Stačí totiž položit $x_- = (x_1, x_2, \dots, x_j - \frac{1}{7}, \dots)$ a $x_+ = (x_1, x_2, \dots, x_j + \frac{1}{7}, \dots)$.

Z Krejn-Milmanovy věty mimo jiné vyplývá, že prostor c_0 není reflexivní, neboť B_{c_0} nemůže být w-kompaktní, a také že není duálem žádného Banachova prostoru, neboť B_{c_0} nemůže být ani w^*-kompaktní.

(d) Uzavřená jednotková koule prostoru $\mathcal{L}^1([0,1])$ nemá také žádný extremální bod. Je-li totiž $\|f\| = \int_0^1 |f| = 1$, existuje určitě $x \in (0,1)$ tak, že $\int_0^x |f| = \frac{1}{2}$. Položíme-li $f_1 := 2fc_{[x,1]}$ a $f_2 := 2fc_{[0,x)}$, je $\|f_1\| = \|f_2\| = 1$ a $f = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$.

(e) Uzavřená jednotková koule Banachova prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ má pouze dva extremální body. Jsou jimi funkce identicky rovné 1 a -1. Jak vypadají extremální body uzavřené jednotkové koule prostoru $\mathcal{C}(K)$, kde K je kompakt?

(f) Banachovy prostory v nichž každý bod jednotkové sféry je extremálním bodem jednotkové koule B_X, tedy prostory, pro něž $\operatorname{ext} B_X = \{x \in B_X : \|x\| = 1\}$, se nazývají striktně konvexní. Tyto mají řadu zajímavých vlastností a budou studovány podrobněji v kapitole 21.

Další příklad považujeme za tak důležitý, že raději zopakujeme základní fakta . Detaily, jakož i obecnější přístup k Radonovým měrám na lokálně kompaktních prostorech, lze najít ve skriptech [LM].

18.7. Prostor Radonových měr na kompaktu. Symbolem $\mathcal{M}(K)$ označíme Banachův prostor všech Radonových měr na (Hausdorffově) kompaktním topologickém prostoru K opatřený normou $\|\mu\| := |\mu|(K)$. Protože $\mathcal{M}(K)$ je duálem k prostoru $\mathcal{C}(K)$, kromě normové topologie je $\mathcal{M}(K)$ opatřen také w^*-topologií. Podle Alaoglu-Bourbakiho věty 15.19 je jeho uzavřená jednotková koule $B_{\mathcal{M}(K)}$ w^*-kompaktní.

Pokud jde o jednotkovou sféru $S_{\mathcal{M}(K)}$, ta již nemusí být w^*-kompaktní. Je-li totiž K nekonečná množina, má prostor $\mathcal{C}(K)$, a tedy i jeho duál $\mathcal{M}(K)$ nekonečnou dimenzi a w^*-uzávěr $S_{\mathcal{M}(K)}$ je roven $B_{\mathcal{M}(K)}$ (viz 16.17).

Označíme-li $\mathcal{M}^1(K) := \{\mu \in \mathcal{M}(K) : \mu \geq 0 \text{ a } \|\mu\| = 1\}$ prostor všech (nezáporných) pravděpodobnostních měr, je zobrazení $\mu \mapsto \|\mu\|$ již na něm w^*-spojité (z konvergence $\mu_\alpha \overset{w^*}{\to} \mu$ plyne, že $\mu_\alpha f \to \mu f$ pro každou $f \in \mathcal{C}(K)$, a tedy speciálně i $\|\mu_\alpha\| = \mu_\alpha 1 \to \mu 1 = \|\mu\|$). Tedy $\mathcal{M}^1(K)$ je w^*-uzavřenou podmnožinou $B_{\mathcal{M}(K)}$, tudíž i w^*-kompaktní. Navíc, $\mathcal{M}^1(K)$ je konvexní (jsou-li $\mu, \nu \in \mathcal{M}^1(K)$ a $c \in [0,1]$, je míra $c\mu + (1-c)\nu$ také nezáporná Radonova a $\|c\mu + (1-c)\nu\| = \int_K 1\, d(c\mu + (1-c)\nu) = c\int_K 1\, d\mu + (1-c)\int_K 1\, d\nu = 1$).

18.8. Extremální body $\mathcal{M}^1(K)$. Ukážeme, že $\operatorname{ext} \mathcal{M}^1(K) = \{\varepsilon_x : x \in K\}$, kde ε_x je Diracova míra soustředěná v bodě x. Abychom dokázali naše tvrzení o extremálních bodech, potřebujeme znát nějaké charakteristiky Diracových měr, ty jsou uvedeny ve cvičení *18.1.

Jestliže tedy $\varepsilon_x = \frac{1}{2}(\mu+\nu)$, kde $\mu, \nu \in \mathcal{M}^1(K)$, dostáváme, že $\operatorname{supt}\mu \cup \operatorname{supt}\nu = \operatorname{supt} 2\varepsilon_x = \{x\}$ (to není těžké si uvědomit — nosič míry $\operatorname{supt}\mu$ je totiž doplněk největší otevřené množiny mající míru nula, viz třeba [LM], 15.10). Odtud plyne, že $\operatorname{supt}\mu = \operatorname{supt}\nu = \{x\}$ a nutně $\mu = \nu = \varepsilon_x$.

Nechť naopak $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ není Diracova míra. Existuje tedy kompaktní množina $F \subset K$ tak, že míry $\nu := \mu/F$ a $\lambda := \mu/K \setminus F$ jsou netriviální. Potom

$$\mu = \nu(K)\,\frac{\nu}{\nu(K)} + \lambda(K)\,\frac{\lambda}{\lambda(K)}\,.$$

Vidíme, že μ nemůže být extremálním bodem $\mathcal{M}^1(K)$.

Kombinací předchozího výsledku a Krejn-Milmanovy věty dostáváme, že

$$\mathcal{M}^1(K) = \overline{\operatorname{co}}\Big\{\sum_{i=1}^n \lambda_i \varepsilon_{x_i} : x_i \in K\,,\ \lambda_i \geq 0\,,\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\Big\}\,,$$

což zformulujeme jako samostatný výsledek.

18.9. Věta. *Buď K kompaktní prostor. Potom množina všech konvexních kombinací Diracových měr na K je w^*-hustá v prostoru $\mathcal{M}^1(K)$ všech pravděpodobnostních měr na K.*

18.10. Poznámky. (a) Elementární důkaz tohoto tvrzení lze nalézt v [LM], 17.9.

(b) Obdobně lze dokázat, že množina $\{\varepsilon_x$ či $-\varepsilon_x : x \in K\}$ tvoří právě všechny extremální body jednotkové koule $B_{\mathcal{M}(K)} := \{\mu \in \mathcal{M}(K) : \|\mu\| \le 1\}$. Aplikací Krejn-Milmanovy věty pak dostaneme, že absolutně konvexní obal množiny $\{\varepsilon_x : x \in X\}$ je w^*-hustý v $B_{\mathcal{M}(K)}$.

Poznamenejme, že k důkazu hustoty lze také s úspěchem využít větu o bipoláře. Myšlenka je jednoduchá. Stačí uvažovat právě absolutně konvexní obal množiny $\{\varepsilon_x : x \in X\}$ a rozmyslet si, jak vypadá její polára a bipolára.

(c) Uvažujme nyní uzavřenou, omezenou a konvexní podmnožinu Banachova prostoru X. Na příkladu jednotkové koule prostoru c_0 jsme viděli v 18.6.c, že tato nemusí mít vůbec žádné extremální body. Říkejme, že Banachův prostor má *Krejn-Milmanovu vlastnost KMP*, jestliže každá jeho uzavřená, omezená a konvexní podmnožina má alespoň jeden extremální bod. J. Lindenstrauss [1966a] ukázal, že pokud Banachův prostor má KMP, potom již pro každou uzavřenou, omezenou, konvexní množinu C platí „Krejn-Milmanova věta“: $C = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ext}\, C)$. O této problematice se zmíníme v kapitole 22.

18.11. Elementární cvičení. (a) Nechť

$$C := \Big\{ f \in \mathcal{C}([0,1]) : \|f\| \le 1, \int_0^1 |f| \le \frac{1}{2} \Big\} \quad \text{a} \quad D := \big\{ f \in \mathcal{C}([0,1]) : \|f\| \le 1 \text{ a } f(0) = 0 \big\}.$$

Ukažte, že C a D jsou omezené, uzavřené a konvexní podmnožiny Banachova prostoru $\mathcal{C}([0,1])$, které nemají žádné extremální body.

Návod. Pokud jde o množinu C, nalezněte $z \in (0,1)$, $\varepsilon > 0$ a $a > 0$ tak, aby $0 < |f(z)| < 1$ a na intervalu $(z-\varepsilon, z+\varepsilon)$ platilo $a < |f| < 1-a$. Potom stačí k funkci f přičíst a odečíst funkci v absolutní hodnotě menší než $\frac{a}{2}$ s integrálem nula, abychom f dostali jako střed úsečky s krajními body v C. ♣

(b) Nechť H je Hilbertův prostor. Jestliže $T \in \mathcal{L}(H)$ a T či T^* je izometrie, je T extremální bod uzavřené jednotkové koule $B_{\mathcal{L}(H)}$.

Návod. Toto cvičení vyžaduje trochu úsilí. Můžeme si ho ještě ztížit a nahlédnout třeba do P.R. Halmos [*1982], kde je ukázáno, že extremální body uzavřené jednotkové koule $B_{\mathcal{L}(H)}$ tvoří právě maximální parciální izometrie. ♣

(c) Uzavřená jednotková koule prostoru $\mathcal{L}_c(H)$ všech kompaktních operátorů na Hilbertově prostoru H nemá žádný extremální bod.

Návod. Pokuste se využít Schmidtovo vyjádření kompaktního operátoru z 10.3.a. ♣

(d) Nechť C je omezená uzavřená konvexní podmnožina reflexivního Banachova prostoru X. Ukažte, že $C = \overline{\mathrm{co}}\, \mathrm{ext}\, C$.

Návod. Množina C je slabě kompaktní. Dále uzávěr a slabý uzávěr konvexní množiny se shodují. ♣

(e) Nechť Y je podprostor Banachova prostoru X a $\varphi \in \mathrm{ext}\, B_{Y^*}$. Potom existuje $\Phi \in \mathrm{ext}\, B_{X^*}$ tak, že $\Phi = \varphi$ na Y.

Návod. Uvažujte množinu všech hahn-banachovských rozšíření funkcionálu φ. ♣

(f) Nechť E je normovaný lineární prostor a $x, y \in E$, $x \ne y$. Potom existuje $\psi \in \mathrm{ext}\, B_{E^*}$ tak, že $\psi(x) \ne \psi(y)$.

Návod. Jednotková koule B_{E^*} je w^*-kompaktní podle Alaogluovy věty 16.6. Stačí tedy použít Krejn-Milmanovu větu a důsledek Hahn-Banachovy věty 2.20. ♣

(g) Nechť σ_e je lokálně konvexní topologie generovaná na Banachově prostoru X systémem pseudonorem

$$p_\psi : x \mapsto |\psi(x)| \,, \quad \psi \in \mathrm{ext}\, B_{X^*} \,.$$

Ukažte, že

(a) topologie σ_e je Hausdorffova a uzavřená jednotková koule B_X je σ_e-uzavřená,
(b) v případě, kdy $X = \mathcal{C}(K)$, kde K je kompakt, dává σ_e bodovou konvergenci v prostoru $\mathcal{C}(K)$,
(c) je-li X^* striktně konvexní, potom σ_e není nic jiného než slabá topologie na X.

Návod. K důkazu (a) ukažte, obdobně jako v předchozím cvičení (f), že ke každému nenulovému $x \in X$ existuje $\psi \in \mathrm{ext}\, B_{X^*}$ tak, že $\psi(x) = \|x\|$. ♣

Poznámka. Pokud vás zajímají další vlastnosti topologie σ_e, můžete si najít článek W.B. Moors [1997]. Tam lze též nalézt důkaz zajímavé věty náležející skupině matematiků vystupujících pod jménem Rainwater. Důkaz této věty je též proveden v [HHZ].

Rainwaterova věta. *Nechť $\{x_n\}$ je omezená posloupnost v Banachově prostoru X. Potom $x_n \xrightarrow{w} x$, právě když $x_n \to x$ v topologii σ_e.*

19. Integrální reprezentace

Smyslem vět o integrálních reprezentacích v analýze je reprezentovat daný funkcionál jako integrál vzhledem k nějaké míře. Typickým příkladem je Rieszova věta o reprezentaci Radonových funkcionálů jako integrálů vzhledem k Radonovým mírám. V této kapitole budeme zkoumat obecné věty tohoto typu, zmíněnou Rieszovu větu pak můžeme chápat jako jejich speciální případ. Jeden typ vět odvodíme pomocí Krejn-Milmanovy věty, obecnější pak pomocí novější Choquetovy teorie.

V celé kapitole budeme uvažovat Hausdorffův lokálně konvexní prostor (X, τ) a v něm kompaktní konvexní podmnožinu K. Jako typický příklad si lze představit reflexivní Banachův prostor X se slabou topologií w, v němž roli K budou hrát konvexní omezené uzavřené množiny (ty jsou pak samozřejmě w-kompaktní).

Problém je následující: Je zadán bod $x \in K$ a hledá se Radonova míra μ, která by jej „reprezentovala“ ve smyslu, že rovnost $f(x) = \int_K f\,d\mu$ by měla platit pro každý funkcionál $f \in X^*$. Takových měr je zřejmě více, Diracova míra ε_x soustředěná v bodě x je určitě jednou z nich. Nám půjde o to, aby hledaná míra μ byla soustředěna na pokud možno malé části hranice množiny K. Přesněji, hledáme míru μ tak, aby platila výše uvedená reprezentace a přitom μ

(a) byla soustředěna na uzávěru množiny extremálních bodů $\overline{\operatorname{ext} K}$,

či dokonce aby

(b) byla soustředěna na množině extremálních bodů $\operatorname{ext} K$.

Samozřejmě nás také bude zajímat otázka jednoznačnosti reprezentujících měr, která nás povede k pojmu nekonečně rozměrného simplexu.

19.1. Pravděpodobnostní míry. Poznamenejme ještě, než začneme s terminologií, že prostor všech Radonových pravděpodobnostních měr na K značíme symbolem $\mathcal{M}^1(K)$. Na něm uvažujeme slabou w^*-topologii, danou dualitou s prostorem $\mathcal{C}(K)$. Tedy (zobecněná) posloupnost měr $\mu_\alpha \xrightarrow{w^*} \mu$, právě když $\mu_\alpha f \to \mu f$ pro každou $f \in \mathcal{C}(K)$, neboli když $\int_K f\,d\mu_\alpha \to \int_K f\,d\mu$. Míru $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ nazývejme *diskrétní*, jestliže μ je konvexní kombinací Diracových měr. Věta 18.9 říká, že množina všech diskrétních měr je w^*-hustá v prostoru $\mathcal{M}^1(K)$.

19.2. Těžiště míry. Bod $x \in X$ je *těžištěm* míry $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$, jestliže

$$f(x) = \int_K f\,d\mu \quad \text{pro každé} \quad f \in X^*.$$

Protože prvky duálu X^* oddělují body, nemůže mít míra μ dvě různá těžiště. Těžiště míry μ budeme označovat symbolem $r(\mu)$. Je-li $x = r(\mu)$, říkáme též, že *míra μ reprezentuje* bod x, což jinými slovy znamená, že platí věta o integrální reprezentaci. Je jasné, že Diracova míra ε_x vždy reprezentuje bod x. Naskýtají se dvě otázky:

(a) Má každá míra nějaké těžiště?

(b) Existuje ke každému bodu $x \in K$ míra, která jej má za těžiště a má nosič v množině $\overline{\operatorname{ext} X}$?

Na první otázku je odpověď celkem snadná, na druhou již komplikovanější.

19.3. Věta. *Nechť K je kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru X. Potom každá míra z $\mathcal{M}^1(K)$ má právě jedno těžiště $r(\mu)$ ležící v K. Navíc zobrazení*

$$\mu \mapsto r(\mu) \;:\; (\mathcal{M}^1(K), w^*) \to K$$

je spojité.

Důkaz. Otázku jednoznačnosti jsme již vyřešili, jde tedy o existenci těžiště. Je-li míra μ diskrétní, $\mu = \sum_i \lambda_i \varepsilon_{x_i}$, kde $x_i \in K$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum_i \lambda_i = 1$, je $r(\mu) := \sum_i \lambda_i x_i \in K$ bezesporu těžiště μ. Nechť tedy $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ je obecná míra. Jak jsme se výše zmínili, existuje (zobecněná) posloupnost diskrétních měr $\mu_\alpha \in \mathcal{M}^1(K)$, $\mu_\alpha \xrightarrow{w^*} \mu$. Protože však $\{r(\mu_\alpha)\}$ je posloupnost obsažená v kompaktu K, existuje její vybraná (zobecněná) podposloupnost $\{r(\mu_\beta)\}$, konvergující k nějakému prvku $z \in K$. Je-li nyní $f \in X^*$, máme

$$f(z) = \lim f(r(\mu_\beta)) = \lim \mu_\beta f = \mu f\,,$$

čili vidíme, že z je těžištěm míry μ.

Zbývá ukázat, že zobrazení $\mu \mapsto r(\mu)$ je w^*-spojité. Nechť tedy $\mu_\alpha \xrightarrow{w^*} \mu$ v $\mathcal{M}^1(K)$. Potom $\mu_\alpha f \to \mu f$ pro každé $f \in X^*$. Odtud plyne, že $f(r(\mu_\alpha)) \to f(r(\mu))$. Čili (zobecněná) posloupnost $\{r(\mu_\alpha)\}$ konverguje slabě k $r(\mu)$: $r(\mu_\alpha) \xrightarrow{w} r(\mu)$. Protože však K je kompakt, máme $r(\mu_\alpha) \to r(\mu)$ podle B.7. ■

19.4. Věta o integrální reprezentaci. *Buď K kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru X a $x \in K$. Potom existuje míra $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ tak, že $r(\mu) = x$ a* $\operatorname{supt}\mu \subset \overline{\operatorname{ext} K}$.

Důkaz. Označme $Y := \overline{\operatorname{ext} K}$. Podle Krejn-Milmanovy věty existuje (zobecněná) posloupnost $\{x_\alpha\}$ z $\operatorname{co}(\operatorname{ext} K)$, $x_\alpha \to x$. Každý bod x_α je konvexní kombinací extremálních bodů K, lze tedy psát $x_\alpha = \sum_{i=1}^{n(\alpha)} \lambda_i^\alpha x_i^\alpha$, kde $x_i^\alpha \in Y$, $\lambda_i^\alpha \geq 0$ a $\sum_{i=1}^{n(\alpha)} \lambda_i^\alpha = 1$. Položíme-li $\mu_\alpha := \sum_{i=1}^{n(\alpha)} \lambda_i^\alpha \varepsilon_{x_i^\alpha}$, je $\mu_\alpha \in \mathcal{M}^1(Y)$ (neboť $\operatorname{supt}\mu_\alpha \subset Y$) a $r(\mu_\alpha) = x_\alpha$. Protože $\mathcal{M}^1(Y)$ je w^*-kompaktní, existuje vybraná (zobecněná) posloupnost $\{\mu_\beta\}$ z $\{\mu_\alpha\}$ a $\mu \in \mathcal{M}^1(Y)$ tak, že $\mu_\beta \xrightarrow{w^*} \mu$. Zbývá ukázat, že x je těžištěm míry μ. Podle dodatku předchozí věty je ovšem $r(\mu_\beta) \to r(\mu)$, čili $x_\beta \to r(\mu)$. Ježto posloupnost nemůže mít dvě různé limity, dostáváme konečně $x = r(\mu)$. ■

19.5. Poznámky. (a) Samozřejmě míru μ, kterou jsme získali v průběhu posledního důkazu, můžeme chápat jako míru na K nesenou množinou Y (prostě míry μB borelovských množin $B \subset K$ položíme rovny $\mu(B \cap Y)$).

(b) Věta 19.4 je pouze přeformulovaná Krejn-Milmanova věta. Vezmeme-li totiž větu 19.4 za dokázanou, odvodíme z ní snadno Krejn-Milmanovu větu. Můžete se inspirovat větou v *19.1.

19.6. Choquetova teorie. V. Klee [1959] ukázal, že ve většině případů (a Klee přesně popisuje, v jakém je to smyslu) kompaktní konvexní množiny v nekonečně dimenzionálních Banachových prostorech jsou již uzávěrem množiny svých extremálních bodů. V tom případě věta 19.4 o integrální reprezentaci mnoho neříká. Za onu reprezentující míru totiž stačí vzít Diracovu míru. Proto je na místě otázka, zda věta 19.4 by nešla vylepšit: Existuje reprezentující míra nesená množinou extremálních bodů?

Udělejme malou odbočku. Je-li μ Radonova míra na kompaktu K, řekneme, že μ je *nesená* množinou $S \subset K$ anebo též že μ je ***soustředěna*** na S, jestliže $\mu(K \setminus S) = 0$. Zde je ovšem malý háček. Potřebovali bychom totiž vědět, že S je borelovská množina nebo alespoň množina ze σ-algebry, na níž je μ definovaná. Pokud tomu tak není, mohli bychom třeba nejdříve z míry μ vytvořit nějakým způsobem vnější míru μ^* a říci, že μ je nesená S, jestliže $\mu^*(K \setminus S) = 0$.

Poznamenejme, že míra může být nesena mnoha různými množinami.

Je-li $\operatorname{supt}\mu$ nosič míry μ, je samozřejmě μ nesená $\operatorname{supt}\mu$. Naopak, je-li μ nesená uzavřenou množinou F, je $\operatorname{supt}\mu \subset F$.

A další otázka. Pokud je odpověď kladná, kolik takových měr může být? Odpovědi na tyto otázky přinesla koncem padesátých let *Choquetova teorie*. Je jasné, že se s ní detailně nemůžeme zabývat. Nicméně shrňme alespoň základní výsledky. Začněme s tvrzením pocházejícím od M. Hervé [1961], které udává jednoduchou podmínku pro měřitelnost množiny extremálních bodů.

(a) Tvrzení. *Nechť K je metrizovatelná kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru X. Potom množina* $\operatorname{ext} K$ *je borelovská.*

Důkaz. Nechť ϱ je metrika dávající topologii K. Zobrazení $g : (x,y) \mapsto \frac{x+y}{2}$ je spojité a množiny

$$F_n := \left\{(x,y) \in K \times K : \varrho(x,y) \geq \tfrac{1}{n}\right\}$$

jsou uzavřené pro každé n. Jsou tedy i kompaktní, čímž jsou kompaktní i jejich obrazy $g(F_n)$. Protože $K \setminus \operatorname{ext} K = \bigcup_{n=1}^{\infty} g(F_n)$, jsme s důkazem hotovi. ∎

(b) Poznámky. (a) Ukázali jsme vlastně, že množina $\operatorname{ext} K$ je *typu* G_δ, tedy spočetným průnikem otevřených množin.

(b) Pokud K není metrizovatelná množina, může být struktura $\operatorname{ext} K$ velice komplikovaná. Nemusí být totiž ani borelovskou množinou (to ukázali E. Bishop a K. de Leeuw v [1959]), ale alespoň v relativní topologii z X je množina $\operatorname{ext} K$ Baireův prostor. Poslední tvrzení je dokázáno třeba v G. Choquet [*1969], II. díl.

(c) Afinní funkce. Nechť K je konvexní podmnožina vektorového prostoru. Reálná funkce f na K je *afinní*, jestliže $f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ pro každou trojici $\lambda \in [0,1]$ a $x, y \in K$. V případě kdy K je kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru X, označíme symbolem $\mathcal{A}(K)$ podprostor $\mathcal{C}(K)$ tvořený všemi afinními spojitými funkcemi. Protože $\mathcal{A}(K)$ je uzavřený podprostor $\mathcal{C}(K)$, tvoří $\mathcal{A}(K)$ Banachův prostor.

Zřejmě $X^* \restriction K \subset \mathcal{A}(K)$. Protože prvky X^* oddělují body X, oddělují i funkce z $\mathcal{A}(K)$ body K.

(d) Lemma. *Nechť K je metrizovatelná kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru X. Potom na K existuje spojitá striktně konvexní funkce.*

Je-li $h \in \mathcal{C}(K)$ striktně konvexní funkce a $h^* := \inf\{a \in \mathcal{A}(K) : a \geq h$ na $K\}$, je

$$\{x \in K : h(x) = h^*(x)\} \subset \operatorname{ext} K\,.$$

Důkaz. Nechť K je kompaktní metrizovatelná množina. Potom prostor $\mathcal{C}(K)$ je separabilní podle B.9, tudíž i $S_1 := \{f \in \mathcal{A}(K) : \|f\| = 1\}$ je separabilní. Nechť $\{h_n\}$ je hustá podmnožina S_1. Definujeme-li $h = \sum_n \frac{h_n^2}{2^n}$, je h díky stejnoměrné konvergenci uvažované řady spojitá funkce na K. Bez potíží ověříme, že h je striktně konvexní na K. Nicméně to raději proveďme.

Volme tedy $x, y \in K$, $x \neq y$ a $\lambda \in (0,1)$. Protože funkce $x \mapsto x^2$ je striktně konvexní, dostáváme

$$h_n^2\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leq \lambda h_n^2(x) + (1-\lambda)h_n^2(y)\,.$$

Na základě elementární úvahy o hustotě funkcí $\{h_n\}$ v S_1 nalezneme j tak, aby $h_j(x) \neq h_j(y)$. Potom ovšem $h_j^2\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) < \lambda h_j^2(x) + (1-\lambda)h_j^2(y)$ a sečtením všech nerovností lehko dostaneme, že $h\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) < \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y)$.

K dokončení důkazu předpokládejme, že h je striktně konvexní funkce na K a $x = \frac{y+z}{2}$ pro nějaká $y, z \in K$, $y \neq z$. Potom

$$h(x) < \frac{1}{2}h(y) + \frac{1}{2}h(z) \leq \frac{1}{2}h^*(y) + \frac{1}{2}h^*(z) \leq h^*\Big(\frac{y+z}{2}\Big) = h^*(x)$$

(využili jsme toho že funkce h^* (jakožto infimum afinních funkcí) je konkávní). ∎

Poznámka. Nechť K je kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru. Existuje-li spojitá striktně konvexní funkce na K, je K již metrizovatelná množina. Důkaz lze nalézt v E.M. Alfsen [*1971],Th. I.4.3.

(e) Choquetova věta o integrální reprezentaci. *Nechť K je metrizovatelná kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru X. Potom ke každému $x \in K$ existuje Radonova míra $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ soustředěná na množině* $\operatorname{ext} K$ *a reprezentující bod x.*

Důkaz. Naznačíme stručně hlavní myšlenky důkazu, v němž $\mathcal{A}(K) \subset \mathcal{C}(K)$ bude Banachův prostor všech spojitých afinních funkcí na K, h striktně konvexní spojitá funkce na K a $x \in K$ daný bod. Pro $f \in \mathcal{C}(K)$ a $t \in K$ položíme

$$f^*(t) := \inf\{a(t) : a \in \mathcal{A}(K),\ a(t) \geq f(t)\}\,.$$

Podle lemmatu *19.5.c najdeme Radonovu pravděpodobnostní míru μ na K tak, aby

$$a(x) = \int_K a\,d\mu \quad \text{pro každou funkci} \quad a \in \mathcal{A}(K) \quad \text{a} \quad h^*(x) = \int_K h\,d\mu\,.$$

Ukážeme-li, že $\int_K h\,d\mu = \int_K h^*\,d\mu$, bude $h = h^*$ μ-skoro všude na K (vemte v potaz, že $h \le h^*$ na K). Protože podle lemmatu (d) je $K \setminus \operatorname{ext} K \subset \{t \in K : h(t) < h^*(t)\}$, bude $\mu(K \setminus \operatorname{ext} K) = 0$. Mějme tedy $a \in \mathcal{A}(K)$, $a \ge h$. Potom

$$h^*(x) = \int_K h\,d\mu \le \int_K h^*\,d\mu \le \int_K a\,d\mu = a(x)\,.$$

Přechodem k infimu přes množinu $\{a \in \mathcal{A}(K) : a \ge h\}$ dostáváme konečně kýženou rovnost $\int_K h\,d\mu = \int_K h^*\,d\mu$. ∎

`(f) Choquetovy simplexy`. Je otázkou, kolik reprezentujících měr soustředěných na množině extremálních bodů v předešlé Choquetově větě exituje. Na jednoduchém příkladě trojúhelníku či čtverce v rovině snadno vidíme, že v prvním případě právě jedna, zatímco pro čtverec jich může být více. Tento postřeh nás vede k následující definici. Řekneme, že metrizovatelná kompaktní konvexní podmnožina K lokálně konvexního prostoru je *Choquetův simplex*, jestliže v každém bodě množiny K existuje právě jedna reprezentující míra nesená množinou extremálních bodů K. Pokud by někoho zajímala otázka okolo simplexů více, zejména konkrétní příklady, může si přečíst příslušnou partii v *19.5.k.

19.7. Elementární cvičení. (a) Nechť K je kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru X. Ukažte, že množina funkcí $(X^* + \lambda\mathbf{R}) \restriction K$ je hustá v $\mathcal{A}(K)$.

Návod. Nechť $f \in \mathcal{A}(K)$ a $\varepsilon > 0$. Podívejte se na grafy funkcí f a $f + \varepsilon$. To budou kompaktní konvexní množiny, které pomocí geometrické Hahn-Banachovy věty oddělte spojitým lineárním funkcionálem z X^*. ♣

(b) Nechť K je kompaktní konvexní podmnožina Hausdorffova lokálně konvexního prostoru. Ukažte, že míra $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ *reprezentuje bod* $x \in X$, právě když $h(x) = \int_K h\,d\mu$ pro každou spojitou afinní funkci $h \in \mathcal{A}(K)$.

Návod. Použijte cvičení (a) a limitní přechod pro stejnoměrnou konvergenci za integrálem. ♣

D. Geometrie Banachových prostorů

20. Derivování v Banachových prostorech

V počátku této kapitoly předpokládejme, že X a Y jsou Banachovy prostory a f je zobrazení definované na otevřené množině $G \subset X$ s hodnotami v Y.

20.1. Derivace ve směru. Je-li $x \in G$, definujme *derivaci f ve „směru“ $h \in X$* jako limitu

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda},$$

pokud tato limita existuje. Značme ji symbolem $D_h f(x)$.

20.2. Slabá neboli Gâteauxova derivace. V případě, že f má derivaci v každém směru $h \in X$ a $df(x) : h \mapsto D_h f(x)$ je spojité lineární zobrazení z X do Y, řekneme, že f má v bodě x *slabou* nebo také *Gâteauxovu* derivaci $df(x)$.

20.3. Silná neboli Fréchetova derivace. Existuje-li spojité lineární zobrazení $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ tak, aby

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - L(h)}{\|h\|} = 0,$$

řekneme, že f má v bodě x *silnou* nebo též *Fréchetovu* derivaci (někdo používá i názvu *totální diferenciál*).

20.4. Postřehy. (a) Má-li zobrazení f Fréchetovu derivaci v bodě x, je zobrazení L z uvedené definice jednoznačně určeno. Nazývá se *Fréchetovou derivací f* v x a značí se $f'(x)$. Nezapomeňte tedy, že derivace $f'(x)$ je spojité lineární zobrazení z X do Y.

(b) Existuje-li $f'(x)$, má f v bodě x i slabou derivaci a $f'(x) = df(x)$. Samozřejmě v tomto případě existuje i derivace v každém směru h a $D_h f(x) = f'(x)(h)$.

(c) Buď f reálná funkce na Banachově prostoru X. Můžeme říci, že f má v bodě x gâteauxovskou derivaci, existuje-li $L \in X^*$ tak, že

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda} = Lh$$

pro každé $h \in X$. Lze dokázat, že f má v bodě x fréchetovskou derivaci, existuje-li $L \in X^*$ tak, že

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda} = Lh$$

pro každé $h \in X$, a to stejnoměrně vzhledem k $h \in S_X$.

(d) Ani v prostorech $\mathbf{R}^n$ pojmy gâteauxovské a fréchetovské diferencovatelnosti nesplývají. Na to jsou známé protipříklady. V tomto případě splývá pojem Fréchetovy derivace samozřejmě s pojmem totálního diferenciálu.

20.5. Příklady. Pro dobré pochopení rozdílů derivování reálných funkcí a funkcí s hodnotami v Banachových prostorech je vhodné si promyslet příklady. V dalším uvedeme některé typické se stručnými návody.

(a) Na Banachově prostoru $X := \mathcal{C}([0,1])$ uvažujme funkcionál

$$F : f \mapsto \int_0^1 f^2 .$$

Volme $\varphi \in X$ a počítejme derivaci zobrazení F ve „směru“ φ. Máme

$$D_\varphi F(f) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{F(f+\lambda\varphi) - F(f)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} \int_0^1 \big((f+\lambda\varphi)^2 - f^2\big) =$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \int_0^1 \big(2f\varphi + \lambda\varphi^2\big) = \int_0^1 2f\varphi .$$

Označme $L : \varphi \mapsto 2\int_0^1 f\varphi$. Evidentně L je lineární funkcionál na X. Z odhadu

$$|L\varphi| \le 2\int_0^1 |f\varphi| \le 2 \max_{t\in[0,1]} |\varphi(t)| \int_0^1 |f| = 2\|\varphi\| \int_0^1 |f|$$

plyne, že L je omezený. Má tedy zobrazení F Gâteauxovu derivaci v bodě f, a to rovnu zobrazení L.

Pokud existuje Fréchetova derivace F v bodě f, musí být nutně rovna L. O tom zda existuje či ne, rozhodne následující limita. Opět máme

$$\begin{aligned}\lim_{\varphi\to 0} \frac{F(f+\varphi) - F(f) - L(\varphi)}{\|\varphi\|} &= \lim_{\varphi\to 0} \frac{1}{\|\varphi\|} \int_0^1 ((f+\varphi)^2 - f^2 - 2f\varphi) = \\ &= \lim_{\varphi\to 0} \frac{1}{\|\varphi\|} \int_0^1 \varphi^2 \le \lim_{\varphi\to 0} \|\varphi\| = 0\,.\end{aligned}$$

Vidíme, že zobrazení F je v bodě f i silně diferencovatelné a jeho Fréchetova derivace je rovna L.

(b) Uvažujme Banachův prostor l^1, funkci $f : t \mapsto \|t\|$ na něm a $x = \{x_n\} \in l^1$. Ukážeme, že f je gâteauxovsky diferencovatelná v bodě x, právě když $x_n \ne 0$ pro všechna n. V tom případě $df(x) = \{\operatorname{sign} x_n\} \in l^\infty$. Fréchetova derivace normy v l^1 neexistuje v žádném bodě.

Zopakujte si, jak vypadají spojité lineární formy na prostoru l^1. Ty mají tvar $\sum_n a_n x_n$, kde $\{a_n\} \in l^\infty$. Přesněji, je-li $\{a_n\} \in l^\infty$ a $\psi(x) = \sum_n a_n x_n$ pro $x = \{x_n\} \in l^1$, je $\psi \in (l^1)^*$. Naopak, každá spojitá lineární forma na l^1 je tohoto tvaru.

Návod. Je-li $x = \{x_n\}$ taková posloupnost v l^1, že $x_k = 0$ pro jisté k, nebude existovat derivace f ve směru $e_k = (0,\dots,0,1,0,\dots)$ (cifra 1 na k-tém místě). V tom případě je totiž

$$\frac{\|x+\lambda e_k\| - \|x\|}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\Big(\sum_n |x_n| + |\lambda| - \sum_n |x_n|\Big) = \frac{|\lambda|}{\lambda}$$

a limita pro $\lambda \to 0$ neexistuje.

Nechť tedy $x_n \ne 0$ pro všechna n. Volme směr $h = \{h_n\} \in l^1$ a $\varepsilon > 0$. Především najděme k tak, aby $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} |h_n| < \varepsilon$. Existuje tedy $\delta > 0$ tak, že $\operatorname{sign}(x_n + \lambda h_n) = \operatorname{sign} x_n$ pro $|\lambda| < \delta$ a $n \in \{1,\dots,k\}$. Využitím právě řečeného již lehce pro $|\lambda| < \delta$ odhadneme

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\|x+\lambda h\| - \|x\|}{\lambda} - \sum_{n=1}^{\infty} h_n \operatorname{sign} x_n\right| \le \\ &\le \left|\frac{1}{\lambda}\Big(\sum_{n=1}^{k} |x_n + \lambda h_n| - |x_n| - \lambda h_n \operatorname{sign} x_n + \sum_{n=k+1}^{\infty} |x_n + \lambda h_n| - |x_n| - \lambda h_n \operatorname{sign} x_n\Big)\right| \le \\ &\le \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=k+1}^{\infty} (|x_n| + |\lambda h_n| - |x_n| + |\lambda h_n|) \le \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=k+1}^{\infty} (2|\lambda h_n|) < 2\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Protože zobrazení $h \mapsto \sum_n h_n \operatorname{sign} x_n$ je podle výše uvedené poznámky spojitá lineární forma na l^1, má f v bodě x Gâteauxovu derivaci rovnu $\{\operatorname{sign} x_n\} \in l^\infty$.

Poznámka. Protože $\|.\|$ je spojitá konvexní funkce, mohli jsme si předešlé úvahy ušetřit, pokud bychom ovšem vzali v potaz 20.8.c.

Ukážeme dále, že f nemá v žádném bodě Fréchetovu derivaci. Předpokládejme tedy, že f má v bodě $x = \{x_n\}$ derivaci $f'(x)$. Jediným kandidátem na derivaci $f'(x)$ je $\{\operatorname{sign} x_n\} \in l^\infty$. Volíme-li však

$$h^j = (0, 0, \dots, 0, -2x_j, -2x_{j+1}, -2x_{j+2}, \dots),$$

je $\|h^j\| = 2 \sum\limits_{n=j}^{\infty} |x_n| \to 0$, přičemž

$$\big|\|x + h^j\| - \|x\| - f'(x)(h^j)\big| = \Big|\|x + h^j\| - \|x\| - \sum_{n=j}^{\infty}(-2x_n) \operatorname{sign} x_n\Big| =$$

$$= \Big|\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| - \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| + \sum_{n=j}^{\infty} 2|x_n|\Big| = \|h^j\|.$$

Tudíž f nemůže mít v bodě x Fréchetovu derivaci. ♣

20.6. Konvexní funkce. V dalším se soustředíme především na derivování konvexních funkcí. Připomeňme, že reálná funkce f definovaná na konvexní podmnožině D (reálného) vektorového prostoru W je *konvexní*, jestliže $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \le \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$, kdykoliv $x, y \in D$ a $\lambda \in [0, 1]$.

Důležitým příkladem konvexní funkce je norma na Banachově prostoru, tedy zobrazení $\|.\| : x \mapsto \|x\|$.

20.7. Vlastnosti konvexních funkcí. Ukážeme, že spojitost konvexní funkce v jednom bodě již zaručuje její spojitost na celé množině. Dokonce odvodíme i silnější tvrzení.

`(a) Lemma.` *Nechť f je reálná konvexní funkce na otevřené konvexní množině $D \subset X$ spojitá v bodě $x_0 \in D$. Potom existují konstanty $K > 0$ a $\delta > 0$ tak, že*

$$|f(x) - f(y)| \le K \|x - y\| \quad \textit{pro všechna} \quad x, y \in U(x_0, \delta).$$

Tudíž spojité konvexní funkce jsou lokálně lipschitzovské.

Důkaz. Spojitost funkce f v x_0 nám zaručí existenci takových konstant $M > 0$ a $\delta > 0$, že $|f(t)| \le M$ pro všechna $t \in U(x_0, 2\delta) \subset D$. Volme $x, y \in U(x_0, \delta)$, $x \ne y$. Označme ještě $\alpha := \|x - y\|$ a $z := y + \frac{\delta}{\alpha}(y - x)$. Pomocí trojúhelníkové nerovnosti ihned zjistíme, že $z \in U(x_0, 2\delta)$. Protože y je konvexní kombinací z a x, totiž

$$y = \frac{\alpha}{\alpha + \delta} z + \frac{\delta}{\alpha + \delta} x,$$

dostáváme pomocí konvexity funkce f

$$f(y) - f(x) \le \frac{\alpha}{\alpha + \delta} f(z) + \frac{\delta}{\alpha + \delta} f(x) - f(x) = \frac{\alpha}{\alpha + \delta}(f(z) - f(x)) \le \frac{\alpha}{\alpha + \delta} 2M \le \frac{2M}{\delta}\|x - y\|.$$

Obdobně zjistíme, že $f(x) - f(y) \le \frac{2M}{\delta}\|x - y\|$. ■

`(b) Poznámky.` (b1) Protože na prostorech nekonečné dimenze existují nespojité lineární funkcionály (můžete se třeba podívat na poznámku 2.6.c) a každý lineární funkcionál je samozřejmě konvexní funkcí, existují i nespojité konvexní funkce. To ostře kontrastuje s tvrzením, že konvexní funkce na otevřených podmnožinách konečně dimenzionálních prostorů jsou spojité. Důkaz tohoto tvrzení je naznačen v 20.10.h.

(b2) Projdeme-li si dobře poslední důkaz, zjistíme, že o funkci f stačilo pouze předpokládat její omezenost na jistém okolí bodu x_0. Potom je lipschitzovská na okolí x_0. Vidíme tedy, že konvexní funkce f je spojitá na D, právě když je na D lokálně omezená.

(b3) Dokonce, při troše pozornosti, bychom v důkazu vystačili s omezeností funkce f pouze shora na jistém okolí x_0. Skutečně, je-li $f \le K$ na $U(x_0, \delta)$, máme pro $t \in U(x_0, \delta)$ také $2x_0 - t \in U(x_0, \delta)$, a tudíž

$$f(x_0) = f\Big(\frac{2x_0 - t}{2} + \frac{t}{2}\Big) \le \frac{1}{2} f(2x_0 - t) + \frac{1}{2} f(t) \le \frac{1}{2}\big(K + f(t)\big).$$

Odtud plyne středoškolskou úpravou $-f(t) \le K - 2f(x_0) \le K + 2|f(x_0)|$, a protože také $f(t) \le K \le K + 2|f(x_0)|$), máme úhrnem $|f(t)| \le K + 2|f(x_0)|$. Tudíž f je omezená na $U(x_0, \delta)$, a podle toho, co jsme řekli v (b2), je f spojitá v bodě x_0.

`(c) Věta.` *Nechť f je konvexní funkce definovaná na otevřené konvexní podmnožině D Banachova prostoru X. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *f je spojitá na D,*
(ii) *f je shora polospojitá na D,*
(iii) *f je shora omezená na okolí nějakého bodu z D,*
(iv) *f je spojitá v nějakém bodě D.*

Důkaz. O implikaci (i) $\Rightarrow$(ii) není třeba mluvit. Je-li reálná funkce f shora polospojitá na D a $x \in D$, je množina $\{t \in D : f(t) < f(x)+1\}$ okolí bodu x, na němž je f shora omezená. O implikaci (iii) $\Rightarrow$ (iv) již byla řeč v poznámkách (b) a lemmatu (a).

Nechť tedy f je spojitá v bodě $x \in D$ a y je daný bod D. Existuje $z \in D$ a $\lambda \in (0,1)$ tak, že $y = \lambda x + (1-\lambda)z$. Najděme $\delta > 0$ a $K > 0$ tak, aby $f \le K$ na $U(x,\delta)$. Tvrdíme, že f je omezená shora na množině $U(y,\lambda\delta)$. Pokud toto ukážeme, bude podle poznámky (b3) funkce f spojitá v bodě y. Volme tedy $t \in U(y,\lambda\delta)$. Potom $t = \lambda(x + \frac{t-y}{\lambda}) + (1-\lambda)z \in D$, přičemž $x + \frac{t-y}{\lambda} \in U(x,\delta)$, a tudíž konvexita f nám dá odhad

$$f(t) \le \lambda f\Big(x + \frac{t-y}{\lambda}\Big) + (1-\lambda)f(z) \le \lambda K + (1-\lambda)f(z)\,.$$

■

`(d) Poznámky.` (d1) Je-li konvexní funkce na otevřené konvexní množině D borelovská, je již na D spojitá. I to je zajímavé tvrzení.

(d2) Poslední věta (c) zůstává v platnosti i pro konvexní funkce na topologických vektorových prostorech.

(d3) Je zajímavé porovnat poslední větu s obdobnou charakteristikou spojitosti lineárních funkcionálů v 2.2. Mezi tvrzeními obou vět je však přeci jen malý rozdíl: Spojité lineární funkcionály jsou omezené na jednotkové kouli, zatímco spojité konvexní funkce (i když jsou lokálně omezené), nemusejí být na jednotkové kouli omezené. Dokonce na každém nekonečně dimenzionálním separabilním Banachově prostoru vždy existuje spojitá konvexní funkce, která není omezená na jeho uzavřené jednotkové kouli. Konstrukce je uvedena v [HHZ], str. 115. Najdete nějakou takovou funkci na prostoru l^2?

20.8. Gâteauxovská derivace konvexních funkcí. V tomto odstavci se zaměříme na gâteauxovskou diferencovatelnost konvexních funkcí.

`(a) Lemma.` *Nechť D je otevřená konvexní podmnožina (reálného) Banachova prostoru X, f konvexní funkce na D a $x \in D$. Potom*

$$d^+f(x)(h) := \lim_{t\to 0_+} \frac{f(x+th)-f(x)}{t}$$

existuje pro všechna $h \in X$ a zobrazení

$$d^+f(x) : h \mapsto d^+f(x)(h)$$

je konvexní funkcionál na X.

Důkaz. Nechť $h \in X$. Funkce $t \mapsto \frac{1}{t}(f(x+th)-f(x))$ je monotonní na jistém pravém okolí 0. Jsou-li totiž $0 < t < s$ dostatečně malá (tak, aby $x + sh \in D$), je $x + th = \frac{s-t}{s}x + \frac{t}{s}(x+sh)$ (konvexní kombinace). Tedy $f(x+th) \le \frac{s-t}{s}f(x) + \frac{t}{s}f(x+sh)$, odkud plyne, že $\frac{1}{t}(f(x+th) - f(x)) \le \frac{1}{s}(f(x+sh)-f(x))$.

Volme $t > 0$ malé. Potom

$$(*) \qquad -\frac{f(x-2th)-f(x)}{2t} \le \frac{f(x+2th)-f(x)}{2t}\,,$$

neboť $2f(x) = 2f\big(\frac{x-2th+x+2th}{2}\big) \le f(x-2th)+f(x+2th)$. Odtud plyne, že pravá strana nerovnosti $(*)$ je omezená zdola, levá pak omezená shora, a protože limity existují, máme $-d^+f(x)(-h) \le d^+f(x)(h)$.

Zbývá dokázat poslední tvrzení. Je-li $\lambda > 0$, je

$$d^+ f(x)(\lambda h) = \lambda \lim_{t\to 0_+} \frac{f(x+t\lambda h) - f(x)}{\lambda t} = \lambda\, d^+ f(x)(h)\,.$$

Obdobně pro $h, k \in X$ dostáváme

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0_+} \frac{1}{t}\big(f(x+(h+k)t) - f(x)\big) &\le \lim_{t\to 0_+} \Big(\frac{f(x+2th)-f(x)}{2t} + \frac{f(x+2tk)-f(x)}{2t}\Big)\\ &= d^+ f(x)(h) + d^+ f(x)(k)\,.\end{aligned}$$

■

(b) Lemma. *Jestliže existuje derivace $D_h f(x)$ pro každé $h \in X$, kde f je konvexní funkce na otevřené konvexní množině $D \subset X$ a $x \in D$, je zobrazení $h \mapsto D_h f(x)$ lineární.*

Důkaz. Derivace (oboustranná) $D_h f(x)$ existuje pro každé $h \in X$, právě když $-d^+ f(x)(-h) = d^+ f(x)(h)$ pro každé $h \in X$. Protože podle předešlého lemmatu (a) zobrazení $h \mapsto d^+ f(x)(h)$ je konvexní funkcionál, je zobrazení $h \mapsto D_h f(x)$, pokud existuje, lineární. ■

(c) Věta. *Nechť f je konvexní funkce definovaná na otevřené konvexní podmnožině D Banachova prostoru X spojitá v bodě $x \in X$ a mající v x derivace $D_h f(x)$ ve všech směrech $h \in X$. Potom f má v bodě x gâteauxovskou derivaci $df(x)$ a $df(x)(h) = D_h f(x)$.*

Důkaz. Pomocí lemmatu (a) v 20.7 najděme $K > 0$ a $\delta > 0$ tak, aby $|f(u) - f(v)| \le K\,\|u - v\|$ pro všechna $u, v \in U(x,\delta) \subset D$. Volme $h \in X$. Nechť $\lambda > 0$ je takové, že $x + \lambda h \in U(x,\delta)$. Potom $f(x+\lambda h) - f(x) \le K\,\|\lambda h\| = K\lambda\,\|h\|$. Odtud plyne,že $d^+ f(x)(h) \le K\,\|h\|$, tudíž $d^+ f(x) \in X^*$.
■

Jak jsme již řekli, funkce $\eta : t \mapsto \|t\|$ je spojitá konvexní funkce. Ukážeme, že za dodatečných předpokladů slabá derivace funkce η poslouží jako „tečný funkcionál“. Připomeňme si při této příležitosti důsledek Hahn-Banachovy věty 2.20: Je-li x nenulový prvek Banachova prostoru X, existuje $g \in X^*$ tak, že $\|g\| = 1$ a $g(x) = \|x\|$.

20.9. Věta. *Nechť funkce $\eta : t \mapsto \|t\|$ je gâteauxovsky diferencovatelná v bodě $x \neq 0$ Banachova prostoru X. Potom její Gâteauxova derivace $d\eta(x)$ má následující vlastnosti*

$$d\eta(x) \in X^*\,, \quad \|d\eta(x)\| = 1 \quad a \quad d\eta(x)(x) = \|x\|\,.$$

Jestliže $g \in X^*$, $\|g\| = 1$ a $g(x) = \|x\|$, potom $g = d\eta(x)$.

Důkaz. Z odhadu platného pro $h \in X$ a malá t

$$\frac{1}{t}\big(\|x+th\| - \|x\|\big) \le \frac{1}{|t|}\|x + th - x\| = \|h\|$$

plyne $\|d\eta(x)\| \le 1$. Dále máme

$$d\eta(x)\Big(\frac{x}{\|x\|}\Big) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(\Big\|x + t\frac{x}{\|x\|}\Big\| - \|x\|\Big) = \|x\| \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(1 + \frac{t}{\|x\|} - 1\Big) = 1\,.$$

Tedy $\|d\eta(x)\| = 1$. Obdobně lehko zjistíme, že $d\eta(x)(x) = \|x\|$.

Nechť $g \in X^*$ splňuje předpoklady věty. Volme $h \in X$ a označme

$$\varepsilon(t) := d\eta(x)(h) - \frac{1}{t}\big(\|x+th\| - \|x\|\big) \quad \text{pro} \quad t \neq 0\,.$$

Samozřejme $\varepsilon(t) \to 0$ pro $t \to 0$. Potom pro $t \neq 0$ máme

$$g(x+th) \le \|g\|\,\|x+th\| = \|x\| + td\eta(x)(h) + t\varepsilon(t) = g(x) + td\eta(x)(h) + t\varepsilon(t)\,.$$

Odtud dostáváme $tg(h) \le td\eta(x)(h) + t\varepsilon(t)$, což nás elementární úpravou a limitním přechodem $t \to 0$ vede k nerovnosti $g(h) \le d\eta(x)(h)$. Protože tato nerovnost platí pro každé $h \in X$ (a tedy i pro $-h$), je vyhráno. Nesmíme totiž zapomenout, že funkcionály g a $d\eta(x)$ jsou lineární, tudíž musí být identické. ■

Poznámka. Předchozí věta úzce souvisí s geometrií Banachova prostoru. Podle ní v každém bodě, v němž je norma gâteauxovsky diferencovatelná, je prostor „hladký“: Existuje v něm právě jeden tečný funkcionál. Tímto tématem se budeme zabývat v následující kapitole.

20.10. Elementární cvičení. (a) V prostorech konečné dimenze spojité konvexní funkce, které jsou gâteauxovsky diferencovatelné, jsou i fréchetovsky diferencovatelné.

Návod. Využijte charakteristiku v 20.4.c a kompaktnost jednotkové sféry. ♣

(b) Nechť f je konvexní spojitá funkce na otevřené konvexní množině C v $\mathbf{R}^n$. Potom f je gâteauxovsky diferencovatelná v bodě $x \in C$, právě když f má v bodě x všechny parciální derivace.

(c) Najděte Gâteauxovu a Fréchetovu derivaci funkce $f : X \to \mathbf{R}$ v následujících případech:

(c1) X je Hilbertův prostor a $f(x) = \|x\|$ či $f(x) = \|x\|^2$ (rozlište případy, kdy H je reálný či komplexní prostor),
(c2) $X = \mathcal{L}^2([0,1])$ a $f(\varphi) = \int_0^1 \varphi^2$ (porovnejte s příkladem 20.5.a a předchozím příkladem),
(c3) X je reflexivní Banachův prostor, $T \in \mathcal{L}(X, X^*)$ a $f : x \mapsto Tx(x)$,
(c4) $X = l^2$ a $f : \{x_n\} \mapsto \sum n^{-2} x_n^2$.

(d) Najděte Gâteauxovu a Fréchetovu derivaci zobrazení $F : X \to Y$ v bodě x_0 následujících případech:

(d1) $X = Y = \mathcal{C}([0,\pi])$, $F : h(t) \mapsto \sin\, h(t)$, $x_0 = \cos t$,
(d2) $X = Y = \mathcal{C}([0,\pi])$, $F(\varphi)(t) = \varphi(t) - \int_0^\pi \cos\,(t + \varphi(s))\, ds$, $x_0 = 0$,
(d3) $X = l^1$, $Y = l^2$, $\{e_n\}$ jsou standardní jednotkové vektory, $F(\lambda e_n) = \lambda^{\frac{n+1}{n}} e_n$ a $F = 0$ jinde, $x_0 = 0$,
(d4) $X = Y = \mathcal{C}([0,1])$, $F(\varphi)(t) = \int_0^{\varphi^2(t)} \sin s\, ds$, $x_0 \in X$,
(d5) $X = Y = l^2$, $F : \{x_n\} \mapsto \{|x_n|\}$, $x_0 \in X$,
(d6) $X = Y = \mathcal{L}^2([0,1])$, $F(\varphi) = \int_0^1 \sin(s\,\varphi(s))\, ds$, $x_0 \in X$,
(d7) $X = \mathcal{C}^1([0,1])$, $Y = \mathcal{C}([0,1])$, $F(\varphi)(t) = \sin(\varphi'(t) + 1)$, $x_0 \in X$.

(e) Definujme $f : \{x_n\} \mapsto \limsup |x_n|$ pro $\{x_n\} \in l^\infty$. Ukažte, že f je spojitá konvexní funkce na l^∞ (dokonce je pseudonorma), která nemá gâteauxovskou derivaci v žádném bodě.

Návod. Značme $x := \{x_n\}$. Z nerovnosti $f(x) \le \|x\|_\infty$ dostaneme spojitost f v bodě 0, a protože f je evidentně pseudonorma, je f spojitá funkce na l^∞. Je-li $f(x) = 0$, nemá f derivaci ve směru $(1, 1, 1, \dots)$. Pokud $f(x) > 0$, najděme podposloupnost x_{n_k} tak, aby $x_{n_k} > 0$, $x_{n_k} \to f(x)$. Ukažte, že f nemá derivaci ve směru vektoru složenému z nul (na místech mimo indexy n_k), $+1$ a -1, které se střídají na dalších místech. ♣

Poznámka. V separabilních Banachových prostorech taková situace nemůže nastat. *Mazurova věta* říká, že v separabilním Banachově prostoru spojitá konvexní funkce definovaná na konvexní otevřené množině musí být gâteauxovsky diferencovatelná na husté G_δ množině. Tato věta je dokázána v S. Mazur [1933]. Existují však i neseparabilní Banachovy prostory, v nichž spojité konvexní funkce na otevřených konvexních podmnožinách jsou gâteauxovsky diferencovatelné na hustých G_δ-množinách. Tuto vlastnost bychom vlastně mohli vzít za definici tak zvaných *slabých Asplundových prostorů*. Jejich obšírnému studiu je věnována čerstvá monografie M. Fabiána [*1997].

(f) Nechť H je reálný Hilbertův prostor, $f : x \mapsto (x, x) = \|x\|^2$ a $g : x \mapsto \|x\|$ jsou funkce na H. Najděte Fréchetovy derivace funkcí f a g.

(g) Ukažte, že max-norma na prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ je gâteauxovsky diferencovatelná v bodě f jednotkové sféry, právě když $|f|$ nabývá svého maxima právě v jednom bodě intervalu $[0,1]$. Fréchetovsky tato norma není diferencovatelná nikde.

(h) Nechť f je konvexní funkce na otevřené konvexní množině $D \subset \mathbf{R}^n$. Ukažte, že f je na D spojitá.

Návod. Nechť $0 \in D$. Stačí ukázat, že f je shora omezená na nějakém okolí 0. Potom f bude spojitá v 0 podle poznámky 20.7.b3. Určitě existuje $\delta > 0$ tak, že pokud $x := (x_1, \dots, x_n)$, $|x_1| + \dots + |x_n| < \delta$, potom $x \in D$. Volme pevně takové x. Označíme-li e_j j-tý základní vektor v $\mathbf{R}^n$ a položíme-li $\lambda_j := \frac{1}{\delta} x_j \operatorname{sign} x_j$ pro $j = 1, \dots, n$ a $\lambda_0 := 1 - (\lambda_1 + \dots \lambda_n)$, máme

$$f(x) \le \lambda_0 f(0) + \lambda_1 f(\operatorname{sign} x_1 \delta e_1) + \dots + \lambda_n f(\operatorname{sign} x_n \delta e_n) \le \max\{|f(0)|, |f(\operatorname{sign} x_j \delta e_j)|,\ j = 1, \dots, n\}\ .$$

♣

(i) Nechť f je konvexní funkce na otevřené konvexní množině $D \subset X$ spojitá v bodě $x \in D$. Ukažte, že f je gâteauxovsky diferencovatelná v x, právě když

$$\lim_{t \to 0_+} \frac{1}{t}\big(f(x + th) + f(x - th) - 2f(x)\big) = 0$$

pro každé $h \in X$.

(j) Ukažte, že norma na prostoru $\mathcal{L}^\infty([0,1])$ není nikde gâteauxovsky diferencovatelná.

(k) Ukažte, že funkce $f \mapsto \|f\|_1 + \|f\|_2$ je ekvivalentní norma na prostoru $\mathcal{L}^2([0,1])$, která není nikde gâteauxovsky diferencovatelná (zde pochopitelně $\|f\|_j$ značí normu funkce f v prostoru $\mathcal{L}^j([0,1])$).

21. Konvexita, hladkost a renormace

V této kapitole budeme uvažovat pouze reálné Banachovy prostory.

21.1. Extremální body. Zopakujme si, že x je *extremálním bodem* konvexní podmnožiny C vektorového prostoru W, neexistuje-li (nedegenerovaná) úsečka ležící celá v C a mající bod x za střed. Jinými slovy, je-li $x = \frac{a+b}{2}$, kde $a, b \in C$, potom $a = b$. Sami si rozvažte, že x je extremálním bodem C, právě když množina $C \setminus \{x\}$ je konvexní.

Množinu všech extremálních bodů množiny C značíme $\operatorname{ext} C$.

21.2. Striktně konvexní prostory. Banachův prostor X nazveme *striktně konvexním*, jestliže každý bod jednotkové sféry S_X je jejím extremálním bodem, tedy jestliže $\operatorname{ext} S_X = S_X$. Někteří autoři též nazývají striktně konvexní prostory *rotundní*.

21.3. Poznámky. (a) Není těžké si rozmyslet, že ve striktně konvexních prostorech nemůže na sféře libovolné koule ležet úsečka. Odtud plyne, že při promítání na konvexní množiny ve striktně konvexních prostorech nemůže jeden bod mít dva různé průměty: *Je-li C konvexní podmnožina striktně konvexního Banachova prostoru X, $x \in X$, $a, b \in C$ a $\|x-a\| = \|x-b\| = \operatorname{dist}(x, C)$, potom nutně $a = b$.*

(b) Protože extremální body uzavřené jednotkové koule B_X musí nutně ležet na sféře S_X (je-li $\|x\| < 1$, je určitě bod x středem úsečky, která celá leží uvnitř B_X), lze říci, že prostor X je striktně konvexní, právě když $\|x+y\| < 2$ pokud $x, y \in B_X$, $x \neq y$.

(c) Nechť pro body x, y Hilbertova prostoru H platí $\|x+y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$. Protože v každém Hilbertově prostoru platí rovnoběžníkové pravidlo, musí nutně být $x = y$. To je jasné i geometricky, uvedená rovnost $\|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ vlastně říká, že v rovnoběžníku se stranami x a y „chybí“ druhá uhlopříčka $x - y$.

Jaká je situace v obecných Banachových prostorech? Nechť tedy X je Banachův prostor a $x, y \in X$. Protože

$$0 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x+y\|^2 \geq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x\|^2 - 2\|x\|\,\|y\| - \|y\|^2 = \big(\|x\| - \|y\|\big)^2 \geq 0\,,$$

dostáváme $\|x\| = \|y\|$. Nemusí tedy být nutně $x = y$. V jakých prostorech tomu je, napoví následující tvrzení.

21.4. Charakteristika striktní konvexity. *Následující podmínky jsou pro Banachův prostor X ekvivalentní:*

(i) *X je striktně konvexní,*
(ii) *jestliže $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, $x \neq 0 \neq y$, potom $x = \lambda y$ pro nějaké $\lambda \geq 0$,*
(iii) *jestliže $x, y \in X$ a $\|x+y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$, potom $x = y$.*

Důkaz. Předpokládejme, že X je striktně konvexní a x, y nenulové prvky X splňující rovnost $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$. Nechť třeba $\|x\| \leq \|y\|$. Potom

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| \geq \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|x\|} \right\| - \left\| \frac{y}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| = \frac{1}{\|x\|}\,\big(\|x\| + \|y\|\big) - \|y\| \left(\frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{\|y\|} \right) = 2\,.$$

Odtud podle předpokladu plyne, že $\frac{x}{\|x\|} = \frac{y}{\|y\|}$, čili $x = \frac{\|x\|}{\|y\|} y$.

Předpokládejme, že podmínka (ii) je splněna a $\|x+y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$. Jak jsme uvedli v předešlé poznámce 21.2.c, plyne odtud, že $\|x\| = \|y\|$. Nechme triviální případy $x = 0$ či $y = 0$ stranou. V nenulovém případě potom ovšem $\|x+y\|^2 = 4\|x\|^2$, odkud $\|x+y\| = 2\|x\| = \|x\| + \|y\|$. Podle předpokladu musí být $x = \lambda y$ pro jisté $\lambda > 0$. Protože však $\|x\| = \|y\|$, je $\lambda = 1$ a jsme hotovi. Ukázali jsme, že v každém případě $x = y$.

Jestliže $\|x\| = \|y\| = \|\frac{1}{2}(x+y)\| = 1$, máme ihned $\|x+y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$. Předpokládáme-li tedy (iii), vyplývá odtud, že $x = y$ a prostor X je tedy striktně konvexní. ■

21.5. Uniformně konvexní prostory. Je-li X striktně konvexní prostor a body x, y mají konstantní vzdálenost a „probíhají“ jednotkovou sféru S_X, potom střed úsečky $[x, y]$ leží vždy uvnitř jednotkové koule. Není ale jasné, zejména v nekonečně dimenzionálních prostorech, zda-li by se tento střed nemohl „přiblížit libovolně blízko“ ke sféře S_X. Proto tedy zavedení následujícího pojmu má své opodstatnění.

Banachův prostor X nazveme *uniformně konvexním*, jestliže ke každému $\varepsilon \in (0, 2]$ existuje $\delta > 0$ tak, že pokud x, y leží v jednotkové kouli B_X a $\|x - y\| \geq \varepsilon$, potom $\|\frac{1}{2}(x + y)\| \leq 1 - \delta$. Následující větička jednak ukazuje, že při zkoumání uniformní konvexity se můžeme v definici omezit na prvky jednotkové sféry a jednak udává názornou geometrickou představu o těchto prostorech.

21.6. Charakteristika uniformní konvexity. *Následující podmínky jsou ekvivaletní pro Banachův prostor X:*

(i) *X je uniformně konvexní,*

(ii) *ke každému $\varepsilon \in (0, 2]$ existuje $\delta > 0$ tak, že pokud x, y leží v jednotkové sféře S_X a $\|x - y\| \geq \varepsilon$, potom $\|\frac{1}{2}(x + y)\| \leq 1 - \delta$,*

(iii) *kdykoliv $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ jsou dvě posloupnosti z jednotkové sféry prostoru X a $\|\frac{x_n + y_n}{2}\| \to 1$, potom $x_n - y_n \to 0$.*

Důkaz. Je-li X uniformně konvexní, je podmínka (ii) samozřejmě splněna a ze (ii) ihned plyne (iii).

Není-li X uniformně konvexní, existuje $\varepsilon > 0$ a posloupnosti $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ z jednotkové koule B_X tak, že $\|x_n - y_n\| > \varepsilon$ a $1 - \frac{1}{n} \leq \frac{\|x_n + y_n\|}{2} \leq \frac{\|x_n\| + \|y_n\|}{2} \leq 1$. Odtud plyne, že $\|x_n\| + \|y_n\| \to 2$. Protože $\|x_n\| \leq 1$ a $\|y_n\| \leq 1$, musí být $\lim \|x_n\| = \lim \|y_n\| = 1$. Můžeme tedy předpokládat, že $\|x_n\| \, \|y_n\| > 0$ pro každé n. Položíme-li $u_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$ a $v_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$, dostáváme, že $\|u_n\| = \|v_n\| = 1$ a

$$\big|\|u_n + v_n\| - \|x_n + y_n\|\big| \leq \|u_n - x_n\| + \|v_n - y_n\| .$$

Pravá strana poslední nerovnosti však konverguje k 0 (neboť $\|u_n - x_n\| = \Big|\|\frac{x_n}{\|x_n\|} - \|x_n\|\Big|\Big| = \|x_n\|\big(\frac{1}{\|x_n\|} - 1\big) = 1 - \|x_n\|$). Tudíž $\frac{\|u_n + v_n\|}{2} \to 1$ (nezapomeňte, že $\frac{\|x_n + y_n\|}{2} \to 1$). Nalezli jsme tedy dvě posloupnosti $\{u_n\}$ a $\{v_n\}$ z jednotkové sféry, pro něž sice $\frac{\|u_n + v_n\|}{2} \to 1$, ale $\liminf \|u_n - v_n\| > 0$, neboť

$$0 < \varepsilon < \|x_n - y_n\| \leq \|x_n - u_n\| + \|u_n - v_n\| + \|v_n - y_n\| .$$

■

Pohrajeme-li si trochu s definicí uniformní konvexity a předchozími charakteristikami, lze podat i další ekvivalentní definice tohoto pojmu. Zkuste si sami dokázat následující tvrzení.

21.7. Další charakteristiky uniformní konvexity. *Následující výroky jsou ekvivalentní pro Banachův prostor X:*

(i) *X je uniformně konvexní,*

(iv) *ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pokud $\|x\| < 1 + \delta$, $\|y\| < 1 + \delta$ a $\|\frac{1}{2}(x + y)\| \geq 1$, potom $\|x - y\| < \varepsilon$,*

(v) *jestliže $\{x_n\}$ je omezená posloupnost v X a $2\|x_n\|^2 + 2\|y_n\|^2 - \|x_n + y_n\|^2 \to 0$, potom $x_n - y_n \to 0$.*

21.8. Příklady. (a) Každý uniformně konvexní prostor je striktně konvexní, v konečné dimenzi tyto pojmy splývají (to plyne z kompaktnosti jednotkové koule v konečně dimenzionálních prostorech a spojitosti funkce $(x, y) \to \frac{x+y}{2}$ na ní). Existují však příklady striktně konvexních prostorů, které nejsou uniformně konvexní. Kupříkladu prostor c_0 je separabilní, podle Clarksonovy věty 21.26 na něm existuje ekvivalentní striktně konvexní norma. V této normě ovšem c_0 nemůže být uniformně konvexní. Pak by totiž musel být v nové normě reflexivní podle 21.13, a tudíž by musel být reflexivní i v původní normě (nevíte-li si rady proč, podívejte se třeba na *2.13). Ale v ní c_0 reflexivní není.

(b) Definujme normu na prostoru $X := \mathcal{C}([0, 1])$ předpisem

$$\|f\| := \max\{|f(t)| : t \in [0, 1]\} + \Big(\int_0^1 |f|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \quad \text{pro} \quad f \in X .$$

Ukažte sami, že tato norma je ekvivalentní původní max-normě na $\mathcal{C}([0, 1])$ a že je striktně konvexní. Protože X v této normě není reflexivní, nemůže být ani uniformně konvexní.

(c) Každý Hilbertův prostor je uniformně konvexní.

Návod. Použijte rovnoběžníkové pravidlo, abyste odvodili, že $\|\frac{x+y}{2}\| \leq \sqrt{1-\frac{\varepsilon^2}{2}}$ pro $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ a $\|x-y\| \geq \varepsilon$. ♣

Poznámka. Hilbertovy prostory jsou „nejvíce“ uniformně konvexní v třídě všech Banachových prostorů (dimenze alespoň 2). Označíme-li totiž δ_X v *21.1 definovaný modul konvexity Banachova prostoru X a H je Hilbertův prostor, ukázal G. Nördlander [1960], že $\delta_X \leq \delta_H$.

(d) Prostory $(L^p([0,1]), \|.\|_p)$ jsou striktně konvexní pro $p \in (1,\infty)$. To lze vcelku elementárně ukázat, podíváme-li se, kdy v Minkowského nerovnosti platí rovnost. Platí však mnohem silnější tvrzení. J.A. Clarkson [1936] ukázal, že tyto prostory jsou dokonce uniformně konvexní. Taktéž prostory $L^p(X,\mathcal{S},\mu)$ jsou uniformně konvexní pro libovolný prostor s mírou a $p \in (1,\infty)$. Důkaz lze založit na následujících *rovnoběžníkových nerovnostech* (nazývaných též *Clarksonovými nerovnostmi*)

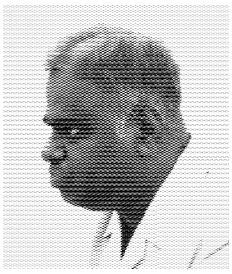
$$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \leq 2^{p-1}\big(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\big) \quad \text{pro} \quad p \in [2,\infty)$$

a

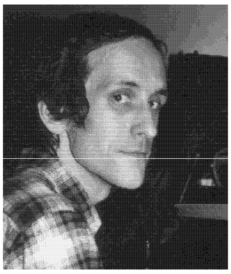
$$\|f+g\|_p^q + \|f-g\|_p^q \leq 2\big(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\big)^{q-1} \quad \text{pro} \quad p \in (1,2) \text{ a } q = \frac{p}{p-1}\,.$$

Z těchto nerovností lehko plyne, že $\|f_n - g_n\|_p \to 0$, pokud $\|f_n\|_p = \|g_n\|_p = 1$ a $\|\frac{f_n+g_n}{2}\|_p \to 1$. Důkaz první nerovnosti využívá Jensenovu a Hölderovu nerovnost a není příliš obtížný. Zato případ $p \in (1,2)$ dá poměrně dost práce.

Z novějších článků o Clarksonových nerovnostech zmiňme S. Ramaswami [1978].



S. Ramaswami



J. Malý

Existují i jednodušší důkazy uniformní konvexity L^p-prostorů. Uveďme proto následující větu samostatně. Myšlenku důkazu mám od J. Malého, podobná idea důkazu pochází od E.J. McShanea [1950] (ten dokonce ukázal, že $L^p_X(\mu)$-prostory bochnerovsky integrovatelných funkcí jsou uniformně konvexní za předpokladu, že X je uniformně konvexní) a je rozpracována v J. Diestel [*1975] či v [HHZ].

21.9. Věta. *Prostory $L^p(\Omega,\mathcal{S},\mu)$ jsou pro libovolný prostor s mírou $(\Omega,\mathcal{S},\mu)$ a libovolné $p \in (1,\infty)$ uniformně konvexní.*

Důkaz. Dokážeme, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že jestliže $u, v \in L^p(\Omega,\mathcal{S},\mu)$, $\|u\|_p = \|v\|_p = 1$ a

$$\Big\|\frac{u+v}{2}\Big\|_p^p > 1-\delta\,, \quad \text{potom} \quad \Big\|\frac{u-v}{2}\Big\|_p^p \leq 2\varepsilon^p\,.$$

Přeznačíme-li si $s := \frac{1}{2}(u+v)$, $t := \frac{1}{2}(u-v)$, máme $u = s+t$ a $v = s-t$. Buď

$$S := \{\omega \in \Omega : |t(\omega)| < \varepsilon|s(\omega)|\} \quad \text{a} \quad T := \{\omega \in \Omega : |t(\omega)| > \varepsilon|s(\omega)|\}\,.$$

Potom

$$(*) \qquad \int_S |t|^p \leq \varepsilon^p \int_\Omega |s|^p \leq \varepsilon^p.$$

Jelikož funkce $\lambda \mapsto |\lambda|^p$ je striktně konvexní (a spojitá) na $\mathbf{R}$, je $\frac{1}{2}\big(|\lambda+1|^p + |\lambda-1|^p\big) > |\lambda|^p$ a existuje $\gamma > 0$ tak, že

$$\frac{1}{2}\big(|\lambda+1|^p + |\lambda-1|^p\big) - \lambda^p \geq \gamma \quad \text{pro} \quad \lambda \in [-1/\varepsilon, 1/\varepsilon].$$

Dosadíme-li do posledních nerovností $\lambda = s/t$, dostaneme po úpravě

$$\frac{1}{2}\big(|s+t|^p + |s-t|^p\big) \geq \begin{cases} |s|^p + \gamma|t|^p & \text{na } T\,, \\ |s|^p & \text{na } S\,. \end{cases}$$

Tedy
$$1 = \int_\Omega \frac{1}{2}\Big(|s+t|^p + |s-t|^p\Big) \geq \int_\Omega |s|^p + \int_T \gamma |t|^p.$$
Je-li
$$\int_\Omega |s|^p > 1-\delta,$$
pak s pomocí posledního odhadu dostáváme
$$(**) \qquad \int_T |t|^p \leq \frac{\delta}{\gamma}.$$
Vhodnou volbou δ dostáváme z $(*)$ a $(**)$ požadovaný odhad. ■

Uniformně konvexní prostory mají celou řadu příjemných vlastností. O mnohých z nich se zmíníme v kapitole *21. Zde začněme s tím, že v uniformně konvexních prostorech lze, podobně jako v Hilbertových prostorech, promítat na uzavřené konvexní množiny.

21.10. Promítání v uniformně konvexních prostorech. *Nechť C je uzavřená konvexní podmnožina uniformně konvexního prostoru X. Potom ke každému $x \in X$ existuje právě jedno $c \in C$ tak, že $\|x-c\| = \operatorname{dist}(x, C)$.*

Důkaz. O jednoznačnosti při promítání, dokonce ve striktně konvexních prostorech, jsme již hovořili výše.

Stačí tedy dokázat existenci prvku $x \in C$ s minimální normou. Položíme-li $d := \inf\{\|c\| : c \in C\}$ a $d = 0$, není co dokazovat. Lze tedy předpokládat, že $d = 1$. V tom případě existuje posloupnost $\{x_n\} \subset C$ tak, že $\lim \|x_n\| = 1$. Ukážeme-li, že posloupnost $\{x_n\}$ je cauchyovská, bude existovat $\lim x_n =: x$. Potom samozřejmě $x \in C$ a $\|x\| = 1$. V případě Hilbertových prostorů jsme k důkazu cauchyovskosti $\{x_n\}$ v 1.17 využili rovnoběžníkové pravidlo. To musíme nyní nějakým způsobem obejít. Konvexita C nám především zaručí, že $\|\frac{1}{2}(x_n + x_k)\| \geq 1$ pro všechna n, k. Volme $\varepsilon > 0$ a nalezněme příslušné $\delta > 0$ z charakteristiky (iv) uniformní konvexity v 21.7. K takto nalezenému $\delta > 0$ existuje n_0 tak, že $\|x_n\| < 1 + \delta$ pro všechna $n \geq n_0$. Tudíž pro $n, k \geq n_0$ máme podle (iv) $\|x_n - x_k\| < \varepsilon$. A jsme spokojeni. ■

21.11. Spojitost projekce. *Nechť C je uzavřená konvexní podmnožina uniformně konvexního prostoru X. Pro každé $x \in X$ označme $P_C(x)$ jednoznačně určený bod z C, pro nějž $\|x - P_C(x)\| = \operatorname{dist}(x, C)$. Potom projekce P_C je spojitá.*

Důkaz. Pro jednoduchost předpokládejme, že $\operatorname{dist}(0, C) = 1$. Nechť $x_n \to 0$. Chceme ukázat, že $P_C(x_n) \to P_C(0)$. Protože
$$\big|\,\|x_n - P_C(x_n)\| - 1\big| = \big|\operatorname{dist}(x_n, C) - \operatorname{dist}(0, C)\big| \leq \|x_n - 0\| = \|x_n\| \to 0$$
(funkce $x \mapsto \operatorname{dist}(x, C)$ je lipschitzovská), musí být $\|x_n - P_C(x_n)\| \to 1$. Protože $\big|\|x_n - P_C(x_n)\| - \|x_n\|\big| \leq \|P_C(x_n)\| \leq \|x_n - P_C(x_n)\| + \|x_n\| \to 1$, je nutně $\|P_C(x_n)\| \to 1$. Pomocí konvexity C dostáváme $1 \leq \|\frac{1}{2}(P_C(0) + P_C(x_n))\| \leq \frac{1}{2}\|P_C(0)\| + \frac{1}{2}\|P_C(x_n)\| \to 1$. Nasadíme-li nyní charakteristiku (v) uniformní konvexity v 21.6 na posloupnosti $\{P_C(0)\}$ a $\{P_C(x_n)\}$, vychází konečně, že $P_C(x_n) - P_C(0) \to 0$. ■

21.12. Poznámky. (a) Projdeme-li si poslední důkaz a podíváme se na definici lokální uniformní konvexity v *21.2, vidíme, že i v lokálně uniformních prostorech jsou projekce na uzavřené konvexní množiny spojité.

(b) Projekce, dokonce ani v Hilbertových prostorech, na uzavřené konvexní množiny nemusí být lineární. Ovšemže projekce na uzavřené podprostory v Hilbertových prostorech je lineární. To je dokázáno v 1.20.

Je zajímavé, že tomu tak již nemusí být v uniformně konvexních prostorech. Kupříkladu v každém prostoru l^p pro $p \in (1, \infty)$, $p \neq 2$ existuje uzavřený podprostor nemající topologický doplněk. O tom jsme se zmínili v poznámce *2.7. Explicitní konstrukce je uvedena v B. Beauzamy [*1982]. Existenci uzavřeného podprostoru nemajícího v l^p lze také odůvodnit pomocí Lindenstrauss-Tzafririho výsledku, na nějž jsme upozornili v 1.24 či *1.15.b. Kdyby totiž každý uzavřený podprostor v l^p měl topologický doplněk, byl by prostor l^p izomorfní Hilbertovu prostoru. A to, pro $p \neq 2$, určitě není. (Prostory l^p a l^q nemohou být pro $1 \leq p < q < \infty$ izomorfní. Nevidíte-li jiný argument, obraťte se na *Pittovu větu* dokázanou v [HHZ]. Podle ní je totiž každý omezený lineární operátor z l^q do l^p kompaktní. A tento fakt si stačí dát dohromady s postřehem v *4.1.d.) Každopádně prostory l^p pro $p \in (1, \infty)$ jsou uniformně konvexní a projekce na jejich uzavřené podprostory, které nemají topologický doplněk, nemohou být lineární. Proč? Stačí se podívat na větu 2.38.

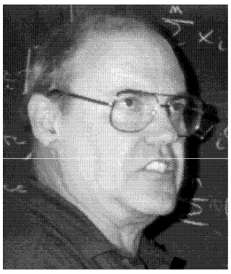
21.13. Reflexivita uniformně konvexních prostorů. *Každý uniformně konvexní prostor X je reflexivní.*

Důkaz. Stačí ukázat, že $\varepsilon B_X = B_{X^{**}}$, kde ε je kanonické vnoření X do X^{**}. Volme $F \in B_{X^{**}}$. Podle Goldstineova lemmatu 16.8 nalezneme (zobecněnou) posloupnost $\{x_\alpha\} \subset \varepsilon B_X$ tak, aby $x_\alpha \to F$ ve w^*-topologii prostoru X^{**} ($w^* = \sigma(X^{**}, X^*)$). Potom „dvojná" (zobecněná) posloupnost $\{x_\alpha + x_\beta\}$ w^*-konverguje k $2F$. Protože norma na prostoru X^{**} je w^*-zdola polospojitá (viz 16.18.d), musí být $\|x_\alpha + x_\beta\| \to 2$. Využitím uniformní konvexity εX (kanonické vnoření ε je izometrický izomorfizmus!) dostáváme $\|x_\alpha - x_\beta\| \to 0$. Protože prostor εX je úplný (viz cvičení 2.55.k), existuje $x \in \varepsilon X$ tak, že $x_\alpha \to x$ v normě prostoru X^{**}. Protože ale w^*-limitou této (zobecněné) posloupnosti byl prvek F, musí být $x = F$. Tudíž $F \in \varepsilon X$.

Jiný důkaz. Vezmeme-li v potaz Jamesovu charakteristiku reflexivních prostorů z 16.15, lze uvést jiný krátký důkaz. Volme $\varphi \in X^*$. Můžeme předpokládat, že $\|\varphi\| = 1$. Naším cílem je najít $x \in X$, $\|x\| \le 1$ tak, aby $\varphi(x) = 1$. Podle poznámky 2.6.a existuje posloupnost $\{x_n\}$ prvků jednotkové sféry S_X tak, že $\varphi(x_n) \to 1$. Ukážeme, že $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost. Vskutku, volme $\varepsilon > 0$. Podle definice uniformní konvexity prostoru X musí existovat $\delta > 0$ tak, že $\|x - y\| < \varepsilon$, pokud $x, y \in S_X$ a $\|\frac{1}{2}(x + y)\| \ge 1 - \delta$. Protože $\varphi(x_n) \to 1$, k našemu nalezenému $\delta > 0$ existuje n_0 tak, že

$$2 - 2\delta \le \varphi(x_m) + \varphi(x_k) = \varphi(x_m + x_k) \le \|\varphi\| \, \|x_m + x_k\| \le \|x_m + x_k\|$$

pro všechna $m, k \ge n_0$. Pro tato m, k pak máme $\|x_m - x_k\| < \varepsilon$. Existuje tedy $x \in X$, pro něž $x_n \to x$. Samozřejmě $\|x\| = 1$ a též $\varphi(x) = 1$. ∎



J. Diestel

21.14. Poznámka. Striktně konvexní prostory nemusejí být reflexivní, stačí se podívat na příklad v 21.8.a. Jako doklad, čím vším se lze v matematice zabývat, nebo skoro jako hříčku, uveďme J. Dixmierův výsledek [1948], podle něhož Banachův prostor X je reflexivní, pokud X^{****} je striktně konvexní. Důkaz tohoto tvrzení lze nalézt v J. Diestel [1975]. Tam autor poznamenává, že si není vědom žádného příkladu klasického (nereflexivního) Banachova prostoru X, pro nějž by byl znám explicitní popis čtvrtého duálu X^{****}. Nato M.A. Smith [1976] sestrojil příklad Banachova prostoru X, který není reflexivní, ačkoliv X^{***} je striktně konvexní.

Ukažme teď ještě další důkaz věty 21.10 o promítání v uniformně konvexních prostorech. Dokážeme vlastně větu ještě o něco obecnější (existují striktně konvexní reflexivní prostory, které nejsou uniformně konvexní, viz třeba *21.8.c). Důkaz je hezkou demonstrací užitečnosti studia slabých topologií a jejich síly.

21.15. Věta. *Nechť C je uzavřená konvexní podmnožina striktně konvexního reflexivního Banachova prostoru X a $x \in X$. Potom existuje právě jeden prvek $c \in C$ tak, že $\|x - c\| = \operatorname{dist}(x, C)$.*

Důkaz. Opět stačí ukázat existenci prvku z C s nejmenší normou. Nechť tedy $d := \operatorname{dist}(0, C) > 0$. Existuje posloupnost $\{x_n\}$ prvků C tak, že $\|x_n\| \to d$. Posloupnost $\{x_n\}$ je tedy omezená. Povoláme-li na pomoc Eberlein-Šmuljanovu charakteristiku reflexivity 16.14, existuje vybraná posloupnost z $\{x_n\}$, ponechme ji původní označení, která je slabě konvergentní. Zkonstruovali jsme tedy posloupnost prvků $x_n \in C$ a $x \in X$ tak, že $x_n \xrightarrow{w} x$. Protože C je také slabě uzavřená podle 16.2, je $x \in C$. Dále podle 16.18.b víme, že norma je w-zdola polospojitá funkce, tedy

$$d \le \|x\| \le \liminf \|x_n\| = d \,,$$

čímž jsme dokázali, že $\|x\| = d$. ∎

Na tomto místě se stručně zmíníme o vlastnostech promítání. Tato problematika je široce rozvinuta a těsně souvisí s teorií aproximací.

21.16. Metrická projekce. Nechť M je podmnožina Banachova prostoru X. Pro $x \in X$ označme

$$\mathcal{P}_M(x) := \big\{ m \in M : \|x - m\| = \operatorname{dist}(x, M) \big\} \,.$$

Množina $\mathcal{P}_M(x)$ může být prázdná či vícebodová. Řekneme, že M je

- *proximinální*, jestliže $\mathcal{P}_M(x) \ne \emptyset$ pro každé $x \in X$,
- *semi-Čebyševova*, jestliže $\mathcal{P}_M(x)$ je nejvýše jednobodová množina pro každé $x \in X$,
- *Čebyševova*, je-li $\mathcal{P}_M(x)$ jednobodová pro každé $x \in X$.

Ve striktně konvexních prostorech je každá uzavřená konvexní množina semi-Čebyševova, v uniformně konvexních pak Čebyševova. Podle věty 21.15 je dokonce každá uzavřená konvexní podmnožina striktně konvexního reflexivního Banachova prostoru Čebyševova. Samozřejmě kompaktní podmnožiny jsou vždy proximinální.

Nechť nyní M je Čebyševova množina v Banachově prostoru X. Můžeme se ptát, zdali zobrazení $\mathcal{P}_M : x \mapsto \mathcal{P}_M(x)$, kterému se říká *metrická projekce* na M, je spojité. V případě metrické projekce na uzavřené konvexní množiny v Hilbertových prostorech je odpověď kladná podle *2.3.c.

J. Lindenstrauss [*1964] byl první, kdo sestrojil příklad dokonce Čebyševova podprostoru, na nějž je metrická projekce nespojitá.

Poznamenejme ještě, že metrická projekce na uzavřené konvexní podmnožiny uniformně konvexních prostorů je spojitá. Na druhé straně, i když, jak jsme uvedli, uzavřené konvexní podmnožiny striktně konvexních reflexivních Banachových prostorů jsou Čebyševovy (a můžeme tedy i v tomto případě hovořit o metrické projekci), nemusí být metrická projekce na ně spojitá. To ukázal A.L. Brown [1974].

Uveďme nyní větu zaručující spojitost metrické projekce. Jinou lze nalézt v *21.2.g.

21.17. Spojitost metrické projekce. *Nechť K je kompaktní konvexní podmnožina striktně konvexního prostoru X. Potom metrická projekce $\mathcal{P}_K$ je spojitá.*

Důkaz. Nechť $x_n \to x$. Naším cílem je ukázat, že $\mathcal{P}_K(x_n) \to \mathcal{P}_K(x)$. Máme

$$\big|\, \|x_n - \mathcal{P}_K(x_n)\| - \|x - \mathcal{P}_K(x)\| \,\big| = \big|\operatorname{dist}(x_n, K) - \operatorname{dist}(x, K)\big| \le \|x_n - x\| \to 0\,.$$

Nechť y je hromadným bodem posloupnosti $\{\mathcal{P}_K(x_n)\}$. Potom podle předchozího je $\|x - y\| = \|x - \mathcal{P}_K(x)\| = \operatorname{dist}(x, K)$. Použitím striktní konvexity konečně dostáváme, že $y = \mathcal{P}_K(x)$. ■

21.18. Metrické selekce. Další otázkou, kterou bychom si mohli položit, je následující. Mějme v Banachově prostoru proximinální množinu M. Průmětem daného bodu x je tedy obecně vícebodová množina $\mathcal{P}_M(x)$ a my se můžeme ptát, zda je možno z každé množiny $\mathcal{P}_M(x)$ vybrat jeden prvek, označme ho $f(x)$, tak, aby zobrazení $\mathcal{F}_M : x \mapsto f(x)$ mělo rozumné vlastnosti. Aby bylo kupříkladu spojité? Touto velice širokou škálou problémů *metrických selekcí* se zde zabývat nebudeme.

21.19. Poznámka. Existuje další zajímavá vlastnost Banachových prostorů. Řekneme, že Banachův prostor má *Banach-Saksovu vlastnost*, jestliže z každé jeho omezené posloupnosti lze vybrat podposloupnost, jejíž aritmetické průměry konvergují. Každý uniformně konvexní prostor má Banach-Saksovu vlastnost a Banachovy prostory s touto vlastností jsou již reflexivní. Více podrobností lze nalézt v *21.10.

21.20. Hladké prostory. Další třídu Banachových prostorů, které budeme zkoumat, tvoří hladké prostory. To jsou, zhruba řečeno, prostory, jejichž jednotková sféra je „hladká“. Abychom motivovali definici, připomeňme ještě, že otevřenou konvexní množinu C a bod c na její hranici lze oddělit nadrovinou. Těch může být ovšem více, je-li pouze jedna, nemůže být množina C v bodě c „nehladká“.

Banachův prostor X je *hladký v bodě x* jednotkové sféry S_X, existuje-li právě jeden funkcionál $\varphi \in X^*$ tak, že $\|\varphi\| = 1$ a $\varphi(x) = 1$.

Znovu zdůrazněme, že podle důsledku Hahn-Banachovy věty 2.20 není problém s existencí, smysl definice hladkosti tkví v jednoznačnosti uvažované *opěrné nadroviny* $\{x \in X : \varphi(x) = 1\}$. Uvědomme si také, že $B_X \subset \{x \in X : |\varphi(x)| \le 1\}$.

Řekneme, že X je *hladký*, jestliže je hladký v každém bodě jednotkové sféry S_X.

21.21. Šmuljanova věta. *Banachův prostor X je hladký v bodě $x \in S_X$, právě když norma $t \mapsto \|t\|$ je gâteauxovsky diferencovatelná v bodě x.*

Důkaz. Jednu implikaci jsme již dokázali ve větě 20.9. Důkaz druhé lze vést různými způsoby, z nichž nejnázornější je asi důkaz využívající geometrický tvar Hahn-Banachovy věty. My naznačíme relativně elementární důkaz.

Předpokládejme tedy, že norma $\|.\|$ není gâteauxovsky diferencovatelná v bodě $x \in S_X$. Existuje tudíž $h \in S_X$, $\varepsilon > 0$ a posloupnost $\{t_n\}$ kladných čísel tak, že $t_n \to 0$ a $\|x + t_n h\| + \|x - t_n h\| \ge 2 + \varepsilon t_n$ pro každé n (to je vcelku elementární, můžete ostatně porovnat se cvičením

20.10.i). Pro každé n nalezneme na základě Hahn-Banachovy věty funkcionály $f_n, g_n \in X^*$ tak, aby

$$\|f_n\| = \|g_n\| = 1 \quad \text{a} \quad f_n(x + t_n h) = \|x + t_n h\| \ , \ g_n(x - t_n h) = \|x - t_n h\| \, .$$

Všimněme si, že $f_n(x) = (f_n(x + t_n h) - f_n(t_n h)) = \|x + t_n h\| - f_n(t_n h) \to 1$ (nezapomeňte na odhad $|f_n(t_n h)| \le \|f_n\| \, t_n \, \|h\|$). Obdobně $g_n(x) \to 1$. Dostáváme tedy odhad

$$\begin{aligned}(f_n - g_n)(t_n h) &= f_n(x + t_n h) + g_n(x - t_n h) - f_n(x) - g_n(x) = \\ &= \|x + t_n h\| + \|x - t_n h\| - f_n(x) - g_n(x) \ge \\ &\ge 2 + \varepsilon t_n - f_n(x) - g_n(x) \ge \varepsilon t_n\end{aligned}$$

(využili jsme nerovnost $f_n(x) \le |f_n(x)| \le \|f_n\| \, \|x\| = 1$). Vidíme, že $(f_n - g_n)(h) \ge \varepsilon$ pro všechna n. Nechť f je hromadný bod posloupnosti $\{f_n\}$ (tu uvažujeme jako podmnožinu w^*-kompaktu B_{X^*}). Jeho existence je zaručena Alaogluovou větou 16.6. Podobně nechť g je hromadný bod posloupnosti $\{g_n\}$. Potom f a g jsou různé tečné funkcionály v bodě x. Zajisté, $f(x) = g(x) = 1$, tudíž i $\|f\| = \|g\| = 1$, přičemž $(f - g)(h) \ge \varepsilon$ (nesmíte zapomenout, že w^*-topologie je topologií bodové konvergence). ■

21.22. Kleeova věta. *Buď X Banachův prostor. Je-li duál X^* striktně konvexní, je X hladký. Jestliže X^* je hladký, je X striktně konvexní.*

Důkaz. Předpokládejme, že X není hladký v bodě $x \in S_X$. Existují tedy $\varphi, \psi \in X^*$, $\varphi \ne \psi$, $\|\varphi\| = \|\psi\| = 1 = \varphi(x) = \psi(x)$. Protože $\left\|\frac{\varphi+\psi}{2}\right\| = 1$, nemůže být X^* striktně konvexní.

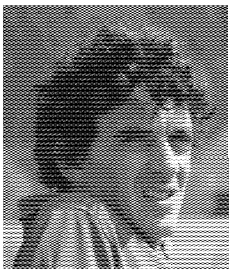
Jestliže X není striktně konvexní, existují $x, y \in S_X$, $x \ne y$ tak, že $\frac{x+y}{2} \in S_X$. Důsledek Hahn-Banachovy věty 2.20 zaručuje existenci takového funkcionálu $\varphi \in S_{X^*}$, že $\varphi(\frac{x+y}{2}) = 1$. Protože $1 = \varphi(\frac{x+y}{2}) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2}\varphi(y) \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, musí být $\varphi(x) = \varphi(y) = 1$. Potom ovšem pro prvky $\varepsilon_x, \varepsilon_y \in S_{X^{**}}$ platí $\varepsilon_x(\varphi) = \varepsilon_y(\varphi) = 1$. Protože $\varepsilon_x \ne \varepsilon_y$, nemůže být prostor X^* hladký v bodě φ. ■

21.23. Důsledek. *Nechť X je reflexivní Banachův prostor. Potom X je hladký, právě když X^* je striktně konvexní a X je striktně konvexní, právě když X^* je hladký.*

21.24. Poznámky. (a) Předchozí důsledek říká, velice zhruba, že kupříkladu v dvourozměrném prostoru (pokud jej ztotožníme s jeho duálem), obsahuje-li jednotková sféra „úsečky“, musí obsahovat i body, v nichž můžeme sestrojit více „tečen“. A naopak.

(b) Existují hladké prostory, jejichž duál není striktně konvexní, a také striktně konvexní prostory s nehladkým duálem. Čtenář nedočkavý protipříkladů může nahlédnout do V. Klee [1959], S.L. Troyanski [1970] či cvičení 4.18.c v R.R. Phelps [*1993].

(c) Věta 21.21 charakterizovala hladké Banachovy prostory jako ty, jejichž norma je v každém bodě jednotkové sféry S_X gâteauxovsky diferencovatelná. Takovým normám se říká *hladké normy*. Naskytá se otázka, co lze říci o Banachových prostorech, jejichž norma je na jednotkové sféře stejnoměrně fréchetovsky diferencovatelná. To vede k zavedení *uniformně hladkých prostorů*. V *21.4 je problematice uniformně hladkých prostorů věnováno místo a je vyjasněn vztah těchto prostorů k uniformně konvexním prostorům.



R. Deville

21.25. Renormace prostoru. Dá se říci, že „kvalita“ Banachova prostoru závisí na vlastnostech jeho normy. Z tohoto hlediska jistě nejpříjemnější třídu tvoří Hilbertovy prostory. Ale třeba i uniformně konvexní prostory mají řadu pěkných vlastností — jsou reflexivní či v nich lze promítat na uzavřené konvexní množiny. Viděli jsme také, že geometrie Banachova prostoru úzce souvisí s „tvarem“ jednotkové sféry, čím méně tato obsahuje „úseček“ či „hrotů“, tím lépe se s daným prostorem pracuje.

Víme již, že řada pojmů v teorii Banachových prostorů je společná všem ekvivalentním normám daného prostoru. Mezi tyto topologické vlastnosti patří kupříkladu spojitost, kompaktnost, omezenost, prostě pojmy, které nezávisejí na ekvivalentních normách. Studujeme-li tedy problémy týkající se pojmů, které jsou společné třídě všech ekvivalentních norem na daném prostoru, bývá často výhodné prostor „přenormovat“. Tím se získá norma kvalitnějších vlastností, než jakou měla norma původní a dané otázky se můžeme pokusit řešit v novém „lepším“ přenormovaném prostoru. Jako základní monografii pro studium renormací lze doporučit nedávno vyšlou monografii R. Deville, G. Godefroy and V. Zizler [*1993].

Ve zbytku této kapitoly ukážeme jeden typ vět o renormacích (kterých je samozřejmě celá řada), jež nám bude užitečný později při důkazu Schauderovy věty o pevném bodu.

21.26. Clarksonova věta. *Na každém separabilním Banachově prostoru X existuje ekvivalentní striktně konvexní norma.*

Důkaz. Protože X je separabilní, je uzavřená jednotková koule B_{X^*} w^*-metrizovatelná a separabilní (využijte *16.2.A a w^*-kompaktnost B_{X^*}). Nechť $\{\varphi_n\}$ je w^*-hustá podmnožina B_{X^*}. Definujme zobrazení T předpisem

$$T : x \mapsto \{2^{-n}\,\varphi_n(x)\} \quad \text{pro} \quad x \in X\,.$$

Potom evidentně $Tx \in l^2$ pro každé $x \in X$. S trochou námahy zjistíme, že T je lineární prosté zobrazení a že $\|T\| \leq 1$. Definujeme-li nyní

$$|||x||| = \|x\|_X + \|Tx\|_{l^2} \quad \text{pro} \quad x \in X\,,$$

je $|||\,.\,|||$ norma na X ekvivalentní s původní normou ($\|x\| \leq |||x||| \leq 2\|x\|$). A stačí ukázat, že nová norma je striktně konvexní. To však plyne z toho, že l^2 (jakožto Hilbertův prostor) je striktně konvexní. Podobným trikem, jaký použijeme v následující větě. ■

Metoda konstrukce ekvivalentní striktně konvexní normy v posledním důkazu ukazuje na možnost obecnějšího přístupu. Platí následující věta.

21.27. Kleeova věta. *Nechť X je Banachův prostor. Předpokládejme, že existuje striktně konvexní Banachův prostor Z a prostý operátor $T \in \mathcal{L}(X, Z)$. Potom na X existuje striktně konvexní ekvivalentní norma.*

Důkaz. Položme

$$|||x||| = \|x\|_X + \|Tx\|_Z \quad \text{pro} \quad x \in X\,.$$

Není žádný problém ověřit, že $|||.|||$ je norma na X, která je ekvivalentní s původní normou. Zbývá ukázat, že $|||.|||$ je striktně konvexní. Volme tedy $x, y \in X$, $|||x||| = |||y||| = 1 = |||\frac{x+y}{2}|||$. Chceme ukázat, že $x = y$. Jednoduchým výpočtem odvodíme, že (indexy u norem vynechávejme)

$$0 = \big(\|x\| + \|y\| - \|x+y\|\big) + \big(\|Tx\| + \|Ty\| - \|Tx+Ty\|\big) \geq 0\,,$$

přičemž výrazy v závorkách jsou nezáporné. Musí tedy být $\|Tx+Ty\| = \|Tx\| + \|Ty\|$. Protože T je prosté zobrazení, jsou prvky Tx a Ty nenulové, a protože norma na Z je striktně konvexní, musí podle 21.4 existovat $\lambda > 0$ tak, že $Tx = \lambda Ty = T(\lambda y)$. Z prostoty T opět dostáváme $x = \lambda y$. Ježto $1 = |||x||| = |||\lambda y||| = \lambda |||y||| = \lambda$, dostáváme konečně $x = y$.

Jiný důkaz. Vezmeme-li v potaz cvičení 21.28.a, podle kterého je Banachův prostor striktně konvexní, právě když funkce $x \mapsto \|x\|^2$ je striktně konvexní, můžeme podat trochu modifikovaný důkaz Kleeovy věty. Definujme třeba

$$|||x||| = \big((\|x\|_X^2 + \|Tx\|_Z^2\big)^{\frac{1}{2}} \quad \text{pro} \quad x \in X\,.$$

Opět $|||.|||$ je ekvivalentní norma na X. Jelikož Z je striktně konvexní, je funkce $z \mapsto \|z\|_Z^2$ striktně konvexní na Z. Protože však zobrazení T je prosté, je i funkce $x \mapsto \|Tx\|_Z^2$ striktně konvexní. Odtud vyvodíme, že i funkce $x \mapsto |||x|||$ je striktně konvexní a opětovným použitím zmíněného cvičení dostáváme, že $|||.|||$ je striktně konvexní norma na X. ■

21.28. Elementární cvičení. (a) Nechť X je Banachův prostor. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) X je striktně konvexní,
(iv) je-li $p \in (1, \infty)$ a $x, y \in X$, $x \neq y$, potom $\|\frac{x+y}{2}\|^p < \|x\|^p + \|y\|^p$,
(v) funkce $x \mapsto \|x\|^2$ je striktně konvexní,
(vi) jestliže $\|x-y\| = \|x-z\| + \|z-y\|$, potom existuje $\lambda \in [0,1]$ tak, že $z = \lambda x + (1-\lambda)y$.

Návod. Dokázat ekvivalenci (i) a (vi) by nemělo činit velké potíže, naopak ekvivalence s (iv) není úplně lehká. Lze využít nerovnost $\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^p < \frac{1}{2}(1+|\alpha|^p)$ platnou pro $\alpha \neq 1$. Podrobný důkaz je v B. Beauzamy [*1982].

Podívejme se na podmínku (v). Protože pro $x, y \in X$ a $\lambda \in [0,1]$ platí

$$\begin{aligned}\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 &\le (\lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\|)^2 \le \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda(1-\lambda)\|x\|\,\|y\| + (1-\lambda)^2\|y\|^2 \le \\ &\le \lambda^2\|x\|^2 + \lambda(1-\lambda)(\|x\|^2 + \|y\|^2) + (1-\lambda)\|y\|^2 \le \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2\,,\end{aligned}$$

je funkce $h : x \mapsto \|x\|^2$ konvexní.

Pokud by tato funkce nebyla striktně konvexní, našli bychom $x \neq y$ a $\lambda \in (0,1)$ tak, že $\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 = \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2$. Z výše uvedených nerovností by pak plynulo, že $2\|x\|\,\|y\| = \|x\|^2 + \|y\|^2$. Odtud dostáváme $\|x\| = \|y\| = \|\lambda x + (1-\lambda)y\|$. A X by nebyl striktně konvexní.

Není-li X striktně konvexní, existují takové $x \neq y$, že $\|x\| = \|y\| = \|\frac{x+y}{2}\| = 1$. Potom ovšem $\|\frac{x+y}{2}\|^2 = 1 = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2$ a funkce h není striktně konvexní. ♣

(b) Pro pevné $\lambda > 0$ a $f \in \mathcal{C}([0,1])$ definujme normu

$$\|f\|_\lambda = \|f\| + \lambda\|f\|_2$$

($\|.\|$ je max-norma a $\|.\|_2$ pak L^2-norma na $\mathcal{C}([0,1])$). Protože

$$\|f\| \le \|f\|_\lambda \le (1+\lambda)\|f\|\,,$$

jsou $\|.\|$ a $\|.\|_\lambda$ ekvivalentní normy. Prostor $\mathcal{C}([0,1]), \|.\|)$ není striktně konvexní. Prostory $(\mathcal{C}([0,1]), \|.\|_\lambda)$ jsou striktně konvexní pro libovolné $\lambda > 0$, nejsou však uniformně konvexní.

(c) Buď opět $\lambda > 0$. Pro $x = \{x_n\} \in c_0$ položte

$$\|x\|_\lambda = \|x\|_{c_0} + \lambda\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\big(\frac{x_n}{n}\big)^2\Big)^{\frac{1}{2}}\,, \quad \|x\|_* = \Big(\|x\|_{c_0}^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x_n|^2}{2^n}\Big)^{\frac{1}{2}} \quad \text{a} \quad \|x\|_{**} = \Big(\|x\|_{c_0} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x_n|^2}{2^n}\Big)^{\frac{1}{2}}\,.$$

Ukažte, že c_0 s kteroukoliv takto definovanou normou (ověřte vlastnosti normy) tvoří Banachův prostor. Prostory $(c_0, \|.\|_\lambda)$ jsou striktně konvexní, nikoliv však uniformně konvexní. Dále si rozmyslete, že $(c_0, \|.\|_*)$ je striktně konvexní, zatímco $(c_0, \|.\|_{**})$ není.

Návod. Abyste ukázali, že norma $\|.\|_{**}$ není striktně konvexní, uvažujte body $(-1,1,0,0,\dots)$ a $(1,1,0,0,\dots)$. ♣

(d) Ukažte, že na (neseparabilním) Banachově prostoru l^∞ existuje ekvivalentní striktně konvexní norma.

Návod. Uvažujte zobrazení $T : \{x_n\} \mapsto \{\frac{x_n}{n}\}$ prostoru l^∞ do c_0 spolu s Kleeovou větou 21.27. ♣

(e) Dokažte následující obrácení Kleeovy věty 21.27. Nechť na Banachově prostoru X existuje ekvivalentní striktně konvexní norma. Potom existuje striktně konvexní prostor Z a prosté zobrazení $T \in \mathcal{L}(X,Z)$.

Návod. Za Z stačí vzít X s onou striktně konvexní normou a za T identické zobrazení. ♣

(f) Nechť $\{C_n\}$ je klesající posloupnost neprázdných, omezených, uzavřených, konvexních množin v reflexivním Banachově prostoru. Ukažte, že $\bigcap_n C_n \neq \emptyset$.

Návod. Stačí se odvolat na důsledek 16.10 a vzpomenout si na Cantorovu větu. ♣

(g) Ukažte, že tvrzení z (f) neplatí v obecných Banachových prostorech.

Návod. Uvažujte $C_n := \{f \in \mathcal{C}([0,1]) : f(1) = 1 \text{ a } 0 \le f(x) \le x^n \text{ na } [0,1]\}$. ♣

(h) Nechť X je uniformně konvexní Banachův prostor. Jestliže $x_n \xrightarrow{w} x$ a $\|x_n\| \to \|x\|$, potom i $x_n \to x$.

Návod. Můžeme předpokládat, že jak x tak i všechny členy posloupnosti $\{x_n\}$ jsou nenulové. Položme $z_n := \frac{x_n}{\|x_n\|}$ a $z := \frac{x}{\|x\|}$. Potom $\|z\| = \|z_n\| = 1$ a $z_n \xrightarrow{w} z$. Odtud dostáváme s přihlédnutím k 3.14.g či 16.18.b

$$2 = 2\|z\| \le \liminf \|z_n + z\| \le \limsup \|z_n + z\| \le \|z\| + \lim \|z_n\| = 2\,.$$

Tudíž $\|z_n + z\| \to 2$ a uniformní konvexita dá $\|z_n - z\| \to 0$. A to je již jen krůček k závěru, že $\|x_n - x\| \to 0$. ♣

Poznámka. Stačilo předpokládat, že X je lokálně uniformně konvexní.

(i) Nechť $\{e_n\}$ je ortonormální báze (separabilního) nekonečně dimenzionálního Hilbertova prostoru H. Je-li $x = \sum_n x_n e_n$, položme $\|x\|_e = \sum_n \frac{|x_n|}{2^n}$. Ukažte, že $\|.\|_e$ je norma na H, která není ekvivalentní původní normě prostoru H.

Návod. Uvědomte si, že $\|e_n\|_e = \frac{1}{2^n}$. ♣

(j) Ukažte, že na každém konečně dimenzionálním Banachově prostoru X existuje ekvivalentní striktně konvexní norma.

Návod. Pokud vás nic nenapadne, zkuste definovat novou normu na prostoru $(X, \|.\|)$ předpisem

$$\|x\|_s := \Big(\|x\|^2 + \frac{1}{n}\big(f_1^2(x) + \cdots + f_n^2(x)\big)\Big)^{\frac{1}{2}},$$

kde $\{f_1, \ldots, f_n\}$ tvoří bázi X^*. ♣

22. Vektorová integrace a Radon-Nikodýmova vlastnost

V této kapitole stručně zavedeme některé pojmy z teorie vektorových měr a integrace, které budeme potřebovat. Protože o této problematice je podrobně pojednáno ve skriptech [LM], omezíme se skutečně jen na to nejzákladnější.

22.1. Vektorové míry. Uvažujme měřitelný prostor $(\Omega, \mathcal{S})$ ($\mathcal{S}$ je σ-algebra podmnožin dané množiny Ω) a Banachův prostor X. *Vektorovou mírou* F na $\mathcal{S}$ rozumíme vždy σ-aditivní zobrazení $\mathcal{S}$ do X pro něž $F(\emptyset) = 0$. Jelikož $F(\bigcup_n A_n) = \sum_n F(A_n)$ kdykoliv množiny $A_n \in \mathcal{S}$, $n = 1, 2, \ldots$ jsou po dvou disjunktní, vidíme, že levá strana uvedené rovnosti nezávisí na pořadí množin A_n. Konvergenci řady vpravo tudíž chápeme jako bezpodmínečnou.

Je-li F vektorová míra, definujeme její *totální variaci* $|F|$ jako množinovou funkci na $\mathcal{S}$ předpisem

$$|F(A)| = \sup\Big\{\sum_{j=1}^{k} \|F(A_j)\| : A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{S} \text{ jsou po dvou disjunktní a } \bigcup_{j=1}^{k} A_j = A\Big\}.$$

Totální variace $|F|$ je (nezápornou) mírou na $\mathcal{S}$. Pokud $|F(\Omega)| < \infty$, říkáme, že F má *konečnou variaci*.

Je-li $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ prostor s konečnou mírou a $F : \Omega \to X$ vektorová míra, řekneme, že F je *absolutně spojitá* vzhledem k μ, jestliže (nezáporná) míra $|F|$ je absolutně spojitá vzhledem k μ. To bude právě tehdy, jestliže $F(E) = 0$ pro každou množinu $E \in \mathcal{S}$, $\mu E = 0$.

22.2. Bochnerův integrál. Předpokládejme, že je zadán prostor $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ s pravděpodobnostní mírou ($\mu\Omega = 1$). Je-li X Banachův prostor a $f : \Omega \to X$ vektorová *jednoduchá* funkce mající tvar $f = \sum_{j=1}^{n} x_j c_{E_j}$, kde $E_j \in \mathcal{S}$ jsou po dvou disjunktní a $x_j \in X$, definujeme

$$\int_\Omega f\, d\mu := \sum_{j=1}^{n} x_j \mu E_j\,.$$

Definice je korektní, neboť hodnota integrálu $\int_\Omega f\, d\mu$ nezávisí na vyjádření funkce f (které není jednoznačné).

Vektorové funkce z Ω do X, které jsou μ-skoro všude rovny limitám posloupností jednoduchých funkcí, nazveme *měřitelné*.

Měřitelná funkce $f : \Omega \to X$ je *bochnerovsky integrovatelná*, existuje-li posloupnost $\{f_n\}$ jednoduchých funkcí tak, že $\int_\Omega \|f - f_n\|\, d\mu \to 0$. Pokud tomu tak je, existuje $\lim \int_E f_n\, d\mu$ pro každou množinu $E \in \mathcal{S}$. Tuto limitu, což je prvek našeho Banachova prostoru X, nazveme *Bochnerovým* integrálem funkce f přes E a označíme ji $\int_E f\, d\mu$. Je dobré si uvědomit, že limita vždy existuje (to proto, že posloupnost $\int_E f_n\, d\mu$ je cauchyovská), a že nezávisí na volbě posloupnosti $\{f_n\}$.

Symbolem $\mathcal{L}^p_X(\mu)$ pro $p \geq 1$ označme prostor všech měřitelných zobrazení Ω do X takových, že $\int_\Omega \|f\|^p \, d\mu) < \infty$. Běžným způsobem z něho vytvožený faktorprostor $L^p_X(\mu)$ je potom Banachovým prostorem, definujeme-li v něm normu předpisem $\|f\|_p = (\int_\Omega \|f\|^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}}$.

22.3. Fréchetova derivace. Pojem Fréchetovy derivace je v těchto Zápiscích definován na více místech. Rozmnožme jejich počet. Nechť $f : G \subset X \to Y$ je zobrazení definované na otevřené podmnožině G Banachova prostoru X s hodnotami v Banachově prostoru Y a $z \in G$. Řekneme, že f je *fréchetovsky diferencovatelné* v bodě z, existuje-li $L \in \mathcal{L}(X,Y)$ tak, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z) - \big(f(z+h) - Lh\big)}{\|h\|} = 0\,.$$

Pokud je zobrazení f v bodě z fréchetovsky diferencovatelné, je L z uvedené definice jednoznačně určeno a nazývá se *Fréchetovou derivací* f v z. Tuto Fréchetovu derivaci značíme symbolem $f'(z)$.

22.4. Trocha analýzy a historie. Připomeňme klasické věty z reálné analýzy. První dvě věty uvedeme bez důkazu (lze nahlédnout do [LM], důsledky 22.6 a 23.5), u Radon-Nikodýmovy věty naznačíme geniální von Neumannův důkaz.

`(a) Lebesgueova věta o diferencovatelnosti.` *Je-li f reálná funkce konečné variace na intervalu $[0,1]$, má f vlastní derivaci ve skoro všech bodech intervalu $[0,1]$.*

Speciálně, každá absolutně spojitá funkce, která je vždy konečné variace, je diferencovatelná skoro všude.

`(b) Lebesgueova věta o neurčitém integrálu.` *Je-li f absolutně spojitá funkce na intervalu $[0,1]$, potom $f' \in \mathcal{L}^1([0,1])$ a $f(b) - f(a) = \int_a^b f'$ pro každé $a, b \in [0,1]$.*

`(c) Radon-Nikodýmova věta.` *Nechť μ, ν jsou nezáporné konečné míry na σ-algebře $\mathcal{S}$ podmnožin dané množiny Ω. Jestliže ν je absolutně spojitá vzhledem k μ, potom existuje nezáporná funkce $h \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tak, že*

$$\nu E = \int_E h \, d\mu \quad \textit{pro každé} \quad E \in \mathcal{S}\,.$$

Náznak důkazu. Položme $\lambda = \mu + \nu$ a definujme funkcionál L na $\mathcal{L}^2(\lambda)$ předpisem

$$L : f \mapsto \int_\Omega f \, d\nu \quad , \quad f \in \mathcal{L}^2(\lambda)\,.$$

Ze Schwarzovy nerovnosti plyne, že funkcionál L je na prostoru $\mathcal{L}^2(\lambda)$ omezený. Podle Fréchet-Rieszovy věty 2.9 existuje $g \in \mathcal{L}^2(\lambda)$ tak, že

$$(*) \qquad \int_\Omega f \, d\nu = \int_\Omega fg \, d\lambda \quad \text{pro} \quad f \in \mathcal{L}^2(\lambda)\,.$$

Pro libovolnou množinu $E \in \mathcal{S}$ z předchozí rovnosti pro $f = c_E$ plyne

$$0 \leq \nu E = \int_E g \, d\lambda = \nu E \leq \lambda E = \int_E 1 \, d\lambda\,.$$

Tudíž musí být $0 \leq g \leq 1$ λ-skoro všude. Využitím předpokladu absolutní spojitosti se ukáže, že $g < 1$ λ-skoro všude. Skutečně, položíme-li $A = \{x \in \Omega : g(x) = 1\}$, je

$$\nu A = \int_A g \, d\lambda = \int_A 1 \, d\lambda = \lambda A = \mu A + \nu A\,.$$

Tudíž $\mu A = 0$. Potom ovšem i $\nu A = 0$, a tím také $\lambda A = 0$. Lze tedy předpokládat, že $0 \leq g < 1$ všude.

Rovnost v $(*)$ se také dá přepsat pro libovolnou funkci $f \in \mathcal{L}^2(\lambda)$ jako

$$(**) \qquad \int_\Omega fg \, d\mu = \int_\Omega f(1-g) \, d\nu\,.$$

Tato rovnost speciálně platí pro charakteristické funkce množin z $\mathcal{S}$, z linearity obou stran pak pro jednoduché funkce a z Leviho věty o limitním přechodu za integračním znamením i pro libovolné nezáporné měřitelné funkce.
Buď nyní $A \in \mathcal{S}$. Položíme-li $f = \frac{c_A}{1-g}$, je $f \geq 0$ měřitelná funkce a rovnost $(**)$ říká, že

$$\int_A \frac{g}{1-g}\,d\mu = \int_\Omega c_A \frac{g}{1-g}\,d\mu = \int_\Omega c_A\,d\nu = \nu A\,.$$

Stačí nyní položit $h = \frac{g}{1-g}$. Z poslední rovnosti též plyne, že $\int_\Omega h\,d\mu = \nu\Omega < \infty$, tedy $h \in \mathcal{L}^1(\mu)$.
■

Nyní, když máme zavedeny pojmy konečné variace, absolutní spojitosti, Fréchetovy derivace i Bochnerova integrálu pro vektorové funkce, můžeme se ptát, zda uvedené věty platí i pro zobrazení do Banachových prostorů. Základní větu v této problematice dokázal S. Bochner v [1933a].

(d) Věta. *Buď X Banachův prostor. Jestliže každá vektorová funkce $f : [0,1] \to X$ konečné variace má Fréchetovu derivaci $f'(x)$ ve skoro všech bodech intervalu $[0,1]$, potom každá absolutně spojitá vektorová funkce $g : [0,1] \to X$ je neurčitým Bochnerovým integrálem ze své derivace:*

$$g(b) - g(a) = \int_a^b g' \quad \textit{pro} \quad a, b \in [0,1]\,.$$

Někdy se říká, že Banachův prostor X má *Fréchet-Gelfandovu vlastnost*, jestliže z toho, že každá vektorová funkce z $[0,1]$ do X konečné variace je diferencovatelná skoro všude, plyne, že každá absolutně spojitá vektorová funkce z $[0,1]$ do X je neurčitým Bochnerovým integrálem ze své derivace. Otázku, zda existují nekonečně dimenzionální prostory mající Fréchet-Gelfandovu vlastnost zodpověděl G. Birkhoff [1935]. Ukázal totiž, že každý Hilbertův prostor má tuto vlastnost.

Hned v následujícím článku [1933b] sám Bochner uvedl příklad zobrazení $f : [0,1] \to l^\infty$, které je sice konečné variace, ale není diferencovatelné v žádném bodě. Závěr — Lebesgueovy věty obecně neplatí pro vektorové funkce. Naskytla se otázka, pro jaké Banachovy prostory tedy platí. Odpověď přišla poměrně brzy a byla značně překvapující. S. Bochner a A.E. Taylor ukázali v [1938], že Lebesgueovy věty platí právě v těch Banachových prostorech, kde platí i Radon-Nikodýmova věta. Dnes se tyto prostory nazývají Banachovými prostory majícími Radon-Nikodýmovu vlastnost. Jejich přesná definice je následující.

22.5. Banachovy prostory s RNP. Řekneme, že Banachův prostor X má *Radon-Nikodýmovu vlastnost*, krátce *RNP*, jestliže platí následující: Kdykoliv $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s konečnou mírou a $\nu : \mathcal{S} \to X$ je vektorová míra konečné variace, která je absolutně spojitá vzhledem k μ, existuje bochnerovsky integrovatelná funkce $g : \Omega \to X$ tak, že

$$\nu E = \int_E g\,d\mu \quad \text{pro} \quad E \in \mathcal{S}\,.$$

22.6. Příklady na RNP. (a) J. von Neumann v [1932] ukázal, že každý Hilbertův prostor má v dnešní terminologii RNP. Také uniformně konvexní prostory mají podle J.A. Clarksona [1936] RNP. Tamtéž J.A. Clarkson ukázal, že striktně konvexní prostory nemusejí mít Radon-Nikodýmovou vlastnost. To proto, že každý separabilní prostor dokázal přenormovat tak, aby v jisté ekvivalentní normě byl striktně konvexní (viz větu 21.26). Zdá se, že stále je otevřeným problémem, zda na každém Banachově prostoru s RNP existuje ekvivalentní striktně konvexní norma.

C. Stegall

(b) Každý reflexivní prostor má RNP, jak ukázal R.S. Phillips [1940]. N. Dunford a B.J. Pettis [1940] zase ukázali, že X^* má RNP, pokud X je Banachův prostor mající separabilní duál. Důkazy lze nalézt třeba v J. Diestel [*1975] či v J. Diestel and J.J. Uhl [*1977].

(c) C. Stegall [1975] dokázal v případě separabilního Banachova prostoru X, že jeho duál X^* má RNP, právě když X^* je separabilní.

(d) Prostor l^1 není uniformně konvexní, přesto má RNP. Prostory c_0, $\mathcal{C}([0,1])$ a $L^1([0,1])$ nemají RNP.

Dnes existuje celá řada ekvivalentních charakteristik Banachových prostorů s RNP. Uveďme pro zajímavost bez důkazů některé z nich. Čtenář si z jejich různorodnosti (a to jsme zdaleka neuvedli všechny, kupříkladu charakteristiky pomocí martingalů jsme zcela vynechali) může udělat představu, o jak rozsáhlou partii teorie Banachových prostorů se jedná. Odůvodnění jednodušších implikací se objeví ve cvičeních, zkuste se nad nimi zamyslet.

Nejdříve však ještě některé nové definice.

22.7. Zářezové množiny a plátky. Podmnožina D Banachova prostoru je *zářezová*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $x_\varepsilon \in D$ tak, že $x_\varepsilon \notin \overline{\mathrm{co}}(D \setminus U(x_\varepsilon, \varepsilon))$.

Je-li B podmnožina Banachova prostoru X, řekneme, že S je *plátkem* B, jestliže existuje $\varphi \in X^*$ a $\lambda \in \mathbf{R}$ tak, že $S = B \cap \{x \in X : \varphi(x) \le \lambda\}$. Jinými slovy, je-li S průnikem B a uzavřeného „poloprostoru“.

22.8. Charakteristiky prostorů majících RNP. *Buď X Banachův prostor. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *X má RNP,*

(ii) *je-li $\mathfrak{M}$ systém lebesgueovsky měřitelných množin na intervalu $[0,1]$ a $\nu : \mathfrak{M} \to X$ je vektorová míra konečné variace, která je absolutně spojitá vzhledem k Lebesgueově míře λ, existuje bochnerovsky integrovatelná funkce $g : [0,1] \to X$ tak, že*

$$\nu E = \int_E g \, d\lambda \quad \text{pro} \quad E \in \mathfrak{M},$$

(iii) *každý uzavřený podprostor X má RNP,*

(iv) *každý uzavřený separabilní podprostor X má RNP,*

(v) *každá vektorová funkce $[0,1] \to X$ konečné variace je fréchetovsky diferencovatelná skoro všude,*

(vi) *je-li $f : [0,1] \to X$ absolutně spojitá funkce, je f fréchetovsky diferencovatelná skoro všude; v tom případě $f(b) - f(a) = \int_a^b f'$, kdykoliv $a, b \in [0,1]$,*

(vii) *každé lipschitzovské zobrazení $f : [0,1] \to X$ je fréchetovsky diferencovatelné skoro všude,*

(viii) *každá omezená podmnožina X je zářezová,*

(ix) *každá uzavřená omezená podmnožina X je zářezová,*

(x) *omezené množiny mají plátky libovolně malého průměru,*

(xi) *je-li $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ prostor s konečnou mírou, je každý operátor $T \in \mathcal{L}(L^1(\mu), X)$ rieszovsky reprezentovatelný, tj. existuje funkce $g \in L^\infty_X(\mu)$ tak, že $Tf = \int_\Omega fg \, d\mu$ pro všechny funkce $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$,*

(xii) *každá neprázdná uzavřená omezená konvexní podmnožina X má alespoň jeden silně exponovaný bod,*

(xiii) *každá neprázdná uzavřená omezená konvexní podmnožina X je uzavřeným konvexním obalem svých silně exponovaných bodů,*

(xiv) *je-li K kompaktní (Hausdorffův) prostor, potom každý absolutně sčítající operátor z $\mathcal{C}(K)$ do X je nukleární,*

(xv) *v každé ekvivalentní normě na X je uzavřená jednotková koule zářezová.*

22.9. Poznámka. Radon-Nikodýmova vlastnost Banachova prostoru X vyjadřuje, že pro jistá zobrazení z libovolného prostoru s konečnou mírou do X platí závěr Radon-Nikodýmovy věty. Podmínka (ii) říká, že stačí testovat pouze zobrazení z intervalu $[0,1]$ uvažovaného s Lebesgueovou mírou.

Podmínky (v) a (vi) jsou pak analogií Lebesgueových vět o diferencovatelnosti a neurčitém integrálu. Banachovým prostorům splňujících podmínku (v) se někdy říkalo *Gelfand-Fréchetovy*.

Podmínku (vii) můžeme považovat za klasickou Rademacherovu větu v případě, kdy X je prostor $\mathbf{R}^n$. Podmínka (ix) v reálném případě říká, že duál k prostoru L^1 lze ztotožnit s L^∞ (podívejte se na 2.14.b). Charakteristika prostorů majících RNP obsažená v (xiii) patří R.R. Phelpsovi [1974], přičemž pojem silně exponovaného bodu lze nalézt v *18.4.

22.10. Elementární cvičení. (a) Jsou-li X a Y izomorfní Banachovy prostory a X má RNP, potom i Y má RNP.

(b) Ukažte, že Banachovy prostory c_0, $\mathcal{C}([0,1])$ a $L^1([0,1])$ nemají Radon-Nikodýmovu vlastnost.

Návod. Využijte Phelpsovu charakteristiku (xii) či (xiii) z věty 22.8 s přihlédnutím k tomu, jak vypadají extremální body jejich uzavřených jednotkových koulí. ♣

(c) Ukažte, že uzavřená jednotková koule B_X v Banachově prostoru $X = \mathcal{C}([0,1])$ není zářezová.

Návod. Volte $f \in B_X$ a přirozené n. Položme $\varepsilon = \frac{1}{2}$ a zkonstruujme funkce $f_1, \dots, f_n$ na $[0,1]$ tak, aby $f_i \in B_X \setminus U(f,\varepsilon)$, $f_i = f$ na intervalu $[0,1] \setminus [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$. Potom $\left\| f - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i \right\| < \frac{2}{n}$. Vidíme, že $f \in \overline{\mathrm{co}}(B_X \setminus U(f,\varepsilon))$. ♣

(d) Ukažte, že omezená množina je zářezová, právě když má plátky libovolně malého průměru.

Návod. Zkuste se pocvičit v aplikaci malé Mazurovy věty 14.27. Nechť D je omezená zářezová množina v Banachově prostoru X, $\varepsilon > 0$ a $x_\varepsilon \notin \overline{\mathrm{co}}\big(D \setminus U(x_\varepsilon,\varepsilon)\big)$. Najděte $\varphi \in X^*$ a λ tak, aby $\varphi\big(\overline{\mathrm{co}}(D \setminus U(x_\varepsilon,\varepsilon))\big) \le \lambda$ a $\varphi(x_\varepsilon) > \lambda$. Potom $\{x \in D : \varphi(x) \ge \lambda\} \subset U(x_\varepsilon, 2\varepsilon)$.

Důkaz opačné implikace probíhá ve stejném duchu. ♣

(e) Nechť D je podmnožina Banachova prostoru X. Jestliže $\overline{\mathrm{co}}D$ je zářezová množina, je i D zářezová.

Návod. Volme $\varepsilon > 0$ a najděme $x_\varepsilon \in \overline{\mathrm{co}}D$ tak, aby $x_\varepsilon \notin \overline{\mathrm{co}}\big(\overline{\mathrm{co}}D \setminus U(x_\varepsilon,\varepsilon)\big)$. Podle malé Mazurovy věty 14.27 existuje $\varphi \in X^*$ a λ tak, že $\varphi \le \lambda$ na $\overline{\mathrm{co}}\big(\overline{\mathrm{co}}D \setminus U(x_\varepsilon,\varepsilon)\big)$ a $\varphi(x_\varepsilon) > \lambda$. Protože $\sup \varphi(D) = \sup \varphi(\overline{\mathrm{co}}D)$, existuje $d_\varepsilon \in D \cap \{x \in X : \varphi(x) > \lambda\}$. Potom $D \setminus U(d_\varepsilon, 2\varepsilon) \subset D \setminus U(x_\varepsilon,\varepsilon)$, odkud vyplyne, že $\sup \varphi\big(\overline{\mathrm{co}}(D \setminus U(d_\varepsilon, 2\varepsilon))\big) \le \lambda < \varphi(d_\varepsilon)$. Tudíž $d_\varepsilon \notin \overline{\mathrm{co}}\big(D \setminus U(d_\varepsilon, 2\varepsilon)\big)$. ♣

23. Věty o pevných bodech

Věty o pevných bodech pro zobrazení $f : T \to T$ nám zaručují existenci alespoň jednoho bodu $t \in T$ s vlastností $f(t) = t$. Potkáváme se s nimi v mnoha oblastech analýzy, a to zejména při řešení rovnic $F(x) = 0$. Ať se již jedná o hledání kořenů polynomů či hledání řešení diferenciálních nebo integrálních rovnic. Na to pak navazují různé numerické metody pro nalezení či aproximaci těchto pevných bodů.

Některé z vět o pevných bodech lze využít i při čistě teoretických existenčních důkazech.

23.1. Pevné body zobrazení. Bod x nazveme *pevným bodem* zobrazení $f : X \to X$, jestliže $f(x) = x$.

23.2. Kontrakce. Nejznámější elementární větou o pevném bodu je zřejmě Banachova věta o kontrakci. Připomeňme, že zobrazení f metrického prostoru (P,ϱ) do (P,ϱ) se nazývá *kontrakcí*, jestliže existuje konstanta $K < 1$ tak, že $\varrho\big(f(x), f(y)\big) \le K\,\varrho(x,y)$ pro každou dvojici $x, y \in P$.

23.3. Banachova věta o kontrakci. *Je-li P úplný metrický prostor a $f : P \to P$ kontrakce, potom existuje právě jeden pevný bod zobrazení f.*

Důkaz. Dokázat, že kontrakce nemůže mít dva různé pevné body, je hračka. Pro důkaz existence pevného bodu volme $x_0 \in P$ (libovolně!). Položíme-li $x_{n+1} := f(x_n)$, je posloupnost $\{x_n\}$ cauchyovská, neboť

$$\varrho(x_n, x_{n-1}) = \varrho\big(f(x_{n-1}), f(x_{n-2})\big) \le K\,\varrho(x_{n-1}, x_{n-2}) \le \cdots \le K^{n-1} \varrho(x_1, x_0)$$

a pro $n > k$

$$\varrho(x_n, x_k) \le \varrho(x_n, x_{n-1}) + \cdots + \varrho(x_{k+1}, x_k) \le \frac{K^{n-1}}{1-K} \varrho(x_1, x_0)\,.$$

Existuje tedy $\lim x_n =: x$ a ze spojitosti f (každá kontrakce je spojitým zobrazením) máme $\lim f(x_n) = f(x)$. Protože však $\lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = x$, vidíme, že x je pevným bodem f.

Jiný důkaz. Podejme ještě další důkaz, který by nás mohl inspirovat i v jiných situacích. Označme tedy

$$d := \inf\bigl\{\varrho(x, f(x)) : x \in P\bigr\}.$$

Musí být $d = 0$. Jistě, volíme-li totiž $\varepsilon > 0$ libovolně, existuje $z \in P$ tak, že $\varrho(z, f(z)) < d + \varepsilon$. Potom ovšem

$$d \le \varrho\bigl(f(z), f(f(z))\bigr) \le K\,\varrho\bigl(z, f(z)\bigr) < K\,(d + \varepsilon).$$

Pokud by bylo $d > 0$, dostali bychom, že $K \ge 1$. Položme tedy

$$M_n = \bigl\{x \in P : \varrho(x, f(x)) \le \tfrac{1}{n}\bigr\} \quad \text{pro} \quad n \in \mathbf{N}.$$

Potom $\{M_n\}$ je klesající posloupnost neprázdných uzavřených množin. Pokud ukážeme, že platí $\operatorname{diam} M_n \to 0$, bude podle Cantorovy věty B.4 průnik $\bigcap\limits_n M_n$ jednobodový a bude to právě hledaný pevný bod zobrazení f. Jsou-li však $x, y \in M_n$, je

$$\varrho(x, y) \le \varrho\bigl(x, f(x)\bigr) + \varrho\bigl(f(x), f(y)\bigr) + \varrho\bigl(f(y), y\bigr) \le \frac{2}{n} + K\,\varrho(x, y).$$

Tudíž $\operatorname{diam} M_n \le \frac{2}{n(1-K)}$. ■

23.4. Poznámky. (a) Banachova věta o kontrakci má řadu použití. Určitě jste se již potkali s existenčním důkazem Peanovy věty pro existenci a/či jednoznačnost řešení diferenciálních rovnic anebo s její aplikací při důkazu věty o implicitních funkcích či věty o lokálním difeomorfizmu.

(b) Věta o kontrakci již nemusí platit pro *neexpanzivní* zobrazení či *slabé kontrakce*. Stručně se této problematiky dotkneme v *23.1 a *23.4.

(c) Všimněme si, že posloupnost $\{f(x_n)\}$ z důkazu Banachovy věty o kontrakci konvergovala k pevnému bodu zobrazení f, ať jsme výchozí bod x_0 volili zcela libovolně. Je-li f zobrazení prostoru P do sebe, $x_0 \in P$ a $x_{n+1} := f(x_n) = f^n(x)$, nazýváme posloupnost $\{x_n\}$ *Picardovými iteracemi* zobrazení f (s počáteční podmínkou x_0).

23.5. Vlastnost FPP a retrakty. Topologický prostor X má *vlastnost pevného bodu*, krátce *vlastnost FPP*, jestliže každé spojité zobrazení X do X má pevný bod.

23.6. Poznámky. (a) Na $\mathbf{R}$ má každý uzavřený interval $[a, b]$ vlastnost FPP, jak ihned plyne z darbouxovské vlastnosti spojitých funkcí (o nabývání všech mezihodnot).

(b) V novějších monografiích a časopiseckých článcích se vlastnost FPP vyskytuje v mnoha různých významech. To záleží na tom, k jaké třídě množin a zobrazení na nich ji vztáhneme. Tak kupříkladu mnozí autoři říkají, že Banachův prostor má vlastnost FPP, někdy též „f.p.p.“, jestliže libovolné neexpanzivní zobrazení omezené uzavřené konvexní množiny do sebe má pevný bod. Jiní zase zkoumají neexpanzivní zobrazení slabě kompaktních množin do sebe. My se podržíme klasických definic a posledním vlastnostem budeme v *23.3 říkat R a R^*.

Řekneme, že množina Z je *retraktem* topologického prostoru X, jestliže existuje spojité *„retrahující“* zobrazení $r : X \to Z$ tak, že všechny body Z jsou pevnými body r, tedy jestliže $r(x) = x$ pro $x \in Z$.

Kupříkladu každý uzavřený podprostor Hilbertova prostoru je jeho retraktem. Obecněji, uzavřené konvexní podmnožiny v Hilbertových prostorech jsou jejich retrakty.

23.7. Lemma. *(a) Jestliže prostor X má vlastnost FPP a Y je homeomorfní s X, má i Y FPP.*

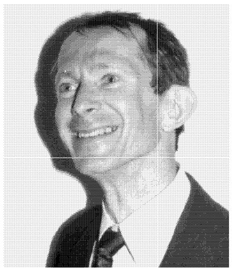
(b) Jestliže prostor X má FPP a Z je jeho retraktem, má i Z vlastnost FPP.

Důkaz. Důkazy obou tvrzení jsou téměř nabíledni. Je-li $f : Y \to Y$ spojité zobrazení v prvním případě a h homeomorfizmus X na Y, má složené zobrazení $h^{-1} \circ f \circ h : X \to X$ pevný bod x. Potom zřejmě $h(x)$ je pevným bodem f. V případě (b), je-li $r : X \to Z$ retrahující zobrazení a $f : Z \to Z$ zadané spojité zobrazení, existuje pevný bod x zobrazení $f \circ r$. Protože však $f(r(x)) = x \in Z$, je $r(x)$ hledaným pevným bodem zobrazení f. ■

Než přejdeme k jedné z nejdůležitějších vět nelineární funkcionální analýzy, zmiňme se stručně o pojmu topologického stupně.

23.8. Vsuvka o topologickém stupni. Předpokládejme, že f je zobrazení otevřené množiny G v Banachově prostoru X do, řekněme téhož, prostoru X. Chtěli bychom nyní definovat číslo $\deg(f,G,p)$ (topologický stupeň zobrazení f), které by vyjadřovalo „počet“ řešení rovnice $f(x) = p$ na množině G. Ideální by bylo, kdyby navíc toto číslo záviselo spojitě na zobrazení f i na pravé straně p, a kdyby pro malé pertubace f číslo $\deg(f,G,p)$ zůstávalo konstantní v malém okolí bodu p.

Jsou různé situace, kdy lze vybudovat teorie o zavedení takového stupně. My v dalším pouze vyslovíme větu o jednoznačnosti a existenci stupně v eukleidovském prostoru $\mathbf{R}^n$ pro spojitá zobrazení na otevřených omezených množinách a v poznámce se zmíníme o stupni v Banachových prostorech nekonečné dimenzi pro případ zobrazení typu $I - K$ (kde I je identita a K kompaktní operátor). Topologický stupeň v prvním případě byl zaveden L.E.J. Brouwerem v [1912], v druhém případě pak J. Lerayem a J. Schauderem [1934].



O. John

J. Milota

O topologickém stupni se lze dočíst ve skriptech [JS] či [FM], jiný způsob zavedení stupně v konečné dimenzi je prezentován v [LM]. Existuje ovšem přehršle způsobů, jak topologický stupeň v té či oné formě vybudovat. Z další literatury jmenujme klasickou monografii K. Deimling [1985], V.I. Istrăţescu [1981] či I. Fonseca and W. Gangbo [*1995].

`(a) Topologický stupeň v` $\mathbf{R}^n$. Každé „přípustné“ trojici (f,G,p), kde G probíhá systém všech omezených otevřených podmnožin $\mathbf{R}^n$, $f : \overline{G} \to \mathbf{R}^n$ je spojité zobrazení a $p \in \mathbf{R}^n \setminus f(\partial G)$, bychom rádi přiřadili celé číslo $\deg(f,G,p)$ splňující následující podmínky:

(a) je-li f identita na G a $p \notin \partial G$, potom $\deg(f,G,p) = 1$,

(b) jestliže $G_1, G_2 \subset G$ jsou disjunktní otevřené množiny a $p \notin f(\overline{G} \setminus G_1 \cup G_2)$, potom
$$\deg(f,G,p) = \deg(f,G_1,p) + \deg(f,G_2,p)\,,$$

(c) je-li $H : [0,1] \times \overline{G} \to \mathbf{R}^n$ spojité zobrazení, $f_0(x) = H(0,x)$, $f_1(x) = H(1,x)$ a $H(t,x) \neq p$ pro $t \in [0,1]$ a $x \in \partial G$, potom
$$\deg(f_0,G,p) = \deg(f_1,G,p)\,,$$

(d) pokud $\deg(f,G,p) \neq 0$, existuje $x \in G$ tak, že $f(x) = p$.

Další věta nám řekne, že v $\mathbf{R}^n$ takové zobrazení skutečně existuje a je podmínkami (a)–(d) jednoznačně určeno. Toto zobrazení nazveme *topologickým stupněm* v $\mathbf{R}^n$.

`(b) Poznámky.` (b1) S trochou tolerance „normalizační“ podmínka (a) říká, že rovnice $\mathrm{id}\, x = p$ má řešení $x = p$. Pokud jde o podmínku aditivity v (b), má-li rovnice $f(x) = p$ n_1 řešení na množině G_1, n_2 řešení na G_2 a žádné řešení v množině $\overline{G} \setminus G_1 \cup G_2$, má tato rovnice $n_1 + n_2$ řešení v G.

(b2) Jsou-li X a Y topologické prostory a f, g spojitá zobrazení X do Y, řekneme, že f je ***homotopické*** s g, existuje-li spojité zobrazení $H : [0,1] \times X \to Y$ tak, že $H(0,x) = f(x)$ a $H(1,x) = g(x)$ pro $x \in X$. Zobrazení H se pak říká ***homotopie***, třídě $\{f_t\}_{t\in[0,1]}$, kde $f_t := H(t,.)$, pak ***spojitá deformace*** f do g. Množina všech spojitých zobrazení X do Y se rozpadá na ***homotopické třídy***, vztah „býti homotopickými zobrazeními“ je totiž ekvivalence. Ale to vše patří již do jiných partií.

(b3) Podmínka (c) vyjadřuje invarianci topologického stupně vzhledem ke spojitým homotopiím.

(b4) Podmínka (d) je ze všeho nejdůležitější. Říká, jak poznáme, že rovnice $f(x) = p$ má řešení v množině G.

(b5) Proč pro přípustné trojice nemůžeme uvažovat také $p \in f(\partial G)$? Ilustrujme to na jednoduchém příkladě. Uvažujme funkci $f(t) = t$ na intervalu $G := (0,1)$. Pokud $p \in (-\infty,0) \cup (1,\infty)$, musí být $\deg(f,G,p) = 0$, neboť rovnice $f(x) = p$ nemá pro tato p v intervalu $(0,1)$ žádné řešení. Vzhledem k normalizační podmínce musí být $\deg(f,G,p) = 1$ pro $p \in (0,1)$. V libovolném okolí bodu $p = 0$ či $p = 1$ nabývá tedy stupeň $\deg(f,G,p)$ jak hodnot 0 tak i 1. Není tedy šance definovat stupeň $\deg(f,G,p)$ pro $p \in f(\partial G) = \{0,1\}$, vyžadujeme-li, aby spojitě závisel na p.

`(c) Věta.` *Topologický stupeň v* $\mathbf{R}^n$ *existuje a je podmínkami (a)–(d) jednoznačně určen. Navíc topologický stupeň má následující vlastnosti:*

(e) *jsou-li* f, g *spojitá zobrazení* $\overline{G}$ *do* $\mathbf{R}^n$, $f = g$ *na* ∂G *a* $p \in \mathbf{R}^n \setminus f(\partial G)$, *je* $\deg(f,G,p) = \deg(g,G,p)$,

(f) *funkce* $\deg(f,G,\cdot)$ *je konstantní na každé komponentě otevřené množiny* $\mathbf{R}^n \setminus f(\partial G)$.

`(d) Leray-Schauderův stupeň.` I v prostorech nekonečné dimenze lze budovat teorie topologického stupně. Jen stručně řekněme, že tzv. *Leray-Schauderův stupeň* se zavádí pro zobrazení typu $I-K$, kde K je kompaktní operátor. Pomocí něho lze pak již snadno odvodit Schauderovu větu 23.13 o pevném bodu.

23.9. Brouwerova věta. *Uzavřená jednotková koule* B_1 *v* $\mathbf{R}^n$ *má vlastnost pevného bodu.*

Důkaz. Existují různé důkazy Brouwerovy věty o pevném bodu. Kupříkladu jednoduchý důkaz Brouwerovy věty pro simplexy v $\mathbf{R}^n$ používající kombinatorické úvahy a Spernerovo lemma pochází od B. Knastera, K. Kuratowského a S. Mazurkiewicze [1929]. Je uveden třeba v [Pul].

Uveďme důkaz využívající existenci topologického stupně v $\mathbf{R}^n$ z věty 23.8.c. Předpokládejme tedy, že $f: B_1 \to B_1$ je spojité zobrazení a že $f(x) \neq x$ pro všechna $x \in B_1$. Položíme-li

$$H(t,x) := x - tf(x) \quad \text{pro} \quad x \in B_1 \text{ a } t \in [0,1]\,,$$

je H homotopie. Pokud $t \in [0,1]$ a $\|x\| = 1$, je $H(t,x) \neq 0$. Zajisté, pro $t=1$ je to podle předpokladu, pokud $t \in [0,1)$, máme v případě $\|x\|=1$ nerovnost $\|tf(x)\| \le t < 1$, a musí tudíž být $x \neq tf(x)$. Označíme-li ještě $G := \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| < 1\}$, $g_0(x) := H(0,x) = x$ a $g_1(x) := H(1,x) = x - f(x)$ pro $x \in G$, dostáváme z vlastnosti (c) stupně, že $\deg(g_0, G, 0) = \deg(g_1, G, 0)$. Ale g_0 je identické zobrazení, tudíž podle (a) je $\deg(g_0, G, 0) = 1$. Musí tedy být i $\deg(g_1, G, 0) = 1$ a vlastnost (d) nám dá existenci $x \in G$, pro něž $g_1(x) = 0$. A to je samozřejmě spor s tím, co jsme předpokládali. ∎

23.10. Důsledek. *Libovolná kompaktní konvexní podmnožina Banachova prostoru konečné dimenze má vlastnost FPP.*

Důkaz. Protože každý konečně dimenzionální (reálný) Banachův prostor X je izomorfní $\mathbf{R}^n$, kde $n = \dim X$, stačí ukázat, že libovolná kompaktní konvexní podmnožina $\mathbf{R}^n$ má vlastnost FPP. Ale to je snadné. Nechť $C \subset \mathbf{R}^n$ je taková množina. Najděme $R > 0$ tak velké, aby $C \subset U(0,R)$. Je-li nyní P_C hilbertovská projekce $\mathbf{R}^n$ na C (viz 1.26), je C retraktem $U(0,R)$. Nyní zbývá použít lemma 23.7, (a) i (b), a samozřejmě Brouwerovu větu. ∎

Poznámka. Jiné důkazy tohoto důsledku lze nalézt ve cvičení 23.16.d.

23.11. Brouwerova věta v nekonečné dimenzi. Otázka, zda pro uzavřené jednotkové koule v prostorech nekonečné dimenze platí analogie Brouwerovy věty, byla zodpovězena více autory.

Následující příklad pochází od S. Kakutaniho [1943]. Nechť C je uzavřená jednotková koule Hilbertova prostoru l^2. Definujeme-li zobrazení f na l^2 předpisem

$$f : x = (x_1, x_2, \dots) \mapsto \left(\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_1, x_2, \dots\right),$$

je f spojité zobrazení C do C, které nemá pevný bod.

Jako cvičení si rozmyslete, že i zobrazení

$$h : x = (x_1, x_2, \dots) \mapsto \left(1 - \|x\|^2, x_1, x_2, \dots\right)$$

či

$$s_\varepsilon : (x_1, x_2, \dots) \mapsto \left(\varepsilon(1 - \|x\|), x_1, x_2, \dots\right)$$

nemají na uzavřené jednotkové kouli prostoru l^2 pevný bod.

Jako jiný příklad poslouží i uzavřená jednotková koule prostoru c_0 a zobrazení

$$f : \{x_n\} \mapsto (1 - \|x\|, x_1, x_2, \dots)\,.$$

K této problematice se ještě vrátíme v *23.8.

Vidíme, že v nekonečně dimenzionálních prostorech analogie Brouwerovy věty nemusí platit. Uvažujeme-li však spojitá zobrazení kompaktních konvexních množin, pro ně již tvrzení platí. Uvedeme relativně slabší tvrzení jako základ dalších vět.

23.12. Lemma. *Nechť C je uzavřená konvexní podmnožina Banachova prostoru X a $K \subset C$ kompakt. Jestliže f je spojité zobrazení C do K, má f pevný bod.*

Důkaz. Položíme-li $B := \overline{\mathrm{co}} K$, je $B \subset C$ kompaktní množina podle Mazurovy věty *13.6.c a f je spojité zobrazení B do B. Dále, je-li Y uzavřený lineární obal B, je Y opět Banachův prostor, který je navíc separabilní (neboť B je kompakt). Podle Clarksonovy renormační věty 21.26 existuje na Y ekvivalentní striktně konvexní norma.

Shrňme, důkaz jsme zredukovali na případ, kdy X můžeme uvažovat striktně konvexní, B kompaktní konvexní a $f : B \to B$ spojité. Cílem dalšího snažení je převést důkaz na případ konečné dimenze a použít Brouwerovu větu.

Protože $f(B)$ je kompaktní množina, existují ke každému přirozenému n prvky $x_i^n \in B$, $i = 1, \dots, m(n)$ tak, že množina $\Xi_n := \{f(x_i^n) : i = 1, \dots, m(n)\}$ je $\frac{1}{n}$-síť množiny $f(B)$. Označme Y_n lineární obal množiny Ξ_n. Potom Y_n je konečně dimenzionální (uzavřený) podprostor X. Protože množiny $B_n := B \cap Y_n$ jsou kompaktní a konvexní v Y_n, jsou podle věty 21.17 metrické projekce $P_n : X \to B_n$ spojité. Potom složená zobrazení $f_n := P_n \circ f : B_n \to B_n$ jsou spojitá a podle (důsledku) Brouwerovy věty 23.10 existují $z_n \in B_n$ tak, že $f_n(z_n) = z_n$. Protože $\{z_n\}_n \subset B$, lze z posloupnosti $\{z_n\}$ vybrat konvergentní. Předpokládejme tedy rovnou, že $z_n \to z$.

K dokončení důkazu stačí ukázat, že $f(z) = z$. Především si uvědomme, že

$$\|f_n(x) - f(x)\| = \|P_n(f(x)) - f(x)\| = \operatorname{dist}(B_n, f(x)) \le \min\{\|f(x) - f(t)\| : t \in \Xi_n\} \le \frac{1}{n}$$

pro $x \in B_n$. Odhadujme nyní

$$\|f_n(z_n) - f(z)\| = \|f_n(z_n) - f(z_n)\| + \|f(z_n) - f(z)\| \le \frac{1}{n} + \|f(z_n) - f(z)\|\,.$$

Tudíž $f_n(z_n) \to f(z)$, neboť $f(z_n) \to f(z)$ ze spojitosti f, a protože $f_n(z_n) = z_n \to z$, dostáváme konečně $z = f(z)$. ■

Poznámka. Závěr posledního důkazu připomínal důkaz tvrzení, podle kterého $f_n(z_n) \to f(z)$, pokud $z_n \to z$ a $f_n \to f$ stejnoměrně.

23.13. Schauderova věta. *Nechť K je kompaktní konvexní podmnožina Banachova prostoru X a $f : K \to K$ spojité zobrazení. Potom existuje $x \in K$ tak, že $f(x) = x$.*

Důkaz. Tvrzení samozřejmě vyplývá z posledního lemmatu 23.12. Čtenáři, kterému jsou renormace protivné a který by uvítal raději přímý důkaz, nabízíme následující řádky. Nechť tedy $f : K \to K$ je spojité zobrazení na kompaktní množině K. Předepišme si $\varepsilon > 0$. Existují $x_1, \dots, x_n \in K$ tak, že $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} U(x_j, \varepsilon)$. Položme $\varphi_j(x) := \max\{0, \varepsilon - \|x - x_j\|\}$ pro $x \in K$ a $j = 1, \dots, n$. Funkce φ_j jsou na K nezáporné, přičemž součet $\sum_{j=1}^{n} \varphi_j$ je v každém bodě K kladný. Definujeme-li funkci φ na K předpisem

$$\varphi : x \mapsto \left(\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x) x_j\right) \left(\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x)\right)^{-1}$$

je φ na K spojitá, zobrazuje K do množiny $K_\varepsilon := K \cap \mathrm{co}\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathrm{lin}\{x_1, \dots, x_n\}$ a $\|\varphi(x) - x\| \le \varepsilon$ pro $x \in K$. Složené zobrazení $\varphi \circ f$ zobrazuje K_ε do K_ε, má tedy podle Brouwerovy věty 23.9 pevný bod $x_\varepsilon \in K_\varepsilon$. Protože

$$\|x_\varepsilon - f(x_\varepsilon)\| \le \|x_\varepsilon - \varphi \circ f(x_\varepsilon)\| + \|\varphi \circ f(x_\varepsilon) - f(x_\varepsilon)\| = \|\varphi \circ f(x_\varepsilon) - f(x_\varepsilon)\| \le \varepsilon\,,$$

je $\inf\{\|x - f(x)\| : x \in K\} = 0$. Jelikož f je spojité zobrazení na kompaktní množině, musí existovat $x \in K$ tak, že $f(x) = x$. ■

23.14. Kompaktní zobrazení. Nechť M, N jsou normované lineární prostory. Zobrazení $f : M \to N$ se nazývá *kompaktní*, je-li spojité a zobrazuje každou omezenou množinu v M na množinu relativně kompaktní v N.

Je-li f lineární a zobrazuje omezené množiny na relativně kompaktní, je již f automaticky spojité.

23.15. Věta. *Je-li C uzavřená omezená konvexní podmnožina Banachova prostoru X a $f: C \to C$ kompaktní zobrazení, má f pevný bod.*

Návod. Použijte lemma 23.12. ♣

Poznámka. Stačilo předpokládat, že C je konvexní podmnožina normovaného lineárního prostoru a $f: C \to C$ kompaktní zobrazení. Viz třeba J. Dugundji and A. Granas [*1982], str. 57.

23.16. Elementární cvičení. (a) Nechť C je uzavřená konvexní podmnožina striktně konvexního Banachova prostoru X a $T: C \to C$ neexpanzivní zobrazení. Potom množina pevných bodů $\mathrm{Fix}(T) := \{x \in C : Tx = x\}$ je uzavřená a konvexní.

Návod. Uzavřenost je důsledek spojitosti zobrazení T. Nechť $x, y \in C$, $Tx = x$, $Ty = y$ a $z := \frac{x+y}{2}$. Potřebujeme ukázat, že $Tz = z$. Protože $\|Tz - x\| \leq \|z - x\| = \|\frac{x-y}{2}\|$ a taktéž $\|Tz - y\| \leq \|\frac{x-y}{2}\|$, musí být využitím striktní konvexity $z = Tz$. ♣

Poznámka. Množina $\mathrm{Fix}(T)$ nemusí být obecně ani konvexní, souvislá či slabě uzavřená. Lze se třeba podívat do K. Goebel and W.A. Kirk [*1990]. M.A. Khamsi ukázal, že Banachův prostor X je striktně konvexní, právě když pro každé neexpanzivní zobrazení T na libovolné uzavřené konvexní množině je množina $\mathrm{Fix}(T)$ konvexní.

(b) Nechť B_X je uzavřená jednotková koule Banachova prostoru X a $f: B_X \to X$ kontrakce. Jestliže $f(\partial B_X) \subset B_X$, má f pevný bod.

Návod. Položte $h: x \mapsto \frac{x+f(x)}{2}$ a ukažte, že $h: B_X \to B_X$ je kontrakce. Každý pevný bod h je i pevným bodem f. ♣

(c) Nechť (P, ϱ) je úplný metrický prostor. Zobrazení $fP \to P$ nazveme *expandujícím*, existuje-li taková konstanta $\beta > 1$, že $\varrho\big(f(x), f(y)\big) \geq \beta\varrho(x, y)$ pro všechna $x, y \in P$. Nechť f je expandující zobrazení na P a $f(P) = P$. Ukažte, že f má právě jeden pevný bod.

(d) Dokažte důsledek 23.10 podle následujících návodů. V každém případě předpokládejte, že $C \subset B_1 := \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ je uzavřená konvexní množina.

(d1) Je-li p_C Minkowského funkcionál množiny C, je zobrazení $x \mapsto \frac{x\,\|x\|}{p_C(x)}$ homeomorfizmem C na B_1.

(d2) Nechť $f: C \to C$ je spojité zobrazení. Podle Dugundjiho věty B.12 rozšiřte f na spojité zobrazení $\varphi_f: B_1 \to C$ a podle Brouwerovy věty najděte jeho pevný bod.

Poznámky, doplňky, cvičení

*1. Banachovy a Hilbertovy prostory

***1.1. Další příklady normovaných lineárních prostorů.** Podejme ještě některé další příklady prostorů.

`(a) Prostory` $l^\infty(\Gamma)$ `a` $c_0(\Gamma)$. Buď Γ libovolná množina. Definujeme

$$l^\infty(\Gamma) := \big\{\{a_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \in \mathbf{R}^\Gamma : \sup\{|a_\gamma| : \gamma \in \Gamma\} < \infty\big\} \text{ s normou } \|\{a_\gamma\}\| := \sup\big\{|a_\gamma| : \gamma \in \Gamma\big\}$$

a

$$c_0(\Gamma) := \big\{\{a_\gamma\} \in l^\infty(\Gamma) : \text{pro každé}\, \varepsilon > 0 \text{ množina } \{\gamma \in \Gamma : |a_\gamma| > \varepsilon\} \text{ je konečná}\big\}\,.$$

s normou indukovanou z $l^\infty(\Gamma)$.

`(b) Prostory` c_{00} `a` l^1_{00}. Vektorový prostor c_{00} sestává ze všech posloupností, které jsou od určitého indexu rovny 0, tedy $x = \{x_n\} \in c_{00}$, jestliže existuje k (závislé na x) tak, že $x_n = 0$ pro všechna $n > k$. Uvažujeme-li na c_{00} sup-normu, je c_{00} podprostor c_0. Protože však c_{00} není uzavřený v c_0 (stačí uvažovat posloupnost $(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots)$), není prostor c_{00} úplný.

Obdobně definujeme prostor l^1_{00} jako podprostor l^1 tvořený všemi posloupnostmi, které jsou od určitého indexu (závislého na dané posloupnosti) nulové. Prostor l^1_{00} je hustý v l^1.

`(c) Prostor` $\mathcal{B}(T)$. Vektorový prostor $\mathcal{B}(T)$ všech omezených funkcí na množině T uvažovaný s normou $\|f\| := \sup\{|f(t)| : t \in T\}$ je Banachův prostor. Zřejmě $l^\infty = \mathcal{B}(\mathbf{N})$.

`(d) Prostor` $\mathcal{C}^k([0,1])$. Buď $k \in \mathbf{N}$. Vektorový prostor $\mathcal{C}^k([0,1])$ všech spojitě diferencovatelných funkcí až do řádu k na intervalu $[0,1]$ vybavený normou

$$\|f\| = \max_{t\in[0,1]} |f(t)| + \max_{t\in[0,1]} |f'(t)| + \cdots + \max_{t\in[0,1]} |f^{(k)}(t)|$$

je Banachův prostor.

`(e) Prostor` $\mathrm{ba}(\mathcal{S})$. Nechť $\mathcal{S}$ je σ-algebra podmnožin množiny T. Symbolem $\mathrm{ba}(\mathcal{S})$ označme vektorový prostor všech omezených konečně aditivních reálných funkcí na $\mathcal{S}$. Položíme-li pro $\nu \in \mathrm{ba}(\mathcal{S})$

$$\|\nu\| = \sup\Big\{\sum_{i=1}^n |\nu E_i| : E_i \in \mathcal{S}\ ,\ \bigcup_{i=1}^n E_i = T\ ,\ E_i \cap E_j = \emptyset \text{ pro } i \neq j\Big\}\,,$$

stává se $\mathrm{ba}(\mathcal{S})$ s takto definovanou normou Banachovým prostorem. Množina $\mathrm{ca}(\mathcal{S})$ všech σ-aditivních znaménkových měr na $\mathcal{S}$ je pak uzavřeným podprostorem $\mathrm{ba}(\mathcal{S})$.

`(f) Prostory` $\mathcal{L}^p_X(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$. Nechť $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s konečnou mírou, $p \in [1, \infty)$ a X je Banachův prostor. Vektorová funkce $f : \Omega \to X$ je *silně měřitelná*, jestliže existuje posloupnost jednoduchých funkcí $\{f_n\}$ tak, že $f_n \to f$ μ-skoro všude. Přitom funkce $\varphi : \Omega \to X$ je *jednoduchá*, existují-li $x_1, \ldots, x_n \in X$ a množiny $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{S}$ tak, že $\varphi = \sum\limits_{j=1}^n x_j c_{E_j}$.

Je-li f silně měřitelná funkce, je (reálná) funkce $\|f\|$ měřitelná. To je zřejmé v případě, kdy f je jednoduchá funkce. V obecném případě si stačí uvědomit že limita skoro všude konvergentní posloupnosti měřitelných funkcí je opět měřitelná funkce (a norma je spojitá funkce).

Prostor $\mathcal{L}^p_X(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ je tvořen měřitelnými funkcemi f, pro něž

$$\|f\|_{p,X} := \Big(\int_\Omega \|f(\omega)\|^p \, d\mu(\omega)\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty\,.$$

Lze ukázat, že prostory $\mathcal{L}^p_X(\Omega,\mathcal{S},\mu)$ (přesněji řečeno, třídy ekvivalentních funkcí) s takto definovanou normou $\|.\|_{p,X}$ jsou Banachovy.

Obdobně lze definovat Banachův prostor $\mathcal{L}^\infty_X(\Omega,\mathcal{S},\mu)$ jako prostor (tříd) všech esenciálně omezených zobrazení $f:\Omega\to X$ opatřený normou

$$\|f\|_{\infty,X} := \inf\{M\ge 0 : \|f\|\le M \quad \mu\text{-skoro všude}\}\,.$$

Přitom funkce $f:\Omega\to X$ je *esenciálně omezená*, existuje-li taková konstanta $M>0$, že $\|f(\omega)\|\le M$ pro μ-skoro všechna $\omega\in\Omega$.

Zmiňme se na tomto místě o tom, jak vypadají duály k prostorům $\mathcal{L}^p_X(\Omega,\mathcal{S},\mu)$ pro $1<p<\infty$. Lze ukázat, že pokud X je reflexivní, je prostor $\mathcal{L}^p_X(\Omega,\mathcal{S},\mu)$ také reflexivní a jeho duál lze ztotožnit s prostorem $\mathcal{L}^q_{X^*}(\Omega,\mathcal{S},\mu)$, kde samozřejmě $q=\frac{p}{p-1}$. Pokud X není reflexivní, je situace mnohem složitější. Lze konsultovat třeba L. Schwartz [1974-75]. Tamtéž lze nalézt následující zajímavou charakteristiku.

Věta. *Nechť X je Banachův prostor, $p\in[1,\infty)$ a $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Potom duál prostoru $\mathcal{L}^p_X(\Omega,\mathcal{S},\mu)$ je $\mathcal{L}^q_{X^*}(\Omega,\mathcal{S},\mu)$, právě když X^* má Radon-Nikodýmovu vlastnost.*

Poznámka. O Radon-Nikodýmově vlastnosti Banachových prostorů jsme se zmínili v 22. kapitole. Podotkněme pouze, že pokud Banachův prostor X je reflexivní, je i X^* reflexivní (Pettisova charakteristika v 16.15), a tudíž X^* má Radon-Nikodýmovu vlastnost podle 22.6. Tamtéž jsme uvedli, že X^* má Radon-Nikodýmovu vlastnost, pokud X^* je separabilní.

(g) Hardyho prostory. Nechť φ je hladká funkce s nosičem v jednotkové kouli prostoru $\mathbf{R}^n$, pro niž $\int_{\mathbf{R}^n}\varphi=1$. Je-li dále $f\in L^1(\mathbf{R}^n)$, položme

$$f^*(x)=\sup\Big\{\,\Big|\int_{\mathbf{R}^n}\varepsilon^{-n}\varphi\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big)\,f(y)\,dy\Big|\;:\;\varepsilon>0\Big\}\,.$$

Řekneme, že funkce f leží v *Hardyho prostoru* $\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^n)$, jestliže $f^*\in L^1(\mathbf{R}^n)$. Normu funkce $f\in\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^n)$ definujeme jako $\|f^*\|_{L^1(\mathbf{R}^n)}$. Hardyho prostory $\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^n)$ s právě definovanou normou jsou Banachovy prostory, přičemž různé volby funkce φ vedou k ekvivalentním normám.

Nechť $\mathbf{D}:=\{z\in\mathbf{C}:|z|<1\}$ a $p\in(0,\infty]$. *Hardyho prostor* $H_p(\mathbf{D})$ je definován jako množina všech analytických funkcí na $\mathbf{D}$, pro něž

$$\|f\|_{H_p} := \sup\Big\{\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\xi})|^p\,d\xi\Big)^{\frac{1}{p}} : r<1\Big\}<\infty\,.$$

Pro $p\in[1,\infty]$ tvoří $H_p(\mathbf{D})$ s takto definovanou normou Banachův prostor. Je-li $f\in H_p(\mathbf{D})$, existuje limita $f^*(\xi):=\lim\limits_{r\to 1_-} f(re^{i\xi})$ pro skoro všechna $\xi\in[0,2\pi]$ a $\|f\|_{H_p}=\|f^*\|_{L^p([0,2\pi])}$.

(g) Poznámky. (g1) Nechť $p\ge 1$. Označíme-li $H_p(\partial\mathbf{D})$ prostor sestávající ze všech funkcí $f\in\mathcal{L}^p(\partial\mathbf{D})$, jejichž Fourierovy koeficienty $a_n(f):=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)e^{-inx}\,dx=0$ pro všechna záporná n, lze vcelku přirozeným způsobem prostory $H_p(\mathbf{D})$ a $H_p(\partial\mathbf{D})$ ztotožnit.

(g2) Aniž cokoliv vysvětlíme, jen na okraj poznamenejme, že duály k Hardyho prostorům jsou *John-Nirenbergovy prostory* BMO funkcí omezené oscilace.

(h) Prostor $\Big(\bigoplus\limits_{n=1}^{\infty}X_n\Big)^p$. Nechť $p\in[1,\infty)$ a $\{X_n\}$ je posloupnost Banachových prostorů. Pod názvem *l^p-direktní součet prostorů* $\{X_n\}$ a označením $X:=\Big(\bigoplus\limits_{n=1}^{\infty}X_n\Big)^p$ se skrývá vektorový prostor všech takových posloupností $\{x_n\}$, pro něž $x_n\in X_n$ pro každé n a

$$\|\,\{x_n\}\,\|_p := \Big(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p\Big)^{\frac{1}{p}}<\infty$$

(dá rozum, že $\|x_n\|$ se rozumí norma v prostoru X_n). Potom $\|.\|_p$ je skutečně norma na X a X je v ní úplný.

Zajímavé příklady též dostaneme, jsou-li všechny prostory X_n identické.

`(i) Prostory` $\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n\right)^{\infty}$ a $\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n\right)_{c_0}$. Tyto prostory definujeme analogicky jako prostory v (h) zcela přirozeným způsobem. Promyslete si jejich definice sami.

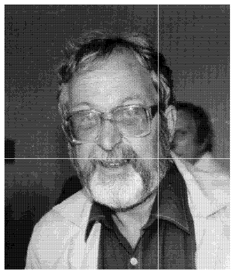
***1.2. Ještě další příklady Banachových prostorů**. Je jasné, že existuje nepřeberné množství příkladů Banachových prostorů vytvořených k různým účelům. Mnoho z nich bylo zkoumáno zejména v poslední době. V následujícím přehledu podejme víceméně názvy některých z nich.

`(a) Orliczovy prostory`. Nechť Ψ je nezáporná spojitá konvexní funkce na intervalu $[0, \infty)$ anulující se pouze v 0 (představte si třeba $\Psi(t) = t^p$ pro $p \in [1, \infty)$ či $\Psi(t) = e^{t^2} - 1$). Označme $\mathcal{L}^{\Psi}(\mathbf{R})$ množinu všech reálných měřitelných funkcí f na $\mathbf{R}$ takových, pro něž existuje $c_f > 0$ tak, že $\int_{\mathbf{R}} \Psi\left(\frac{|f|}{c_f}\right) < \infty$. Pro $f \in \mathcal{L}^{\Psi}(\mathbf{R})$ položme

$$\|f\|_{\Psi} := \inf\left\{c > 0 : \int_{\mathbf{R}} \Psi\left(\frac{|f|}{c}\right) \leq 1\right\}.$$

Potom prostor $\mathcal{L}^{\Psi}(\mathbf{R})$ (po ztotožnění funkcí rovnajících se skoro všude) je s normou $\|.\|_{\Psi}$ úplný a nazývá se *Orliczův prostor*.

Je asi zbytečné říkat, že Orliczovy prostory lze zavádět v různém stupni obecnosti. Jim, jakožto i mnoha dalším „funkčním“ prostorům, spolu s vyšetřováním jejich vlastností je věnována monografie A. Kufner, O. John, S. Fučík [*1977].



A. Kufner

`(b) Bezikovičův prostor`. Buď $p \in [1, \infty)$. Označme

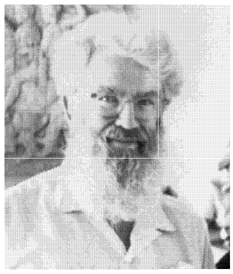
$$\mathcal{F} := \left\{f \text{ na } \mathbf{R} : \|f\|_{bp} := \limsup_{T \to \infty} \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\right\}.$$

Všechny trigonometrické polynomy zajisté patří do $\mathcal{F}$. Uvažujme množinu $\mathcal{B}^p(\mathbf{R})$ všech funkcí f takových, k nimž existuje posloupnost $\{s_n\}$ trigonometrických polynomů s vlastností $\|f - s_n\|_{bp} \to 0$. Potom $\mathcal{B}^p(\mathbf{R}) \subset \mathcal{F}$ a $\|f\|_{bp} = \lim \|s_n\|_{bp}$ pro $f \in \mathcal{B}^p(\mathbf{R})$. *Bezikovičovým prostorem* potom rozumíme faktorprostor $\mathcal{B}^p(\mathbf{R})$ podle množiny $\{f \in \mathcal{F} : \|f\|_{bp} = 0\}$. Ten je Banachův.

`(c) Dayova norma na` $l^{\infty}(\Gamma)$. Nechť Γ je libovolná množina. Na vektorovém prostoru $l^{\infty}(\Gamma)$ z *1.1.a definujme pro $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \in l^{\infty}(\Gamma)$ normu

$$\|\{x_g\}\|_d := \sup\left\{\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{x_{\gamma_j}^2}{4^j}\right)^{\frac{1}{2}} : \gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma\right\}.$$

Potom *Dayova norma* $\|.\|_d$ je norma na $l^{\infty}(\Gamma)$, která je ekvivalentní původní normě na $l^{\infty}(\Gamma)$.



M.M. Day

Prostor $c_0(\Gamma)$ uvažovaný s Dayovou normou je příkladem lokálně uniformního prostoru. To není zrovna lehké dokázat, čtenáře můžeme odkázat na monografii R. Deville, G. Godefroy and V. Zizler [*1993].

`(d) Jamesův prostor`. Jamesův prostor $\mathcal{J}$ je tvořen všemi posloupnostmi $\{x_n\}$ z c_0, pro něž

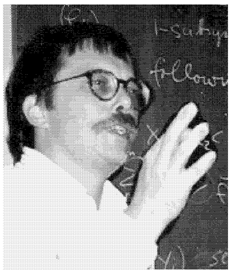
$$\sup \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left(|x_{n_2} - x_{n_1}|^2 + |x_{n_3} - x_{n_2}|^2 + \dots + |x_{n_k} - x_{n_1}|^2\right)^{\frac{1}{2}} : n_1 < \dots < n_k\right\} < \infty.$$

J. Stará

Definujeme-li normu $\|\{x_n\}\|_{\mathcal{J}}$ jako uvedené supremum, je $(\mathcal{J}, \|.\|_{\mathcal{J}})$ nereflexivní Banachův prostor, který je izometricko-izomorfní svému druhému duálu $\mathcal{J}^{**}$. Neobsahuje izomorfní kopii c_0 ani l^1. Je popsán v [Sta] či [HHZ]. Detailnímu zkoumání Jamesova prostoru je věnována monografie H. Fetter and B. Gamboa de Buen [*1997]. Kniha obsahuje i popis dalších prostorů, speciální pozornost je věnována i *Jamesově stromovému prostoru*. Však také publikace má název Jamesův les. V závěrečné kapitole, která má název „další patologické prostory“, se čtenář může mimo jiné seznámit i s Tsirelsonovým či Schlumprechtovým prostorem.

`(e) Tsirelsonův prostor`. Jedná se o reflexivní Banachův prostor (množinově je podmnožinou c_0), který neobsahuje izomorfní kopii c_0 ani l^1. Je popsán v [HHZ] a je mu věnována monografie P.G. Casazza and Th.J. Shuza [*1989].

`(f) Poznámka`. Teprve nedávno sestrojil T. Gowers [1994a] příklad separabilního Banachova prostoru, který neobsahuje žádný reflexivní podprostor a neobsahuje ani kopii c_0 ani l^1. Tím vyřešil starý problém, který dlouhou dobu odolával řešení.


T. Schlumprecht

`(g) Schlumprechtův prostor`. T. Schlumprecht [1991] sestrojil zajímavou normu na prostoru c_{00} z *1.1.b a uvažoval zúplnění c_{00} v této normě.

***1.3. K definici Sobolevových prostorů**. Sobolevovy prostory lze definovat různým způsobem. Aniž se pustíme do detailů, soustřeďme se na následující dva přístupy,

(a) Nechť $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina a $p \in [1, \infty)$. V 1.10.g jsme definovali Sobolevův prostor $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ jako množinu všech slabě diferencovatelných „funkcí" z L^p, jejichž slabá derivace leží v L^p. Dále $1,p$-norma v prostoru $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ byla definována jako

$$\|f\|_{1,p} = \Big(\int_\Omega (|f|^p + |\nabla f|^p)\Big)^{1/p}.$$

Pro $p < \infty$ definujme $\mathcal{V}^{1,p}(\Omega)$ jako prostor všech funkcí z $\mathcal{C}^1(\Omega)$, jejichž $1,p$-norma je konečná a $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ jako uzávěr množiny

$$\{(u, \nabla u) \colon u \in \mathcal{V}^{1,p}(\Omega)\}$$

v prostoru $L^p(\Omega) \times L^p(\Omega, \mathbf{R}^n)$. (Zde samozřejmě $L^p(\Omega, \mathbf{R}^n)$ je prostor všech zobrazení $f : \Omega \to \mathbf{R}^n$, jejichž jednotlivé složky leží v $L^p(\Omega)$). Potom funkce u leží v Sobolevově prostoru $W^{1,p}(\Omega)$, právě když $u \in L^p(\Omega)$ a existuje $f \in L^p(\Omega, \mathbf{R}^n)$ tak, že $(u, f) \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$. V tom případě $f = \nabla u$ ve smyslu rovnosti skoro všude.

V první kapitole jsme také ukázali, že Sobolevovy prostory pro $p \in [1, \infty]$ jsou úplné. Sobolevův prostor $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ je separabilní, právě když $p < \infty$ a reflexivní, právě když $1 < p < \infty$.

(b) Nečiní problém rozšířit definici Sobolevových prostorů i pro vyšší derivace. Je-li opět $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ otevřená množina, $p \in [1, \infty)$ a k přirozené, položme

$$\mathbf{W}^{k,p}(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \in L^p(\Omega) \text{ pro všechna } |\alpha| \le k\}.$$

Zde $D^\alpha f$ je distributivní derivace f a $|\alpha|$ znamená výšku indexu α (můžete konzultovat [LM]).

Pokud $p = 2$, označme $H^k(\Omega) := \mathbf{W}^{k,2}(\Omega)$. Prostor $H^k(\Omega)$ je Hilbertův.

`(c) Odbočka`. Je-li $u \in L^1(\mathbf{R}^n)$, položme

$$\widehat{u}(x) := \Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} u(\xi)\, e^{-ix\xi}\, d\xi \quad \text{pro} \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

Uvažovaný integrál bez problémů existuje a funkci $\widehat{u}$, která je spojitá na $\mathbf{R}^n$, nazýváme *Fourierovou transformací* funkce u. Plancherelova věta, která je dokázána v [LM], říká, že existuje právě jeden unitární operátor $\mathcal{F}$ na prostoru $L^2(\mathbf{R}^n)$ tak, že $\mathcal{F}u = \widehat{u}$ pro $u \in L^1(\mathbf{R}^n) \cap L^2(\mathbf{R}^n)$. Zobrazení $\mathcal{F}$ nazývejme *Plancherelovou transformací*.

(d) Buď $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$. Lze ukázat, že $f \in H^k(\mathbf{R}^n)$, právě když $\big(1 + |\xi|^2\big)^{\frac{k}{2}} \mathcal{F}f \in L^2(\mathbf{R}^n)$. A to je zdrojem definice Sobolevových prostorů na $\mathbf{R}^n$ i pro necelé exponenty. Je-li tedy $s \ge 0$, definujme

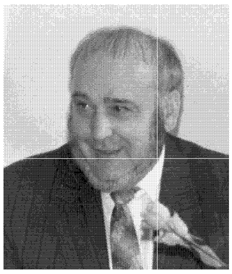
$$H^s(\mathbf{R}^n) := \big\{f \in L^2(\mathbf{R}^n) : \big(1 + |\xi|^2\big)^{\frac{s}{2}} \mathcal{F}f \in L^2(\mathbf{R}^n)\big\}$$

a normu

$$\|f\|_s := \Big(\int_{\mathbf{R}^n} \big(1 + |\xi|^2\big)^{\frac{s}{2}} |\mathcal{F}f(\xi)|^2\, d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Prostory $H^s(\mathbf{R}^n)$ jsou Hilbertovy.

(e) **Poznámka**. Bylo by možné definovat prostory $H^s(\mathbf{R}^n)$ také pro záporné exponenty (jako zúplnění prostoru $L^2(\mathbf{R}^n)$ uvažovaného s normou $\|.\|_s$) či pokročit ještě dále a definovat i $H^s(\Omega)$ pro obecné otevřené podmnožiny $\mathbf{R}^n$ (zavedením jiné normy, která však v případě $\Omega = \mathbf{R}^n$ je ekvivalentní normě $\|.\|_s$).



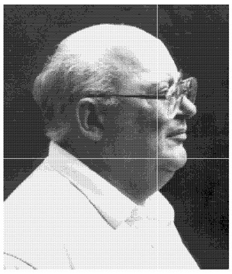
J. Nečas

Dále bychom mohli vyšetřovat duály k Sobolevovým prostorům, jaké podprostory jsou v nich husté, věty o vnoření, úvahy o hezkých reprezentantech, prostě bychom mohli budovat celé teorie. To za nás udělali jiní. Jmenujme třeba monografie R.A. Adams [*1975] a V.G. Mazja [*1985] anebo kapitoly knih A. Kufner, O. John and S. Fučík [*1977], M. Renardy and R.C. Rogers [*1993], J. Malý and W.P. Ziemer [*1997], J. Nečas [*1983] či skripta [Dok].

***1.4. Slabá a distributivní derivace**. Abychom alespoň trochu objasnili pojem slabé derivace, uveďme příklad.

Uvažujeme-li funkci $f : x \mapsto |x|$ na $\mathbf{R}$, není f samozřejmě diferencovatelná všude na $\mathbf{R}$. Má však slabou derivaci, jíž je třeba funkce $g : x \mapsto \operatorname{sign} x$. Skutečně, pro libovolnou hladkou „testovací" funkci $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ máme

$$\int_{\mathbf{R}} g\,\varphi = -\int_{\mathbf{R}} f\,\varphi'\,,$$



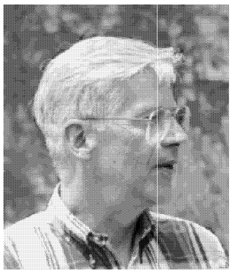
V.G. Mazja

jak snadno zjistíme integrací per partes.

Funkce sign však již nemá na $\mathbf{R}$ slabou derivaci. Kdyby totiž existovala funkce $h \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbf{R})$ tak, že pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ by platilo

$$\int_{\mathbf{R}} h\,\varphi = -\int_{\mathbf{R}} \varphi' \operatorname{sign} = 2\varphi(0)\,,$$

muselo by nutně být $h = 0$ skoro všude.



W.P. Ziemer

Poznámka. Funkce sign má samozřejmě derivaci v distributivním smyslu, a to rovnu 2δ, kde δ je Diracova míra v bodě 0.

Jako cvičení zjistěte, zda funkce $f : x \mapsto e^{-|x|}$ má slabou derivaci na $\mathbf{R}$ a ukažte, že $f \in \mathcal{W}^{1,2}(\mathbf{R})$.

***1.5. Další příklad Hilbertova prostoru**. Uvažujme Bezikovičův prostor $\mathcal{B}^2(\mathbf{R})$ z příkladu *1.2.b. Ten uvažovaný se skalárním součinem definovaným výrazem $(f,g) := \lim\limits_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} f\,\overline{g}$ je Hilbertův. Prostor $\mathcal{B}^2(\mathbf{R})$ je neseparabilní, neboť $\left\|e^{i\lambda x} - e^{i\mu x}\right\|_{bp} = \sqrt{2}$ pro různé hodnoty λ a μ.

Dodejme jenom, že jeho časté značení je též $AP^2(\mathbf{R})$. Souvisí totiž úzce se skoro periodickými funkcemi.

***1.6. Ještě k ekvivalentním normám**. (a) Nechť $\|.\|_1$ a $\|.\|_2$ jsou ekvivalentní normy na vektorovém prostoru E. Ukažte, že E je buďto v obou normách úplný či v obou neúplný.

Návod. Podívejte se na cvičení 2.55.v a 2.55.w. ♣

(b) Jsou-li $\|.\|_1$ a $\|.\|_2$ ekvivalentní normy na vektorovém prostoru E, jsou prostory $(E, \|.\|_1)$ a $(E, \|.\|_2)$ izomorfní (cvičení 2.55.w). Ukažte, že opačné tvrzení neplatí.

Návod. Nechť E je vektorový prostor všech reálných posloupností, které mají pouze konečný počet nenulových členů. Pro $\{x_n\} \in E$ položte

$$\|\{x_n\}\|_1 := \sup\bigl\{|x_1|, 2|x_2|, |x_3|, 4|x_4|, |x_5|, \dots\bigr\}\,,$$
$$\|\{x_n\}\|_2 := \sup\bigl\{|x_1|, |x_2|, 3|x_3|, |x_4|, 5|x_5|, \dots\bigr\}\,.$$

♣

(c) Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ izomorfní zobrazení X na Y. Pro $y \in Y$ položte $\|y\|_T := \|T^{-1}(y)\|_X$. Ukažte, že $\|.\|_T$ je ekvivalentní norma na Y.

(d) Nechť X je Banachův prostor nekonečné dimenze. Ukažte, že na X existuje úplná norma, která není ekvivalentní původní normě.

Návod. Nechť $L : X \to X$ je nespojitá lineární bijekce (prosté zobrazení, které je na), jejíž existence je zaručena cvičením 2.55.h. Položte $\|x\|_L := \|Lx\|$ pro $x \in X$, kde $\|.\|$ je původní norma prostoru X. Norma $\|.\|_L$ má všechny požadované vlastnosti.

(e) Poznámky. (e1) Jednoduchý návod pro případ nekonečně dimenzionálního separabilního Banachova prostoru X je uveden v [HHZ], str. 21. Nechť $\mathcal{B}$ je Hamelova báze prostoru X. Pokud $x = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_k b_k$, kde $b_1, \ldots, b_k \in \mathcal{B}$, položme $\|x\| := |\lambda_1| + \cdots + |\lambda_k|$. Ukažte, že $\|.\|$ je norma na X. Poté použijte *1.12.a k důkazu, že X v normě $\|.\|$ nemůže být separabilní. Pak se stačí podívat na *2.8.a.

Ještě snažší argument lze použít pro nekonečně dimenzionální separabilní Hilbertův prostor. Stačí v něm vzít ortonormální bázi $\{e_n\}$ a položit $\|x\| := \sum_n \frac{|\lambda_n|}{2^n}$ pro $x = \sum_n \lambda_n e_n$. Všimněte si, že $\|e_n\| = \frac{1}{2^n}$. ♣

(e2) Jako zajímavost uveďme, že na každém nekonečně dimenzionálním Banachově prostoru $(X, \|.\|)$ existuje taková neúplná norma $\|.\|_n$, že $\|x\|_n \le \|x\|$ pro každé $x \in X$. Ne úplně triviální důkaz tohoto tvrzení lze nalézt v J. Dugundji and A. Granas [*1982], str. 32.

***1.7. Další normy na prostoru $\mathcal{C}([0,1])$.**. Kromě max-normy $\|.\|$ a integrální normy $\|.\|_i$ zavedených v 1.10.b, lze na prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ uvažovat bezpočet dalších norem. V sérii cvičení zkuste dokazovat následující tvrzení.

(a) Především, je-li $\|.\|_u$ úplná norma na $\mathcal{C}([0,1])$ s vlastností, že konvergence v ní implikuje bodovou konvergenci (pokud $\|f_n - f\|_u \to 0$, potom $f_n(t) \to f(t)$ pro každé $t \in [0,1]$), potom $\|.\|_u$ je ekvivalentní max-normě $\|.\|$.

Návod. Použijte větu o uzavřeném grafu 4.19 pro identické zobrazení prostoru $(\mathcal{C}([0,1]), \|.\|)$ na $(\mathcal{C}([0,1]), \|.\|_u)$ a cvičení 4.22.n. ♣

(b) Definujeme-li $\|f\|_s = \|f\| + \|f\|_i$ pro $f \in \mathcal{C}([0,1])$, je $\|.\|_s$ úplná norma na $\mathcal{C}([0,1])$ ekvivalentní s max-normou.

(c) Nechť $\{x_n\}$ je hustá podmnožina $(0,1)$. Normy

$$\|f\| := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |f(x_n)| \quad \text{či} \quad \|f\| := \max_{x \in [0,1]} |xf(x)| + |f(0)|$$

jsou neúplné na $\mathcal{C}([0,1])$.

(d) Na prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ existují úplné normy neekvivalentní s max-normou.

Návod. Pokonzultujte *1.6.d. Jiný návod lze nalézt v A. Mukherjea and K. Pothoven [*1986], str. 48. ♣

(e) Pro $p \in [1, \infty)$ a $\alpha \in (-1, \infty)$ položme

$$\|f\|_{p,\alpha} := \left(\int_0^1 |f(t)|^p \, t^\alpha \, dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in \mathcal{C}([0,1]).$$

Potom $\|.\|_{p,\alpha}$ jsou normy na $\mathcal{C}([0,1])$. Žádné dvě různé z těchto norem nejsou ekvivalentní a v žádné z nich není prostor $\mathcal{C}([0,1])$ Banachův.

(f) Pro $\alpha > 0$ položme

$$\|f\|_\alpha := \max\big\{ e^{-\alpha x} |f(x)| : x \in [0,1] \big\}, \quad f \in \mathcal{C}([0,1]).$$

Ukažte, že $\|.\|_\alpha$ a max-norma jsou ekvivalentní.

***1.8. Kompakty v prostorech konečné dimenze**. Normované lineární prostory konečné dimenze mají řadu speciálních a pro ně často typických vlastností. V 1.8 jsme kupříkladu dokázali, že každý konečně dimenzionální normovaný lineární prostor je již úplný, v 2.5 že lineární funkcionály na prostorech konečné dimenze jsou již automaticky spojité či v 1.7 že libovolné dvě normy na konečně dimenzionálním vektorovém prostoru jsou ekvivalentní. Heine-Borelova věta známá z kurzů analýzy říká, že omezené uzavřené množiny v $\mathbf{R}^n$ jsou kompaktní (můžete se podívat na důkaz věty 1.7). Jejím malým zobecněním je následující tvrzení.

`Tvrzení.` *Kompaktní podmnožiny konečně dimenzionálního normovaného lineárního prostoru jsou právě ty, které jsou omezené a uzavřené.*

Návod. Stačí dát dohromady všechna tvrzení právě uvedená. ♣

***1.9. Konečně dimenzionální podprostory.** *Nechť F je vlastní konečně dimenzionální podprostor normovaného lineárního prostoru E. Potom F je uzavřený a řídký v E.*

Návod. Uzavřenost jsme již ukázali v důsledku 1.9. Pokud jde o řídkost F, jediný lineární podprostor mající vnitřní bod je celý prostor. ♣

***1.10. Součin normovaných lineárních prostorů**. Nechť M, N jsou normované lineární prostory. Na jejich kartézském součinu $M \times N$ lze definovat různým způsobem normu. Položíme-li

$$\|(x,y)\|_p := \big(\|x\|^p + \|y\|^p\big)^{\frac{1}{p}} \quad \text{pro} \quad x \in M, y \in N \quad \text{a} \quad p \in [1,\infty)$$

či $\|(x,y)\|_\infty := \max\{\|x\|, \|y\|\}$, jsou $\|.\|_p$ normy na $M \times N$. Navíc, všechny tyto normy jsou na $M \times N$ ekvivalentní. To není vůbec těžké ukázat.

Na součinu $M \times N$ tedy vždy mlčky uvažujeme jednu z těchto (ekvivalentních) norem. Pokud není jinak řečeno.

Lehko se také přesvědčíme, že konvergence v prostoru $M \times N$ je konvergencí „po složkách“. Jsou-li M i N Banachovy prostory, je i $M \times N$ Banachův. A také naopak, je-li kartézský součin $M \times N$ normovaných lineárních prostorů M a N úplný, jsou M i N již Banachovy prostory.

`Poznámky.` (a) Zkuste se zamyslet nad následující otázkou. Jsou-li M a N dokonce Hilbertovy prostory, která z výše uvedených norem činí součin $M \times N$ opět Hilbertovým prostorem?

(b) A ještě drobný postřeh týkající se duálu k $(M \times N)_p$, kde samozřejmě uvažujeme kartézský součin $M \times N$ opatřený normou $\|.\|_p$. Je-li $1 < p < \infty$ a $q = \frac{p-1}{p}$, jsou prostory $\big((M \times N)_p\big)^*$ a $(M^* \times N^*)_q$ izometricky-izomorfní. Jen tak na okraj poznamenejme, že toto tvrzení je vlastně obsaženo ve větě z *1.1.f.

***1.11. Faktorprostor**. Nechť M je podprostor normovaného lineárního prostoru E. Pro $x \in E$ označme $[x] = x + M$ a definujme *kanonické zobrazení* q z E do vektorového prostoru E/M předpisem $q(x) = [x]$. Pokud $[x] = [y]$ pro nějaké $x, y \in E$, je $\operatorname{dist}(x, M) = \operatorname{dist}(y, M)$ a můžeme tedy definovat

$$\|[x]\| := \operatorname{dist}(x, M) = \inf\{\|x+m\|_E : m \in M\}$$

nezávisle na výběru prvku x ve třídě $[x]$. Základní vlastnosti shrnuje následující věta.

`Věta.` *Funkce $\|.\|$ je pseudonorma na E/M, přičemž je normou, právě když M je uzavřený podprostor.*

Zobrazení q je spojité a otevřené. Je-li E Banachův a M uzavřený, je i prostor E/M Banachův.

Návod. Nejdříve musíme ukázat základní vlastnosti normy. Žádný problém nečiní ověřit, že $\|\lambda[x]\| = |\lambda|\,\|[x]\|$. Ani trojúhelníková nerovnost není obtížná, máme totiž

$$\begin{aligned}\|[x+y]\| &= \inf\{\|x+y+m\|_E : m \in M\} = \inf\{\|x+y+m_1+m_2\|_E : m_1, m_2 \in M\}\\ &\le \inf\{\|x+m_1\| + \|y+m_2\| : m_1, m_2 \in M\}\\ &= \inf\{\|x+m_1\|_E : m_1 \in M\} + \inf\{\|y+m_2\|_E : m_2 \in M\}\\ &= \|[x]\| + \|[y]\|\,.\end{aligned}$$

Protože $\|[x]\| = 0$, právě když $x \in \overline{M}$, je $\|.\|$ norma, právě když $M = \overline{M}$.

Zřejmě $\|[x]\| \le \|x\|_E$, odtud plyne spojitost zobrazení q. Z téže nerovnosti plyne, že q zobrazuje kouli $U := \{x \in E : \|x\|_E < 1\}$ do koule $[U] := \{[x] \in E/M : \|[x]\| < 1\}$. Je-li však $\|[x]\| < 1$, existuje $m \in M$ tak, že $\|x+m\| < 1$ a $[x] = [x+m]$. Vidíme, že $q(U) = [U]$, což již stačí k důkazu otevřenosti q.

Zbývá ověřit, že prostor E/M je úplný, pokud E je úplný a M uzavřený. Nechť tedy $\{X_n\}$ je cauchyovská posloupnost v E/M. Především najdeme její vybranou podposloupnost $\{X_{n_k}\}$ tak, aby $\|X_{n_k} - X_{n_{k+1}}\| < \frac{1}{2^k}$. Dále indukcí lehko sestrojíme posloupnost $\{x_{n_k}\}$ s vlastnostmi $x_{n_k} \in X_{n_k}$ a $\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\| < \frac{1}{2^k}$. Protože poslední posloupnost je cauchyovská v E, existuje její limita, označme ji x. Z nerovnosti $\|X_{n_k} - [x]\| \le \|x_{n_k} - x\|$ plyne, že $X_{n_k} \to [x]$ (v normě prostoru E/M). Protože každá cauchyovská posloupnost, jejíž jistá podposloupnost konverguje, konverguje, jsme s důkazem hotovi. ♣

Poznámka. Je-li M uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H, je H/M Hilbertův prostor. Proč tomu tak je?

***1.12. Hamelova báze Banachových prostorů.** (a) Ukažte, že žádný Banachův prostor nekonečné dimenze nemůže mít spočetnou Hamelovu (algebraickou) bázi.

Návod. Nechť $\{x_n\}$ je Hamelova báze Banachova prostoru X. Je-li X_n lineární obal množiny $\{x_1, \dots, x_n\}$, jsou konečně dimenzionální podprostory X_n řídké v X (viz *1.9) a $X = \bigcup X_n$. Nyní stačí použít Baireovu větu B.3. ♣

(b) Ukažte, že žádná ortonormální báze Hilbertova prostoru nekonečné dimenze nemůže být jeho Hamelovou bází.

Návod. Použijte (v) z věty 1.34. ♣

***1.13. Hilbertova dimenze.** Analogicky definici algebraické dimenze vektorového prostoru definujeme pojem dimenze v Hilbertově prostoru. Ten je založen na následující větě.

(a) Věta. *Libovolné dvě ortonormální báze Hilbertova prostoru H mají stejnou mohutnost.*

Náznak důkazu. V případě konečně dimenzionálního prostoru splývá ortonormální báze s algebraickou bází a tvrzení plyne z analogického tvrzení pro vektorové prostory.

Nechť tedy $\mathcal{S}$ a $\mathcal{T}$ jsou nekonečné ortonormální báze H. Volme $s \in \mathcal{S}$. Protože

$$\{t \in \mathcal{T} : (s,t) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{t \in \mathcal{T} : |(s,t)| \geq \tfrac{1}{n}\}$$

a každá z množin $\{t \in \mathcal{T} : |(s,t)| \geq \frac{1}{n}\}$ je konečná podle Besselovy nerovnosti 1.32, je množina $\mathcal{T}_s := \{t \in \mathcal{T} : (s,t) \neq 0\}$ spočetná. Podle věty 1.34.ii je $\mathcal{T} \subset \bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathcal{T}_s$. Odtud plyne, že mohutnost $\mathcal{S}$ nemůže být menší než mohutnost $\mathcal{T}$. Symetricky dostaneme, že mohutnost $\mathcal{S}$ musí být menší nebo rovna mohutnosti $\mathcal{T}$. Podle známé Schröder-Bernsteinovy věty z teorie množin $\mathcal{S}$ a $\mathcal{T}$ mají stejnou mohutnost. ■

(b) *Hilbertovou* anebo také *ortonormální dimenzí* Hilbertova prostoru nazýváme mohutnost jeho libovolné ortonormální báze.

(c) Z Riesz-Fischerovy věty 1.38 plyne, že prostor $l^2(A)$ (ať již reálný či komplexní) je konkrétním reprezentantem třídy Hilbertových prostorů Hilbertovy dimenze rovné mohutnosti množiny A.

(d) Věta. *Dva Hilbertovy prostory (nad týmž tělesem) jsou izometricky-izomorfní, právě když mají stejnou Hilbertovu dimenzi.*

Návod. Podle (c) jsou oba prostory izometricky-izomorfní prostoru $l^2(A)$, kde množina A má mohutnost rovnu jejich hilbertovské dimenzi. ♣

(e) Důsledek. *Libovolný separabilní nekonečně dimenzionální Hilbertův prostor je izometricky-izomorfní l^2.*

Poznámka. To je Riesz-Fischerova věta z 1.38. Z hlediska historického dodejme, že původní Riesz-Fischerova věta bylo tvrzení, podle kterého prostory $L^2([0,1])$ a l^2 jsou izometricky-izomorfní.

***1.14. Kompaktní podmnožiny Banachových prostorů.** Rieszova věta 5.12 říká, že v prostorech nekonečné dimenze ne každá uzavřená omezená množina je kompaktní. Protože kompaktní a relativně kompaktní množiny jsou omezené, je docela přirozená otázka charakterizovat mezi omezenými množinami ty, které jsou kompaktní či relativně kompaktní. Zformulujeme zde věty o (relativní) kompaktnosti podmnožin některých prostorů.

(a) Arzelà-Ascoliho věta pro $\mathcal{C}(K)$. *Buď K kompaktní prostor a A podmnožina $\mathcal{C}(K)$. Množina A je relativně kompaktní v $\mathcal{C}(K)$, právě když A je omezená a stejně spojitá.*

Množina funkcí $\mathcal{F}$ na prostoru K se nazývá *stejně spojitá*, jestliže ke každému $x \in K$ a každému $\varepsilon > 0$ lze nalézt takové okolí U bodu x, že $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$, kdykoliv $f \in \mathcal{F}$ a $t \in U$.

Náznak důkazu. Předpokládejme, že A je relativně kompaktní množina funkcí v $\mathcal{C}(K)$ a $\varepsilon > 0$ je dáno. Protože v úplných prostorech, a tím Banachův prostor $\mathcal{C}(K)$ je, relativně kompaktní a prekompaktní množiny splývají, existují $f_1, \dots, f_n \in A$ tak, že $A \subset \bigcup_{j=1}^{n} U(f_j, \varepsilon)$. Je-li nyní $x \in K$, existuje vzhledem ke spojitosti funkcí $f_1, \dots, f_n$ okolí U bodu x tak, že $|f_j(x) - f_j(t)| < \varepsilon$ pro všechna $t \in U$ a $j = 1, \dots, n$. Máme-li konečně $f \in A$, existuje $j = 1, \dots, n$ tak, že $\|f - f_j\| < \varepsilon$. Potom pro $t \in U$ je

$$|f(x) - f(t)| \le |f(x) - f_j(x)| + |f_j(x) - f_j(t)| + |f_j(t) - f(t)| < 3\varepsilon\,.$$

Je tedy A množina stejně spojitých funkcí.

Předpokládejme nyní, že A je omezená stejně spojitá množina funkcí v $\mathcal{C}(K)$. Protože $\mathcal{C}(K)$ je úplný prostor, stačí ukázat, že A je prekompaktní. Jinými slovy, že z libovolné posloupnosti v A lze vybrat cauchyovskou podposloupnost (pokud někomu unikají souvislosti, měl by nahlédnout do 2.44). Volme ze začátku $x \in K$, n přirozené a podívejme se na množinu

$$K_{n,x} := \left\{ t \in K : |f(x) - f(t)| < \tfrac{1}{n} \text{ pro všechna } f \in A \right\}.$$

Ze stejné spojitosti funkcí v A je $K_{n,x}$ okolím bodu x a $K = \bigcup_{z \in K} K_{n,z}$ (n je stále pevné). Existuje tedy konečná množina $K_n \subset K$ tak, že $K = \bigcup_{z \in K_n} K_{n,z}$. Položíme-li $S := \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, je S spočetná.

Buď $\{f_n\}$ libovolná posloupnost v A. Podle předpokladů je posloupnost $\{f_n(s)\}$ omezená pro každé $s \in S$. Známým diagonálním postupem získáme z posloupnosti $\{f_n\}$ vybranou podposloupnost, označme ji třeba $\{g_n\}$, s vlastností, že posloupnost $\{g_n(s)\}$ konverguje pro každé $s \in S$.

Volme opět $x \in K$ a n přirozené. Protože $K = \bigcup_{z \in K_n} K_{n,z}$, existuje $z \in K_n$ tak, že $x \in K_{n,z}$. Potom pro libovolná i, j dostáváme

$$|g_i(x) - g_j(x)| \le |g_i(x) - g_i(z)| + |g_i(z) - g_j(z)| + |g_j(z) - g_j(x)| < \frac{2}{n} + |g_i(z) - g_j(z)|\,.$$

Vzhledem k libovolné volně bodu x máme

$$\|g_i - g_j\| \le \frac{2}{n} + \max\{|g_i(z) - g_j(z)| : z \in K_n\}\,.$$

Odtud je již jen krůček k tomu, abychom si ujasnili, že posloupnost $\{g_n\}$ je cauchyovská. ∎

`(b) Relativně kompaktní podmnožiny v Hilbertových prostorech.` *Nechť* $\{e_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ *je ortonormální báze Hilbertova prostoru* H *a* M *omezená podmnožina* H. *Potom* M *je relativně kompaktní, právě když ke každému* $\varepsilon > 0$ *existuje konečná množina* $K \subset \Gamma$ *tak, že pro každé* $x \in M$ *je* $\sum_{\gamma \in \Gamma \setminus K} |(x, e_\gamma)|^2 < \varepsilon$.

Návod. Využijeme toho, že M je relativně kompaktní, právě když M je prekompaktní (viz 2.44).

Nechť zprvu je M relativně kompaktní. Volme $\varepsilon > 0$ a najděme body $x_1, \dots, x_n \in M$, které tvoří ε-síť. Z Besselovy nerovnosti plyne existence konečné množiny $K \subset \Gamma$ tak, že platí $\sum_{\gamma \in \Gamma \setminus K} |(x_i, e_\gamma)|^2 < \varepsilon$ pro každé $i = 1, \dots, n$. Je-li nyní $x \in M$, existuje $k \in \{1, \dots, n\}$ tak, že $\|x - x_k\| < \varepsilon$ a lehko odhadneme, že

$$\begin{aligned}
\sum_{\gamma \in \Gamma \setminus K} \left|(x, e_\gamma)\right|^2 &= \left\| \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus K} (x, e_\gamma) e_\gamma \right\|^2 \le \left(\left\| \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus K} (x - x_k, e_\gamma) e_\gamma \right\| + \left\| \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus K} (x_k, e_\gamma) e_\gamma \right\| \right)^2 = \\
&= \left(\left(\sum_{\gamma \in \Gamma \setminus K} \left|(x - x_k, e_\gamma\right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{\gamma \in \Gamma \setminus K} \left|(x_k, e_\gamma)\right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \le \left(\|x - x_k\| + \sqrt{\varepsilon}\right)^2 < \\
&< \left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon}\right)^2.
\end{aligned}$$

Naopak, nechť je daná podmínka splněna. Volme $\varepsilon > 0$ a nalezněme konečnou množinu $K \subset \Gamma$ tak, aby $\sum_{\gamma \in \Gamma \setminus K} |(x, e_\gamma)|^2 < \frac{1}{4}\varepsilon$ pro každé $x \in M$. Je-li $H_K := \operatorname{lin}\{e_k : k \in K\}$ lineární obal a $P : H \to H_K$ ortogonální projekce, je množina $P(M)$ omezená v konečně dimenzionálním prostoru, tedy prekompaktní. Existují tudíž $x_1, \dots, x_m \in M$ tak, že $Px_1, ..., Px_m$ tvoří $\frac{\varepsilon}{2}$-síť množiny $P(M)$. Potom ovšem $x_1, \dots, x_m$ je ε-síť množiny M. O tom se snadno přesvědčíme. Volíme-li $x \in M$, existuje j tak, že $\|Px_j - Px\| < \frac{\varepsilon}{2}$ a

$$\|x - x_j\|^2 \leq \|Px - Px_j\|^2 + \Big\| \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus K} (x, e_\gamma) e_\gamma \Big\|^2 + \Big\| \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus K} (x_j, e_\gamma) e_\gamma \Big\|^2 < \Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big)^2 + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,.$$

♣

`(c) Relativně kompaktní podmnožiny` l^p**.** *Nechť A je omezená podmnožina prostoru l^p, kde $p \in [1, \infty)$. Potom A je relativně kompaktní, právě když $\lim_n \sum_{i=n}^{\infty} |a_i|^p = 0$ stejnoměrně vzhledem k $\{a_i\} \in A$.*

Návod. Můžete se pokusit o vlastní důkaz. Tvrzení samozřejmě vyplývá z obecnější věty v (e). ♣

Kupříkladu množina $\big\{\{x_n\} \in l^2 : 0 \leq x_n \leq \frac{1}{n}$ pro každé $n\big\}$ je kompaktní v l^2.

`(d) Relativně kompaktní podmnožiny` c_0**.** *Podmnožina A Banachova prostoru c_0 je relativně kompaktní, právě když existuje $\{x_n\} \in c_0$ tak, že $|a_n| \leq x_n$ pro všechna $\{a_n\} \in A$ a $n \in \mathbf{N}$.*

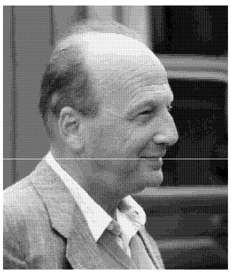
Náznak důkazu. Nechť $A \subset c_0$ je relativně kompaktní. Označme $x_n := \sup\{|a_n| : \{a_n\} \in A\}$ pro $n \in \mathbf{N}$. Zřejmě $x_n < \infty$. Stačí tedy ukázat, že $\{x_n\} \in c_0$. Kdyby neplatilo, že $\lim x_n = 0$, existovalo by $\varepsilon > 0$ tak, že množina $M := \{n : x_n \geq \varepsilon\}$ by byla nekonečná. Pak ke každému $n \in M$ bychom našli $a^{(j)} \in A$ tak, aby $|a_n^{(j)}| > \frac{1}{2}\varepsilon$. Posloupnost $\big\{a^{(j)} : j \in M\big\}$ by poté neobsahovala žádnou cauchyovskou podposloupnost.

Naopak, předpokládejme, že množina $A := \{\{a_n\} \in c_0 : |a_n| \leq x_n$ pro všechna $n\}$ je relativně kompaktní pro jisté $\{x_n\} \in c_0$. Volíme-li posloupnost $a^{(j)}$ v A, lehko diagonální metodou z ní vybereme konvergentní podposloupnost. ■

`(e) Relativně kompaktní podmnožiny prostorů se Schauderovou bází.` *Předpokládejme, že $\{x_n\}$ je Schauderova báze Banachova prostoru X a $\{x_n^*\}$ posloupnost příslušných souřadnicových funkcionálů* (viz *2.17). *Podmnožina $A \subset X$ je relativně kompaktní, právě když A je omezená a $\lim_n \sum_{i=n}^{\infty} x_i^*(x) x_i = 0$ stejnoměrně pro $x \in A$.*

Návod. Podívejte se třeba do Ch. Swartz [*1992], str. 153 nebo L.A. Ljusternik, V.I. Sobolev [*1965], str.247. ♣

***1.15. Charakteristiky Hilbertových prostorů**. Víme, že norma na Banachově prostoru vznikne z nějakého skalárního součinu, právě když splňuje rovnoběžníkové pravidlo. Tento výsledek náleží P. Jordanovi a J. von Neumannovi [1935]. Existuje však i celá řada dalších charakteristik jak poznat Hilbertovy prostory mezi Banachovými.



L. Tzafriri

(a) S. Kakutani [1939] ukázal, že Banachův prostor X dimenze alespoň 3 je *izometrický* Hilbertovu prostoru, právě když pro každý jeho uzavřený podprostor M existuje projekce $P : X \to M$ tak, že $PX = M$ a $\|P\| = 1$. Jeho důkaz fungoval pro hladké prostory, úplný důkaz však podal až R.S. Phillips [1940]. Je jasné, že v jedno či dvoudimenzionálním případě je situace jiná, neboť jednorozměrné podprostory jsou podle Hahn-Banachovy věty vždy nějakou projekcí celého prostoru o normě 1.

(b) Obdobná charakteristika pro izomorfní zobrazení byla dlouhou dobu slavným otevřeným problémem a byla řešena pouze v několika speciálních případech. Až teprve J. Lindenstrauss a L. Tzafriri v [1971] dokázali, že Banachův prostor X je *izomorfní* Hilbertovu prostoru, jestliže libovolný jeho uzavřený podprostor má v X topologický doplněk.

(c) V M.M. Day [*1973] je celá jedna kapitola určena asi 20 charakteristikám Hilbertových prostorů. Nedávná monografie D. Amira [*1986] je věnována 349 izomorfním charakteristikám Hilbertových prostorů.

***1.16. Součet uzavřených množin**. (a) Součet dvou uzavřených podmnožin normovaného lineárního prostoru nemusí být množina uzavřená. Stačí uvažovat v $\mathbf{R}^2$ množiny $A := \{(x,y) : x > 0, y \geq \frac{1}{x}\}$ a $B := \{(x,y) : (-x,y) \in A\}$. To jsou uzavřené množiny, jejichž součtem je neuzavřená množina $A + B = \{(x,y) : y > 0\}$.

(b) Ukažte, že algebraický součet kompaktní a uzavřené množiny je již uzavřený (tvrzení platí dokonce v libovolném topologickém vektorovém prostoru).

Návod. Nechť A je kompaktní, B uzavřená, $a_n \in A$, $b_n \in B$ a $a_n + b_n \to x$. Přechodem k podposloupnosti lze předpokládat, že $a_n \to a \in A$. Potom ovšem $b_n = (a_n + b_n) - a_n \to x - a$. Z uzavřenosti B plyne, že $x - a \in B$. Tedy $x = a + (x - a) \in A + B$. Pro důkaz v topologických vektorových prostorech lze použít stejnou myšlenku na zobecněné posloupnosti. ♣

(c) V. Klee [1969] ukázal, že součet dvou konvexních omezených uzavřených podmnožin Banachova prostoru X je uzavřený, právě když X je reflexivní.

***1.17. Cvičení**. Na závěr uveďme sérii poněkud těžších cvičení. K tomu budeme potřebovat jisté tvrzení z topologie. Řekneme, že topologický prostor T je *topologicky úplný*, je-li homeomorfním obrazem úplného metrického prostoru.

Nechť P je úplný metrický prostor a $N \subset P$. Poměrně hluboké tvrzení potom říká, že N je topologicky úplný, právě když N je G_δ-podmnožinou P. Důkaz lze nalézt třeba v G. Choquet [*1969], 1.díl, Theorem 8.7.

(a) Tvrzení. *Buďte M, N homeomorfní normované lineární prostory. Jestliže M je Banachův, je i N Banachův.*

(Porovnejte toto tvrzení s poznatkem, že $\mathbf{R}$ a $(0,1)$ jsou homeomorfní.)

Návod. Nechť $\widehat{N}$ značí zúplnění prostoru N (viz 2.33.b). Protože N je podle předpokladu topologicky úplný prostor, je N hustá G_δ-podmnožina $\widehat{N}$. Předpokládejme, že $N \neq \widehat{N}$. Je-li $x \in \widehat{N} \setminus N$, je $(x + N) \cap N = \emptyset$. Ale N a $x + N$ jsou homeomorfní (homeomorfizmus je dán jako zobrazení $t \mapsto t + x$ pro $t \in N$), tudíž i $x + N$ je topologicky úplný (je homeomorfní s M). Potom ovšem N i $x + N$ jsou disjunktní husté G_δ-podmnožiny $\widehat{N}$. A to je spor, neboť v tom případě by prostor $\widehat{N}$ musel být 1. kategorie (podívejte se na Appendix B.2 a B.3). ♣

(b) Tvrzení. *Existují neúplné normované lineární prostory, které jsou 2. kategorie.*

Návod. Uvažujme posloupnost lineárně nezávislých prvků $\{z_n\}$ v nekonečně dimenzionálním separabilním Banachově prostoru X, jejíž lineární obal je v X hustý. V X existuje Hamelova báze $\mathcal{B}$ obsahující $\{z_n\}$. Protože $\mathcal{B}$ je nespočetná (viz *1.12.a), existuje posloupnost $\{y_n\}$ v $\mathcal{B} \setminus \{z_n\}$. Nechť X_n je podprostor X generovaný prvky množiny $\mathcal{B} \setminus \{y_n, y_{n+1}, \dots\}$. Protože $X = \bigcup_n X_n$, existuje takové k, že podprostor X_k je 2. kategorie. Prostor X_k nemůže být úplný. Obsahuje totiž posloupnost $\{z_n\}$, jejíž lineární obal je hustý v X.

Za prostor X lze třeba vzít $L^1([0,1])$ a za $\{z_n\}$ posloupnost charakteristických funkcí $\{c_{(0,r_n]}\}$, kde $\{r_n\}$ jsou všechna racionální čísla v intervalu $(0,1]$. ♣

(c) Příklad. *Vlastní podprostor Banachova prostoru nemusí být 1. kategorie.*

Návod. Podívejte se na (b) a poznámku 2.33.b. ♣

(d) Tvrzení. *Nechť N je vlastní podprostor Banachova prostoru X mající Baireovu vlastnost (speciálně, nechť N je borelovská podmnožina X). Potom N je 1. kategorie.*

(Množina $A \subset X$ má *Baireovu vlastnost*, jestliže náleží nejmenší σ-algebře podmnožin X, která obsahuje jak otevřené množiny tak i množiny 1. kategorie. (Nepleťte si množiny mající Baireovu vlastnost s jazykově příbuzným pojmem Baireova prostoru.) Ekvivalentně lze říci, že A má Baireovu vlastnost, jestliže $A = G_\delta \cup P$, kde G_δ je množina typu G_δ a P je 1. kategorie.)

Návod. Kdyby N byl podprostorem 2. kategorie v X, byl by N Baireův hustý podprostor X. Jelikož předpokládáme, že N má Baireovu vlastnost, musí být N reziduální podmnožina X (stačí ukázat, že je typu G_δ). Volíme-li $x \in X \setminus N$, jsou N a $x + N$ dvě disjunktní reziduální podmnožiny úplného prostoru X. A to není možné. ♣

(e) Tvrzení. *Nechť N je podprostor Banachova prostoru X. Je-li N G_δ-množina, je N již uzavřený.*

Návod. Nechť $N \neq \overline{N}$. Potom N je hustá G_δ-podmnožina Banachova prostoru $\overline{N}$. Podle (d) je N prostor 1. kategorie. Na druhé straně hustá G_δ-podmnožina úplného prostoru musí být 2. kategorie. ♣

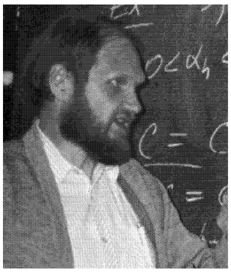
(f) Důsledek. *Nechť f je lineární forma na Banachově prostoru X. Jestliže $\ker f$ je množinou typu G_δ, je $f \in X^*$.*

Návod. Z (f) plyne, že $\ker f$ je uzavřená množina. A to znamená, že f je spojitá forma (viz větičku v 2.23.a). ♣

(g) Tvrzení. *Nechť X je Banachův prostor a $f \in X^\#$. Jestliže $\ker f$ je množina typu F_σ, je již f spojitá forma.*

Návod. Tvrzení je triviální v případě nulové formy f. V opačném případě najděme $x \in X$ tak, aby $f(x) = 1$. Protože kodimenze $\operatorname{codim} \ker f = 1$ (viz Appendix A.4), lze každý prvek $z \in X$ psát jednoznačně ve tvaru $z = m + \lambda_z x$, kde $m \in \ker f$. Potom ovšem $f(z) = \lambda_z$, a tudíž $f^{-1}(A) = \ker f + Az$ pro $A \subset \mathbf{R}$. Je-li tedy $[\alpha, \beta]$ uzavřený interval v $\mathbf{R}$, plyne z předchozího s použitím předpokladu o jádře $\ker f$ a využitím výsledku z *1.16.b, že $f^{-1}([\alpha, \beta])$ je množinou typu F_σ. Odtud každý snadno nahlédne, že $f^{-1}(G)$ je F_σ-množinou pro každou otevřenou množinu $G \subset \mathbf{R}$. O funkci f to říká, že je 1. Baireovy třídy (je bodovou limitou posloupnosti spojitých funkcí na X). A další výsledek z teorie reálných funkcí říká, že existuje bod v X, v němž je f spojitá. (Můžete si pročíst příslušné kapitoly v [Probl] či J. Lukeš, J. Malý and L. Zajíček [*1986].) Z linearity f pak vyplyne, že $f \in X^*$ (porovnejte s větou 2.2). ♣

*2. Lineární zobrazení a operátory



L. Zajíček

***2.1. Norma projekcí**. Víme, že v Hilbertově prostoru ortogonální projekce mají normu 1, pouze projekce na nulový prvek má vždy normu 0. Je-li P nenulová projekce v Banachově prostoru, potom $\|P\| \geq 1$. Samozřejmě norma projekce může být libovolně veliká. O tom všem již byla řeč v 2.36 a 2.41. Dokažte dokonce následující tvrzení.

(a) Větička. *Nechť φ je nenulová spojitá lineární forma na normovaném lineárním prostoru E, $N = \ker \varphi$. Potom existují projekce na N libovolně veliké normy.*

Návod. Ukažte, že ke každému $x \in E \setminus N$ a každému $y \in N$ existuje projekce $P : E \to N$ tak, že $Px = y$. ♣

(b) Tvrzení. *Nechť N je n-dimenzionální podprostor normovaného lineárního prostoru E. Potom existuje projekce P prostoru E na N tak, že $\|P\| \leq n$.*

Návod. Použijte 2.28.b. ♣

(c) Poznámka. M.I. Kadec a M.G. Snobar [1971] dokázali, že za situace jako v předešlém odstavci (b) lze dokonce najít projekci P na N tak, aby $\|P\| \leq \sqrt{n}$.

Další hlubší tvrzení o normě projekcí lze najít v *2.6. Zájemce specialisty lze též odkázat na monografii N. Tomczak-Jaegermann [*1989].

***2.2. Duální báze**. V 2.28 se vyskytovaly pojmy duální a Auerbachovy báze. Připomeňme stručně základní definice.

Jsou-li $\{e_1, \dots, e_n\}$ prvky vektorového prostoru W a $\{f_1, \dots, f_n\}$ lineární funkcionály na W, řekneme, že $\big(\{e_i\}, \{f_i\}\big)$ tvoří *duální* či *biortogonální systém*, jestliže $f_i(e_i) = 1$ pro každé $i = 1, \dots, n$ a $f_i(e_j) = 0$ pro každou dvojici $i \neq j$.

Auerbachovou bází Banachova prostoru X je každý biortogonální systém tvořený $\{e_1, \dots, e_n\}$ a $\{f_1, \dots, f_n\}$, pro nějž $\{e_1, \dots, e_n\}$ je bází X a $\|e_i\| = \|f_i\| = 1$ pro každé $i = 1, \dots, n$. Auerbachovo lemma v 2.28 říkalo, že každý konečně dimenzionální prostor má Auerbachovu bázi.

Přirozeným způsobem můžeme definovat i biortogonální systémy pro nekonečné množiny prvků. Existuje široce rozvětvená teorie bází v Banachových prostorech, lze třeba nahlédnout do monografií J.T. Marti [*1969] či I. Singer [*1970]. My se stručně v *2.17 zmíníme o Schauderových bázích, zde zadefinujme ještě pojem Markuševičovy báze.

Dvojici $\big(\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}, \{f_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}\big)$ v $X \times X^*$, kde X je Banachův prostor, nazveme *Markuševičovou bází*, jestliže tato dvojice tvoří biortogonální systém, lineární obal množiny $\{e_\gamma\}$ je hustý v X a ke každému bodu $x \in X$ existuje $\gamma \in \Gamma$ tak, že $f_\gamma(x) \neq 0$. Podle Auerbachova lemmatu v 2.28 víme, že v konečné dimenzi existují báze pro něž $\|e_n\| = \|f_n\| = 1$. Pokud jde o Markuševičovy báze, platí následující tvrzení.

Věta. *V každém separabilním Banachově prostoru existuje Markuševičova báze $\big(\{e_n\}, \{f_n\}\big)$ s vlastností $\sup\{\|e_n\|\,\|f_n\| : n \in \mathbf{N}\} < \infty$. Dokonce, předepíšeme-li si $\varepsilon > 0$, existuje taková báze, že $\|e_n\|\,\|f_n\| \leq 1 + \varepsilon$ pro každé n.*

Poznámka. Dodatek předchozí věty byl dokázán A. Pełczyńskim v [1976]. Je otevřeným problémem, zda v separabilním prostoru existuje Markuševičova báze tak, aby $\|e_n\|\,\|f_n\| = 1$ pro každé n.

***2.3. Vlastnosti hilbertovské projekce**. Uvažujme uzavřenou konvexní množinu C v (reálném) Hilbertově prostoru H. Podle věty 1.26 ke každému $x \in H$ existuje právě jedno $P_C x \in C$ tak, že $\|x - P_C x\| = \operatorname{dist}(x, C)$. Zobrazení $P_C : x \mapsto P_C x$ nazývejme *hilbertovskou projekcí* prostoru H na C. Uveďme některé její základní vlastnosti.

`(a) Lemma.` *Buďte $x \in H$ a $y \in C$. Potom $y = P_C x$, právě když $(c-y, y-x) \geq 0$ pro každé $c \in C$.*

Návod. Položme $F(\lambda) = \|x - (1-\lambda)y - \lambda c\|^2$ pro $\lambda \in [0,1]$. Funkce F je zřejmě konvexní a $F'_+(0) = 2(c-y, y-x)$. Nyní si stačí uvědomit, co znamenají nerovnosti $F(0) \leq F(1)$ a $F'_+(0) \geq 0$. ♣

Pro další připomeňme, že zobrazení T se nazývá *neexpanzivní* na množině $D \subset H$, jestliže $\|Tx - Ty\| \leq \|x-y\|$ pro každé $x, y \in D$. Každé neexpanzivní zobrazení je na D (stejnoměrně) spojité. Dále, T se zove *monotonní* na D, jestliže $(Tx - Ty, x-y) \geq 0$ pro každé $x, y \in D$.

`(b) Věta.` *Nechť P_C značí hilbertovskou projekci Hilbertova prostoru H na jeho uzavřenou konvexní podmnožinu C. Potom P_C je neexpanzivní a monotonní zobrazení na H.*

Návod. Volte $x, y \in H$. Potom podle předchozího lemmatu máme $(P_C x - x, c - P_C x) \geq 0$ pro každé $c \in C$, a tedy

$$\begin{aligned}\|P_C x - P_C y\|^2 &= (P_C x - x, P_C x - P_C y) + (y - P_C y, P_C x - P_C y) + (x-y, P_C x - P_C y)\\ &\leq (x-y, P_C x - P_C y) \leq \|x-y\|\,\|P_C x - P_C y\|\,.\end{aligned}$$

Obdobně zjistíme, že

$$\begin{aligned}(P_C x - P_C y, x-y) = {}&(P_C x - P_C y, x - P_C x) + (P_C x - P_C y, P_C x - P_C y) +\\ &+ (P_C x - P_C y, P_C y - y) \geq 0\,.\end{aligned}$$

♣

Dostáváme následující tvrzení, které pro jeho důležitost zformulujeme raději samostatně.

`(c) Spojitost hilbertovské projekce.` *Hilbertovská projekce P_C Hilbertova prostoru na jeho uzavřenou konvexní podmnožinu C je spojitá.*

`(d) Problém .` Nechť C je podmnožina Hilbertova prostoru H. Předpokládejme, že ke každému $x \in H$ existuje právě jeden prvek $c \in C$ tak, že $\|x - c\| = \operatorname{dist}(x, C)$. Potom C je bezesporu uzavřená (ukažte, že $\overline{C} \subset C$). Zdá se, že však není známo, zda C musí být konvexní. Odpověď je kladná v případě $H = \mathbf{R}^n$. To dokázal T.S. Motzkin v [1935].

***2.4. Banachovské projekce na konvexní množiny**. Na příkladu v 1.26.b je vidět, že v Banachových prostorech obecně nelze promítat na uzavřené konvexní množiny. Navíc, nejjednodušší příklady v prostoru l_n^∞ s neeukleidovskou normou z příkladu 1.10.a ukazují, že k danému bodu může existovat více „nejbližších“ bodů z uzavřené jednotkové koule. Nicméně i v případě nehilbertovských prostorů (kupříkladu uniformně konvexních, viz 21.10) či v některých speciálních situacích lze hovořit o „promítání“ na uzavřené konvexní množiny. Uveďme příklady.

`(a) Radiální projekce.` Označme B_X uzavřenou jednotkovou kouli Banachova prostoru X. Pro $x \in X$ definujme *radiální projekci* R prostoru X na B_X tak, aby R byla identita na B_X a $Rx = \frac{x}{\|x\|}$ pro ostatní $x \in X$. Není těžké ukázat, že $\|x - Rx\| = \operatorname{dist}(x, B_X)$ pro každé $x \in X$. Zobrazení R je spojité, nicméně není, jako tomu bylo v případě hilbertovských projekcí, neexpanzivní. Pro libovolná $x, y \in X$ totiž platí pouze $\|Rx - Ry\| \leq 2\|x-y\|$. Otázky, v jakých Banachových prostorech radiální projekce R na B_X je lipschitzovská s konstantou $\beta < 2$ ($\|Rx - Ry\| \leq \beta\|x-y\|$), eventuálně přesný odhad konstanty β, jsou poměrně obtížné. R.L. Thele [1974] dokázal, že lze volit $\beta < 2$ právě v případech, kdy prostor X je uniformně nečtvercový.

`(b) Příklad.` V Banachových prostorech existují i jiné projekce na B_X (než je právě uvedená radiální projekce) udávající vzdálenost daného bodu od B_X. Kupříkladu uvažujeme-li Banachův prostor $X = \mathcal{C}([0,1])$ a položíme-li

$$Tf(t) = \max\bigl(-1, \min(1, f(t))\bigr)\,, \quad t \in [0,1]\,,$$

realizuje T vzdálenost f od B_X. Jest totiž $\|f - Tf\| = \operatorname{dist}(f, B_X)$. V tomto případě se T neshoduje s radiální projekcí a T je neexpanzivní.

***2.5. Existence topologických doplňků**. Jakýmsi protějškem k větě 2.27 je následující tvrzení.

(a) **Věta.** *Je-li M uzavřený podprostor konečné kodimenze v Banachově prostoru X, existuje k němu topologický doplněk.*

Návod. Nechť N je algebraický doplněk k M v X. Protože $\dim N < \infty$, je N uzavřený podle 1.9 a $X = M \oplus N$ je algebraickým součtem dvou uzavřených podprostorů. Podle důsledku 4.20 je X i jejich topologickým součtem.

Kdybychom se chtěli vyhnout 4.20, což byl vlastně důsledek věty o uzavřeném grafu, mohli bychom uvažovat projekci P prostoru X na jeho konečně dimenzionální podprostor N. Protože jádrem P je uzavřený podprostor M (a P je lineární zobrazení na prostor konečné dimenze), musí být projekce P spojitá.

Ještě jiný návod Nechť $\{e_1, \dots, e_n\}$ je báze faktorprostoru X/M a π kanonické zobrazení X na X/M. Existují $x_i \in X$ tak, že $\pi x_i = e_i$ $(i = 1, \dots, n)$. Je-li N lineární obal množiny $\{x_1, \dots, x_n\}$, je $X = M \oplus_t N$. ♣

(b) **Poznámky.** (b1) Uzavřenost podprostoru M je podstatná. Víme totiž, že každý podprostor mající topologický doplněk musí být uzavřený a že existují podprostory konečné kodimenze, které nejsou uzavřené. Třeba $\ker f$ pro $f \in X^{\#} \setminus X^*$ dobře poslouží jako příklad. Nevíte-li proč, podívejte se na větičky v 2.23 a A.4.

(b2) Lze tvrdit více. Má-li uzavřený podprostor M Banachova prostoru X konečnou kodimenzi n, potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje projekce $P : X \to M$ tak, že $\|P\| < n + 1 + \varepsilon$. Náznak důkazu je v [HHZ], cvičení 10 ve čtvrté kapitole.

Víme již, že prostor $\mathcal{L}_c(X)$ všech kompaktních operátorů na Banachově prostoru X je uzavřený v $\mathcal{L}(X)$. Přirozená otázka, zda $\mathcal{L}_c(X)$ má v $\mathcal{L}(X)$ topologický doplněk, není stále uspokojivě vyřešena. Zdá se, že starý problém, zda pro každý Banachův prostor je buďto $\mathcal{L}_c(X) = \mathcal{L}(X)$ anebo $\mathcal{L}_c(X)$ nemá v $\mathcal{L}(X)$ topologický doplněk, stále čeká na vyřešení.

Je toho známo poměrně málo, částečný výsledek je obsažen v následujícím tvrzení.

(c) **Věta.** *Nechť X značí jeden z Banachových prostorů l^p pro $1 < p < \infty$ či $X = c_0$. Potom $\mathcal{L}_c(X)$ nemá topologický doplněk v $\mathcal{L}(X)$.*

(d) **Poznámka.** Jestliže prostor X obsahuje izomorfní kopii c_0, potom stále $\mathcal{L}_c(X)$ nemá topologický doplněk v $\mathcal{L}(X)$.

V *2.17 jsme definovali pojem Schauderovy báze Banachova prostoru. Říká se, že Schauderova báze $\{x_n\}$ Banachova prostoru X je *bezpodmínečná*, jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)x_n$ konverguje bezpodmínečně pro každé $x \in X$. Zde pochopitelně $\{x_n^*\}$ značí posloupnost příslušných souřadnicových funkcionálů. Prostory c_0 a l^p pro $p \in [1, \infty)$ mají bezpodmínečné Schauderovy báze (tvoří je posloupnosti standardních jednotkových vektorů), zatímco prostor $\mathcal{C}([0, 1])$ nemá žádnou bezpodmínečnou Schauderovu bázi. C. Swartz [*1992] dokazuje, že $\mathcal{L}_c(X)$ nemá v $\mathcal{L}(X)$ topologický doplněk, pokud Banachův prostor X má bezpodmínečnou Schauderovu bázi. Odtud speciálně dostane, že $\mathcal{L}_c(X)$ nemá v $\mathcal{L}(X)$ topologický doplněk, je-li X prostor c_0, l^p $(p \in [1, \infty))$ či (nekonečně dimenzionální) Hilbertův.

Z dalších příkladů, kdy $\mathcal{L}_c(X)$ nemá topologický doplněk v $\mathcal{L}(X)$, jsou známy jen dva příklady Banachových prostorů sestrojené v J. Bourgain and F. Delbaen [1980].

Jelikož podle věty 2.38 víme, že podprostor M nemá v Banachově prostoru Z topologický doplněk, právě když neexistuje projekce Z na M, je zajímavé si položit otázku, kdy dokonce neexistuje projekce $\mathcal{L}(X)$ na $\mathcal{L}_c(X)$ o normě 1. Odpověď zní, že kupříkladu v případě, kdy X má Radon-Nikodýmovu vlastnost. Důkaz posledního tvrzení jakož i další nové poznatky k této problematice jsou obsaženy v nedávno publikovaném článku G. Emmanuele and K. John [1997].

B. Maurey

Na závěr uveďme jeden nový výsledek ukazující, že Banachovy prostory obecně nemusejí mít netriviální podprostory mající topologické doplňky. Důkaz lze najít v W.T. Gowers and B. Maurey [1993].

(e) **Gowers-Maureyův příklad.** *Existuje Banachův prostor X mající následující vlastnost: Kdykoliv $X = A \oplus B$ je (topologickým) součtem dvou uzavřených podprostorů A a B, potom buď A anebo B je konečně dimenzionální.*

(f) **Poznámka.** W.T. Gowers a B. Maurey tedy sestrojili příklad Banachova prostoru, značme ho třeba $X_{\mathcal{GM}}$, v němž žádný nekonečně dimenzionální uzavřený podprostor nemá nekonečně dimenzionální topologický doplněk. Poznamenejme, že jejich prostor $X_{\mathcal{GM}}$ je navíc separabilní a má ještě některé další vlastnosti. Kupříkladu $X_{\mathcal{GM}}$ není izomorfní žádnému svému vlastnímu podprostoru. Speciálně není izomorfní žádné nadrovině v $X_{\mathcal{GM}}$. Tím byl také vyřešen velice starý *Banachův problém o nadrovině*. Dále libobolný omezený operátor z $\mathcal{L}(X_{\mathcal{GM}})$ má tvar $\lambda I + S$, kde S je *striktně* *singulární operátor* (to je takový operátor, že jeho restrikce na libovolný nekonečně dimenzionální podprostor není izomorfizmem). Při této příležitosti poznamenejme, že stále není vyřešen problém existence (či neexistence) Banachova prostoru, na němž by každý operátor měl tvar $\lambda I + K$, kde K je kompaktní.

***2.6. Topologické doplňky k c_0 a l^∞.** (a) Pro $x = \{x_n\} \in c$ položte $Px = \{x_n - \lim x_n\}$. Ukažte, že P je projekce c na c_0 a spočtěte $\|P\|$.

Použitím věty 2.38 dostáváme tvrzení, že c_0 má topologický doplněk v c.

(b) Větička. *Libovolná projekce c na c_0 musí mít normu ostře větší než* 1.

Návod. Předpokládejme, že $P : c \to c_0$ je projekce a $\|P\| = a < 2$. Nechť $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ jsou standardní jednotkové vektory v c_0 a $e = (1, 1, 1, \dots)$. Volme n a označme $u := 2e_n - e$. Zřejmě $\|e\| = 1$ a $\|Pu\| \le \|P\| \, \|u\| \le a$. Tudíž

$$a \ge \|u\| \ge \max\bigl\{|(2e_n - Pe)_j| : j \in \mathbf{N}\bigr\} \ge \bigl|(2e_n - Pe)_n\bigr| = \bigl|2 - (Pe)_n\bigr| .$$

Odtud plyne, že pro n-tou složku projekce Pe musí být $(Pe)_n \ge 1$. Vidíme, že Pe nemůže být prvek c_0. ♣

Ukázali jsme, že dokonce $\|P\| \ge 2$.

(c) Tvrzení. *Prostor l^∞ má topologický doplněk v libovolném Banachově prostoru X, který ho obsahuje jako podprostor.*

Návod. Nechť $\varphi_k : \{x_n\} \in l^\infty \mapsto x_k$. Evidentně $\varphi_k \in (l^\infty)^*$. Nechť Φ_k jsou hahn-banachovská rozšíření φ_k na celý prostor X podle věty 2.18. Položíme-li $Px = \{\Phi_k(x)\}$ pro $x \in X$, je P projekce X na l^∞. Stačí tedy použít větu 2.38. ♣

(d) Poznámky. (d1) Všimněte si, že pro projekci P z důkazu tvrzení (c) dokonce je $\|P\| = 1$.

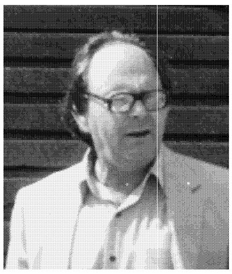
(d2) Protože l^∞ je úplný prostor, je tedy uzavřený podprostor X.

(d3) Uvedené tvrzení bychom mohli trochu zobecnit. Je-li M podprostor Banachova prostoru X, který je izomorfní prostoru l^∞ (také říkáme, že X obsahuje kopii l^∞, srovnej s 2.31), má M v X topologický doplněk. Následující větu pocházející od A. Sobczyka [1941] již vyslovíme v této podobě.

(e) Sobczykova věta. *Nechť X je separabilní Banachův prostor a M jeho podprostor izomorfní s c_0. Potom M má topologický doplněk v X.*

Návod. Myšlenka důkazu, která pochází od W.A. Veecha [1971], se zprvu podobá návodu v (c). Předpokládejme rovnou, že $M = c_0$. Nechť $\Phi_k \in X^*$ jsou takové funkcionály, že $\|\Phi_k\| = 1$ a $\Phi_k(\{x_n\}) = x_k$ pro $\{x_n\} \in c_0$. Jestliže B_{X^*} značí uzavřenou jednotkovou kouli v X^*, je B_{X^*} metrizovatelná kompaktní množina ve w^*-topologii podle *16.2.A (X je separabilní) a Alaogluovy věty. Nechť $B := c_0^\perp \cap B_{X^*}$. Označme $\lambda_k := \operatorname{dist}(\Phi_k, B)$, kde vzdálenost uvažujeme vzhledem k nějaké metrice generující w^*-topologii na B_{X^*}. Protože každá podposloupnost z posloupnosti $\{\Phi_k\}$ má w^*-konvergentní podposloupnost jejíž limita leží v B, má každá podposloupnost posloupnosti $\{\lambda_k\}$ podposloupnost konvergující k 0. Tím dostáváme, že $\lambda_k \to 0$. Existuje tedy posloupnost $\{\varphi_k\} \subset B$ tak, že $\Phi_k - \varphi_k \to 0$ ve w^*-topologii (tj. bodově na X). Položíme-li $Px = \Phi_k(x) - \varphi_k(x)$ pro $x \in X$, ověří se již snadno, že P je projekce X na c_0. Navíc $\|P\| \le 2$. ♣

Poznámky. Ukázali jsme, že existuje projekce $P : X \to c_0$ o normě ≤ 2. Vlastnost uvedená v Sobczykově větě dokonce charakterizuje prostor c_0 mezi všemi separabilními Banachovými prostory. M. Zippin [1977] ukázal, že separabilní Banachův prostor X je izomorfní c_0, jestliže má topologický doplněk v každém separabilním Banachově prostoru, který ho obsahuje.



A. Pełczyński

(f) Phillipsův příklad. R.S. Phillips [1940] ukázal, že c_0 nemá topologický doplněk v l^∞ (zde chápeme c_0 jako uzavřený podprostor l^∞). Netriviální důkaz tohoto tvrzení lze nalézt v C. Swartz [1992], elementárnější pak v R. Whitley [1966]. Pełczyńského důkaz je podán v [HHZ], str. 72.

***2.7. Poznámka.** Uveďme pouze, že Phillipsův příklad uzavřeného podprostoru nemajícího topologický doplněk nebyl prvním. Ten byl podán, zdá se, S. Banachem a S. Mazurem v [1933]. Ti totiž ukázali, že (separabilní) Banachův prostor $L^1([0,1])$ lze izometricky-izomorfně vnořit do prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ a tento obraz nemá v $\mathcal{C}([0,1])$ topologický doplněk. Podobně G. Fichtěngolc a L. Kantorovič v [1934] ukázali, že $\mathcal{C}([0,1])$ nemá topologický doplněk v $L^\infty([0,1])$. Někteří autoři zase připisují prvenství F.J. Murraymu [1937], který ukázal, že v prostorech l^p pro $p \in [1,\infty)$, $p \neq 2$ vždy existují uzavřené podprostory nemající topologický doplněk.

***2.8. Separabilita X a X^*.** (a) Začněme s jednoduchým cvičením. Je-li f spojité zobrazení metrického prostoru P na Q a P je separabilní, je i obraz Q separabilní. To plyne z toho, že f zobrazuje husté množiny v P na husté množiny v Q. Speciálně, jestliže normované lineární prostory M, N jsou izomorfní a M je separabilní, je i N separabilní.

(b) Uveďme příklady separabilních i neseparabilních prostorů. Prostory posloupností c_0 a c jsou separabilní (uvažujte posloupnosti s racionálními souřadnicemi, které jsou navíc od určitého indexu konstantní). Samozřejmě, $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{C}^n$ jsou separabilní. Prostor $\mathcal{C}([0,1])$ je separabilní (polynomy s racionálními koeficienty tvoří podle Weierstrassovy věty hustou podmnožinu $\mathcal{C}([0,1])$). Prostory l^p jsou také separabilní pro $1 \le p < \infty$ (obdobná úvaha jako v případě c_0), zatímco l^∞ separabilní není. Pokud jde o L^p-prostory, tak $L^\infty([0,1])$ není separabilní, prostory $L^p([0,1])$ pro $1 \le p < \infty$ jsou separabilní.

(c) Jestliže normovaný lineární prostor E je separabilní, nemusí ještě být jeho duál E^* separabilní. Příkladem může sloužit separabilní prostor l^1, jehož duál je izometricky-izomorfní s neseparabilním prostorem l^∞. Platí však následující tvrzení.

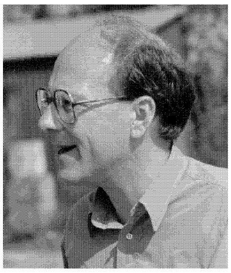
`(d) Věta.` *Jestliže duál E^* normovaného lineárního prostoru E je separabilní, je i E separabilní.*

Návod. Nechť $\{\varphi_n\}$ je hustá spočetná podmnožina E^*. Podle definice normy (viz poznámku 2.6.a) existují $x_n \in E$ s vlastnostmi $\|x_n\| = 1$ a $|\varphi_n(x_n)| \ge \frac{1}{2}\|\varphi_n\|$. Nechť Y je uzavřený lineární obal množiny $\{x_n\}_n$. Stačí ukázat, že $Y = E$. Pokud by tomu tak nebylo, nalezli bychom podle důsledku Hahn-Banachovy věty *2.9.b $\varphi \in E^*$ tak, aby $\|\varphi\| = 1$ a $\varphi = 0$ na Y. Dále bychom nalezli podposloupnost $\{\varphi_{n_k}\}$ z $\{\varphi_n\}$ tak, aby $\varphi_{n_k} \to \varphi$. Protože však

$$\|\varphi_{n_k} - \varphi\| \ge \big|(\varphi_{n_k} - \varphi)(x_{n_k})\big| = \big|\varphi_{n_k}(x_{n_k})\big| \ge \frac{1}{2}\|\varphi_{n_k}\|\,,$$

musí být $\|\varphi_{n_k}\| \to 0$. Ze spojitosti normy pak dostáváme $\|\varphi\| = 0$, což je zjevný spor. ♣

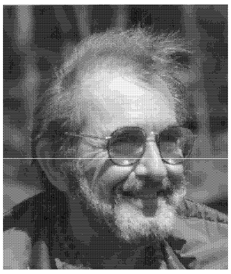
(e) Jako cvičení ukažte, že duál separabilního reflexivního Banachova prostoru je vždy separabilní.


R. Haydon

Reflexivita prostoru X je tedy podle (e) postačující podmínkou k tomu, aby duál X^* byl separabilní, pokud je separabilní původní prostor X. Existují i další podmínky. Kupříkladu v *21.2.d se zmíníme o tom, že pokud je Banachův prostor X separabilní a X^* je lokálně uniformně konvexní, potom i X^* je separabilní.

Z novějších výsledků uveďme následující větu z R. Haydon [1976] (viz též K. Musial [1978] či V.I. Rybakov [1977]), jejíž (netriviální) důkaz lze nalézt v J. Diestel [*1984].

`(f) Věta.` *Nechť X je separabilní Banachův prostor. Jestliže množina extremálních bodů $\operatorname{ext} B_{X^*}$ uzavřené jednotkové koule v X^* je separabilní, je i X^* separabilní.*


S. Simons

Návod. Ve skriptech [HHZ] lze nalézt nový důkaz této věty založený na výsledcích G. Godefroye a t.zv. Simonsově nerovnosti. ♣

***2.9. Důsledky Hahn-Banachovy věty.** Uvedeme ještě další varianty vět Hahn-Banachova typu.

`(a) Věta.` *Nechť p je konvexní funkcionál na vektorovém prostoru W a $z \in W$. Potom existuje $F \in W^\#$ tak, že $F \le p$ na W a $F(z) = p(z)$. Je-li p pseudonorma, je dokonce $|F| \le p$.*

Návod. Definujte lineární funkcionál f na podprostoru generovaném bodem z předpisem $f(\lambda z) = \lambda p(z)$ a použijte algebraickou verzi Hahn-Banachovy věty 2.16. ♣

`(b) Věta.` *Nechť S je podprostor normovaného lineárního prostoru E, $x \in E$ a $d := \operatorname{dist}(x, S) > 0$. Potom existuje $\varphi \in E^*$ tak, že $\|\varphi\| = 1$, $\varphi = 0$ na S a $\varphi(x) = d$.*

Důkaz. Stačí kopírovat důkaz 2.20. Položíme $M = \{e + \lambda x : e \in S, \lambda \in \mathbf{F}\}$, $f(e + \lambda x) = \lambda d$. Potom M je lineární podprostor E a f je korektně definovaný spojitý lineární funkcionál na M. Nyní stačí aplikovat Hahn-Banachovu větu 2.18. Snad jedině bychom měli odůvodnit, proč $\|\varphi\| = 1$. Ale to není těžké, neboť

$$\|f\|_M = \sup\Big\{\frac{|\lambda d|}{\|e + \lambda x\|} : e + \lambda x \in M, \|e + \lambda x\| \neq 0\Big\} = \sup\Big\{\frac{d}{\|x - y\|} : y \in S\Big\} = \frac{d}{d} = 1$$

a norma rozšířeného funkcionálu zůstává stejná. ■

`(c) Důsledek.` *Je-li M uzavřený podprostor E a $x \in E \setminus M$, existuje $\varphi \in E^*$ tak, že $\varphi = 0$ na M, $\varphi(x) = 1$ a $\|\varphi\| = \frac{1}{\operatorname{dist}(x, M)}$.*

***2.10. Jednoznačnost hahn-banachovského rozšíření**. Věnujme se na chvíli následujícímu problému. Je zadána spojitá lineární forma f na podprostoru M Banachova prostoru X. Zajímá nás, kdy existuje právě jedna spojitá lineární forma $F \in X^*$ tak, aby $F = f$ na M a $\|F\|_X = \|f\|_M$. Samozřejmě, Hahn-Banachova věta 2.18 říká, že není problém s existencí F. Otázka se týká jednoznačnosti rozšíření f na celý prostor se zachováním normy. Uveďme některé příklady.

(a) Položme $X = \mathcal{C}([0, 1])$ a $M = \{\lambda g : \lambda \in \mathbf{R}\}$, kde $g \in X$ je zadaná funkce. Definujme dále $f : \lambda g \mapsto \lambda$ pro $\lambda g \in M$. Ukažte, že f je spojitá lineární forma na M a $\|f\| = \frac{1}{\|g\|}$. Ukažte, že f lze rozšířit jednoznačně na celý prostor X se zachováním normy pokud $g(t) := t$, nikoliv však v případě $g(t) := 1 - 2t$.

`Poznámka.` Rozšíření je jednoznačné, právě když množina $\{x \in [0, 1] : |g(x)| = \|g\|\}$ je jednobodová.

(b) Nechť $M := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 2x = y\}$ a $f : (x, y) \mapsto x$ pro $(x, y) \in M$. Potom $f \in M^*$ a existuje právě jedno rozšíření f na $\mathbf{R}^2$ se zachováním normy.

Návod. Ukažte, že $F : (x, y) \mapsto \frac{x+2y}{5}$ je hledané rozšíření. ♣

(d) Je-li M podprostor Hilbertova prostoru H a $f \in M^*$, existuje právě jedno rozšíření f na H se zachováním normy.

(d) Je-li $f \in (c_0)^*$, existuje právě jedno rozšíření $F \in (l^\infty)^*$ formy f tak, že $\|f\| = \|F\|$.

(e) Následující věta pocházející od R.R. Phelpse [1960] charakterizuje podprostory, z nichž můžeme jednoznačně hahn-banachovsky rozšiřovat. K tomu účelu řekneme, že podprostor M normovaného lineárního prostoru E má *Haarovu vlastnost*, jestliže ke každému $x \in E$ existuje právě jedno $m \in M$ tak, že $\|x - m\| = \operatorname{dist}(x, M)$. Víme, že uzavřené podprostory Hilbertových, uniformně konvexních či reflexivních striktně konvexních prostorů mají Haarovu vlastnost.

`Tvrzení.` *Nechť M je uzavřený podprostor normovaného lineárního prostoru E. Potom pro každý funkcionál $f \in M^*$ existuje právě jedno rozšíření $F_f \in E^*$ tak, že $\|f\|_M = \|F_f\|_E$, právě když anihilátor $M^\perp$ má Haarovu vlastnost v E^*.*

Pokud bychom se ptali, v jakých prostorech má *každý* uzavřený podprostor uvedenou vlastnost jednoznačnosti hahn-banachovského rozšíření se zachováním normy, jsou to právě ty prostory, pro něž je jejich duál striktně konvexní. To je výsledek A.E. Taylora [1939] a S.R. Foguela [1958].

(f) Mezi všemi hahn-banachovskými rozšířeními lze vybírat některá mající specifické vlastnosti. Zmiňme se o jedné možnosti. Nechť M je podprostor (reálného) vektorového prostoru W, f lineární forma na M, p konvexní funkcionál na W, $f \leq p$ na M a S podmnožina W. Řekneme, že $F \in W^\#$ je *S-maximální rozšíření* f, jestliže $F = f$ na M, $F \leq p$ na W a je-li G jiné takové rozšíření f, že $G \leq F$ na S, potom $G = F$ na S. Následující tvrzení dokázal P.R. Andenaes [1970].

`Věta.` *Za uvedeného označení a předpokladů existuje S-maximální rozšíření f.*

***2.11. Reflexivita X a X^*.** *Banachův prostor X je reflexivní, právě když X^* je reflexivní.*

Návod. Předpokládejme, že X je reflexivní, ε kanonické zobrazení X na X^{**} a $\Phi \in X^{***}$. Položíme-li $\varphi = \Phi \circ \varepsilon$, je $\varphi \in X^*$. Stačí ukázat, že $\eta(\varphi) = \Phi$, kde η je kanonické vnoření X^* do X^{***}. Abychom toto ukázali, volme $F \in X^{**}$. Existuje $x \in X$ tak, že $\varepsilon_x := \varepsilon(x) = F$. Potom

$$\eta(\varphi)(F) = F(\varphi) = \varepsilon_x(\varphi) = \varphi(x) = \Phi(\varepsilon_x) = \Phi(F)\,.$$

Předpokládáme-li, že X^* je reflexivní, zatímco X není, je εX uzavřený vlastní podprostor X^{**} (srovnej s 2.55.k). Podle důsledku Hahn-Banachovy věty 2.22 či *2.9.b existuje $\Phi \in X^{***}$ tak, že $\|\Phi\| = 1$ a $\Phi = 0$ na εX. Podle předpokladu existuje $\varphi \in X^*$, pro něž $\eta(\varphi) = \Phi$. Potom pro každé $x \in X$ máme

$$0 = \Phi(\varepsilon_x) = \eta(\varphi)(\varepsilon_x) = \varepsilon_x(\varphi) = \varphi(x)\,.$$

Tudíž $\varphi = 0$, tedy také $\Phi = 0$, což je opět spor. ♣

***2.12. Reflexivita uzavřených podprostorů.** *Uzavřený podprostor reflexivního Banachova prostoru je reflexivní.*

Návod. Nechť F je uzavřený podprostor reflexivního Banachova prostoru X, ε kanonické zobrazení X na X^{**}, η kanonické vnoření F do F^{**} a $H \in F^{**}$. Je-li $\varphi \in X^*$ a $f = \varphi \restriction F$, položme $G : \varphi \mapsto H(f)$. Potom $G \in X^{**}$. Podle předpokladu existuje takové $x \in X$, že $\varepsilon_x := \varepsilon(x) = G$. K dokončení důkazu stačí ukázat, že $x \in F$ a $\eta(x) = H$. Pokud však $x \in X \setminus F$, existuje podle důsledku Hahn-Banachovy věty 2.22 či *2.9.c $\varphi \in X^*$, $\varphi(x) = 1$ a $\varphi = 0$ na F. Potom

$$1 = \varphi(x) = \varepsilon_x(\varphi) = G(\varphi) = H(\varphi \restriction F) = 0\,.$$

Konečně, buď $\psi \in F^*$. Podle Hahn-Banachovy věty 2.18 existuje $\varphi \in X^*$, $\varphi = \psi$ na F. Potom

$$\eta(x)(\psi) = \psi(x) = \varphi(x) = \varepsilon_x(\varphi) = G(\varphi) = H(\psi)\,.$$

Jiná myšlenka důkazu. Protože $B_F := \{x \in F : \|x\| \le 1\}$ je uzavřená konvexní podmnožina X, je B_F podle charakteristiky reflexivity v 16.9 $\sigma(X, X^*)$-kompaktní. Podle 16.18.m je restrikce $\sigma(X, X^*)$-topologie na F právě slabá topologie $\sigma(F, F^*)$. Tudíž B_F je $\sigma(F, F^*)$-kompaktní podmnožina F. Opět podle 16.9 je F reflexivní. ♣

***2.13. Reflexivita izomorfních prostorů.** *Jsou-li X, Y izomorfní Banachovy prostory a X je reflexivní, je i Y reflexivní.*

Návod. Nechť $A : X \to Y$ je daný izomorfizmus. Potom adjungované zobrazení $A' : Y^* \to X^*$ je také izomorfizmus. Volme $F \in Y^{**}$, označme $B := (A')^{-1}$ a položme $G\varphi := F(B\varphi)$ pro $\varphi \in X^*$. Zobrazení G je očividně lineární, je též spojité na X^* ($|G\varphi| \le \|F\|\,\|B\|\,\|\varphi\|$). Existuje tedy $z \in X$ tak, že $\varepsilon_z = G$, čili $\varphi(z) = F(B\varphi)$ pro $\varphi \in X^*$. Potom pro libovolné $\psi \in Y^*$ máme

$$F\psi = F(BA'\psi) = A'\psi(z) = \psi(Az)\,.$$

Myšlenku důkazu můžeme přepsat také jinak. Je-li ε kanonické zobrazení X na X^{**} a η kanonické vnoření Y do Y^{**}, je $\eta = A'' \circ \varepsilon \circ A^{-1}$. Vidíme, že $\eta Y = Y^{**}$.

Použijeme-li hlubší charakteristiku reflexivity z 16.9, lze důkaz vést také následovně. Především obraz $A(B_X)$ jednotkové koule B_X je množina w-kompaktní. To proto, že B_X je w-kompaktní díky reflexivitě X a zobrazení A je spojité vzhledem ke slabým topologiím na X a Y podle věty (a) v *14.11. Tudíž i množina $Z := A(\{x \in X : \|x\| \le \|A^{-1}\|\})$ je w-kompaktní. Protože však $B_Y \subset Z$ a B_Y je w-uzavřená množina (stačí se podívat na větu 16.2), je B_Y w-kompaktní. Tudíž Y je reflexivní. ♣

***2.14. Reflexivita faktorprostoru.** *Je-li F uzavřený podprostor reflexivního Banachova prostoru X, je i X/F reflexivní prostor.*

Návod. Podle *2.11 je X^* reflexivní, a protože $F^\perp$ je uzavřený podprostor X^*, je podle *2.12 i $F^\perp$ reflexivní. Dále víme podle 2.55.n, že Banachovy prostory $(X/F)^*$ a $F^\perp$ jsou izometricky-izomorfní, tudíž k dokončení důkazu stačí použít *2.13 a znovu *2.11. ♣

***2.15. Reflexivita v algebraickém hávu**. Buď W vektorový prostor a $W^{\#\#}$ jeho druhý algebraický duál. Pro $w \in W$ a $f \in W^{\#}$ položme $\varepsilon_w(f) = f(w)$. Evidentně $\varepsilon_w \in W^{\#\#}$ a zobrazení $\varepsilon : w \mapsto \varepsilon_w$ je *kanonické vnoření* W do $W^{\#\#}$. Můžeme říci, že vektorový prostor W je *algebraicky reflexivní*, jestliže $\varepsilon W = W^{\#\#}$. Dokažte následující tvrzení.

Věta. *Vektorový prostor je algebraicky reflexivní, právě když je konečně dimenzionální.*

Návod. Zřejmě každý prostor konečné dimenze je algebraicky reflexivní.

Předpokládejme, že $\varepsilon W = W^{\#\#}$ a $\dim W = \infty$. Buď $\mathcal{B}$ Hamelova báze W a $\mathcal{H}$ duální systém k $\mathcal{B}$ ve $W^{\#}$ (nezapomeňte, že i $\dim W^{\#} = \infty$; jestliže $\mathcal{B} = \{b_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, potom $\mathcal{H} = \{f_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ má vlastnost, že $f_\gamma(b_\iota) = 1$ či 0, podle toho, zda $\gamma = \iota$ nebo $\gamma \neq \iota$). Prvky $\mathcal{H}$ jsou lineárně nezávislé, existuje tedy Hamelova báze $\tilde{\mathcal{H}}$ prostoru $W^{\#}$ obsahující $\mathcal{H}$. Nechť dále F je takový prvek $W^{\#\#}$, pro nějž $F(f) = 1$ pro $f \in \mathcal{H}$ a $F(f) = 0$ pro $f \in \tilde{\mathcal{H}} \setminus \mathcal{H}$. Podle předpokladu existuje $w \in W$ tak, že $\varepsilon_w = F$. Prvek w je konečnou lineární kombinací prvků z $\mathcal{B}$, $w = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n$, $b_1, \ldots, b_n \in \mathcal{H}$, existuje tedy $b_\gamma \in \mathcal{B} \setminus \{b_1, \ldots, b_n\}$. Potom

$$1 = F(f_\gamma) = \varepsilon_w(f_\gamma) = f_\gamma(w) = f_\gamma(\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n) = 0\,,$$

což je kýžený spor. ♣

***2.16. Mazur-Ulamova věta.** *Nechť X, Y jsou reálné normované lineární prostory a T je izometrické (ne nutně lineární) zobrazení X na Y. Jestliže $T(0) = 0$, je $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.*

Důkaz. Podejme pouze stručnou myšlenku důkazu. Stačí ukázat, že T je lineární. Volme proto $x, y \in X$. Naším cílem je ukázat, že $T(x + y) = Tx + Ty$. Protože T je spojité, vyjde odtud, že T je homogenní.

Abychom ukázali, že $T(x + y) = Tx + Ty$, stačí dokázat, že $T\big(\frac{1}{2}(a + b)\big) = \frac{1}{2}(Ta + Tb)$ pro libovolné dva prvky $a, b \in X$. Potom aplikací poslední rovnosti pro $b = 0$ dostaneme,že $T\big(\frac{1}{2}a\big) = \frac{1}{2}Ta$. Odtud vyplyne, že $T(x + y) = 2\,T\big(\frac{1}{2}(x + y)\big) = 2\big(\frac{1}{2}(Tx + Ty)\big) = Tx + Ty$.

Mějme tedy $a, b \in X$. Definujme indukcí posloupnost množin $\{H_n\}$ následovně:

$$H_1 = H_1(a, b) := \big\{x \in X : \|x - a\| = \|x - b\| = \tfrac{1}{2}\|a - b\|\big\}$$

a

$$H_n = H_n(a, b) := \big\{x \in H_{n-1} : \|x - z\| \leq \tfrac{1}{2} \operatorname{diam} H_{n-1} \text{ pro každé } z \in H_{n-1}\big\}\,.$$

Protože $\operatorname{diam} H_n \to 0$, může být v průniku $H := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} H_n$ nejvýše jeden bod. Ukážeme, že $\xi := \frac{1}{2}(a + b) \in H$. Není žádný problém ověřit, že $\xi \in H_1$. Dále postupujme indukcí. K tomu účelu však ještě položíme $\widehat{z} := a + b - z$ pro $z \in X$ a (též indukcí) dokážeme, že $\widehat{z} \in H_n$ pokud $z \in H_n$. Ani v tom není žádný velký problém. Předpokládejme tedy, že $\xi \in H_n$. Volíme-li $z \in H_n$, máme $2\|\xi - z\| = \|a + b - 2z\| = \|z - \widehat{z}\| \leq \operatorname{diam} H_n$. Odtud plyne, že $\xi \in H_{n+1}$.

V posledním kroku ukážeme konečně, že $T\big(\frac{1}{2}(x + y)\big) = \frac{1}{2}\big(Tx + Ty\big)$. Protože $T\big(H_n(x, y)\big) = H_n(Tx, Ty)$, což snadno odvodíme z izometrie T opět pomocí indukce, je $T\Big(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} H_n(x, y)\Big) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} H_n(Tx, Ty)$. A to jsme vlastně potřebovali ukázat. ■

Poznámky. (a) Bod $\frac{1}{2}(x + y)$ se někdy nazývá *algebraickým středem* dvojice x, y. *Metrickým středem* dvojice x, y v Banachově prostoru X pak nazveme každý bod $z \in X$ s vlastností $\|z - x\| = \|z - y\| = \frac{1}{2}\|x - y\|$. Každý algebraický střed je i metrickým středem. Opačně zdaleka ne, zkuste vymyslet nějaký jednoduchý příklad třeba v prostoru l_2^1. Množina $m(x, y)$ všech metrických středů dvojice x, y je uzavřená, konvexní a omezená. Ve striktně konvexních prostorech sestává $m(x, y)$ právě jen z algebraického středu x, y.

I v metrických prostorech lze definovat metrický střed třeba jako bod v průniku množin H_n (definice posloupnosti $\{H_n\}$ v metrických prostorech je analogická jako výše, pouze normu nahradíme metrikou). Obecně však střed dvojice nemusí vždy existovat.

(b) Tvrzení Mazur-Ulamovy věty neplatí pro komplexní prostory. Stačí uvažovat v komplexní rovině zobrazení $\alpha \mapsto \overline{\alpha}$.

(c) V případě, že prostor Y je striktně konvexní, není nutné předpokládat, že $TX = Y$. Mazur-Ulamova věta v tom případě tedy říká, že *izometrické zobrazení $T : X \to Y$ splňující $T(0) = 0$, kde prostor Y je striktně konvexní, je již na a lineární.* Důkaz je jednoduchý, stačí si v podstatě uvědomit, že $T(\frac{x+y}{2}) = \frac{Tx+Ty}{2}$. Pokud se tím budete trápit, podívejte se na článek J.A. Baker [1971]. Anebo na R. Bhatia and P. Šemrl [1997]. Tam jsou i další zajímavosti.

(d) Již v prostorech konečné dimenze lze najít příklady, že tvrzení Mazur-Ulamovy věty neplatí, vynecháme-li v ní předpoklad $TX = Y$. I o tom je zmínka v posledně jmenovaném článku. Zajímavé tvrzení dokázal Z. Charzyński v [1953]: *Jsou-li X, Y konečně dimenzionální Banachovy prostory stejné dimenze, $T : X \to Y$ izometrie, $T(0) = 0$, potom je T lineární a $TX = Y$.* Můžete též nahlédnout do M.M. Day [*1973], str. 143.

***2.17. Schauderova báze**. Posloupnost $\{x_n\}$ prvků Banachova prostoru X se nazývá *Schauderovou bází* X, jestliže ke každému $x \in X$ existuje právě jedna posloupnost skalárů $\{\lambda_n(x)\}$ tak, že $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(x)x_n$. Pro každé n položme $x_n^* : x \mapsto \lambda_n(x)$; x_n^* nazývejme *souřadnicovými funkcionály* příslušnými Schauderově bázi $\{x_n\}$.

Pokuste se sami dokazovat následující tvrzení.

(a) Je-li $\{x_n\}$ Schauderova báze X, potom množina $\{x_n\}$ je lineárně nezávislá.

(b) Banachův prostor mající Schauderovu bázi je již separabilní.

(c) Tvrzení. *Buď $\mathcal{K}$ množina všech posloupností $\{\lambda_n\}$, pro něž řada $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ konverguje. Pro $\{\lambda_n\} \in \mathcal{K}$ položme*

$$\big\|\{\lambda_n\}\big\| = \sup\Big\{\Big\|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\Big\| : n \in \mathbf{N}\Big\}.$$

Ukažte, že $(\mathcal{K}, \|.\|)$ je Banachův prostor.

Návod. Snad pouze k úplnosti. Nechť $\big\{\{\lambda_n^k\}_n\big\}_k$ je cauchyovská posloupnost v $\mathcal{K}$. Potom posloupnost $\Big\{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k x_j\Big\}$ je stejnoměrně cauchyovská vzhledem k n, tudíž i stejnoměrně konvergentní. Odtud dostáváme, že posloupnost $\big\{\{\lambda_n^k\}_n\big\}_k$ je konvergentní v $\mathcal{K}$. ♣

Poznámka. Je-li $\{x_n\}$ Schauderova báze Banachova prostoru X, a $x = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j(x)x_j$, položme $P_n(x) := \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(x)x_j$. Potom P_n jsou projekce na X. Místo abychom definovali normu na prostoru $\mathcal{K}$ jako výše, definuje se nová norma přímo na původním prostoru X. Stačí položit $|||x||| := \sup\big\{\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j(x)x_j : n \in \mathbf{N}\big\}$. Potom $|||.|||$ je norma na X, $\|x\| \le |||x|||$ pro každé $x \in X$. Prostor $(X, |||.|||)$ je úplný, a tudíž podle věty o otevřeném zobrazení, přesněji podle 4.22.n, jsou obě normy na X ekvivalentní. Navíc $\sup\{\|P_n\| : n \in \mathbf{N}\} < \infty$. Poslední supremum se nazývá *bázovou konstantou* Schauderovy báze $\{x_n\}$. Pokud je tato konstanta rovna 1, nazývá se Schauderova báze $\{x_n\}$ *monotonní*. Z předchozího vyplývá, že každá Schauderova báze je monotonní vzhledem k normě $|||.|||$.

(d) Definujme zobrazení $T : \mathcal{K} \to X$ předpisem

$$T : \{\lambda_n\} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n\,.$$

Ukažte, že T je spojité a $\|T\| \le 1$.

(e) Přihlédneme-li k důsledku 4.16 (nezapomeňte na úplnost $\mathcal{K}$ a jednoznačnost v definici Schauderovy báze), je T dokonce izomorfní zobrazení $\mathcal{K}$ na X. Položíme-li $|||x||| := \|T^{-1}x\|$, je $|||.|||$ ekvivalentní norma na X.

Návod. Využijte cvičení 4.22.n. ♣

(f) Věta. *Souřadnicové funkcionály x_n^* jsou spojité lineární funkcionály na X, přičemž $x_n^*(x_k) = \delta_{n,k}$.*

Návod. Použijte (e). ♣

(g) Je-li $\{x_n\}$ Schauderova báze X a $\{x_n^*\}$ posloupnost příslušných souřadnicových funkcionálů, tvoří $\big(\{x_n\}, \{x_n^*\}\big)$ Markuševičovu bázi.

(h) Ne každá Markuševičova báze vede k Schauderově bázi.

Návod. Viz skripta [HHZ], str. 219. ♣

(i) Ukažte, že žádný prvek Schauderovy báze $\{x_n\}$ nemůže ležet v uzavřeném lineárním obalu zbývajících prvků báze.

Návod. Je-li A podmnožina přirozených čísel, zjistíme pomocí (f), že $\overline{\text{lin}}\{x_n : n \in A\} = \big\{\sum_j \lambda_j x_j : \lambda_j = 0 \text{ pro } j \notin A\big\}$. ♣

(j) **Příklady**. Na závěr povídání o Schauderových bázích uveďme některé příklady.

Libovolná (Hamelova) báze konečně dimenzionálního vektorového prostoru je jeho Schauderovou bází. Rovněž tak ortonormální báze v Hilbertově prostoru poslouží jako příklad Schauderovy báze.

Posloupnosti standardních jednotkových vektorů $\{e_n\}$ tvoří Schauderovy báze v prostorech c_0 a l^p pro $p \in [1, \infty)$. Není to však Schauderova báze prostoru l^∞ (ten totiž není separabilní).

Pokud jde o prostor c, jeho Schauderovu bází je třeba posloupnost $\{e, e_1, e_2, \dots\}$, kde navíc $e = (1, 1, 1, \dots)$. Libovolný prvek $a = \{a_n\} \in c$ lze totiž jednoznačně psát ve tvaru $x = \gamma e + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - \gamma) e_n$, kde $\gamma := \lim a_n$.

Originální Schauderova báze v prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ sestávala z funkcí $\{f_n\}$ definovaných následujícím způsobem. Položíme $f_0 = 1$, $f_1 = 1$, $f_2(t) = 2t$ pro $t \in [0, \frac{1}{2})$ a $f_2(t) = 2 - 2t$ pokud $t \in [\frac{1}{2}, 1]$. Dále $f_{2^n+j}(t) = f_2(2^n t - j + 1)$ pro $n \geq 1$ a $j = 1, \dots, 2^n$ (obrázek vše objasní).

Důležité *Haarovy systémy* funkcí tvoří báze prostorů $L^p([0,1])$ pro $p \in [1, \infty)$. Ty zde již nebudeme definovat. Odkažme třeba na monografii J. Lindenstrauss and L. Tzafriri [*1977].

(k) **Poznámka**. Pojem báze byl zaveden J. Schauderem v roce 1920. On sám vyslovil domněnku, že každý separabilní Banachův prostor má bázi. Dlouhou dobu byl tento problém otevřený, nebylo známo, zda existují separabilní Banachovy prostory, které by neměly Schauderovu bázi. Až P. Enflo [1973] sestrojil příklad separabilního Banachova prostoru bez Schauderovy báze. Viz též následující *2.18 či článek R.C. James [1989].

***2.18. O Banachových prostorech s aproximační vlastností**. Řekneme, že Banachův prostor X má *aproximační vlastnost*, krátce AP, jestliže ke každé kompaktní množině $K \subset X$ a každému $\varepsilon > 0$ existuje konečně dimenzionální operátor $T \in \mathcal{L}_f(X)$ tak, že $\|Tx - x\| < \varepsilon$ pro každé $x \in K$. Následující charakteristika náleží A. Grothendieckovi [1955].

(a) **Věta.** *Banachův prostor X má aproximační vlastnost, právě když pro každý Banachův prostor Y, každé $\varepsilon > 0$ a každý kompaktní operátor $K \in \mathcal{L}_c(Y, X)$ existuje konečně dimenzionální operátor $T \in \mathcal{L}_f(Y, X)$ tak, že $\|K - T\| < \varepsilon$.*

Je známa celá řada charakteristik prostorů majících AP. Není těžké si uvědomit také, že kupříkladu každý Banachův prostor se Schauderovou bází má AP. Takže prostory c_0, c, $\mathcal{C}([0,1])$ či l^p pro $p \in [1, \infty)$ mají aproximačmí vlastnost.

(b) **Protipříklady**. Jak jsme se již zmínili v 2.50, P. Enflo [1973] první sestrojil příklad Banachova prostoru nemajícího aproximační vlastnost. Zjednodušené konstrukce takových prostorů byly podány A.M. Daviem [1973] a [1975]. Později přibyly další protipříklady. Dnes je známo, že všechny prostory l^p pro $p \in [1, \infty]$, $p \neq 2$, a také prostor c_0, obsahují uzavřené podprostory nemající AP (pro prostor c_0 a l^p v případě $p \in (2, \infty]$ to ukázal P. Enflo [1973], případ l^p prostorů pro $p \in [1, 2)$ vyřešil A. Szankowski [1978]). A. Szankowski v [1976] sestrojil příklad separabilního Banachova svazu bez AP a v [1981] ukázal, že Banachova algebra $\mathcal{L}(l^2)$ nemá AP. Poznamenejme na okraj, že většina „známých“ prostorů jako jsou $\mathcal{C}(K)$ či $L^p(\mu)$ mají AP. Není však známo, zda neseparabilní Hardyho prostor $H^\infty(\mathbf{D})$ má aproximační vlastnost. Na druhé straně, disková algebra $\mathcal{A}(\Delta)$ má (dokonce metrickou, viz dále) aproximační vlastnost. S.V. Bočkarev [1974] ukázal, že má totiž Schauderovu bázi.

A. Grothendieck v [1955] také ukázal, že Banachův prostor X má AP, pokud jeho duál X^* má AP (tedy v případě reflexivního prostoru, X má AP, právě když X^* má AP). Zajímavá je i následující charakteristika, také náležející A. Grothendieckovi [1955], zejména pro srovnání s předchozí Grothendieckovou větou.

(c) Věta. *Je-li X Banachův prostor, potom X^* má aproximační vlastnost, právě když pro každý Banachův prostor Y, každé $\varepsilon > 0$ a každý kompaktní operátor $K \in \mathcal{L}_c(X,Y)$ existuje konečně dimenzionální operátor $T \in \mathcal{L}_f(X,Y)$ tak, že $\|K - T\| < \varepsilon$.*

Zdá se, že dodnes není řešen následující otevřený problém.

(d) Problém. Jestliže každý kompaktní operátor na Banachově prostoru X je limitou (v normě) posloupnosti konečně dimenzionálních operátorů (tj. jestliže $\overline{\mathcal{L}_f(X)} = \mathcal{L}_c(X)$), má již X aproximační vlastnost?

(e) Další aproximační vlastnosti. Jsou i další vlastnosti Banachových prostorů mající blízko k aproximační vlastnosti. Banachův prostor X má *omezenou aproximační vlastnost*, ve zkratce BAP, jesliže existuje $\lambda \in [1,\infty)$ s následující vlastností: Kdykoliv zadáme $\varepsilon > 0$ a kompaktní množinu $K \subset X$, existuje konečně dimenzionální operátor $T \in \mathcal{L}_f(X)$ tak, že $\|T\| \le \lambda$ a $\|Tx - x\| < \varepsilon$ pro každé $x \in K$. Pokud lze volit dokonce $\lambda = 1$, říká se, že X má *metrickou aproximační vlastnost*, krátce MAP.

Existuje Banachův prostor, dokonce se separabilním duálem, mající AP nikoliv však BAP (T. Figiel and W.B. Johnson [1973]) či Banachův prostor, opět se separabilním duálem, mající BAP nikoliv však MAP (lze vyvodit z výsledků T. Figiela a W.B. Johnsona [1973]).

S.J. Szarek [1987] sestrojil příklad separabilního reflexivního prostoru majícího MAP, avšak nemajícího Schauderovu bázi. Má-li reflexivní Banachův prostor či separabilní duál vlastnost AP, má již MAP.

Banachův prostor X má *kompaktní aproximační vlastnost* CAP, jestliže pro každou kompaktní množinu $K \subset X$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje kompaktní operátor T na X tak, že $\|Tx - x\| < \varepsilon$ pro každé $x \in K$. Protože každý konečně dimenzionální operátor je kompaktní, z AP plyne CAP. Bylo otázkou, zda náhodou tyto dvě vlastnosti nejsou ekvivalentní. Obvyklé známé příklady Banachových prostorů nemajících AP neměly totiž také CAP. G. Willis [1992] ukázal, jak pomocí Banachova prostoru nemajícího AP lze „vyrobit“ jiný Banachův prostor s CAP, ale nemající stále AP.

Následující na první pohled jednoduše vypadající problém se zdá, že do dneška nebyl vyřešen.

(f) Problém. Nechť Banachův prostor X má BAP. Existuje na X ekvivalentní norma, při níž by X měl MAP?

***2.19. Hahn-Banachova věta pro vektorové funkce**. Nechť M je lineární podprostor normovaného lineárního prostoru E, X Banachův prostor a $f \in \mathcal{L}(M,X)$. Je otázka, zda existuje $F \in \mathcal{L}(E,X)$ tak, aby $F = f$ na M. Odpověď je obecně záporná.

(a) Jestliže $M = c_0 = X$ a $E = l^\infty$ (zde ztotožňujeme vlastně c_0 s jeho kanonickým vnořením do l^∞) a f identické zobrazení $c_0 \subset l^\infty \to c_0$, neexistuje podle Phillipsova výsledku v *2.6.e rozšíření f na spojitý lineární operátor z $\mathcal{L}(l^\infty, c_0)$.

(b) Tvrzení. *Jestliže M je lineární podprostor Hilbertova prostoru H, X Banachův prostor a $f \in \mathcal{L}(M,X)$, potom existuje $F \in \mathcal{L}(H,X)$ tak, že $F = f$ na M a $\|F\| = \|f\|$.*

Návod. Položte $F = f \circ P$, kde P je ortogonální projekce H na M v případě, kdy M je dokonce uzavřený podprostor. Jinak nejdříve spojitě rozšiřte f na $\overline{M}$. ♣

Z uvedených příkladů se dá tušit, že platnost Hahn-Banachovy věty pro zobrazení do Banachových prostorů nějak souvisí s existencí topologických doplňků či projekcí. Skutečně, porovnejte si následující tvrzení (c) (W.A. Veech [1971]) a (d) (R.S. Phillips [1940]).

(c) Tvrzení. *Nechť M je uzavřený podprostor separabilního Banachova prostoru X a $f \in \mathcal{L}(M, c_0)$. Potom existuje $F \in \mathcal{L}(X, c_0)$ tak, že $F = f$ na M. Lze dosáhnout toho, aby $\|F\| \le 2\|f\|$.*

Návod. Použijte *2.6.e. ♣

(d) Tvrzení. *Nechť M je uzavřený podprostor Banachova prostoru X a $f \in \mathcal{L}(M, l^\infty)$. Potom existuje $F \in \mathcal{L}(X, l^\infty)$ tak, že $F = f$ na M a $\|F\| = \|f\|$.*

Návod. Použijte cvičení *2.6.c. ♣

(e) Další tvrzení „Hahn-Banachova“ typu pro vektorové funkce lze nalézt v následujícím odstavci *2.20. Čtenáře lze také odkázat na M.M. Day [*1958], kde v kapitole VI.3 jsou udány značně obecné podmínky pro platnost Hahn-Banachovy věty pro zobrazení.

***2.20. Injektivní a P_λ-prostory.** V souvislosti s předchozím odstavcem se zdají následující definice docela přirozené.

Banachův prostor je *injektivní*, jestliže má topologický doplněk v každém Banachově prostoru, který ho obsahuje (přesněji, do kterého je izomorfně vnořen).

Banachův prostor X se nazve *P_λ-prostorem* ($\lambda \in [1, \infty)$), někdy též *λ-injektivním prostorem*, jestliže pro každý Banachův prostor $Y \supset X$ existuje projekce P prostoru Y na X, pro niž $||P|| \le \lambda$.

V dalším shrneme pouze některé výsledky o těchto prostorech. Pro další čtení, důkazy i detaily lze konsultovat třeba M.M. Day [*1958] či J. Diestel [*1984].

(a) Věta. *Následující podmínky na Banachův prostor X jsou ekvivalentní:*

(i) *X je injektivní,*
(ii) *kdykoliv Y a Z jsou Banachovy prostory, $X \subset Y$ a $f \in \mathcal{L}(X, Z)$, potom existuje $F \in \mathcal{L}(Y, Z)$ tak, že $F = f$ na X,*
(iii) *pro každou dvojici Banachových prostorů $Y \subset Z$ a každé $f \in \mathcal{L}(Y, X)$ existuje $F \in \mathcal{L}(Z, X)$ tak, že $F = f$ na Y.*

(b) Věta. *Nechť X je Banachův prostor. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *X je P_λ-prostor,*
(ii) *kdykoliv Y a Z jsou Banachovy prostory, $X \subset Y$ a $f \in \mathcal{L}(X, Z)$, potom existuje $F \in \mathcal{L}(Y, Z)$ tak, že $F = f$ na X a $||F|| \le \lambda ||f||$,*
(iii) *pro každou dvojici Banachových prostorů $Y \subset Z$ a každé $f \in \mathcal{L}(Y, X)$ existuje $F \in \mathcal{L}(Z, X)$ tak, že $F = f$ na Y a $||F|| \le \lambda ||f||$.*

(c) Tvrzení. *Prostor l^∞ je injektivní a P_1.*

Každý P_λ-prostor je injektivní. Je-li X injektivní Banachův prostor, potom existuje $\lambda \ge 1$ tak, že X je P_λ-prostor (to není triviální !).

Není známo, zda každý injektivní prostor je izomorfní P_1-prostoru. I následující charakteristiky jsou zajímavé.

(d) Věta. *Následující podmímky jsou ekvivalentní v případě Banachova prostoru X:*

(i) *X je P_1-prostor,*
(ii) *existuje (Hausdorffův) extremálně nesouvislý (uzávěr každé otevřené množiny je otevřená množina) kompaktní prostor K tak, že X je izometrický s prostorem $\mathcal{C}(K)$,*
(iii) *libovolná kolekce $\mathcal{C}$ navzájem se protínajících uzavřených koulí v X ($A \cap B \neq \emptyset$, pokud $A, B \in \mathcal{C}$) má neprázdný průnik.*

Pro $\lambda > 1$ není známa žádná rozumná charakteristika P_λ-prostorů.

(e) Je známo mnoho dalších souvislostí. Uveďme některé z nich.

Separabilní injektivní Banachův prostor již musí být konečné dimenze (A. Pełczyński [1960]). Také každý reflexivní injektivní Banachův prostor je již konečně dimenzionální. Žádný hladký Banachův prostor nemůže být P_1 (G.P. Akilov [1947]).

Každý injektivní Banachův prostor nekonečné dimenze obsahuje podprostor, který je izomorfní c_0 (A. Pełczyński [1960]) i podprostor, který je izomorfní l^∞ (H.P. Rosenthal [1970]).

Každý injektivní Banachův prostor je Grothendieckův (A. Grothendieck [1953]). *Grothendieckovými prostory* se často nazývají ty Banachovy prostory X, pro něž každá posloupnost, která v X^* w^*-konverguje k nule, konverguje k nule i ve w-topologii prostoru X^*.

***2.21. Poznámka.** Lze studovat i duální pojem k injektivitě. Řekneme, že Banachův prostor E je *λ-projektivní*, jestliže pro každý Banachův prostor X a každý jeho uzavřený podprostor $S \subset\subset X$ a každé $v \in \mathcal{L}(E, X/S)$ existuje $\widehat{v} \in \mathcal{L}(E, X)$ tak, že $v = q\,\widehat{v}$, $||\widehat{v}|| \le \lambda\,||v||$. Zde, pochopitelně, $q : X \to X/S$ je kanonické zobrazení.

***2.22. Banachovy limity**. V kurzu analýzy se ukazuje, jakým způsobem definovat limity posloupností. Zobrazení, které každé konvergentní posloupnosti $x = \{x_n\}$ reálných čísel přiřadí $\lim x_n$, je spojitý lineární funkcionál na Banachově prostoru c. Snaha, aby i některým nekonvergentním posloupnostem bylo možno rozumným způsobem přiřadit jakousi "limitu", vedla k zavedení jistých sčítacích metod. O tom se lze dočíst třeba ve skriptech [Probl].

Jednou z důležitých vlastností limitovacích metod je invariance na posunutí. Přesněji, označíme-li pro posloupnost $x = \{x_n\}$ symbolem $\mathrm{sh}(x)$ posloupnost $\{x_2, x_3, \dots\}$, požadujeme, aby posloupnosti x a $\mathrm{sh}(x)$ měly stejnou "limitu".

Protože c je (dokonce uzavřený) podprostor prostoru l^∞ všech omezených (reálných) posloupností, dá se očekávat, že Hahn-Banachova věta by mohla přinést další (nekonstruktivní) zobecnění pojmu limity. Vskutku, platí následující tvrzení.

Věta. *Existuje spojitá lineární forma B na prostoru l^∞ mající vlastnosti:*

(a) $\liminf x_n \le B(x) \le \limsup x_n$,
(b) $B(x) = B(\mathrm{sh}(x))$

pro každou posloupnost $x = \{x_n\} \in l^\infty$.

Návod. Položíme-li $p(x) = \limsup \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$, je p konvexní funkcionál na prostoru l^∞. Jak bylo řečeno, $f : x \mapsto \lim x_n$ je spojitá lineární forma na c (o normě 1), která na prostoru c splývá s p (existuje-li limita $\lim a_n$, existuje i $\lim \frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n)$ a obě limity se rovnají). Za B pak stačí vzít hahn-banachovské rozšíření f na l^∞ majorizované p.

Protože $B(x) \ge -p(-x) = \liminf \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$, dostáváme, že $B(x) \ge 0$, pokud posloupnost x má všechny prvky nezáporné. Volíme-li $x \in l^\infty$, je $p(x - \mathrm{sh}(x)) = \limsup \frac{1}{n}(x_1 - x_{n+1}) = 0$. Obdobně zjistíme, že $p(\mathrm{sh}(x) - x) = 0$. Tudíž $B(x - \mathrm{sh}(x)) = 0$. Odtud je již jen krůček k ověření vlastnosti uvedené v (b).

Buď opět $x = \{x_n\} \in l^\infty$. Položíme-li $z = \inf_n x_n$ a volíme-li ještě $\varepsilon > 0$, existuje index k tak, že $z \le x_k < z + \varepsilon$. Protože $x_n + \varepsilon - x_k > 0$ pro každé n, máme $0 \le B(x_n + \varepsilon - x_k) = B(x) + \varepsilon - x_k$, odkud ihned plyne $B(x) \ge z$. Obdobně dostaneme $B(x) \le \sup_n x_n$. Použijeme-li (b) a definici lim sup a lim inf, jsme hotovi s důkazem (a).

Pro libovolnou posloupnost $\{x_n\}$ je vždy $\limsup \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n) \le \limsup x_n$. Zkuste si provést elementární důkaz této nerovnosti a využít ji při ověření vlastnosti (a). ♣

Každý spojitý lineární funkcionál na prostoru l^∞ splňující vlastnosti (a) i (b) se nazývá *Banachovou limitou*.

***2.23. Ještě o banachovských limitách**. (a) Jinou možností důkazu je uvažovat funkcionál $p : x \mapsto \sup_n x_n$ na l^∞, ukázat, že $p(\mathrm{sh}(x) - x) \ge 0$ pro $x \in l^\infty$ a použít opět Hahn-Banachovu větu.

Variant využití Hahn-Banachovy věty pro důkaz existence banachovských limit je celá řada. Kupříkladu označíme-li $S := \{x - \mathrm{sh}(x) : x \in l^\infty\}$ a $e := (1, 1, 1, \dots)$, je $\mathrm{dist}(e, S) = 1$. Podle *2.9.b existuje $\varphi \in (l^\infty)^*$ tak, že $||\varphi|| = 1$, $\varphi = 0$ na S a $\varphi(e) = 1$. Ukažte, že φ je Banachova limita.

(b) Lineární funkcionál Φ na prostoru l^∞ je Banachovou limitou, právě když splňuje následující podmínky:

(α) $\Phi\{x_n\} \ge 0$ v případě kdy $x_n \ge 0$ pro všechna n,
(β) $\Phi(x) = \Phi(\mathrm{sh}(x))$ pro každé $x \in l^\infty$,
(γ) $\Phi e = 1$ pro $e = (1, 1, 1, \dots)$.

Důkaz, že funkcionál Φ splňuje vlastnost (a) z předchozí věty lze vést jako výše.

Každý takový funkcionál je již na prostoru l^∞ omezený a má normu 1. Poznamenejme také, že žádný takový funkcionál nemůže být multiplikativní, existují tedy vždy omezené posloupnosti $x, y \in l^\infty$, pro něž $B(xy) \ne B(x)B(y)$ (zde násobení v l^∞ je definováno součinem po souřadnicích). To je zřejmé, stačí uvažovat posloupnosti $x = \{(-1)^n\}$ a $y = \{(-1)^{n+1}\}$. Je-li B Banachova limita na l^∞, musí být podle (b) $B(x) = B(y)$. Podle (a) ovšem $B(xy) = -1$ (xy je konvergentní posloupnost) a těžko tedy může být $B(xy) = B(x)B(y)$.

Zajímavá je též otázka, na jakých omezených posloupnostech z l^∞, samozřejmě kromě konvergentních posloupností, všechny banachovské limity splývají. O těchto otázkách se lze dočíst více třeba v L. Sucheston [1967].

(c) Dále je možno pro existence "zobecněných limit" využít vlastností Stone-Čechova obalu $\beta\mathbf{N}$ množiny přirozených čísel opatřené diskrétní topologií. Libovolnou posloupnost z l^∞ můžeme chápat jako spojitou funkci na $\mathbf{N}$ a tu můžeme podle věty *15.4 o Stone-Čechově kompaktifikaci spojitě rozšířit na $\beta\mathbf{N}$. Volme tedy $a \in \beta\mathbf{N} \setminus \mathbf{N}$ libovolně. Pro posloupnost $x \in l^\infty$ existuje právě jedno $x^* \in \mathcal{C}(\beta\mathbf{N})$ tak, že $x^* \restriction \mathbf{N} = x$. Položíme-li $B(x) := x^*(a)$, představuje B jistý typ zobecněné limity. Splňuje vždy požadavek (a), je multiplikativní, ale nikdy zase nesplňuje (b) (víte proč ?). Vidíme zároveň, že různou volbou bodu $a \in \beta\mathbf{N}$ můžeme dostat různé banachovské limity (omezené spojité funkce na $\beta\mathbf{N}$ oddělují body $\beta\mathbf{N}$). Přitom mohutnost množiny $\beta\mathbf{N} \setminus \mathbf{N}$ je značně velká. O její kardinalitě se lze dovědět z článku B. Pospíšil [1937].

(d) J. Appell, E. De Pascale and P.P. Zabrejko [1994] konstruují jiné "zobecněné limity" na prostoru l^∞ využívajíce pouze Alaoglu-Bourbakiho větu o w^*-kompaktnosti jednotkové koule v $(l^\infty)^*$. V témže článku charakterizují taktéž multiplikativní "zobecněné limity" na l^∞ a kladou otázku, zda existenci klasických Banachových limit lze získat pouze pomocí Alaoglu-Bourbakiho věty. Odpověď je kladná, o čemž svědčí třeba postup v R. Larsen [*1973].

***2.24. Závěrečné poznámky**. O historii Hahn-Banachovy věty se lze dočíst třeba v H. Hochstadt [1979], G. Buskes [1993] či J.J. Saccoman [1991].

*3. Konvergence a řady v Banachových prostorech

***3.1. Slabé konvergence v různých prostorech**. V dalším se pokusíme na příkladech charakterizovat slabé konvergence posloupností v některých Banachových prostorech. Stačí se omezit na posloupnosti slabě konvergující k 0. Především si však uvědomme, že každá slabě konvergentní posloupnost je podle 4.7 nutně omezená. Snad bychom mohli ještě zformulovat následující jednoduché tvrzení, jehož důkaz nečiní žádné potíže.

(a) Větička. *Nechť X je normovaný lineární prostor, M podmnožina X^* jejíž lineární obal je hustý v X^* a $\{x_n\}$ omezená posloupnost v X. Potom $x_n \stackrel{w}{\to} 0$, právě když $\varphi(x_n) \to 0$ pro každé $\varphi \in M$.*

(b) Poznámka. Podmnožiny X^*, jejichž lineární obal je hustý v X^*, se někdy nazývají *totální*. Zkuste si rozmyslet, že M je totální podmnožina X^*, právě když ${}^{\perp}M = \{0\}$.

(c) Prostor $\mathcal{C}([0,1])$. Slabou konvergencí v obecném prostoru $\mathcal{C}(K)$ jsme se již zabývali v 3.9.d. Raději zopakujme, přičemž se omezme pro jednoduchost na případ $K = [0,1]$. Jestliže posloupnost $\{f_n\}$ v $\mathcal{C}([0,1])$ konverguje slabě k funkci $f = 0$, musí být posloupnost $\{f_n(t)\}$ *stejně omezená* na $[0,1]$ (existuje tedy $M > 0$ tak, že $|f_n(t)| \le M$ pro každé n a každé $t \in [0,1]$) a $f_n \to 0$ bodově na $[0,1]$ (z důvodu, že Diracova míra ε_t je prvek $\big(\mathcal{C}([0,1])\big)^*$ pro každé $t \in [0,1]$).

Platí i opačné tvrzení, je-li posloupnost $\{f_n\} \subset \mathcal{C}([0,1])$ stejně omezená na $[0,1]$ a konverguje-li na $[0,1]$ bodově k funkci 0, potom $f_n \stackrel{w}{\to} 0$ (použijte charakteristiku duálu z 2.14.d a Lebesgueovu větu o limitním přechodu za integračním znamením).

Chceme-li tedy sestrojit posloupnost spojitých funkcí na $[0,1]$, která konverguje k 0 slabě, nikoliv však silně (a připomeňme, že silná konvergence v prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ je totéž jako stejnoměrná konvergence), stačí sestrojit posloupnost funkcí nabývajících hodnot v intervalu $[0,2]$ konvergujících na $[0,1]$ k 0 bodově, nikoliv však stejnoměrně. To ale není těžké, stačí použít konstrukce posloupnosti funkcí s „klouzajícím hrbem“.

(d) Prostory l^p. Podívejme se na slabou konvergenci v prostorech l^p pro $1 < p < \infty$. Nechť tedy $x_n = (x_1^n, x_2^n, x_3^n, \dots) \in l^p$. Potom $x_n \stackrel{w}{\to} 0$, právě když posloupnost $\{x_n\}$ je omezená a $\lim_{n\to\infty} x_j^n = 0$ pro každé j (jinými slovy, posloupnost $\{x_n\}$ musí konvergovat k 0 po jednotlivých souřadnicích).

Návod. Položíme-li $f_n := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, jsou f_n prvky l^q, kde q je sdružený exponent k p. Navíc jejich lineární kombinace jsou v l^q husté. Nyní stačí použít větičku v (a) a vzpomenout si, jak lze reprezentovat duál k l^p. ♣

Poznámka. Situace v prostoru l^1 je zcela specifická. O tom vypovídá Schurovo lemma v *3.2.

(e) Prostor $L^p([0,1])$. Posloupnost $\{f_n\}$ z $L^p([0,1])$, kde $1 < p < \infty$, konverguje slabě k $f \in L^p([0,1])$, právě když posloupnost $\{f_n\}$ je omezená a

$$\int_0^t f_n \to \int_0^t f \quad \text{pro každé} \quad t \in [0,1].$$

To nahlédnete snadno pomocí uvedené větičky (a), uvědomíte-li si, že množina funkcí $\{c_{[0,t)} : t \in [0,1]\}$ je totální v $L^q([0,1])$, kde q je sdružený exponent k p.

`(f) Prostory` L^p. Posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje slabě v prostoru $L^p(\Omega,\mathcal{S},\mu)$, kde $(\Omega,\mathcal{S},\mu)$ je prostor s mírou a $1<p<\infty$, právě když je omezená a

$$\int_E f_n\,d\mu \to \int_E f\,d\mu \quad \text{pro každou množinu} \quad E\in\mathcal{S}\ ,\ \mu E<\infty\,.$$

Konverguje-li posloupnost $\{f_n\}$ v míře, konverguje i slabě.

`(g)` **Poznámka.** Posloupnost funkcí $\{f_n\}$ na prostoru s mírou $(\Omega,\mathcal{S},\mu)$ *konverguje v míře* k funkci f, jestliže $\mu\{\omega\in\Omega : |f_n(\omega)-f(\omega)|\geq\varepsilon\}\to 0$ ať volíme $\varepsilon>0$ jak chceme.

Návod. Charakteristické funkce množin ze σ-algebry $\mathcal{S}$ tvoří totální podmnožinu v duálu k prostoru $L^p(\Omega,\mathcal{S},\mu)$. ♣

`(h) Prostor` L^1. Nechť μ je σ-konečná míra, $f_n\in L^1(X,\mathcal{S},\mu)$. Potom $f_n\xrightarrow{w}0$, právě když posloupnost $\{\|f_n\|_1\}$ je omezená a posloupnost $\{\int_S f_n\,d\mu\}$ konverguje pro každou množinu $S\in\mathcal{S}$.

Návod. Opět charakteristické funkce množin z $\mathcal{S}$ jsou totální v duálu k $L^1(X,\mathcal{S},\mu)$ (kterýžto lze izometricky-izomorfně ztotožnit s prostorem $L^\infty(X,\mathcal{S},\mu)$. ♣

Poznámka. Pro obecný prostor s mírou stačilo předpokládat, že posloupnost $\{\int_S f_n\,d\mu\}$ konverguje pro každou množinu $S\in\mathcal{S}$ σ-konečné míry.

`(k) Prostor` $\mathcal{M}(K)$. Značí-li $\mathcal{M}(K)$ Banachův prostor všech Radonových měr na kompaktu K, potom posloupnost měr $\{\mu_n\}$ konverguje slabě k 0 na $\mathcal{M}(K)$, právě když $\sup\{\|\mu_n\| : n\in\mathbf{N}\}<\infty$ a $\mu_n B\to 0$ pro každou borelovskou množinu $B\subset K$.

Návod. Důkaz lze nalézt v monografii A. Wilansky [*1978], kap. 14.6.

`(l) Hilbertův prostor`. Posloupnost prvků $\{x_n\}$ Hilbertova prostoru H konverguje slabě k x, jestliže $(x_n,h)\to(x,h)$ pro každé $h\in H$.

Návod. Stačí si vzpomenout na Fréchet-Rieszovu větu o reprezentaci 2.9. ♣

`(m) Protipříklady`. Posloupnost $\{\sin nx\}$ konverguje slabě k 0 v libovolném prostoru $L^p([0,1])$. Protože žádná její vybraná podposloupnost nekonverguje na $[0,1]$ skoro všude, nemůže posloupnost $\{\sin nx\}$ konvergovat v míře (viz větu 12.4 v [LM]).

Rovněž tak posloupnost jednotkových vektorů $e_n := (0,\dots,0,1,0,\dots)$ konverguje slabě k 0 v prostorech l^p pro $1<p<\infty$, nekonverguje však k 0 v míře, uvažujeme-li na $\mathbf{N}$ aritmetickou míru.

Posloupnost funkcí $f_n := nc_{[0,\frac{1}{n})}$ konverguje skoro všude k 0 na $[0,1]$, konverguje tedy i k 0 v (Lebesgueově) míře, nekonverguje však k 0 slabě v prostoru $L^1([0,1]$. K ověření posledního tvrzení se stačí podívat na charakteristiku v (e) a spočítat příslušné integrály.

***3.2. Schurovo lemma.** *Každá slabě konvergentní posloupnost v prostoru l^1 je i (silně) konvergentní.*

Důkaz. Kdyby tvrzení neplatilo, našli bychom posloupnost $\{x_n\}\subset l^1$, $x_n=(x_1^n,x_2^n,x_3^n,\dots)$ a $\varepsilon>0$ tak, že

$$\|x_n\|=\sum_{j=1}^{\infty}|x_j^n|>5\varepsilon \quad\text{a}\quad \varphi(x_n)\to 0$$

pro každý funkcionál $\varphi\in(l^1)^*$. Použijeme-li charakteristiku duálu k l^1 z 2.14.c pro speciální volbu $\varphi=(0,\dots,0,1,0,\dots)$ (cifra 1 na k-tém místě), dostáváme, že $\lim_{n\to\infty}x_k^n=0$ pro každé k. Dále konstruujme indukcí dvě posloupnosti $1<n_1<n_2<\dots$ a $1<m_1<m_2<\dots$ takto: n_1 bude nejmenší ze všech čísel $n>1$ a m_1 bude nejmenší ze všech $m>1$ pro něž

$$|x_1^{n_1}|<\varepsilon \quad\text{a}\quad \sum_{j=m_1}^{\infty}|x_j^{n_1}|<\varepsilon\,.$$

Dále, n_2 je nejmenší $n > n_1$, pro něž

$$\sum_{j=1}^{m_1} |x_j^{n_2}| < \varepsilon$$

a m_2 je nejmenší $m > m_1$ pro něž

$$\sum_{j=m_2}^{\infty} |x_j^{n_2}| < \varepsilon\,.$$

Takto pokračujeme dále. Nyní zvolíme speciální funkcionál $\varphi_0 = (a_1, a_2, a_3, \dots) \in l^\infty$, a to tak, aby

$$a_j = \operatorname{sign} x_j^{n_k} \quad \text{pro} \quad m_{k-1} \le j < m_k\,.$$

Abychom dostali spor, stačí již jen odhadovat. Pro každé k máme

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j^{n_k} - \sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{n_k}|\right| \le 2 \sum_{j=1}^{m_{k-1}} |x_j^{n_k}| + 2 \sum_{j=m_k}^{\infty} |x_j^{n_k}| < 4\varepsilon\,.$$

Vidíme, že

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j^{n_k}\right| \ge \varepsilon$$

pro každé k, což je ve sporu s tím, že $\varphi_0(x_{n_k}) \to 0$. ■

Jiná myšlenka důkazu. Naznačme stručně jiný důkaz, detaily je třeba provést samostatně. Předpokládejme tedy opět, že $x_n = \{x_n^j\} \xrightarrow{w} 0$. Potřebujeme ukázat, že $\|x_n\|_1 \to 0$. Volme $\varepsilon > 0$ a pro každé n položme

$$F_n := \bigcap_{j \ge n}^{\infty} \{\varphi \in B_{l^\infty} : |\varphi(x_j)| \le \varepsilon\}\,.$$

Potom F_n je w^*-uzavřená podmnožina w^*-kompaktní množiny B_{l^∞} (Alaoglu-Bourbakiho věta 16.6), kterážto je navíc ve w^*-topologii metrizovatelná (využijte separabilitu l^1, charakteristiku duálu k l^1 a větu (a) v *16.2). Poznamenejme ještě, že vhodnou metrikou na B_{l^∞} dávající tam w^*-topologii je třeba $\varrho(\{s_n\}, \{t_n\}) = \sum_n \frac{1}{2^n} |s_n - t_n|$.

Protože $B_{l^\infty} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ (nezapomeňte, že $x_n \xrightarrow{w} 0$), existuje podle Baireovy věty takové m, že množina F_m má neprázdný w^*-vnitřek. Existují tedy $\varphi = \{\varphi^k\} \in F_m$, $N \in \mathbf{N}$ a $\delta > 0$ tak, že

$$\{\{s^k\} \in B_{l^\infty} : |s^j - \varphi^j| < \delta \text{ pro všechna } j = 1, \dots, N\} \subset F_m \subset F_n$$

pro všechna $n \ge m$. Můžeme současně předpokládat, že $\sum_{j=1}^{N} |x_n^j| < \varepsilon$ pro všechna $n \ge m$. Nechť $n \ge m$ je pevné. Definujeme-li $f = \{f^j\} \in B_{l^\infty}$ předpisem

$$f^j = \varphi^j \text{ pro } j = 1, \dots, N \quad \text{a} \quad f^j = \operatorname{sign} x_n^j \text{ pro } j > N\,,$$

je $f \in F_m$, tudíž $|f(x_n)| < \varepsilon$. Konečně dostáváme

$$\|x_n\| = \sum_j |x_n^j| = \sum_{j \le N} |x_n^j| + \left|\sum_{j=1}^{\infty} f^j x_n^j - \sum_{j \le N} f^j x_n^j\right| < 3\varepsilon\,.$$

***3.3. Poznámky**. (a) Z toho, že slabě a silně konvergentní posloupnosti v l^1 splývají, zdaleka ještě neplyne, že by slabá topologie na l^1 splývala s jeho normovou topologií. Ostatně tomu tak ani není, na Banachových prostorech nekonečné dimenze nikdy slabá topologie nesplývá s normovou topologií. Slabá topologie totiž v tomto případě není ani metrizovatelná, viz třeba *16.1.

(b) Jaká je situace v reflexivních Banachových prostorech? Jestliže slabě konvergentní posloupnosti jsou v reflexivním prostoru X i silně konvergentní, musí být uzavřená jednotková koule prostoru X kompaktní. A tedy X musí být konečně dimenzionální. Odtud speciálně plyne, že prostor l^1 nemůže být reflexivní.

(c) Říká se, že Banachův prostor má *Schurovu vlastnost*, pokud v něm každá slabě konvergentní posloupnost je i silně konvergentní. Přihlédneme-li k Eberlein-Šmuljanově větě 16.12, lze říci, že Banachův prostor má Schurovu vlastnost, právě když slabě kompaktní a kompaktní množiny v něm splývají. Prostor l^1 má tedy Schurovu vlastnost.

Platí i obecnější tvrzení. Je-li $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ prostor s mírou mající tu vlastnost, že $\{\omega\} \in \mathcal{S}$ a $\mu\{\omega\} > 0$ pro každé $\omega \in \Omega$, má prostor $L^1(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ Schurovu vlastnost. Důkaz lze nalézt třeba v M.M. Rao [*1987].

Další příklad Banachova prostoru se Schurovou vlastností je sestrojen v článku J. Bourgain and F. Delbaen [1980].

***3.4. O bezpodmínečně konvergentních řadách**. Uvedeme zde některé zajímavé vlastnosti bezpodmínečně konvergentních řad. Většinou bez důkazů. Čtenář může konzultovat monografie uvedené v *3.8. Existuje celá řada ekvivalentních definic bezpodmínečné konvergence. Uveďme následující větu, další postřehy jsou v poznámce *3.6.

(a) Věta. *Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků Banachova prostoru X. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) *řada $\sum_n x_n$ konverguje bezpodmínečně,*
(ii) *řada $\sum_n \alpha_n x_n$ konverguje pro libovolnou posloupnost $\{\alpha_n\}$ složenou z $+1$ a -1,*
(iii) *řada $\sum_n \lambda_n x_n$ konverguje pro libovolnou omezenou posloupnost $\{\lambda_n\}$,*
(iv) *řada $\sum x_{n_k}$ konverguje pro každou posloupnost $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$.*

Poznámka. Povšimněte si, že posloupnost $\{\alpha_n\}$ složená pouze z čísel $+1$ a -1 je vlastně extremálním bodem uzavřené jednotkové koule prostoru l^∞ všech omezených posloupností. Nešlo by využít Krejn-Milmanovy věty 18.5 pro důkaz implikace (ii) $\Rightarrow$ (iii)?

(b) Gelfandova věta. *Nechť řada $\sum_n x_n$ konverguje v Banachově prostoru X bezpodmínečně. Potom $\{\sum_n \alpha_n x_n : \alpha_n = 1$ či $\alpha_n = -1\}$ je kompaktní podmnožina X.*

Již jsme se zmiňovali o slavné Dvoretzky-Rogersově větě, podle níž v každém Banachově prostoru nekonečné dimenze existuje bezpodmínečně konvergentní řada, která není absolutně konvergentní. Tuto větu uvedeme nyní v mnohem konkrétnější podobě.

(c) Dvoretzky-Rogersova věta. *Nechť X je nekonečně dimenzionální Banachův prostor a nechť $\{\lambda_n\} \in l^2$. Potom v X existuje bezpodmínečně konvergentní řada $\sum_n x_n$ tak, že $\|x_n\| = |\lambda_n|$ pro každé n.*

Poznámka. Existují „geometrické“ ne zrovna snadné důkazy této věty (viz třeba J. Diestel, H. Jarchow and A. Tonge [*1995] či J.T. Marti [*1969]). V *10.4.e ukážeme zcela odlišný důkaz „klasické“ Dvoretzky-Rogersovy věty.

Zvolíme-li tedy posloupnost $\{\lambda_n\} \in l^2 \setminus l^1$, zaručuje Dvoretzky-Rogersova věta existenci bezpodmínečně konvergentní řady v X, která nemůže konvergovat absolutně. Je otázkou, zda by nebylo možno „vylepšit“ Dvoretzky-Rogersovu větu a prostor l^2 nahradit kupříkladu prostorem l^3. Odpověď dává následující klasická Orliczova věta, jejíž důkaz lze opět nalézt v obou posledně jmenovaných monografiích.

(d) Orliczova věta. *Nechť $\sum_n f_n$ je bezpodmínečně konvergentní řada v Banachově prostoru $L^1([0,1])$. Potom $\{\|f_n\|\} \in l^2$.*

***3.5. O slabě bezpodmínečně konvergentních řadách**. Řadu $\sum_n x_n$ v Banachově prostoru X nazveme *slabě bezpodmínečně konvergentní*, jestliže bezpodmínečně konverguje číselná řada $\sum_n \varphi(x_n)$ ať si volíme $\varphi \in X^*$ jak chceme. Jinými slovy, protože se jedná o číselnou řadu, požadujeme, aby $\sum_n |\varphi(x_n)| < \infty$ pro každé $\varphi \in X^*$. Samozřejmě každá bezpodmínečně konvergentní řada je i slabě bezpodmínečně konvergentní.

Terminologie je trochu zavádějící, měli bychom raději mluvit o *slabě bezpodmínečně cauchyovských* řadách, neboť slabě bezpodmínečně konvergentní řada vůbec totiž nemusí (ani slabě) konvergovat. Stačí si vzít příklad řady $\sum_n e_n$ v prostoru c_0, kde, jako obvykle, e_n značí standardní jednotkový vektor $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$. Ta je určitě slabě bezpodmínečně konvergentní, avšak v c_0 nekonverguje (ani slabě).

Následující postřeh porovnejte s charakteristikou uvedenou v *3.4.

Větička. *Řada $\sum_n x_n$ je slabě bezpodmínečně konvergentní, právě když řada $\sum_n \beta_n x_n$ konverguje pro každou posloupnost $\{\beta_n\} \in c_0$.*

Důkaz. Nechť je splněna podmínka. Volme $\varphi \in X^*$. Protože potom řada $\sum_n \beta_n \varphi(x_n)$ konverguje pro každou posloupnost $\{\beta_n\} \in c_0$, je podle 4.22.k $\sum_n |\varphi(x_n)| < \infty$.

Nechť naopak $\sum_n x_n$ slabě bezpodmínečně konverguje. Volme $\{\beta_n\} \in c_0$. Definice slabé bezpodmínečné konvergence vlastně říká, že operátor $T : \varphi \in X^* \mapsto \{\varphi(x_n)\} \in l^1$ je dobře definován. Pomocí věty o uzavřeném grafu 4.19 není těžké zjistit, že T je omezený operátor. Potom s přihlédnutím k 2.24 pro $n > k$ máme

$$\Big\|\sum_{j=k}^{n} \beta_j x_j\Big\| = \sup\Big\{\Big|\varphi\Big(\sum_{j=k}^{n} \beta_j x_j\Big)\Big|\Big\} \le \max\{|\beta_k|, \dots, |\beta_n|\} \sup\{\sum_{j=k}^{n} |\varphi(x_j)| : \|\varphi\| \le 1\}$$

$$\le \max\{|\beta_k|, \dots, |\beta_n|\} \sup\{\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)| : \|\varphi\| \le 1\}$$

$$\le \max\{|\beta_k|, \dots, |\beta_n|\} \sup\{\|T\varphi\| : \|\varphi\| \le 1\} \le \max\{|\beta_k|, \dots, |\beta_n|\} \|T\|.$$

Odtud již tvrzení lehko plyne. ■

***3.6. Poznámky**. Porovnejte následující dvě tvrzení. Důkaz některých jejich implikací si můžete do detailů udělat jako užitečné cvičení.

(a) Věta uc. *Nechť $\sum_n x_n$ je řada v Banachově prostoru X. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) *řada $\sum_n x_n$ konverguje bezpodmínečně,*
(ii) *řada $\sum_n \lambda_n x_n$ konverguje pro každou omezenou posloupnost $\{\lambda_n\} \in l^\infty$,*
(iii) *zobrazení $\{\beta_n\} \mapsto \sum_n \beta_n x_n$ je kompaktní operátor z $\mathcal{L}(c_0, X)$,*
(iv) *zobrazení $\varphi \mapsto \{\varphi(x_n)\}$ je kompaktní operátor z $\mathcal{L}(X^*, l^1)$.*

Návod. Ekvivalenci (i) a (ii) jsme již uvedli v *3.4.a. Pro důkaz ekvivalence (iii) a (iv) nezapomeňte na Schauderovu větu 2.53, podle které je operátor T kompaktní, právě když jeho adjungovaný T' je kompaktní. Implikace (ii) $\Rightarrow$ (iii) vyžaduje poměrně dost práce. ♣

(b) Věta wuc. *Následující podmínky jsou ekvivalentní pro řadu $\sum_n x_n$ v Banachově prostoru X:*

(i) *$\sum_n x_n$ je slabě bezpodmínečně konvergentí řada,*
(ii) *řada $\sum_n \beta_n x_n$ konverguje pro každou posloupnost $\{\beta_n\} \in c_0$,*
(iii) *zobrazení $\{\beta_n\} \mapsto \sum_n \beta_n x_n$ je omezený operátor z $\mathcal{L}(c_0, X)$,*
(iv) *zobrazení $\varphi \mapsto \{\varphi(x_n)\}$ je omezený operátor z $\mathcal{L}(X^*, l^1)$.*

Návod. Podmínky (i) a (ii) jsou ekvivalentní podle definice. Je-li $\sum_n x_n$ slabě bezpodmínečně konvergentní a $\varphi \in X^*$, je podle definice $\{\varphi(x_n)\}$ prvek prostoru l^1. Zobrazení $\varphi \mapsto \{\varphi(x_n)\}$ je evidentně lineární a podle věty o uzavřeném grafu i spojité. ♣

V analogii s větou *3.4.a by se mohlo zdát, že řada $\sum_n x_n$ je slabě bezpodmínečně konvergentní, právě když řada $\sum x_{n_k}$ slabě konverguje pro každou posloupnost $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$. Tomu však zdaleka tak není. Posuďte sami na základě následující věty.

(c) Orlicz-Pettisova věta. *Nechť pro každou rostoucí posloupnost $\{n_k\}$ řada $\sum_k x_{n_k}$ konverguje slabě k nějakému prvku daného Banachova prostoru X. Potom již řada $\sum_n x_n$ konverguje bezpodmínečně.*

Ukázali jsme, že v prostoru c_0 existuje slabě bezpodmínečně konvergentní řada, která není konvergentní bezpodmínečně. Následující věta říká, že pokud Banachův prostor „neobsahuje“ prostor c_0, nepodaří se nám takový protipříklad najít. Zde je přesná formulace. Podívejte se však předem na 2.31, co znamená, že Banachův prostor obsahuje kopii jiného prostoru.

(d) Bessaga-Pe␣lczyńského věta. *Banachův prostor X neobsahuje (izomorfní) kopii c_0, právě když každá slabě bezpodmínečně konvergentní řada v X je i bezpodmínečně konvergentní.*

***3.7. O podmínečně konvergentních řadách**. V prostorech konečné dimenze absolutně a bezpodmínečně konvergentní řady splývají, v nekonečné dimenzi nikoliv. Neabsolutně konvergentní řady jsou ty, které sice konvergují, ale nekonvergují absolutně. Nám nyní půjde o vyšetřování řad v nekonečně dimenzionálních prostorech a o řady, které sice konvergují, nikoliv však bezpodmínečně. Tyto řady budeme nazývat *podmínečně konvergentní*. Je-li $\sum_n x_n$ řada v Banachově prostoru X, budeme značit symbolem $\mathcal{D}[\sum_n x_n]$ množinu všech prvků $x \in X$, k nimž existuje permutace $\pi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ tak, že $\sum_n x_{\pi(n)} = x$. Jestliže tedy řada $\sum_n x_n$ konverguje bezpodmínečně, redukuje se množina $\mathcal{D}[\sum_n x_n]$ na jeden bod. V konečné dimenzi lze vyslovit následující větu.

(a) **Lévy-Steinitzova věta.** *Nechť* $\sum_n x_n$ *je podmíněně konvergentní řada v* $\mathbf{R}^n$. *Potom množina* $\mathcal{D}[\sum_n x_n]$ *je afinní podmnožina* $\mathbf{R}^n$.

Poznámka. Podmnožina $\mathcal{A}$ vektorového prostoru W se nazývá *afinní*, existuje-li $w \in W$ a lineární podprostor $L \subset\subset W$ tak, že $\mathcal{A} = w + L$. V Lévy-Steinitzově větě lze množinu $\mathcal{D}[\sum_n x_n]$ blížeji popsat. Nechť $\sum_n x_n$ je podmíněně konvergentní řada v $\mathbf{R}^n$ a $s = \sum_n x_n$. Označíme-li

$$\Gamma = \{\varphi \in (\mathbf{R}^n)^* : \sum_n |\varphi(x_n)| < \infty\} \quad \text{a} \quad {}^\perp\Gamma = \{x \in \mathbf{R}^n : \varphi(x) = 0 \text{ pro } \varphi \in \Gamma\},$$

je $\mathcal{D}[\sum_n x_n] = s + {}^\perp\Gamma$.

Struktura a popis množiny $\mathcal{D}[\sum_n x_n]$ pro podmíněně konvergentní řady v prostorech nekonečné dimenze je dramaticky jiná. Uvedeme pouze pár výsledků a příkladů, jinak odkážeme opět na monografii V.M. Kadets and M.I. Kadets [*1991].

(b) **Příklady a protipříklady.** Sám S. Banach ve známé „Skotské knize“ položil otázku, zda v prostorech nekonečné dimenze musí být množina $\mathcal{D}[\sum_n x_n]$ afinní a za vyřešení problému nabídl láhev vína. Dnes je známo, že množina $\mathcal{D}[\sum_n x_n]$ nemusí být ani konvexní ani uzavřená. Co je však překvapující, může být jednobodová. Existuje tedy příklad konvergentní řady, která není bezpodmínečně konvergentní, nicméně součty všech jejích konvergentních přerovnání jsou stejné. Takový příklad sestrojil H. Hadwiger [1941] v prostoru l^2. Zde je.

Nechť $\{e_n\}$ je kanonická ortonormální báze Hilbertova prostoru l^2 ($e_n := (0,\dots,0,1,0,\dots)$). Podívejme se na řadu

$$e_1 + \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{4}e_3 - \frac{1}{4}e_3 + \frac{1}{4}e_3 - \frac{1}{4}e_3 + \frac{1}{8}e_4 - \frac{1}{8}e_4 + \frac{1}{8}e_4 - \dots.$$

To je zaručeně konvergentní řada mající součet e_1. Tato řada nekonverguje bezpodmínečně. Stačí si totiž uvědomit, že řada

$$e_1 + \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{4}e_3 + \frac{1}{4}e_3 + \frac{1}{4}e_3 + \frac{1}{4}e_3 + \frac{1}{8}e_4 + \frac{1}{8}e_4 + \frac{1}{8}e_4 + \dots$$

nekonverguje a použít kriterium v *3.4.a. Trochu práce si dá rozmyslet, že tato řada po libovolném přerovnání, které konverguje, má stále součet e_1. Pusťme se do návodu. Nechť $\sum_n a_n = \alpha$ je nějaké konvergentní přerovnání naší řady se součtem α. V posloupnosti $\{a_n\}$ se jednou vyskytne prvek e_1; pro $k > 1$ pak 2^{k-2}-krát prvek $\frac{1}{2^{k-1}}e_k$ a 2^{k-2}-krát prvek $-\frac{1}{2^{k-1}}e_k$. Tedy ať si volíme $k > 1$ velké jak chceme, vždy nejdeme n_0 tak, že $(a_1 + \dots + a_n, e_k) = 0$ pro každé $n > n_0$. Odtud dostaneme, že $(\alpha, e_k) = 0$ pokud $k > 1$ a analogicky $(\alpha, e_1) = 1$. Závěr je nasnadě, musí být $\alpha = e_1$.

Později C.W. McArthur [1956] ukázal, že v každém Banachově prostoru nekonečné dimenze se najde konvergentní řada $\sum_n x_n$, která není bezpodmínečně konvergentní a pro niž množina $\mathcal{D}[\sum_n x_n]$ je jednobodová.

V.M. Kadets [1986] dokázal, že v každém nekonečně dimenzionálním Banachově prostoru existuje konvergentní řada $\sum_n x_n$, pro niž množina $\mathcal{D}[\sum_n x_n]$ není konvexní.

Dlouhou dobu byl otevřený problém, zda existují řady, pro něž by množina $\mathcal{D}[\sum_n x_n]$ byla dvoubodová. Odpověď přišla nedávno. Problém vyřešili P. Enflo (řešení však nepublikoval), M.I. Kadets and K. Woźniakowski [1989] a P.A. Kornilov [1988a] a [1988b]. Dokázali dokonce následující větu.

(c) **Věta.** *V každém nekonečně dimenzionálním Banachově prostoru existuje konvergentní řada* $\sum_n x_n$, *pro niž množina* $\mathcal{D}[\sum_n x_n]$ *je přesně dvoubodová.*

***3.8. Závěrečné poznámky.** O problematice různých konveregencí řad v Banachových prostorech se lze dočíst v nedávno vyšlých monografiích V.M. Kadets and M.I. Kadets [*1991], J. Diestel, H. Jarchow and A. Tonge [*1995] či M.I. Kadets and V.M. Kadets [*1997].

*4. Základní věty funkcionální analýzy

***4.1. Další vlastnosti kompaktních operátorů.** Podívejme se blížeji na obrazy jednotkové koule a celého prostoru při kompaktních zobrazeních. Nejdříve však uveďme následující maličkost.

(a) Postřeh. *Nechť $L \in \mathcal{L}(X,Y)$ je omezený lineární operátor mezi normovanými lineárními prostory X a Y. Potom L je slabě spojitý.*

Návod. Nechť zobecněná posloupnost $\{x_\gamma\}$ slabě konverguje k prvku x v X a $\varphi \in Y^*$. Potom

$$\lim_\gamma \varphi(Lx_\gamma) = \lim_\gamma L'(\varphi)(x_\gamma) = L'(\varphi)(x) = \varphi(Lx)\,.$$

Tedy $\{Lx_\gamma\}$ konverguje slabě k Lx. Porovnejte ostatně s 3.14.b a 4.22.d. ♣

(b) Věta. *Je-li B_X uzavřená jednotková koule v reflexivním Banachově prostoru X, Y Banachův prostor a $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ kompaktní operátor, potom $K(B_X)$ je kompaktní množina.*

Návod. Podle definice je samozřejmě $K(B_X)$ relativně kompaktní. Banach-Bourbakiho charakteristiky reflexivity v 16.9 říká, že koule B_X je slabě kompaktní. Protože podle (a) je K slabě spojitý, musí být $K(B_X)$ slabě kompaktní, tedy i slabě uzavřená množina. Protože však $K(B_X)$ je konvexní množina, musí být uzavřená podle 15.18. ♣

(c) V nereflexivních Banachových prostorech existují kompaktní operátory, pro něž obraz uzavřené jednotkové koule není množina uzavřená. Je-li X takový prostor, stačí vzít podle Jamesovy věty 16.15 funkcionál $\varphi \in X^*$ nenabývající na B_X svého maxima a uvažovat (konečně rozměrný) operátor $K : x \mapsto a\varphi(x)$ pro vhodné $a \in X$.

(d) Postřeh. Je-li $K \in \mathcal{L}_c(X,Y)$ kompaktní operátor, kde X a Y jsou Banachovy prostory, $\dim Y = \infty$, potom $\mathcal{R}K \neq X$.

Návod. Podle věty o otevřeném zobrazení 4.14 by v případě $\mathcal{R}K = Y$ obraz otevřené jednotkové koule $KU(0,1)$ byl otevřeným okolím 0 a současně by byl množinou relativně kompaktní. Stačí se pak odvolat na Rieszovu větu 5.12. ♣

(e) Tvrzení. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory, a $K \in \mathcal{L}_c(X,Y)$ kompaktní operátor s uzavřeným oborem hodnot $\mathcal{R}K$. Potom $\dim \mathcal{R}K < \infty$.*

Návod. Použijte předchozí (d). ♣

(f) Příklad. Definujme operátor K na l^2 předpisem $K : \{x_n\} \mapsto \{\frac{1}{n+1}x_n\}$. Ukažte, že K je kompaktní operátor a $\mathcal{R}K$ je nekonečně dimenzionální hustý podprostor l^2.

***4.2. Kompaktní operátory na Hilbertově prostoru**. (a) Buď T omezený operátor na Hilbertově prostoru H. Podle věty v 4.12 je T kompaktní, právě když převádí slabě konvergentní posloupnosti v H na (silně) konvergentní. Využijte tuto charakteristiku k důkazu následující „Schauderovy věty“.

Věta. *Operátor T na Hilbertově prostoru je kompaktní, právě když (hermiteovsky) adjungovaný operátor T^* je kompaktní.*

Návod. Předpokládejme, že T je kompaktní a že posloupnost $\{x_n\}$ konverguje slabě k 0. Především, posloupnost $\{x_n\}$ je silně omezená podle 4.7. Dále, protože T^* je spojitý operátor, je podle *4.1.a $T^*x_n \xrightarrow{w} 0$. Podle výše zmíněné charakteristiky kompaktnosti T je $T(T^*x_n) \to 0$. Schwarzova nerovnost nám pomůže v odhadu

$$\|T^*x_n\|^2 = (TT^*x_n, x_n) \le \|TT^*x_n\|\,\|x_n\| \le \|TT^*x_n\| \sup_n\{\|x_n\|\}\,.$$

Vidíme, že $\|T^*x_n\| \to 0$ a využitím zmíněné charakteristiky kompaktnosti dostáváme, že T^* je kompaktní. Je-li T^* kompaktní, je podle právě dokázaného $T = T^{**}$ kompaktní.

Jiný návod. Především si uvědomme, že adjungovaný operátor ke konečně dimenzionálnímu je také konečně dimenzionální. Vskutku, je-li $A \in \mathcal{L}_f(H)$, zobrazuje prostě $(\ker A)^\perp$ na $\mathcal{R}A$ (to ostatně každý operátor). Tudíž $(\ker A)^\perp$ má konečnou dimenzi. Protože podle 5.32.q2 je $\overline{\mathcal{R}A^*} = (\ker A)^\perp$, má $\overline{\mathcal{R}A^*}$, a tedy také $\mathcal{R}A^*$ konečnou dimenzi.

Podle *4.2.d je kompaktní operátor T limitou (v $\mathcal{L}(H)$) posloupnosti konečně dimenzionálních operátorů. Tudíž i T^* je limitou konečně dimenzionálních operátorů, jak se lehko přesvědčíme. Pak již stačí jen použít 2.47. ♣

(b) Tvrzení. *Jsou-li $\{e_n\}$ a $\{f_n\}$ ortonormální soustavy v Hilbertově prostoru H, $\lambda_n \to 0$ posloupnost komplexních čísel a*

$$Tx := \sum_n \lambda_n (x, e_n) f_n \quad \textit{pro} \quad x \in H\,,$$

je T kompaktní operátor.

Návod. Nechme posloupnost $\{x_j\}$ slabě konvergovat k 0 v H. Protože $L_n : x \mapsto (x, e_n)$ je spojitý lineární funkcionál na H, je $\lim_j (x_j, e_n) = 0$ pro každé n. Nyní použijte Parsevalovu rovnost (ale pozor, posloupnost $\{e_n\}$ nemusí být bází H, je to však ortonormální báze podprostoru $(\ker T)^{\perp}$)

$$\|Tx_j\|^2 = \sum_{n=1}^{k} |\lambda_j|^2 \big|(x_j, e_n)\big|^2 + \sum_{n=k+1}^{\infty} |\lambda_j|^2 \big|(x_j, e_n)\big|^2\,,$$

předpokladu $\lambda_n \to 0$ a omezenosti posloupnosti $\{x_j\}$ k tomu, abyste dokázali, že $Tx_j \to 0$. ♣

(c) Schmidtovo vyjádření kompaktního operátoru. *Nechť T je kompaktní (ne nutně hermiteovský) operátor na Hilbertově prostoru H. Potom existují ortonormální soustavy $\{e_n\}$ a $\{f_n\}$ v H a posloupnost nezáporných čísel $\lambda_n \to 0$ tak, že*

$$Tx = \sum_n \lambda_n (x, e_n) f_n \quad \textit{pro každé} \quad x \in H\,.$$

Návod. Operátor T^*T je kompaktní (kompaktní operátory tvoří ideál podle poznámky 2.48.b) a pozitivní. Podle Hilbert-Schmidtovy věty 8.20 existuje ortonormální soustava $\{e_n\}$ a posloupnost nezáporných (T^*T je pozitivní!) čísel $\lambda_n \to 0$ tak, že

$$T^*Tx = \sum_n \lambda_n (x, e_n)\, e_n$$

pro $x \in H$. Nyní použijeme polární rozklad operátoru T z *9.2. Můžeme jednoznačně psát $T = V\sqrt{T^*T}$, kde V je částečná izometrie. Položíme-li $f_n = Ve_n$, dostáváme

$$Tx = \sum \sqrt{\lambda_n}\, (x, e_n)\, f_n\,.$$

♣

Poznámka. Posloupnost nezáporných čísel $\{\lambda_n\}$ je tvořena vlastními hodnotami operátoru $|T| = \sqrt{T^*T}$, přičemž $\{f_n\}$ je ortonormální posloupnost vlastních vektorů operátoru TT^*.

(d) Věta. *Je-li T kompaktní operátor na Hilbertově prostoru, existuje posloupnost $\{T_n\}$ konečně dimenzionálních operátorů tak, že $T_n \to T$.*

Návod. Podle (c) vyjádřeme $Tx = \sum_n \lambda_n (x, e_n) f_n$. Stačí položit $T_k x := \sum_{n=1}^{k} \lambda_n (x, e_n) f_n$ a využít odhadu $\big\|(T_k - T)\big\|^2 \le \sup\{|\lambda_n|^2 : n > k\}$.
Jiný návod. Volme $\varepsilon > 0$. Protože obraz TB_H uzavřené jednotkové koule B_H je prekompaktní, existují $x_1, \dots, x_n \in H$ tak, že $\bigcup_{j=1}^{n} U(x_j, \varepsilon) \supset TB_H$. Nechť Y je podprostor H generovaný body $x_1, \dots, x_n$ a P ortogonální projekce H na Y. Volíme-li $x \in B_H$, je $\|Tx - PTx\| = \inf\{\|Tx - y\| : y \in Y\} \le \varepsilon$. Tudíž $\|T - PT\| \le \varepsilon$. ♣

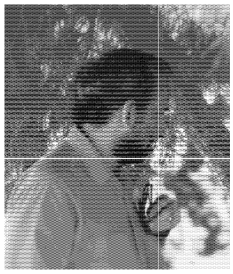
***4.3. Kompaktní a úplně spojité operátory**. V poznámce 4.12 jsme ukázali, že na reflexivních Banachových prostorech splývají třídy kompaktních a úplně spojitých operátorů. V této souvislosti je zajímavá i následující věta a poznámka. Předešleme ještě, že posloupnost $\{x_n\}$ prvků Banachova prostoru X je *slabě cauchyovská*, jestliže pro každé $\varphi \in X^*$ je číselná posloupnost $\{\varphi(x_n)\}$ cauchyovská (což je právě tehdy, když posloupnost $\{\varphi(x_n)\}$ je konvergentní).

(a) **Věta.** *Buď K úplně spojitý operátor na Banachově prostoru X se separabilním duálem X^*. Potom K je kompaktní operátor.*

Návod. Buď $\{x_n\}$ posloupnost z jednotkové koule v X a $\{\varphi_n\}$ hustá podmnožina X^*. Diagonální metodou vyberme z posloupnosti $\{x_n\}$ podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ tak, aby posloupnost $\{\varphi_j(x_{n_k})\}$ konvergovala pro každé $j \in \mathbf{N}$. Využijeme-li hustoty $\{\varphi_n\}$ a omezenosti posloupnosti $\{x_{n_k}\}$, dostaneme, že posloupnost $\{x_{n_k}\}$ je slabě cauchyovská. Nyní si musíme ujasnit, že úplně spojité operátory převádějí slabě cauchyovské posloupnosti na silně cauchyovské. K tomu by se mohla hodit tato charakteristika cauchyovských posloupností: Posloupnost $\{x_n\}$ je cauchyovská, právě když pro každé dvě rostoucí posloupnosti indexů $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ a $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ je $x_{n_j} - x_{k_j} \to 0$. Majíce toto na paměti, je již jen krůček k závěru, že K je kompaktní.

Jiný argument. Nechť opět $\{x_n\}$ je posloupnost z B_X a ε kanonické vnoření X do X^{**}. Protože X^* je separabilní, je jednotková koule v X^{**} metrizovatelná ve w^*-topologii podle *16.2.A. Odvoláme-li se na Alaoglu-Bourbakiho větu 15.19, existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ a $F \in X^{**}$ tak, že $\varepsilon(x_{n_k}) \xrightarrow{w^*} F$. Odtud vyplyne, že posloupnost $\{x_{n_k}\}$ je slabě cauchyovská v X (neboť pro každé $\varphi \in X^*$ potom máme $\varepsilon(x_{n_k})(\varphi) = \varphi(x_{n_k}) \to F(\varphi)$). Závěr důkazu je stejný jako výše. ♣

(b) **Poznámka.** Podívejme se blížeji na důkazy tvrzení vět, v nichž jsme tvrdili, že třídy kompaktních a úplně spojitých operátorů na Banachově prostoru X splývají. V případě reflexivního prostoru X v 4.12 jsme potřebovali vybrat z omezené posloupnosti v X posloupnost slabě konvergentní. V případě separabilního duálu X^* jsme zase z každé omezené posloupnosti vybrali posloupnost slabě cauchyovskou. Analýzou posledního důkazu tedy dostaneme, že úplně spojité a kompaktní operátory na Banachově prostoru X splývají, podaří-li se nám z každé omezené posloupnosti prvků X vybrat slabě cauchyovskou posloupnost. Můžeme se ptát, jaké prostory mají tuto vlastnost. Samozřejmě, jak jsme podotkli, reflexivní prostory či prostory se separabilním duálem mezi ně patří. Hluboká, poměrně nedávno dokázaná *Rosenthalova l^1-věta* říká, že jsou to právě prostory, které neobsahují izomorfní kopii prostoru l^1. Vyslovme tuto větu z H.P. Rosenthal [1974] ve formě dichotomie (podobně jako Fredholmovu alternativu). Její (netriviální) důkaz používající kombinatorických úvah lze nalézt v J. Diestel [*1984].


H. Rosenthal

(c) **Rosenthalova dichotomie.** *Nechť X je Banachův prostor. Potom buďto z každé jeho omezené posloupnosti lze vybrat slabě cauchyovskou posloupnost anebo X obsahuje izomorfní kopii l^1.*

Není mi známo, zda platí následující domněnka.

(d) **Domněnka.** *Buď X Banachův prostor. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *každý operátor na X, který převádí slabě konvergentní posloupnosti na silně konvergentní, je kompaktní,*
(ii) *z každé omezené posloupnosti v X lze vybrat slabě cauchyovskou,*
(iii) *X neobsahuje izomorfní kopii l^1.*

*5. Riesz-Schauderova teorie kompaktních operátorů

***5.1. Rieszovo číslo.** Uvažujme kompaktní operátor K na nekonečně dimenzionálním Banachově prostoru X a komplexní číslo $\lambda \neq 0$. Pro $n = 0, 1, 2, \dots$ označme

$$M_n := \mathcal{R}(K - \lambda I)^n \quad \text{a} \quad N_n := \ker(K - \lambda I)^n \,.$$

Poznamenejme, že $X = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots$ a $\{0\} = N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \dots$ jsou uzavřené podprostory X. Projdeme-li si pozorně první část důkazu Fredholmovy alternativy 5.24, dojdeme k následujícímu tvrzení.

(a) **Věta.** *Existuje takové $q \in \mathbf{N}$, že $M_n = M_{n+1}$ pro $n \geq q$ a $M_n \neq M_{n+1}$ pro $n = 0, 1, \dots, q-1$.*

Důkaz. Jak jsme již poznamenali, sledujíce důkaz Fredholmovy alternativy 5.24, dostáváme existenci n, pro něž $M_n = M_{n+1}$. Buď q nejmenší přirozené číslo s touto vlastností. Potom

$$M_{q+2} = (K - \lambda I)M_{q+1} = (K - \lambda I)M_q = M_{q+1} \,.$$

Odtud plyne, že $M_{q+j} = M_q$ pro každé j. ■

Obdobně dokážeme následující větu.

(b) **Věta.** *Existuje takové $p \in \mathbf{N}$, že $N_n = N_{n+1}$ pro $n \geq p$ a $N_n \neq N_{n+1}$ pro $n = 0, 1, \dots, p-1$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $N_n \neq N_{n+1}$ pro každé n. Obdobně jako v důkazu Fredholmovy alternativy nalezneme posloupnost prvků $\{x_n\}$ z jednotkové sféry s vlastností, že $\|Kx_m - Kx_n\| \geq \frac{|\lambda|}{2}$ pro každou dvojici $m > n$. To je ovšem v rozporu s kompaktností operátoru K. Buď opět p nejmenší přirozené číslo n, pro něž nastane rovnost $N_n = N_{n+1}$. Volme $k > p$ a $x \in N_k$ libovolně. Protože $(K - \lambda I)^{p+1}\big((K - \lambda I)^{k-p-1}x\big) = (K - \lambda I)^k x = 0$, je $(K - \lambda I)^{k-p-1}x \in N_{p+1} = N_p$. Odtud plyne $(K - \lambda I)^{k-1}x = (K - \lambda I)^p\big((K - \lambda I)^{k-p-1}x\big) = 0$, což nám ukazuje, že $x \in N_{k-1}$. ■

(c) **Věta.** *Čísla p a q z vět (a) a (b) jsou stejná.*

Důkaz. Myšlenka důkazu je následující. Především ukážeme, že $N_{q+1} = N_q$. Odtud plyne $q \geq p$. Dále dokážeme, že $X = N_q \oplus M_q$. Potom ovšem bude (nezapomeňte, že $q \geq p$ a $(K - \lambda I)^p N_p = \{0\}$)

$$M_p = (K - \lambda I)^p X = (K - \lambda I)^p M_q + (K - \lambda I)^p N_q = (K - \lambda I)^p M_q = M_{q+p} = M_q\,,$$

což dá opačnou nerovnost $p \geq q$.

Dokazujme nejdřív, že $X = N_q \oplus M_q$. Především musíme ukázat, že $M_q \cap N_q = \{0\}$. Volme tedy $x \in M_q \cap N_q$ a $n \geq \max(p, q)$ tak velké, aby $N_{q+n} = N_n$. Protože $M_n = M_q$, existuje $z \in X$ tak, že $x = (K - \lambda I)^n z$. Jelikož $x \in N_q$, musí z ležet v N_{q+n}. Ale $N_{q+n} = N_n$, z čehož plyne, že $z \in N_n$ a vidíme, že $x = (K - \lambda I)^n z = 0$. Volme nyní $x \in X$ libovolně. Protože $M_q = M_{2q}$, existuje $z \in X$ tak, že $(K - \lambda I)^q x = (K - \lambda I)^{2q} z$. Jelikož

$$x = \big(x - (K - \lambda I)^q z\big) + (K - \lambda I)^q z\,,$$

stačí jenom ukázat, že $\big(x - (K - \lambda I)^q z\big) \in N_q$. Ale to je téměř ihned vidět.

K dokončení důkazu zbývá ověřit inkluzi $N_{q+1} \subset N_q$. Volme tedy $x \in N_{q+1}$. Podle předchozího najdeme $y \in N_q$ a $z \in M_q$ tak, aby $x = y + z$ a stačí ukázat, že $z = 0$. Samozřejmě $z = x - y \in N_{q+1}$. Pokud bude dokonce $z \in N_q$, bude zajisté $z = 0$. Protože však $(K - \lambda I)\big((K - \lambda I)^q z\big) = 0$, zbývá si jen uvědomit, že operátor $K - \lambda I$ je na prostoru M_q prostý a zobrazuje M_q do M_q. Abychom dokázali poslední tvrzení, stačí ukázat, že $K(M_q) \subset M_q$. To ale plyne z rovnosti $M_{q+1} = M_q$. Dále, protože podle předešlého je $N_1 \cap M_q \subset N_q \cap M_q = \{0\}$, je operátor $K - \lambda I \restriction M_q$ prostý. ■

(d) **Rieszovo číslo.** Společná hodnota čísel p a q se někdy nazývá *Rieszovým číslem* operátoru K.

(e) **Poznámka.** Do důkazu poslední věty (c) je vidět mnohem lépe, uvědomíme-li si, že se jedná pouze o algebraickou problematiku. Podejme nyní její alternativní důkaz.

(f) **Věta.** *Nechť W je vektorový prostor, $A : W \to W$ lineární zobrazení, $M_n := \mathcal{R}A^n$ a $N_n := \ker A^n$. Pokud čísla $p := \min\{n : N_n = N_{n+1}\}$ a $q := \min\{n : M_n = M_{n+1}\}$ jsou konečná, potom $p = q$ a $W = M_p \oplus N_p$.*

Důkaz. Především ukážeme, že $W = M_q \oplus N_q$. Volme $x \in M_q \cap N_q$ a $n \geq \max(p, q)$. Protože $x \in M_n$, existuje $z \in W$ tak, že $x = A^n z$. Protože však také $x \in N_q$, je $A^q x = 0$. Odtud máme, že $A^{q+n} z = 0$, tudíž $A^n z = 0$, a konečně $x = 0$. Je-li nyní $y \in W$, je samozřejmě $A^q y \in M^q = M^{2q}$. Existuje tedy $t \in X$ tak, že $A^q y = A^{2q} t$. Protože $y - A^q t \in N_q$ a $y = A^q t + (y - A^q t)$, je $W = M_q \oplus N_q$.

Volme nyní $x \in N^{q+1}$. Protože $x = y + z$, kde $y \in M_q$ a $z \in N_q$, a $A^{q+1}x = 0$, dostáváme $0 = A^{q+1}x = A^{q+1}y + A^{q+1}z = A^{q+1}y = A^q(Ay)$. Vidíme, že $Ay \in N_q$. Protože však $Ay \in M_{q+1} = M_q$, musí být podle předchozího $Ay = 0$. Tudíž $y \in N_1 \subset N_q$. Ježto tedy $y \in M_q \cap N_q$, je opět podle první části důkazu $y = 0$, odkud $x = z \in N_q$. Tím jsme ukázali, že $N_{q+1} \subset N_q$, takže $p \leq q$.

K dokončení důkazu zbývá již jen krůček. Protože

$$M_p = A^p W = A^p(M_q \oplus N_q) = A^{p+q} W + A^p N_q = M_{q+p} + A^p N_p = M_q\,,$$

dostáváme kýženou opačnou nerovnost $p \geq q$. ■

***5.2. Komentář k Rieszovu lemmatu.** (a) Rieszovo lemma 5.10 je dokázáno v F. Riesz [1918]. Riesz sám upozornil na fakt, že v nekonečně dimenzionálních prostorech neplatí Heine-Borelova věta.

(b) Jiný důkaz Rieszovy věty 5.12 náleží G. Choquetovi (viz první díl [*1969]): Nechť v Banachově prostoru X jsou uzavřené omezené množiny kompaktní. Potom existují $x_1, \dots, x_n$ z jednotkové uzavřené koule B_X tak, že množiny $\{x_i + \frac{1}{2}B_X\}$ pokrývají B_X. Nechť Y je lineární obal $\{x_1, \dots, x_n\}$. Jakožto konečně dimenzionální podprostor je uzavřený v X. Je-li $q : X \to X/Y$ kanonické zobrazení, je $q(B_X) = \{0\}$ (neboť $q(B_X) \subset \frac{1}{2}B_{X/Y}$ a q zobrazuje otevřenou jednotkovou kouli v X na otevřenou jednotkovou kouli v X/Y), a tudíž $Y = X$.

(c) Ještě jiný důkaz Rieszovy věty o skoro kolmici lze založit na pozorování, že při kanonickém zobrazení $X \to X/Y$ otevřená jednotková koule v X přejde v otevřenou jednotkovou kouli v X/Y. K danému $\varepsilon > 0$ pak stačí najít $\widehat{x} \in X/Y$ tak, aby $\|\widehat{x}\| \in (1-\varepsilon, 1)$. Potom určitě existuje $y \in \widehat{x}$, $\|y\| \le 1$. Položíme-li $x_\varepsilon := \frac{y}{\|y\|}$, je $\operatorname{dist}(x_\varepsilon, Y) = \frac{1}{\|y\|}\operatorname{dist}(y, Y) = \frac{1}{\|y\|}\|\widehat{x}\| > 1 - \varepsilon$.

(d) C. Kottman [1975] dokázal pomocí kombinatorických úvah následující zesílení Rieszova lemmatu:

Věta. *V každém normovaném lineárním prostoru X nekonečné dimenze existuje posloupnost $\{x_n\}$ prvků jednotkové sféry S_X taková, že $\|x_n - x_k\| > 1$, kdykoliv $n \neq k$.*

Jednoduchý důkaz Kottmanova tvrzení využívající pouze Hahn-Banachovu větu lze nalézt v J. Diestel [*1984].

***5.3. Uzavřenost oboru hodnot lineárního operátoru**. Při důkazu Fredholmových vět jsme viděli, že podstatnou úlohu hrála uzavřenost oboru hodnot jistého operátoru. Podívejme se nyní poněkud podrobněji, co lze říci zcela obecně. Nechť tedy T je omezený lineární operátor na Banachově prostoru X. Symbolem $\mathcal{R}T := T(X)$ označme jeho obor hodnot. Připomeňme, že jádro $\ker T$ operátoru T je vždy uzavřená množina, že podle věty 5.21 $\overline{\mathcal{R}T} = {}^{\perp}\ker T'$, a dále že $\|[x]\| = \operatorname{dist}(x, \ker T)$ je norma ve faktorprostoru $X/\ker T$.

(a) Věta. *Následující výroky pro operátor $T \in \mathcal{L}(X)$ jsou ekvivalentní:*

(i) *$\mathcal{R}T$ je uzavřený,*
(ii) *$\mathcal{R}T = {}^{\perp}\ker T'$,*
(iii) *existuje $\beta > 0$ tak, že $\|Tx\| \ge \beta\,\|[x]\|$ pro každé $x \in X$.*

Návod. Ekvivalence (i) a (ii) je s přihlédnutím k předchozí poznámce zřejmá (snad si ještě uvědomte, že anihilátor je vždy uzavřená množina).

Definujme nyní operátor $\tilde{T} : X/\ker T \to X$ předpisem $\tilde{T}[x] = Tx$. Definice $\tilde{T}$ je korektní. Dále, operátor $\tilde{T}$ je prostý, lineární, omezený a $\mathcal{R}\tilde{T} = \mathcal{R}T$. Předpokládejme, že podmínka (iii) je splněna a $Tx_n \to y$. Potom posloupnost $\{[x_n]\}$ musí být cauchyovská v $X/\ker T$. Existuje tedy $x \in X$ tak, že $[x_n] \to [x]$. Potom ovšem $\tilde{T}[x_n] \to \tilde{T}[x]$, z čehož podle definice $\tilde{T}$ plyne $Tx_n \to Tx$. Vidíme, že $y = Tx$, odkud $y \in \mathcal{R}T$. Konečně, jestliže $\mathcal{R}T$ je uzavřený, tvoří $\mathcal{R}T$ Banachův prostor a operátor $\tilde{T}^{-1} : \mathcal{R}T \to X/\ker T$ je uzavřený. Nyní stačí se odvolat na větu o uzavřeném grafu 4.19 abychom dostali odhad $\|Tx\| = \|\tilde{T}[x]\| \ge \beta\,\|[x]\|$, kde $\frac{1}{\beta} = \|\tilde{T}^{-1}\|$. ♣

(b) Cvičení. *Jestliže $\mathcal{R}T$ má v Banachově prostoru X uzavřený algebraický doplněk, je $\mathcal{R}T$ uzavřený. Speciálně, je-li kodimenze $\mathcal{R}T$ v X konečná, je $\mathcal{R}T$ uzavřený.*

Návod. Porovnejte s 10.3. Důkaz probíhá následovně: Nechť Z je uzavřený algebraický doplněk $\mathcal{R}T$ v X. Potom Z je uzavřený podprostor X a kartézský součin $X \times Z$ je Banachův prostor. Definujme operátor $\widehat{T}$ na $X \times Z$ předpisem $\widehat{T}(x, z) = Tx + z$. Protože $\widehat{T}$ je omezený lineární operátor a $\mathcal{R}\widehat{T} = \mathcal{R}T \oplus Z = X$, existuje podle předešlé věty $\beta > 0$ tak, že

$$\|Tx\| = \|\widehat{T}(x, 0)\| \ge \beta \operatorname{dist}\big((x, 0), \ker \widehat{T}\big) = \beta \operatorname{dist}(x, \ker T) = \beta\,\|[x]\|$$

pro $x \in X$. Použitím stejné věty dostáváme, že operátor T má uzavřený obor hodnot. ♣

(c) Tvrzení. *Nechť $T \in \mathcal{L}(X)$. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) *$\mathcal{R}T$ je uzavřený,*
(ii) *$\mathcal{R}T'$ je uzavřený v X^*,*
(iii) *$\mathcal{R}T'$ je w^*-uzavřený v X^*,*
(iv) *$\mathcal{R}T = {}^{\perp}\ker T'$,*
(v) *$\mathcal{R}T' = (\ker T)^{\perp}$.*

Důkaz. Ekvivalenci (i) a (iv) jsme ukázali v (a). Na důkazu implikací (v) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) nic není. Pokud jde o implikaci (i) $\Rightarrow$ (v), její důkaz lze vést obdobně jako v 5.26. Musíme ovšem využít již dokázanou ekvivalenci (i) a (iii) z věty (a). I důkaz zbývající implikace (ii) $\Rightarrow$ (iv) lze provést v analogickém duchu. Detaily lze nalézt třeba v knize W. Rudin [*1973]. ■

(d) Cvičení. *Jestliže operátor $T \in \mathcal{L}(X)$ zobrazuje omezené uzavřené množiny na uzavřené množiny, potom již $\mathcal{R}T$ je uzavřený.*

Návod. Pokud $\mathcal{R}T$ není uzavřený, existuje podle věty (a) posloupnost $\{x_n\}$ tak, že $Tx_n \to 0$ a $\|[x_n]\| = \operatorname{dist}(x_n, \ker T) = 1$ pro každé n. Nalezněme $z_n \in \ker T$ tak, aby $\|x_n - z_n\| < 2$ a označme jako A uzávěr množiny $\{x_n - z_n : n \in \mathbf{N}\}$. Množina A je omezená a samozřejmě uzavřená. Pokud ukážeme, že množina $A \cap \ker T$ je neprázdná, jsme hotovi. V tom případě totiž existuje $y \in \ker T$ a $k \in \mathbf{N}$ tak, že $\|y - (x_k - z_k)\| < \frac{1}{2}$. Tudíž $\|[x_k]\| = \operatorname{dist}(x_k, \ker T) < \frac{1}{2}$, což je spor. Abychom ukázali, že $A \cap \ker T$ je neprázdná množina, stačí najít $a \in A$ tak, aby $Ta = 0$. Ale to je již snadné. Podle předpokladu je množina $T(A)$ uzavřená a $T(x_n - z_n) = Tx_n \to 0$. Tudíž $0 \in T(A)$. ♣

(e) Cvičení. Ukažte, že pokud operátor $K \in \mathcal{L}(X)$ je kompaktní, operátor $I - K$ zobrazuje omezené uzavřené množiny na uzavřené množiny.

(f) Poznámka. Porovnejte ekvivalenci (i) a (ii) ve větě (a) s druhou Fredholmovou větou 5.26 a následnou poznámkou 5.27. Vidíme, že operátor T má uzavřený obor hodnot, právě když nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby rovnice $Tx = y$ měla řešení pro danou pravou stranu $y \in X$, je $\varphi(y) = 0$ pro každé řešení $\varphi \in X^*$ rovnice $T'\varphi = 0$.

*6. Banachovy algebry

***6.1. Další příklady Banachových algeber**. (a) Buď $\mathcal{C}^1[0,1]$ algebra všech funkcí na intervalu $[0,1]$ majících tam spojitou derivaci. Definujeme-li

$$\|f\| = \max_{t\in[0,1]} |f(t)| + \max_{t\in[0,1]} |f'(t)|\,,$$

je $\mathcal{C}^1[0,1]$ Banachova algebra.

(b) Do Banachovy algebry $\mathcal{C}_0(\Omega)$ všech spojitých funkcí anulujících se v nekonečnu na lokálně kompaktním prostoru Ω patří ty spojité funkce f na Ω, pro něž množina $\{x \in \Omega : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ je kompaktní pro každé $\varepsilon > 0$. Normu i součin zde definujeme stejně jako na prostoru spojitých funkcí. Tato algebra nemá jednotku, pokud Ω není kompaktní.

(c) Banachův prostor $L^1([0,1])$ všech (tříd) integrabilních funkcí s násobením definovaným konvolucí

$$f * g(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)\,dt$$

tvoří komutativní Banachovu algebru.

(d) Na prostoru $\mathcal{M}(\mathbf{R})$ všech Radonových měr na $\mathbf{R}$ definujme *konvoluci měr* předpisem

$$\mu * \nu : B \mapsto \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} c_B(x+y)\,d\mu(x)\,d\nu(y) \quad \text{pro borelovskou množinu} \quad B \subset \mathbf{R}\,.$$

Ukažte, že $\mathcal{M}(\mathbf{R})$ s takto definovaným násobením tvoří komutativní Banachovu algebru, jejíž jednotkou je Diracova míra ε_0 v bodě 0 (neboli Diracova δ-funkce).

Je-li $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$, položme $\mu_f : B \mapsto \int_B f$ (integrace je vzhledem k Lebesgueově míře). Ukažte, že zobrazení

$$\Psi : f \mapsto \mu_f : \mathcal{L}^1(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}(\mathbf{R})$$

je izometrickým homomorfizmem (v obou algebrách uvažujeme konvoluci). Abyste se procvičili, zkuste si dokázat, že $\Psi(\mathcal{L}^1(\mathbf{R}))$ je uzavřený ideál v $\mathcal{M}(\mathbf{R})$.

Poznámka. Obdobně jako v příkladu 6.5.f, lze místo $\mathbf{R}$ uvažovat lokálně kompaktní topologickou grupu G a na prostoru $\mathcal{M}(G)$ všech Radonových měr na G definovat konvoluci (můžeme se odkázat na [LM], odstavec 19.24). Potom $\mathcal{M}(G)$ opět tvoří Banachovu algebru, která je komutativní, právě když grupa G je komutativní. Algebra $\mathcal{M}(G)$ má vždy jednotku rovnu Diracově míře v jednotce grupy G. Pomocí Haarovy míry m (resp. pravé Haarovy míry v nekomutativním případě) můžeme ztotožnit $\mathcal{L}^1(G,m)$ s uzavřenou podalgebrou $\mathcal{M}(G)$. Jen podotkněme, že $\mathcal{L}^1(G,m)$ má jednotku, právě když grupa G je diskrétní, a to je právě v případě, kdy $\mathcal{L}^1(G,m) = \mathcal{M}(G)$.

***6.2. Vnoření Banachovy algebry $\mathcal{A}$ do $\mathcal{L}(\mathcal{A})$.** Nechť $\mathcal{A}$ je Banachova algebra s jednotkou e. Volme pevně $a \in \mathcal{A}$ a uvažujme zobrazení

$$T_a : x \mapsto ax \quad \text{pro} \quad x \in \mathcal{A}\,.$$

Dokazujte sami následující tvrzení:

(a) $T_a \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ a $\|T_a\| \leq \|a\|$.

(b) $\Psi : a \mapsto T_a$ je spojité izomorfní (zachovává všechny algebraické operace) zobrazení $\mathcal{A}$ do $\mathcal{L}(\mathcal{A})$.

(c) Jestliže $\|e\| = 1$, je $\|T_a\| = \|a\|$, a tudíž zobrazení Ψ je izometrie.

(d) Nechť $\mathcal{B} := \mathcal{R}\Psi = \{T_a : a \in \mathcal{A}\}$. Ukažte, že

$$\mathcal{B} = \left\{T \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) : T(xy) = (Tx)y \text{ pro všechna } x, y \in \mathcal{A}\right\},$$

a že $\mathcal{B}$ je uzavřená podalgebra $\mathcal{L}(\mathcal{A})$.

(e) Položíme-li $\|a\|_s = \|T_a\|$, je $\|.\|_s$ norma na $\mathcal{A}$, která je ekvivalentní původní normě. Přitom $\|e\|_s = \|T_e\| = \|I\| = 1$.

Návod. Podle (a) je $\|a\|_s \le \|a\|$. Abychom ukázali, že obě normy jsou ekvivalentní, stačí si uvědomit, že Ψ je spojité lineární zobrazení $\mathcal{A}$ na Banachův prostor $\mathcal{B}$ a použít důsledek 4.16 (srovnejte se cvičením 4.22.n). ♣

(f) Ukažte, že prvek $a \in \mathcal{A}$ je invertibilní, právě když T_a má inverzi v $\mathcal{L}(\mathcal{A})$.

(g) Pomocí (f) odvoďte, že $\sigma(a) = \sigma(T_a)$ pro každé $a \in \mathcal{A}$.

***6.3. Cvičení**. Nechť $\mathcal{A}$ je algebra s jednotkou e a současně Banachův prostor s normou $\|.\|$, v němž operace násobení $(x, y) \mapsto xy$ je separátně spojitá (pokud $z \in \mathcal{A}$ a $x_n \to x$, potom $x_n z \to xz$ a $zx_n \to zx$). Potom na $\mathcal{A}$ existuje ekvivalentní norma $\|.\|_s$ tak, že $(\mathcal{A}, \|.\|_s)$ je Banachova algebra a $\|e\|_s = 1$. (Odtud mimo jiné plyne, že násobení je spojité, je-li spojité separátně, tj. spojité pouze po složkách.)

Návod. Definujte T_a jako v *6.2. Z principu stejnoměrné omezenosti 4.2 použitého na kolekci $\{T_a\}_{a\in\mathcal{A}}$ plyne existence $\beta > 0$ s vlastností $\|xy\| \le \beta\|x\|\,\|y\|$ pro každé $x, y \in \mathcal{A}$. Dále položte $\|a\|_s = \|T_a\|_{\mathcal{L}(\mathcal{A})}$ a postupujte stejně jako v předchozím *6.2. ♣

***6.4. Přidání jednotky**. Buď $\mathcal{A}$ Banachova algebra, ne nutně mající jednotku. Položme $\mathcal{A}^e = \mathcal{A} \oplus \mathbf{C}$ jakožto součet vektorových prostorů. Definujme násobení a normu v $\mathcal{A}^e$ předpisem

$$(a_1, \lambda_1)\,(a_2, \lambda_2) = (a_1a_2 + \lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_1, \lambda_1\lambda_2) \quad \text{a} \quad \big\|(a, \lambda)\big\| = \|a\| + |\lambda|\,.$$

(a) Ukažte, že $\mathcal{A}^e$ je opět Banachova algebra, její jednotkou je prvek $(0, 1)$ a vnoření $\kappa : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^e$ dané předpisem $a \mapsto (a, 0)$ je izometricky-izomorfní zobrazení $\mathcal{A}$ do $\mathcal{A}^e$.

(b) Jak je to v případě, kdy $\mathcal{A}$ již má jednotku?

(c) Zkuste si rozmyslet, jaká je situace v případě $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$.

(d) Banachovu algebru bez jednotky lze vnořit do Banachovy algebry s jednotkou i jinými způsoby (ovšem jediným způsobem až na izomorfizmus). To jsme viděli právě v předchozích odstavcích v případě $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$.

Uveďme ještě jiný příklad. Buď K lokálně kompaktní prostor a $\mathcal{C}_0(K)$ Banachova algebra všech spojitých funkcí na K anulujících se v nekonečnu z příkladu *6.1.b. V případě, kdy K není kompaktní, nemá $\mathcal{C}_0(K)$ jednotku. Označíme-li K_∞ jednobodovou alexandrovskou kompaktifikaci K, lze přirozeným způsobem $\mathcal{C}_0(K)$ vnořit do Banachovy algebry s jednotkou $\mathcal{C}(K_\infty)$.

(e) Zobrazení $\chi : (a, \lambda) \to \lambda$ je charakter na $\mathcal{A}^e$. Jeho jádrem je obraz původní Banachovy algebry $\kappa\mathcal{A}$.

(f) Dále ukažte, že $\kappa\mathcal{A}$ uzavřený ideál v $\mathcal{A}^e$. Protože kodimenze $\kappa\mathcal{A}$ v $\mathcal{A}^e$ je 1, je $\kappa\mathcal{A}$ dokonce maximální ideál v $\mathcal{A}^e$.

***6.5. $L^1(\mathbf{R})$ nemá jednotku.** *Banachova algebra $L^1(\mathbf{R})$ z 6.5.e nemá jednotku.*

Důkaz. Nechť e je jednotka v $L^1(\mathbf{R})$, to jest taková funkce z $L^1(\mathbf{R})$, pro niž $e * f = f$ pro každou funkci $f \in L^1(\mathbf{R})$. Existuje $\delta > 0$ tak, že $\int\limits_{-2\delta}^{2\delta} |e| < 1$ (zobrazení $E \mapsto \int_E |e|$ je absolutně spojité). Položíme-li $f = c_{[-\delta,\delta]}$, máme pro skoro všechna $x \in \mathbf{R}$

$$f(x) = e * f(x) = \int_{\mathbf{R}} e(x-y)f(y)\,dy = \int_{-\delta}^{\delta} e(x-y)\,dy = \int_{x-\delta}^{x+\delta} e(z)\,dz\,.$$

Existuje $x_0 \in [-\delta, \delta]$, pro něž poslední rovnost platí. Protože $[x_0-\delta, x_0+\delta] \subset [-2\delta, 2\delta]$, dostáváme

$$f(x_0) = c_{[-\delta,\delta]}(x_0) = 1 = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e(z)\,dz = \Big|\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e(z)\,dz\Big| \le \int_{-2\delta}^{2\delta} |e| < 1\,.$$

A to je evidentní spor.

Existují i další důkazy, že Banachova algebra $L^1(\mathbf{R})$ nemá jednotku. Zde je jeden z nich. Předpokládejme opět, že e je jednotkou v $L^1(\mathbf{R})$. Protože $\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}$ pro jakoukoliv dvojici funkcí $f, g \in L^1(\mathbf{R})$ (zde $\widehat{h}$ značí Fourierovu transformaci funkce h), je $\widehat{e} = \widehat{e * e} = \widehat{e}\,\widehat{e}$. Tudíž funkce $\widehat{e}$ musí ve skoro všech bodech $\mathbf{R}$ nabývat hodnot 0 či 1. Protože však Fourierova transformace libovolné funkce z $L^1(\mathbf{R})$ je spojitou funkcí, která se blíží 0 v nekonečnu, musí být $\widehat{e} = 0$ na $\mathbf{R}$. Odtud ovšem plyne, že $e = 0$ skoro všude (zobrazení $h \mapsto \widehat{h}$ je prosté), což vede k směšnému závěru, že by prostor $L^1(\mathbf{R})$ obsahoval pouze funkce skoro všude rovné 0. ■

***6.6. Poznámka.** I když Banachova algebra $L^1(\mathbf{R})$ nemá jednotku, má alespoň tak zvané *aproximativní jednotky*. Tím rozumíme každou posloupnost funkcí $\{e_n\} \subset L^1(\mathbf{R})$ s vlastností $\|e_n * f - f\| \to 0$ pro libovolnou $f \in L^1(\mathbf{R})$. Důkaz tohoto tvrzení lze nalézt v [LM], věta 31.3.

***6.7. Komutant, bikomutant a střed algebry**. Pro libovolnou algebru $\mathcal{A}$ definujme následující čistě algebraické pojmy. Pro $E \subset \mathcal{A}$ položme $E^c := \{a \in \mathcal{A} : xa = ax \text{ pro každé } x \in \mathcal{A}\}$. Množinu E^c nazýváme *komutantem* E. *Střed* algebry $\mathcal{A}$ je definován jako komutant $\mathcal{A}^c$ a *bikomutant* E^{cc} množiny E jako $(E^c)^c$.

Dokazujte sami následující jednoduchá tvrzení, která vyslovíme pro případ Banachovy algebry $\mathcal{A}$. Mnohá z nich však platí i pro čistě algebraický kontext pouhé algebry.

(a) Komutant E^c je vždy uzavřenou podalgebrou $\mathcal{A}$. Má-li $\mathcal{A}$ jednotku e, je $e \in E^c$. Dále $E \subset E^{cc}$ a $E^c = (E^{cc})^c = (E^c)^{cc}$.

(b) Prvky množiny E navzájem komutují, právě když $E \subset E^c$, a to je v případě, právě když E^{cc} je komutativní.

(c) Komutují-li prvky E, je E^{cc} komutativní podalgebrou $\mathcal{A}$ a $E \subset E^{cc} \subset E^c$. Střed algebry je vždy komutativní podalgebrou $\mathcal{A}$.

(d) Nechť e je jednotka $\mathcal{A}$. Jestliže prvky E spolu komutují a $x \in E^{cc}$, potom $\sigma_{\mathcal{A}}(x) = \sigma_{E^{cc}}(x)$ (zde $\sigma_{\mathcal{B}}(x)$ značí spektrum prvku x vzhledem k algebře $\mathcal{B}$).

Návod. Pro rezolventní množiny zřejmě platí $\varrho_{E^{cc}} \subset \varrho_{\mathcal{A}}$. Nechť $\lambda \in \varrho_{\mathcal{A}}(x)$. Označme $y = \lambda e - x$. Podle předpokladů je $y \in E^{cc}$ a existuje inverze y^{-1} k y v $\mathcal{A}$. Ukážeme, že $y^{-1} \in E^{cc}$. Volme tedy $a \in E^c$. Protože $ay = ya$, dostáváme vynásobením této rovnosti prvkem y^{-1} zprava a zleva touženou rovnost $y^{-1}a = ay^{-1}$. ♣

***6.8. Spektrum vůči podalgebře**. Nechť $\mathcal{A}$ je Banachova algebra, $\mathcal{B}$ její podalgebra. Zajímá nás, jaký je vztah spekter prvků, uvažujeme-li je vzhledem k algebře $\mathcal{A}$ či $\mathcal{B}$. O tom, že se tato spektra nemusí shodovat, svědčí následující protipříklad.

(a) `Příklad`. Obvykle se uvádí tento klasický příklad. Nechť $\mathbf{T} := \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$. Uvažujme Banachovu algebru $\mathcal{C}(\mathbf{T})$ jako $\mathcal{A}$ a za $\mathcal{B}$ vezměme restrikce funkcí z diskové algebry $\mathcal{A}(\Delta)$ na $\mathbf{T}$. Je-li $f : z \to z$ identita na $\mathbf{T}$, je $\sigma_{\mathcal{A}}(f) = \mathbf{T}$, zatímco $\sigma_{\mathcal{B}}(f) = \Delta$.

Zde je jiný příklad. Uvažujme Banachovu algebru $\mathcal{A} = l^1(\mathbf{Z})$ a její podalgebru

$$\mathcal{B} := \big\{\{x_n\} \in \mathcal{A} : x_n = 0 \text{ pro všechna } n < 0\big\}.$$

Je-li $z := \{z_n\}$, kde $z_1 = 1$ a $z_n = 0$ pro všechna ostatní n, je $\sigma_{\mathcal{B}}(z) \neq \sigma_{\mathcal{A}}(z)$.

(b) `Šilovova věta`. *Nechť $\mathcal{B}$ je uzavřená podalgebra Banachovy algebry $\mathcal{A}$. Předpokládejme, že $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ mají stejnou jednotku a $x \in \mathcal{B}$. Potom*

$$\sigma_{\mathcal{A}}(x) \subset \sigma_{\mathcal{B}}(x) \quad a \quad \partial\sigma_{\mathcal{B}}(x) \subset \partial\sigma_{\mathcal{A}}(x).$$

Netřeba říkat, že $\sigma_{\mathcal{A}}(x)$ značí spektrum prvku x vzhledem k algebře $\mathcal{A}$ a ∂ znamená symbol pro hranici.

Návod. První inkluze je zřejmá, invertibilní prvek $\mathcal{B}$ je i invertibilním prvkem $\mathcal{A}$. Vzhledem k tomu stačí nyní ukázat, že $\partial\sigma_{\mathcal{B}}(x) \subset \sigma_{\mathcal{A}}(x)$. Nechť tedy $\lambda \in \partial\sigma_{\mathcal{B}}(x) \subset \sigma_{\mathcal{B}}(x)$. Existují tedy $\lambda_n \in \varrho_{\mathcal{B}}(x)$ tak, že $\lambda_n \to \lambda$. Předpokládejme, že $\lambda \in \varrho_{\mathcal{A}}(x)$. To znamená, že existuje jeho inverze (v $\mathcal{A}$) $(x - \lambda e)^{-1}$. Ukážeme-li, že $(x - \lambda e)^{-1}$ leží v $\mathcal{B}$, dostaneme spor, neboť v tom případě by bylo $\lambda \in \varrho_{\mathcal{B}}(x)$. Protože však $\lambda_n \to \lambda$, je $x - \lambda_n e \to x - \lambda e$ a ze spojitosti zobrazení $a \to a^{-1}$ (věta 6.10) ihned dostáváme $(x - \lambda_n e)^{-1} \to (x - \lambda e)^{-1}$. Protože ale $\mathcal{B}$ je uzavřená podalgebra a $(x - \lambda_n e)^{-1} \in \mathcal{B}$, je i $(x - \lambda e)^{-1} \in \mathcal{B}$. ♣

(c) **Důsledek.** *Nechť opět $\mathcal{B}$ je uzavřená podalgebra Banachovy algebry $\mathcal{A}$ a $x \in \mathcal{B}$. Jestliže rezolventa $\varrho_{\mathcal{A}}(x)$ je souvislá anebo spektrum $\sigma_{\mathcal{B}}(x)$ je řídká množina, potom je $\sigma_{\mathcal{B}}(x) = \sigma_{\mathcal{A}}(x)$.*

Speciálně, jestliže $\sigma_{\mathcal{B}}(x) \subset \mathbf{R}$, je $\sigma_{\mathcal{B}}(x) = \sigma_{\mathcal{A}}(x)$.

Návod. Stačí ukázat, že $\sigma_{\mathcal{B}}(x) \cap \varrho_{\mathcal{A}}(x) = \emptyset$. Je-li ovšem $\lambda \in \sigma_{\mathcal{B}}(x) \cap \varrho_{\mathcal{A}}(x)$, existuje oblouk spojující λ s ∞ a ležící celý v $\varrho_{\mathcal{A}}(x)$. Odtud plyne, že $\partial\sigma_{\mathcal{B}}(x) \cap \varrho_{\mathcal{A}}(x) \neq \emptyset$, což odporuje tvrzení Šilovovy věty.

Je-li $\sigma_{\mathcal{B}}(x)$ řídká (uzavřená) množina, je $\sigma_{\mathcal{B}}(x) = \partial\sigma_{\mathcal{B}}(x) \subset \partial\sigma_{\mathcal{A}}(x) \subset \sigma_{\mathcal{A}}(x) \subset \sigma_{\mathcal{B}}(x)$.

Poslední dodatek snad již dokáže každý. ♣

Poznámka. Tvrzení důsledku (c) se leckdy dokazují z t.zv. abstraktní Rungeho věty. Její důkaz lze vést podobně jako důkaz klasické Rungeho věty naznačený v Appendixu. Protože i klasická Rungeho věta je důsledkem její abstraktní verze, vyslovme tuto na tomto místě.

(d) **Abstraktní Rungeho věta.** *Nechť $\mathcal{B}$ je uzavřená podagebra Banachovy algebry $\mathcal{A}$ mající stejnou jednotku a $x \in \mathcal{B}$. Nechť množina $\Omega \subset \varrho_{\mathcal{A}}(x)$ má následující vlastnosti:*

(a) *je-li S omezená komponenta $\varrho_{\mathcal{A}}(x)$, je $\Omega \cap S \neq \emptyset$,*
(b) *je-li $\lambda \in \Omega$, je $(x - \lambda e)^{-1} \in \mathcal{B}$.*

Potom $\sigma_{\mathcal{B}}(x) = \sigma_{\mathcal{A}}(x)$.

Než vyslovíme další tvrzení, řekněme si, že *C^*-podalgebrou* C^*-algebry $\mathcal{A}$ rozumíme její uzavřenou podalgebru, která je také uzavřena na tvoření involuce (z $\mathcal{A}$) a která má stejnou jednotku jako $\mathcal{A}$.

(e) **Věta.** *Nechť $\mathcal{B}$ je C^*-podalgebra C^*-algebry $\mathcal{A}$ a $x \in \mathcal{B}$. Potom $\sigma_{\mathcal{B}}(x) = \sigma_{\mathcal{A}}(x)$.*

Důkaz. Z předešlého víme, že $\sigma_{\mathcal{A}}(x) \subset \sigma_{\mathcal{B}}(x)$. Nechť prvek $z \in \mathcal{B}$ je invertibilní v $\mathcal{A}$. Stačí ukázat, že jeho inverze z^{-1} leží v $\mathcal{B}$. Lehko zjistíme, že i z^* je invertibilní v $\mathcal{A}$ (jeho inverzí je $(z^{-1})^*$). Tudíž i z^*z je invertibilní. Protože z^*z je evidentně hermiteovský prvek, je $\sigma_{\mathcal{A}}(z^*z) \subset \mathbf{R}$ podle cvičení 7.23.d. Podle důsledku (c) je $\sigma_{\mathcal{B}}(z^*z) = \sigma_{\mathcal{A}}(z^*z)$. Tudíž $0 \notin \sigma_{\mathcal{B}}(z^*z)$, jinými slovy prvek z^*z má inverzi $(z * z)^{-1} = z^{-1}(z^*)^{-1}$ v $\mathcal{B}$. Potom ovšem $z^{-1} = z^{-1}((z^*)^{-1}z^*) = (z^*z)^{-1}z^* \in \mathcal{B}$ (nezapomeňte, že podle výše uvedené definice je $z^* \in \mathcal{B}$). ■

(f) **Speciální důsledek.** *Nechť $\mathcal{A}$ je C^*-algebra s jednotkou e a $x \in \mathcal{A}$ její normální prvek. Jestliže $\mathcal{B}$ je C^*-podalgebra algebry $\mathcal{A}$ obsahující prvky e a x, potom $\sigma_{\mathcal{B}}(x) = \sigma_{\mathcal{A}}(x)$.*

Důkaz. Tvrzení je samozřejmým důsledkem (e). Poznamenejme jenom, že existují docela elementární důkazy tohoto důsledku, které nemusejí využívat celou mašinerii tohoto odstavce. ■

***6.9. Vlastnosti spektrální funkce**. Nechť $\mathcal{A}$ je Banachova algebra. Zobrazení $r : x \mapsto r(x)$, které každému prvku $x \in \mathcal{A}$ přiřadí jeho spektrální poloměr $r(x)$, budeme nazývat *spektrální funkcí*. Víme již, že $r(x) \le \|x\|$ pro každé $x \in \mathcal{A}$, přičemž rovnost nastat nemusí. Ukážeme teď na některé další vlastnosti spektrální funkce. Pro potřeby snadnější formulace řekneme, že p je *přípustná norma* na $\mathcal{A}$, jestliže $(\mathcal{A}, p)$ je Banachova algebra (a tedy též $p(e) = 1$).

(a) **Věta.** *Pro spektrální poloměr prvku x Banachovy algebry $\mathcal{A}$ platí*

$$r(x) = \inf\bigl\{p(x) : p \textit{ je ekvivalentní přípustná norma na } \mathcal{A}\bigr\}.$$

Návod. Jak jsme poznamenali, $r(x) \le p(x)$, pokud $(\mathcal{A}, p)$ tvoří Banachovu algebru.

Pro důkaz opačné nerovnosti uvažujme zpočátku Banachovu algebru $\mathcal{L}(X)$ operátorů na Banachově prostoru X. Volme $T \in \mathcal{L}(X)$ a $\varepsilon > 0$. S odkazem na Beurlingův vzoreček najděme takové n, aby platilo $\alpha := r(T) + \varepsilon \ge \|T^{n+1}\|^{\frac{1}{n+1}}$. Položíme-li

$$|||x||| := \alpha^n\|x\| + \alpha^{n-1}\|Tx\| + \dots + \|T^n x\| \quad \text{pro} \quad x \in X\,,$$

ověříme, že $|||.|||$ je ekvivalentní norma na X. Potom norma $|||L||| := \sup\bigl\{|||Lx||| : |||x||| \le 1\bigr\}$ definovaná pro $L \in \mathcal{L}(X)$ je ekvivalentní přípustná norma na $\mathcal{L}(X)$. Speciálně, pro náš operátor T máme $r(T) \le |||T||| \le \alpha = r(T) + \varepsilon$.

Je-li nyní $\mathcal{A}$ libovolná Banachova algebra, vnoříme $\mathcal{A}$ do $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ podle *6.2 a použijeme právě dokázané na $X = \mathcal{A}$ a $T = L_a$.

Jiný návod. Začněme s jednoduchým lemmatem: *Nechť $\mathcal{S}$ je omezená semigrupa prvků Banachovy algebry $\mathcal{A}$ (mající jednotku e). Potom na $\mathcal{A}$ existuje ekvivalentní přípustná norma p tak, že $p(e) = 1$ a $p \le 1$ na $\mathcal{S}$.*

($\mathcal{S}$ tvoří *semigrupu*, jestliže $xy \in \mathcal{S}$ pro kterékoliv dva prvky $x, y \in \mathcal{S}$.)

Lze předpokládat, že $e \in \mathcal{S}$ (jinak k $\mathcal{S}$ jednotku e prostě přidáme). Nechť $\|s\| \le K$ pro všechna $s \in \mathcal{S}$. Položme

$$q : a \mapsto \sup\bigl\{\|sa\| : s \in \mathcal{S}\bigr\}\ ,\ a \in \mathcal{A}\,.$$

Potom $q(a) \le K\,\|a\|$ a jelikož $e \in \mathcal{S}$, je $\|a\| \le q(a)$. Dále máme

$$q(ab) = \sup\bigl\{\|sab\| : s \in \mathcal{S}\bigr\} \le q(a)\,\|b\| \le q(a)\,q(b)\,,$$

a protože ostatní vlastnosti normy q očividně splňuje, je q ekvivalentní přípustná norma na $\mathcal{A}$. Položíme-li nyní

$$p : a \mapsto \sup\bigl\{q(ax) : x \in \mathcal{A}\,,\ q(x) \le 1\bigr\} \quad \text{pro} \quad a \in \mathcal{A}\,,$$

má p všechny požadované vlastnosti.

A nyní k vlastnímu důkazu. Beurlingův vzoreček nám říká, že $r(x) \le p(x)$ pro každou přípustnou normu na $\mathcal{A}$. Stačí tedy ukázat, že pokud $r(x) < 1$, existuje přípustná norma p tak, že $p(x) \le 1$. Ale to je snadné. V tom případě je totiž množina $\{x^n : n \in \mathbf{N}\}$ omezená semigrupa v $\mathcal{A}$ a stačí použít právě dokázané lemma. ♣

(b) Poznámky. (b1) Uvedeného infima se nemusí nabývat. Stačí si vzpomenout na případ (nilpotentního) Volterrova integrálního operátoru z 2.49.b.

(b2) Uvedené tvrzení dokázali H.F. Bohnenblust a S. Karlin [1955]. S jinou myšlenkou důkazu se lze setkat v W. Żelazko [*1973].

(c) Větička. *Buďte x, y prvky Banachovy algebry $\mathcal{A}$. Potom $r(xy) = r(yx)$ a $r(x^k) = [r(x)]^k$.*
Návod. Použijte Beurlingův vzoreček a tvrzení, že $\lambda^k \in \sigma(x^k)$ pokud $\lambda \in \sigma(x)$. ♣

(d) Věta. *Jestliže prvky x a y Banachovy algebry $\mathcal{A}$ komutují, potom*

$$r(xy) \le r(x)r(y) \quad a \quad r(x+y) \le r(x) + r(y)\,.$$

Návod. Protože $(xy)^n = x^n\,y^n$ pro každé n, dostáváme použitím Beurlingova vzorečku a odhadu $\|(xy)^n\| \le \|x^n\|\,\|y^n\|$ ihned první tvrzení. Rovněž tak druhé tvrzení lze získat pomocí Beurlingova vzorečku. Zdaleka to však již není snadné. Jak poznamenává P. Halmos v [*1982], vyžaduje to poněkud pečlivou a čipernou práci s nerovnostmi. O tom se lze přesvědčit v B. Aupetit [*1991], Cor. 3.2.10.

Podejme jiný návod. Volme $\varepsilon > 0$ a položme

$$u := \frac{x}{r(x)+\varepsilon}\ ,\ v := \frac{y}{r(y)+\varepsilon}\,.$$

Potom $r(u) < 1$, $r(v) < 1$, a protože $uv = vu$, je $\mathcal{S} := \bigl\{u^n, v^k, u^n v^k : n, k \in \mathbf{N}\bigr\}$ omezená semigrupa. Podle (a) existuje ekvivalentní přípustná norma p na $\mathcal{A}$ tak, že $p(u) \le 1$ a $p(v) \le 1$. Potom

$$r(x+y) \le p(x+y) \le p(x) + p(y) \le r(x) + \varepsilon + r(y) + \varepsilon\,.$$

Touto metodou bychom také mohli odůvodnit i první nerovnost.

A ještě jiný návod do třetice. Co kdybychom zkusili použít Gelfandovu transformaci, speciálně tvrzení z 7.9.c? (Kde ale vzít tam předpokládanou komutativní Banachovu algebru?) ♣

(e) Spojitost spektrální funkce. *Nechť $\mathcal{A}$ je Banachova algebra. Potom spektrální funkce $r : x \mapsto r(x) : \mathcal{A} \to \mathbf{R}$ je shora polospojitá, ale obecně nemusí být spojitá.*

Je-li $\mathcal{A}$ komutativní, je spektrální funkce r spojitá.

Návod. Pro důkaz polospojitosti shora spektrální funkce můžete použít Beurlingův vzoreček ve tvaru $r(x) = \inf\bigl\{\sqrt[n]{\|x^n\|} : n \in \mathbf{N}\bigr\}$.

Protipříklad je poměrně obtížný. Kakutaniho příklad, který nebyl nikdy publikován, je uveden v C. Rickart [*1960]. Sestává v sestrojení posloupnosti nilpotentních operátorů konvergujících k operátoru s kladným spektrálním poloměrem.

Nechť $\mathcal{A}$ je komutativní. Spojitost spektrální funkce r můžete odůvodnit třeba takto: Pokud prvky x, y Banachovy algebry komutují, je podle (d) $r(x+y) \le r(x) + r(y)$, odkud plyne, že $\bigl|r(x) - r(y)\bigr| \le r(x-y) \le \|x-y\|$. Anebo jinak. Je-li $\mathcal{A}$ komutativní, je $r(x) = \|\widehat{x}\|$, kde $\widehat{x}$ značí Gelfandovu transformaci prvku x. ♣

(f) Poznámka. Spektrální funkce může být spojitá i v jiných situacích. Kupříkladu v případě Banachovy algebry $\mathcal{C}(K)$ spojitých (komplexních) funkcí na kompaktu K. Řada postačujících podmínek pro spojitost souvisí s topologickými vlastnostmi spektra, zejména s jeho totální nesouvislostí. Zájemce mohu odkázat na práce J.D. Newburgh [1951], G.J. Murphy [1981], J.B. Conway and B.B. Morrel [1979] či na sérii prací Laury Burlando kulminující jejím přehledným článkem [1994].

***6.10. Podílová algebra**. *Ideálem* v algebře $\mathcal{A}$ rozumíme takový vektorový podprostor $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$, pro nějž $\mathcal{A}\mathcal{I}\mathcal{A} \subset \mathcal{I}$.

Každá algebra vždy obsahuje *triviální* ideály $\{0\}$ a $\mathcal{A}$.

Je-li $\mathcal{I}$ ideál v algebře $\mathcal{A}$, je faktorový prostor $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ (viz A.3 v Appendixu) algebra, definujeme-li násobení tříd vztahem

$$(x+\mathcal{I})(y+\mathcal{I}) := xy + \mathcal{I}\,.$$

***6.11. Podílová Banachova algebra**. Je-li $\mathcal{I}$ vlastní uzavřený ideál v Banachově algebře $\mathcal{A}$, je Banachův prostor $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ sestrojený v *1.11 Banachovou algebrou, definujeme-li součin jako výše v *6.10. Připomeneme-li, že norma v $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ se definuje předpisem

$$\|x+\mathcal{I}\| = \inf\bigl\{\|x+u\| : u \in \mathcal{I}\bigr\}\,,$$

a že

$$\bigl\|(x+\mathcal{I})(y+\mathcal{I})\bigr\| \le \|xy+xv+uy+uv\| = \bigl\|(x+u)(y+v)\bigr\| \le \|x+u\|\,\|y+v\| \quad \text{pro} \quad u,v \in \mathcal{I}$$

(nezapomeňte, že $xv+uy+uv \in \mathcal{I}$), není těžké toto tvrzení řádně odůvodnit.

Jednotkou Banachovy algebry $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ je samozřejmě prvek $(e+\mathcal{I})$ (předpokládáme, že e je jednotka $\mathcal{A}$ a $\|e\| = 1$). Protože $\|e+\mathcal{I}\| = \inf\{\|e+u\| : u \in \mathcal{I}\}$, musí být $\|e+\mathcal{I}\| = 1$. Pokud totiž $\|e+u\| = \|e-(-u)\| < 1$, je u invertibilní element $\mathcal{A}$. A žádný (vlastní) ideál nemůže obsahovat invertibilní prvky.

Poznámka. Banachova algebra $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ může mít jednotku, i když ji původní Banachova algebra $\mathcal{A}$ nemá. Podíváme-li se na příklad Banachovy algebry $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$ z příkladu *14.17 (násobení funkcí je samozřejmě bodové), nemá tato Banachova algebra jednotku. Množina funkcí $\mathcal{I} := \{f \in \mathcal{C}_0(\mathbf{R}) : f = 0 \text{ na intervalu } [-1,1]\}$ je ideálem v $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$. Prvek $h+\mathcal{I}$, kde $h \in \mathcal{C}_0(\mathbf{R})$ je taková funkce, že $h = 1$ na $[-1,1]$, je jednotkou v $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})/\mathcal{I}$.

Uvedeme důležité příklady.

Příklady. (a) Prostor všech kompaktních operátorů $\mathcal{L}_c(X)$ na Banachově prostoru X tvoří uzavřený ideál v Banachově algebře $\mathcal{L}(X)$ (podívej se na 2.48.b). Podílová algebra $\mathcal{L}(X)/\mathcal{L}_c(X)$ se nazývá *Calkinovou algebrou*.

Poznámka. Upozorněme při této příležitosti, že prostor $\mathcal{L}_c(H)$ všech kompaktních operátorů na separabilním Hilbertově prostoru H je jediným (netriviálním) uzavřeným ideálem v $\mathcal{L}(H)$. Volíme-li totiž libovolný charakter ξ na $\mathcal{L}(H)$, je $\ker\xi = \mathcal{L}_c(H)$. Důkaz tohoto tvrzení lze nalézt kupříkladu v B. Beauzamy [*1988], kap. VI, Ex. 10 či v D. Werner [*1995], Satz VII.1.23. V prostorech operátorů na neseparabilních Hilbertových prostorech existují i další uzavřené netriviální ideály, třeba ideál všech operátorů majících separabilní obor hodnot. Pokud bychom uvažovali prostor operátorů $\mathcal{L}(X)$ na separabilním Banachově prostoru X, je toho známo poměrně málo. Avšak prostor kompaktních operátorů je opět jediným netriviálním uzavřeným ideálem v $\mathcal{L}(X)$, je-li $X = c_0$ či $X = l^p$ pro $p \in [1,\infty)$.

(b) Nechť $\mathcal{C}(K)$ je Banachova algebra všech spojitých funkcí na kompaktu K. Jestliže $F \subset K$ je uzavřená množina, je $\mathcal{J}_F := \{f \in \mathcal{C}(K) : f = 0 \text{ na } F\}$ uzavřený ideál.

Naopak, je-li $\mathcal{J}$ uzavřený ideál v $\mathcal{C}(K)$, existuje právě jedna uzavřená množina F v K tak, že $\mathcal{J} = \mathcal{J}_F$. To chce přeci jen odůvodnění. Položme tedy

$$F := \bigl\{x \in K : f(x) = 0 \text{ pro každou funkci } f \in \mathcal{J}\bigr\}\,.$$

Množina F je zjevně uzavřená a $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}_F$. Zvolme nyní $f \in \mathcal{J}_F$. Rozlišením případů $x \in F$ a $x \in K\backslash F$ si ujasníme, že ke každému $x \in K$ existuje funkce $f_x \in \mathcal{J}$ tak, že $f_x(x) = f(x)$. V prvním případě stačí volit $f_x = 0$, v druhém případě existuje $g_x \in \mathcal{J}$ tak, že $g_x(x) \neq 0$ (v komplexním případě $\operatorname{Re} g_x(x) \neq 0$). Stačí pak vzít za f_x vhodný násobek funkce g_x. Volme ještě $n \in \mathbf{N}$ a položme $U(x) := \{y \in K : |f(y) - f_x(y)| < \frac{1}{n}\}$. Kompaktnost K nám zaručí existenci takových $x_1, \ldots, x_k \in K$, že $K \subset U(x_1) \cup \cdots \cup U(x_k)$. Nechť $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\} \subset \mathcal{C}(K)$ jsou funkce s vlastnostmi

$$0 \le \varphi_j \le 1\,, \varphi_j = 0 \text{ na } K \setminus U(x_j) \ \text{ pro každé } j = 1, \ldots, k \ \text{ a } \ \sum_{j=1}^{k} \varphi_j = 1$$

(funkce $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ tvoří tak zvaný *rozklad jednotky* příslušný pokrytí $U(x_1), \ldots, U(x_k)$; jeho existenci lze dokázat v našem případě indukcí, v obecné situaci se důkaz opírá o Tietze-Urysohnovu větu B.14). Je-li $\varphi := \varphi_1 f_{x_1} + \cdots + \varphi_k f_{x_k}$, je $\varphi \in \mathcal{J}$, neboť $\mathcal{J}$ tvoří ideál. Odhadem platným pro každé $x \in K$

$$|\varphi(x) - f(x)| \le \sum_{j=1}^{k} \varphi_j(x) |f_{x_j}(x) - f(x)| \le \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} \varphi_j(x) = \frac{1}{n}$$

zjistíme, že $\|\varphi - f\| \le \frac{1}{n}$. Našli jsme tedy posloupnost funkcí z $\mathcal{J}$ konvergující stejnoměrně k f na K. Protože ideál $\mathcal{J}$ je uzavřený, je $f \in \mathcal{J}$.

Pokud jde o jednoznačnost, předpokládejme, že $\mathcal{J}_F = \mathcal{J}_H$ ačkoliv $F \ne H$. Nechť třeba $x \in F \setminus H$. Najděme funkci $g \in \mathcal{C}(K)$ tak, aby $g(x) = 1$ a $g = 0$ na H. Taková funkce určitě existuje (kompakt K je úplně regulární). Potom ovšem $g \in \mathcal{J}_H \setminus \mathcal{J}_F$.

(c) Nechť $\mathcal{A}$ je komutativní Banachova algebra. Množina všech nilpotentních prvků $\mathcal{A}$ tvoří ideál a množina všech kvazinilpotentních prvků pak uzavřený ideál v $\mathcal{A}$.

(d) Uvažujme nyní komutativní Banachovu algebru $\mathcal{A}$. Množina $\operatorname{Rad} \mathcal{A} := \{x \in \mathcal{A} : r(x) = 0\}$, což je tedy množina všech nilpotentních prvků $\mathcal{A}$, se nazývá *radikálem* algebry $\mathcal{A}$. Odkážeme-li na cvičení 6.25.e a (třeba) *6.9.e, vidíme, že $\operatorname{Rad} \mathcal{A}$ je uzavřený ideál.

S tímto pojmem, dokonce v obecnější podobě, se můžeme setkat ještě v souvislosti s Gelfandovou reprezentací v *7.7.

***6.12. Exponenciála v algebře**. Nechť $\mathcal{A}$ je Banachova algebra (s jednotkou e). Pro $a \in \mathcal{A}$ položte

$$\exp a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\,.$$

(a) Cvičení. Následující jednoduchá tvrzení byste mohli sami dokazovat.

(a1) Ukažte, že uvedená řada konverguje v $\mathcal{A}$.

(a2) Jestliže prvky $a, b \in \mathcal{A}$ komutují, potom $\exp(a + b) = \exp a \exp b$.

(a3) Je-li $a \in \mathcal{A}$, potom prvek $\exp a$ je vždy invertibilní a $(\exp a)^{-1} = \exp(-a)$.

(b) Problémky. I následující otázky byste mohli sami zodpovědět.

(b1) Je zobrazení $a \mapsto \exp a$ spojité?

(b2) Domníváte se, že každý invertibilní prvek $\mathcal{A}$ má tvar $\exp a$?

(c) „Logaritmus\. Jistě nejste tak naivní, abyste dali pozitivní odpověď na otázku v (b2). Tam položenou otázku lze přeformulovat také tak, jak vypadá množina $\mathcal{R}(\exp) := \{\exp a : a \in \mathcal{A}\}$, jinými slovy, zda-li obor hodnot $\mathcal{R}(\exp)$ splývá s množinou U všech invertibilních prvků $\mathcal{A}$. Pokud by prvek y ležel v $\mathcal{R}(\exp)$, existovalo by $a \in \mathcal{A}$ tak, že $y = \exp a$ a mohli bychom tento prvek nazvat „logaritmem“ a (zřejmě bychom měli i další problém s jednoznačností).

Podíváme-li se na nejjednodušší příklad, kdy za $\mathcal{A}$ vezmeme $\mathbf{R}$, vidíme, že $\mathcal{R}(\exp) = (0, \infty)$. A interval $(0, \infty)$ je největším podintervalem v $\mathbf{R}$ obsažený v množině $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ a obsahující jednotku 1. Tento příklad nás povede k následujícím tvrzením. První je opět lehkým cvičením, druhé pochází od E.R. Lorcha [1943]. Ještě však zadefinujme

$$\exp \mathcal{A} := \{\exp a_1 \ldots a_n : a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}\}\ .$$

I když tedy v obecných Banachových algebrách je obtížné popsat obor hodnot $\mathcal{R}(\exp)$ exponenciální funkce, množinu $\exp \mathcal{A}$ nám Lorchova věta určí přesně.

(d) Větička. *Je-li* $\|y - e\| < 1$, *potom* $y \in \mathcal{R}(\exp)$.

Návod. Položte $a := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(e-y)^n$. Ukažte, že tato řada konverguje absolutně a že $\exp a = y$. ♣

(e) Lorchova věta. *Nechť $\mathcal{A}$ je Banachova algebra a $U_e \subset \mathcal{A}$ je (souvislá) komponenta množiny U všech invertibilních prvků $\mathcal{A}$ obsahující jednotku e. Potom* $\exp \mathcal{A} = U_e$.

Návod. Je vesměs jasné, že $\exp \mathcal{A} \subset U_e$. Použitím tvrzení z (d) se dále ukáže, že $\exp \mathcal{A}$ je otevřená podmnožina U_e. Protože $\exp \mathcal{A}$ je současně i uzavřená podmnožina U_e (opět lze využít větičku (d)) a U_e je souvislá množina, musí být $\exp \mathcal{A} = U_e$. ♣

(f) Trochu topologie a algebry. Protože Banachova algebra $\mathcal{A}$ tvoří lokálně souvislý prostor (odůvodněte, proč každý bod má bázi tvořenou souvislými množinami) a U je otevřená podmnožina $\mathcal{A}$, je i komponenta U_e otevřená v $\mathcal{A}$. Dále víme, že U_e tvoří grupu, tudíž U_e je její otevřená a uzavřená normální podgrupa.

***6.13. Závěrečné poznámky**. Vzorec v 6.23 pro výpočet spektrálního poloměru dokázal pro případ speciálních Banachových algeber A. Beurling [1938]. Důkaz v obecném případě podal I.M. Gelfand v [1941], proto vzoreček bývá někdy nazýván Beurling-Gelfandovým. Myšlenka důkazu v 6.23 náleží C.E. Rickartovi [1958].

*7. Gelfandova reprezentace

V celé kapitole povětšinou předpokládáme, že $\mathcal{A}$ je Banachova algebra s jednotkou e a $\|e\| = 1$.

***7.1. Ideály v Banachových algebrách**. Připomeňme, že vektorový podprostor $\mathcal{I}$ Banachovy algebry $\mathcal{A}$ je *ideál*, jestliže $\mathcal{A}\mathcal{I}\mathcal{A} \subset \mathcal{I}$. Ideál $\mathcal{I}$ nazveme *vlastním*, jestliže $\mathcal{I} \neq \mathcal{A}$.

Podotkněme, že pokud ideál $\mathcal{I}$ obsahuje jednotku, potom již $\mathcal{I} = \mathcal{A}$. Odtud mimo jiné plyne, že vlastní ideál nemůže obsahovat žádný invertibilní prvek.

Ideál $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ nazveme *maximálním*, jestliže $\mathcal{I}$ je vlastní a neexistuje žádný vlastní ideál $\mathcal{J} \neq \mathcal{I}$, $\mathcal{I} \subset \mathcal{J} \subset \mathcal{A}$.

***7.2. Věta.** *Každý vlastní ideál je obsažen v nějakém maximálním ideálu. Maximální ideály jsou uzavřené.*

Důkaz. Pro důkaz prvního tvrzení použijeme Zornovo lemma. Nechť $\mathcal{I}$ je vlastní ideál a $\mathfrak{E}$ soustava všech vlastních ideálů obsahujících $\mathcal{I}$, kterou uspořádáme pomocí inkluze. Je-li $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{E}$ řetězec, bude $\mathcal{J} := \bigcup\{\mathcal{I} : \mathcal{I} \in \mathfrak{A}\}$ určitě ideál (využijeme toho, že libovolné dva prvky z $\mathfrak{A}$ lze porovnat), který bude majorantou $\mathfrak{A}$. Zbývá si uvědomit, že ideál $\mathcal{J}$ je vlastní. To ale plyne z toho, že jednotka e není prvkem žádného ideálu z $\mathfrak{A}$, tudíž $e \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{J}$.

K důkazu druhého tvrzení předpokládejme, že $\mathcal{I}$ je vlastní ideál. Stačí si rozmyslet, že uzávěr ideálu je ideál (to je vidět téměř ihned) a že $\overline{\mathcal{I}}$ je vlastní ideál (protože množina invertibilních prvků $\mathcal{A}$ je otevřená a disjunktní s $\mathcal{I}$, musí být disjunktní i s $\overline{\mathcal{I}}$). Je-li tedy $\mathcal{I}$ maximální ideál, musí být $\mathcal{I} = \overline{\mathcal{I}}$, neboť podle předchozího je $\overline{\mathcal{I}}$ vlastní ideál obsahující $\mathcal{I}$. ■

***7.3. Poznámka**. Existence jednotky v $\mathcal{A}$ byla podstatná v důkazu poslední věty. Kupříkladu prostor $\mathcal{C}_K(\mathbf{R})$ všech spojitých funkcí na $\mathbf{R}$ s kompaktním nosičem je hustým ideálem v Banachově algebře $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$ (viz příklad *14.17).

***7.4. Příklad**. Jako ilustraci se vraťme k příkladu Banachovy algebry $\mathcal{C}(K)$ spojitých funkcí na kompaktu K. V *6.11 jsme charakterizovali všechny (uzavřené) ideály v $\mathcal{C}(K)$. Označíme-li $\mathcal{I}_a = \{f \in \mathcal{C}(K) : f(a) = 0\}$ pro $a \in K$, je $\mathcal{I}_a$ maximální ideál v $\mathcal{C}(K)$. Víme-li již podle poslední věty, že maximální ideály jsou uzavřené, není těžké si rozmyslet, že každý maximální ideál v $\mathcal{C}(K)$ je tohoto tvaru. Tudíž maximální ideály v $\mathcal{C}(K)$ a prvky kompaktu K si navzájem vzájemně jednoznačně odpovídají.

***7.5. Charaktery a maximální ideály.** *Buď $\mathcal{A}$ komutativní Banachova algebra, $M \subset \mathcal{A}$. Potom M je maximální ideál, právě když existuje charakter $\chi \in \Omega(\mathcal{A})$ tak, že $M = \{x \in \mathcal{A} : \chi(x) = 0\}$. Přitom zobrazení $\chi \mapsto \ker \chi$ je prosté.*

Důkaz. Nechť χ je charakter. Zřejmě $\ker\chi$ je ideál. Protože kodimenze $\ker\chi$ je 1 (je-li χ nenulový lineární funkcionál, je $\operatorname{codim}\ker\chi = 1$, podívejte se třeba na A.4), musí být ideál $\ker\chi$ maximální.

Pro důkaz opačné implikace předpokládejme, že $\mathcal{I}$ je maximální ideál v $\mathcal{A}$. Protože podle předchozí věty je $\mathcal{I}$ uzavřený, je $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ Banachova algebra s jednotkou $e+\mathcal{I}$. Ukážeme-li, že $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ tvoří dokonce těleso, bude podle Gelfand-Mazurovy věty 6.19 existovat izomorfní zobrazení Φ tělesa $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ na těleso komplexních čísel $\mathbf{C}$. Označíme-li ještě π kanonické zobrazení $\mathcal{A}$ na $\mathcal{A}/\mathcal{I}$, bude $\chi := \Phi\circ\pi$ evidentně charakter a $\mathcal{I} = \ker\chi$.

Dokazujme tedy, že $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ je těleso. Označíme-li opět $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{I}$ kanonické zobrazení, je $\pi^{-1}(J)$ ideál v $\mathcal{A}$ obsahující $\mathcal{I}$, kdykoliv J je ideál v $\mathcal{A}/\mathcal{I}$. Z maximality $\mathcal{I}$ plyne, že pak nutně $\pi^{-1}(J) = \mathcal{I}$ anebo $\pi^{-1}(J) = \mathcal{A}$. Tudíž $J = \mathcal{A}/\mathcal{I}$ nebo $J = \{0\}$. Buď tedy konečně $\pi(x)$ nenulový prvek $\mathcal{A}/\mathcal{I}$. Potom $K := \pi(x)\mathcal{A}/\mathcal{I}$ je netriviální ideál v $\mathcal{A}/\mathcal{I}$, a podle předešlého musí být $K = \mathcal{A}/\mathcal{I}$. Existuje tedy $a\in\mathcal{A}$ tak, že $\pi(x)\pi(a) = \pi(e)$. Vidíme, že prvek $\pi(x)$ má inverzi.

Zbývá ukázat, že zobrazení $\chi \mapsto \ker\chi$ je prosté. Ale to je již snadné. Buďte χ_1, χ_2 charaktery, pro něž $\ker\chi_1 = \ker\chi_2$. Volíme-li $x\in\mathcal{A}$, máme $\chi_2(x-\chi_2(x)e) = 0$, tudíž podle předpokladu i $\chi_1(x-\chi_2(x)e) = 0$, odkud plyne $\chi_1(x) = \chi_2(x)$. ■

***7.6. Prostor maximálních ideálů**. Označme symbolem $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ prostor všech maximálních ideálů dané komutativní Banachovy algebry $\mathcal{A}$. Podle předchozího tvrzení *7.5 existuje vzájemně jednoznačné zobrazení mezi $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ a prostorem $\Omega(\mathcal{A})$ všech charakterů na $\mathcal{A}$. Pomocí tohoto zobrazení a již zavedené Gelfandovy topologie na $\Omega(\mathcal{A})$ lze definovat přirozeným způsobem i topologii na $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$. Samozřejmě, prostory $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ a $\Omega(\mathcal{A})$ jsou homeomorfní. Podle věty 7.6 je pak prostor všech maximálních ideálů kompaktní v této topologii.

Kombinujeme-li výsledky o prostoru charakterů a prostoru maximálních ideálů v případě Banachovy algebry $\mathcal{C}(K)$, dostáváme v tomto speciálním případě, že prostor maximálních ideálů $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ a kompakt K jsou homeomorfní.

***7.7. Radikál a polojednoduché algebry**. Připomeňme základní pojmy z 7.14 a 7.15. Je-li $\mathcal{A}$ komutativní Banachova algebra (s jednotkou), nazýváme *radikálem algebry* $\mathcal{A}$ jádro její Gelfandovy transformace $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{C}(\Omega(\mathcal{A}))$, tedy

$$\operatorname{Rad}\mathcal{A} := \ker\Phi := \bigcap\{\ker\varphi : \varphi\in\Omega(\mathcal{A})\}\,.$$

V 7.14 jsme si ujasnili, že $\operatorname{Rad}\mathcal{A}$ je tvořen všemi kvazi-nilpotentními prvky $\mathcal{A}$, tudíž $\operatorname{Rad}\mathcal{A} = \{a\in\mathcal{A} : r(a) = 0\}$.

Vezmeme-li v potaz *7.5, vidíme, že radikál algebry $\mathcal{A}$ je roven též průniku všech maximálních ideálů v $\mathcal{A}$, takže $\operatorname{Rad}\mathcal{A} = \bigcap\{M : M\in\mathfrak{M}(\mathcal{A})\}$.

`(a) Nekomutativní případ`. Radikál $\operatorname{Rad}\mathcal{A}$ lze definovat i pro nekomutativní Banachovy algebry. Kupříkladu jako průnik všech maximálních levých ideálů v $\mathcal{A}$. Což vyjde nastejno jako průnik všech maximálních pravých ideálů v $\mathcal{A}$. Poslední tvrzení není úplně samozřejmé a důkaz vyžaduje trochu práce. Jenom ještě připomeňme, že pod pojmem *levý ideál* chápeme každý vektorový podprostor $\mathcal{I}\subset\mathcal{A}$ s vlastností $ax\in\mathcal{I}$ kdykoliv $a\in\mathcal{A}$ a $x\in\mathcal{I}$.

Existují různé charakteristiky radikálů. Bez důkazu vyslovme třeba následující tvrzení.

`(b) Charakteristiky radikálu.` *Nechť x je prvek Banachovy algebry $\mathcal{A}$. Potom je ekvivalentní:*

(i) $x\in\operatorname{Rad}\mathcal{A}$,
(ii) *prvek $e+xa$ má inverzi pro každé $a\in\mathcal{A}$,*
(iii) $\sigma(x+a) = \sigma(a)$ *pro všechna $a\in\mathcal{A}$.*

`(c) Polojednoduché algebry`. Banachova algebra $\mathcal{A}$, byť nekomutativní, se nazývá *polojednoduchou*, jestliže $\operatorname{Rad}\mathcal{A} = \{0\}$. Komutativní polojednoduché Banachovy algebry jsou tedy právě ty, pro něž Gelfandova transformace je prostým zobrazením.

Kupříkladu Banachova algebra $\mathcal{C}(K)$ z 6.5.b je polojednoduchá. Totéž platí i o Banachově algebře $l^1(\mathbf{Z})$ z 6.5.d, $\mathcal{C}^b(T)$ všech omezených spojitých funkcí na Hausdorffově topologickém prostoru T, Wienerově či diskové algebře.

Také každá komutativní C^*-algebra je polojednoduchá.

Lze ukázat, i když to není zrovna úplně triviální, že (nekomutativní) Banachovy algebry $\mathcal{L}(X)$, kde X je Banachův prostor či Calkinova algebra $\mathcal{L}(H)/\mathcal{L}_c(H)$ pro Hilbertův prostor H, jsou polojednoduché.

(d) **Charakteristiky polojednoduchých algeber.** *Nechť $\mathcal{A}$ je komutativní Banachova algebra. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) *$\mathcal{A}$ je polojednoduchá,*
(ii) *jestliže $x \in \mathcal{A}$ a $\sigma(x) = \{0\}$, potom $x = 0$,*
(iii) *$\Omega(\mathcal{A})$ odděluje body $\mathcal{A}$.*

Návod. Je-li $x \in \mathcal{A}$, je $r(x) = 0$, právě když $\sigma(x) = \{0\}$. Tudíž (i) a (ii) jsou triviálně ekvivalentní.

Předpokládejme, že $\mathcal{A}$ je polojednoduchá a $x \in \mathcal{A}$, $x \neq 0$. Potom $r(x) = \|\widehat{x}\| \neq 0$. Existuje tedy $\chi \in \Omega(\mathcal{A})$ tak, že $\chi(x) \neq 0$. Na druhé straně, je-li $x \in \mathcal{A}$ takové, že $x \neq 0$ a existuje $\chi \in \Omega(\mathcal{A}))$ tak, že $\chi(x) = \widehat{x}(\chi) \neq 0$, je podle 5.15.c $r(x) \neq 0$. Tedy $x \notin \operatorname{Rad} \mathcal{A}$, čili $\mathcal{A}$ je polojednoduchá.

Můžete též porovnat se cvičením 7.23.c. Tam jsme dokonce dokázali, že když prostor charakterů odděluje body $\mathcal{A}$, je $\mathcal{A}$ již komutativní a polojednoduchá. ♣

(e) **Spektrální norma**. Je-li $\mathcal{A}$ komutativní Banachova algebra, víme, že $r(x) = \|\widehat{x}\|_{\mathcal{C}(\Omega(\mathcal{A}))}$. Tedy zobrazení $r : x \mapsto r(x)$ má skoro všechny vlastnosti normy. Nevíme pouze, zda z podmínky $r(x) = 0$ plyne $x = 0$. Aby tomu tak bylo, potřebovali bychom vědět, zda $x = 0$ v případě, kdy $\|\widehat{x}\| = 0$. A to je právě v případě, kdy Gelfandova transformace je prosté zobrazení, jinými slovy, pokud $\mathcal{A}$ je polojednoduchá.

Shrňme, je-li $\mathcal{A}$ polojednoduchá komutativní Banachova algebra, je zobrazení $r : x \mapsto r(x)$ norma na $\mathcal{A}$. Říkáme jí *spektrální norma*. Pišme také $\|x\|_\sigma$ místo $r(x)$. Připomeňme ještě, že $\|x\|_\sigma \leq \|x\|$ pro každý prvek $x \in \mathcal{A}$.

Obecně spektrální norma $\|.\|_\sigma$ nemusí být na $\mathcal{A}$ úplná. Bude tomu však v případě, kdy původní norma $\|.\|$ a spektrální norma $\|.\|_\sigma$ budou ekvivalentní. O tom, kdy toto nastane, vypovídá následující věta.

(f) **Věta.** *Buď $\mathcal{A}$ polojednoduchá komutativní Banachova algebra. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *$\|.\|$ a $\|.\|_\sigma$ jsou ekvivalentní na $\mathcal{A}$,*
(ii) *existuje $K > 0$ tak, že $\|x\|^2 \leq K \|x^2\|$,*
(iii) *$\Phi(\mathcal{A})$ je uzavřená podalgebra $\mathcal{C}(\Omega(\mathcal{A}))$.*

Návod. Nechť $\|.\|$ a $\|.\|_\sigma$ jsou ekvivalentní. Existuje tedy $\beta > 0$ tak, že $\|x\| \leq \beta \|x\|_\sigma$ pro každé $x \in \mathcal{A}$. Podržme pevně x. Potom

$$\|x\|^2 \leq \beta^2 \|x\|_\sigma^2 = \beta^2 \|\widehat{x}\|^2 = \beta^2 \|(\widehat{x})^2\| \leq \beta^2 \|x^2\| .$$

Platí-li podmínka (ii), dostáváme opakovaným použitím nerovnost

$$\|x\| \leq K^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}} \left\|x^{2^n}\right\|^{\frac{1}{2^n}} ,$$

odkud pomocí Beurlingova vzorečku máme $\|x\| \leq K \|x\|_\sigma$. Odtud vidíme, že Gelfandova transformace je zdola omezená ($\frac{1}{K}\|x\| \leq \|x\|_\sigma = r(x) = \|\widehat{x}\| = \|\Phi(x)\|$) a obdobně jako v lemmatu 5.2 dostáváme, že $\Phi(\mathcal{A})$ je uzavřená podmnožina $\mathcal{C}(\Omega(\mathcal{A}))$.

Konečně, je-li $\Phi(\mathcal{A})$ uzavřená podmnožina $\mathcal{C}(\Omega(\mathcal{A}))$, je $\Phi(\mathcal{A})$ Banachův prostor a na Gelfandovu transformaci Φ můžeme použít důsledek 4.16 věty o otevřeném zobrazení. Její inverze $\Phi^{-1} : \mathcal{C}(\Omega(\mathcal{A})) \to \mathcal{A}$ je spojitá, existuje tedy $C > 0$ tak, že $\|x\| = \|\Phi^{-1}(\widehat{x})\| \leq C \|\widehat{x}\| = C \|r(x)\| = C \|x\|_\sigma$ pro každé $x \in \mathcal{A}$. ♣

(g) **Poznámka.** Z důkazu předchozí věty vyplývá, že komutativní Banachova algebra $\mathcal{A}$ je polojednoduchá a $\Phi(\mathcal{A})$ je uzavřená podalgebra v $\mathcal{C}(\Omega(\mathcal{A}))$, právě když existuje konstanta $K > 0$ tak, že $\|x\|^2 \leq K \|x^2\|$ pro každé $x \in \mathcal{A}$. Můžete též porovnat se cvičením 7.23.e.

Polojednoduché algebry mají řadu zajímavých vlastností. Uveďme alespoň následující.

`(h) Věta.` *Nechť $\mathcal{A}$ je komutativní Banachova algebra, $\mathcal{B}$ polojednoduchá komutativní algebra a $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ homomorfizmus. Potom je T spojitý.*

Důkaz. Nechť $x_n \to 0$ v $\mathcal{A}$ a $Tx_n \to z$ v $\mathcal{B}$ a nechť $\chi \in \Omega(\mathcal{A})$ je charakter. Potom $\chi \circ T$ je charakter na $\mathcal{B}$, a tudíž podle 7.5 je spojitý. Takže $\chi(z) = \lim \chi(Tx_n) = \lim(\chi \circ T)(x_n) = 0$. Musí tedy být $z \in \operatorname{Rad} \mathcal{B}$, a protože algebra $\mathcal{B}$ je polojednoduchá, je $z = 0$. Podle věty o uzavřeném grafu je T spojitý. ■

`(i) Důsledek.` *Je-li $(\mathcal{A}, \|.\|_1)$ polojednoduchá komutativní Banachova algebra s jednotkou a $\|.\|_2$ další norma na $\mathcal{A}$, v níž je $\mathcal{A}$ Banachova algebra, jsou již normy $\|.\|_1$ a $\|.\|_2$ ekvivalentní.*

Návod. Stačí ukázat, že identické zobrazení $id : (\mathcal{A}, \|.\|_1) \to (\mathcal{A}, \|.\|_2)$ je spojité. K tomu samozřejmě použijte větu (h). ♣

`(j) Důsledek.` *Nechť $\mathcal{A}$ je polojednoduchá komutativní Banachova algebra s involucí. Potom involuce $i : x \mapsto x^*$ je spojité zobrazení.*

Návod. Položíme-li $\eta(x) := \|x^*\|$, $x \in \mathcal{A}$, je η norma na $\mathcal{A}$. Protože

$$\eta(xy) = \|x^*y^*\| \le \|x^*\|\,\|y^*\| = \eta(x)\,\eta(y) \quad \text{a} \quad \eta(e) = \|e^*\| = \|e\| = 1$$

bude $(\mathcal{A}, \eta)$ Banachova algebra, ukážeme-li ještě, že η je úplná norma. Je-li však $\{x_n\}$ cauchyovská posloupnost v této normě, je $\{x_n^*\}$ cauchyovská posloupnost v $\mathcal{A}$. Existuje tedy $z \in \mathcal{A}$ tak, že $x_n^* \to z$. Potom samozřejmě $\eta(x_n^* - z) = \|x_n^* - z\| \to 0$. Podle předešlého důsledku (i) je η ekvivalentní původní normě. Existuje tedy $C > 0$ tak, že $\eta(x) = \|x^*\| \le C\|x\|$. To již stačí k důkazu spojitosti i (involuce je „sdruženě“-lineární zobrazení). ♣

`(k) Poznámky.` (k1) V C^*-algebrách je samozřejmě involuce spojitá. To plyne z rovnosti $\|x\| = \|x^*\|$.

(k2) Uvedená věta (h) platí s mírnou modifikací i pro nekomutativní polojednoduché Banachovy algebry. Důkaz však je již netriviální. Tím pádem platí i oba důsledky. Vyslovme to jako samostatná tvrzení.

`(l) Johnsonova věta.` *Buďte $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Banachovy algebry, $\mathcal{B}$ polojednoduchá, $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ homomorfizmus a $T\mathcal{A} = \mathcal{B}$. Potom T je spojité zobrazení.*

Návod. Větu dokázal B.E. Johnson [1967], jednoduchý důkaz podal T.J. Ransford [1989]. ♣

`(m) Důsledek.` *Je-li $(\mathcal{A}, \|.\|_1)$ polojednoduchá Banachova algebra s jednotkou a $\|.\|_2$ další norma na $\mathcal{A}$, v níž je $\mathcal{A}$ Banachova algebra, jsou již normy $\|.\|_1$ a $\|.\|_2$ ekvivalentní.*

`(n) Důsledek.` *Nechť $\mathcal{A}$ je polojednoduchá Banachova algebra s involucí. Potom involuce $i : x \mapsto x^*$ je spojité zobrazení.*

`(o) Otevřený problém.` Zdá se, že do dneška odolává problém, zda v Johnsonově větě stačí předpokládat, že obor hodnot $T(\mathcal{A})$ je hustá podmnožina $\mathcal{B}$.

***7.8. Jacobsonova topologie.** (a) Jako zajímavost uveďme, že do prostoru $\Omega(\mathcal{A})$ či $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ se kromě Gelfandovy topologie zavádí ještě další topologie. Stručně se o ní zmiňme.

Buď tedy $\mathcal{A}$ opět komutativní Banachova algebra. Pro libovolné množiny $E \subset \Omega(\mathcal{A})$ a $A \subset \mathcal{A}$ položme

$$\ker E = \{x \in \mathcal{A} : \chi(x) = 0 \text{ pro všechna } \chi \in E\}\,, \quad \operatorname{hul} A = \{\chi \in \Omega(\mathcal{A}) : \chi(x) = 0 \text{ pro všechna } x \in A\}\,.$$

Dále pro libovolnou množinu $E \subset \Omega(\mathcal{A})$ nechť $\tilde{E} := \operatorname{hul}(\ker E)$.

Množinu $F \subset \Omega(\mathcal{A})$ prohlásíme za uzavřenou, jestliže $F = \tilde{F}$. Lze ukázat, že systém všech uzavřených množin na $\Omega(\mathcal{A})$ určuje skutečně topologii, které se říká *Jacobsonova topologie* na $\Omega(\mathcal{A})$. Její vztah ke Gelfandově topologii je obsažen v následující větě, přidejme však nejdříve ještě jednu definici.

`(b) Úplně regulární Banachova algebra.` Banachova algebra $\mathcal{A}$ se nazve *úplně regulární*, někteří autoři též používají termínu *regulární*, jestliže ke každé uzavřené množině (v Gelfandově topologii) $F \subset \Omega(\mathcal{A})$ a každému bodu $a \in \Omega(\mathcal{A}) \setminus F$ existuje $x \in \mathcal{A}$ tak, že

$$\widehat{x}(a) = 1 \quad \text{a} \quad \widehat{x} = 0 \quad \text{na} \quad F\,.$$

Jenom připomeňme, že topologický prostor T je úplně regulární (v topologickém smyslu), jestliže ke každé uzavřené množině $F \subset T$ a každému $a \in T \setminus F$ existuje spojitá omezená funkce $f \in \mathcal{C}(T)$ tak, že $f(a) = 1$ a $f = 0$ na F.

Lze ukázat, že Banachova algebra $L^1(G)$ z příkladu 6.5.f je úplně regulární, zatímco disková algebra z 6.5.c není.

(c) Věta. *Buď $\Omega(\mathcal{A})$ prostor charakterů komutativní Banachovy algebry $\mathcal{A}$. Potom*

(a) *Jacobsonova topologie na $\Omega(\mathcal{A})$ je slabší než Gelfandova topologie, jednobodové množiny jsou v ní uzavřené a má-li $\mathcal{A}$ jednotku, je kompaktní.*

(b) *Jacobsonova a Gelfandova topologie na $\Omega(\mathcal{A})$ splývají, právě když Banachova algebra $\mathcal{A}$ je úplně regulární.*

(d) Poznámka. Má-li $\mathcal{A}$ jednotku, potom Gelfandova a Jacobsonova topologie splývají, právě když Jacobsonova topologie je Hausdorffova. To plyne z toho, že prostor charakterů $\Omega(\mathcal{A})$ je v Gelfandově topologii kompaktní a Hausdorffův, Jacobsonova topologie je slabší a z věty B.7. Ale poslední tvrzení, možná překvapivě, platí i pro Banachovu algebru $\mathcal{A}$ bez jednotky.

***7.9. Stone-Čechova kompaktifikace.** Jako aplikaci Gelfandovy teorie ukážeme existenci Stone-Čechovy kompaktifikace (porovnejte též s velice podobnou myšlenkou v *15.4).

Věta. *Buď T (Hausdorffův) úplně regulární prostor a $\mathcal{C}^b(T)$ C^*-algebra všech omezených (komplexních) spojitých funkcí na T opatřená* sup*-normou, přirozeným násobením a involucí $f \mapsto \overline{f}$. Potom prostor charakterů $\beta T := \Omega(\mathcal{C}^b(T))$ má následující vlastnosti:*

(a) *βT je kompakt v Gelfandově topologii,*

(b) *existuje homeomorfní vnoření κ prostoru T na hustou podmnožinu βT,*

(c) *ke každé funkci $f \in \mathcal{C}^b(T)$ existuje $F \in \mathcal{C}(\beta T)$ tak, že $F|\kappa T = f$.*

Důkaz. Nechť $\kappa : t \mapsto \varphi_t$, kde $\varphi_t(f) = f(t)$ pro $f \in \mathcal{C}^b(T)$. Protože φ_t je charakter na $\mathcal{C}^b(T)$, je podle *15.3 κ homeomorfním vnořením T do prostoru charakterů βT.

Je-li $f \in \mathcal{C}^b(T)$, víme, že Gelfandova transformace $\widehat{f}$ leží v $\mathcal{C}(\beta T)$. Pro $t \in T$, je $\widehat{f}(\kappa(t)) = \widehat{f}(\varphi_t) = \varphi_t(f) = f(t)$.

Zbývá ukázat, že κT je hustá podmnožina βT. Kdyby tomu tak nebylo, existoval by charakter $\chi \in \beta T$, $\varepsilon > 0$ a $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}^b(T)$ tak, že okolí χ

$$\big\{h \in \beta T : |h(f_i) - \chi(f_i)| < \varepsilon : i = 1, \dots, n\big\}$$

je disjunktní s κT. Položíme-li $g(t) := \sum_{i=1}^{n} \big|f_i(t) - \chi(f_i)\big|^2$ pro $t \in T$, máme $g(t) \geq \varepsilon^2$ pro každé $t \in T$. Tudíž g je invertibilní prvek $\mathcal{C}^b(T)$. To je však ve sporu s cvičením 7.23.b1, neboť $\chi(g) = 0$. ■

***7.10. Závěrečné poznámky.** Slavný Gelfandův a Naimarkův výsledek je reprodukován v R.S. Doran [*1994]. V tomto sborníku je i příspěvek R.V. Kadisona s detailním modernějším důkazem a historickými poznámkami ke Gelfand-Naimarkově větě.

*8. Spektrální teorie v Hilbertových prostorech

***8.1. Invariantní podprostory.** (a) Začněme nejprve s lineární algebrou a stručnou zmínkou o důležitosti invariantních podprostorů zde. Je-li T lineární operátor, řekněme na prostoru $\mathbf{R}^n$, M podprostor $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^n = M \oplus M^\perp$, můžeme schematicky popsat T jako matici

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

kde $A \in \mathcal{L}(M)$, $B \in \mathcal{L}(M^\perp, M)$, $C \in \mathcal{L}(M, M^\perp)$ a $D \in \mathcal{L}(M^\perp)$.

Je-li M *invariantní podprostor* operátoru T (to znamená, že $TM \subset M$), je $C = 0$ a matice T má jednodušší tvar

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Ještě příjemnější je situace, kdy M je dokonce *redukující podprostor* T (definice říká, že to je případ, kdy M i $M^\perp$ jsou oba invariantními podprostory, anebo ekvivalentně, jestliže M je invariantní podprostor jak operátoru T tak i jeho hermiteovsky adjungovaného operátoru T^*). V tom případě je $B = C = 0$ a daná matice má tvar

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Je jasné, že leckteré otázky týkající se T se pak dají řešit mnohem snadněji. Stačí se pak zaměřit na operátory A a D, kteréžto operují již jen na M či $M^\perp$.

Vůbec by neškodilo, kdybyste se podívali na nějakou publikaci z lineární algebry. Třeba nahlédli do [MZ].

(b) `Invariantní podprostory`. Nechť T je omezený lineární operátor na Banachově prostoru X. Uzavřený lineární podprostor $M \subset\subset X$ nazveme *T-invariantním podprostorem*, jestliže $TM \subset M$. Kolekci všech T-invariantních podprostorů značme symbolem $\operatorname{Inv} T$. Do prostoru $\operatorname{Inv} T$ zaveďme uspořádání pomocí množinové inkluze. Definujme $M_1 \prec M_2$, pokud $M_1 \subset M_2$.

Vždycky $\{0\}$ a X jsou T-invariantní podprostory, každý další T-invariantní podprostor nazveme netriviálním. Řekneme, že $\operatorname{Inv} T$ je *netriviální*, pokud obsahuje netriviální T-invariantní podprostor.

(c) `Příklady`. (c1) Je-li λ vlastní číslo operátoru T, potom $\ker(T - \lambda I)$ je T-invariantní podprostor. Je tento podprostor netriviální?

(c2) Je-li $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ operátor na $\mathbf{R}^2$ z příkladu 8.28.f, je $\operatorname{Inv} A$ triviální. Avšak libovolný operátor $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$, kde $n \geq 3$, má již netriviální T-invariantní podprostor. Rozmyslete si proč.

(c3) Nechť $\mathcal{V} : \mathcal{L}^2([0,1]) \to \mathcal{L}^2([0,1])$ je Volterrův operátor daný předpisem $\mathcal{V}f(x) := \int_0^x f$. Ukažte, že podprostory $V_t := \big\{f \in \mathcal{L}^2([0,1]) : f = 0 \text{ na intervalu } [0,t]\big\}$ jsou $\mathcal{V}$-invariantní. Lze dokonce dokázat, že $\operatorname{Inv} \mathcal{V} = \{V_t : t \in [0,1]\}$ (viz třeba H. Radjavi and P. Rosenthal [*1973], str. 68).

(c4) Je-li $R : (x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots)$ operátor posunutí na prostoru l^2, jsou prostory $R_n := \{\{x_k\} : x_j = 0 \text{ pro } j = 1, \dots, n\}$ prvky $\operatorname{Inv} R$.

(d) `Struktura` $\operatorname{Inv} T$. *Prostor* $\operatorname{Inv} T$ *tvoří úplný svaz mající největší a nejmenší prvek.*

Návod. Je-li $\{M_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset \operatorname{Inv} T$, potom uzavřený lineární obal $S := \overline{\operatorname{lin}}\big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma\big)$ a $I := \bigcap_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma$ jsou prvky $\operatorname{Inv} T$, $S = \sup\{M_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ a $I = \inf\{M_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$. ♣

(e) `Poznámka`. Při označení jako výše máme speciálně

$$\sup\{M_1, M_2\} = \overline{M_1 + M_2} \quad \text{a} \quad \inf\{M_1, M_2\} = M_1 \cap M_2 \,.$$

(f) `Problém invariantních podprostorů`. Je-li dán operátor $T \in \mathcal{L}(X)$, naskýtá se otázka, zda prostor $\operatorname{Inv} T$ je netriviální. Viděli jsme v *8.1.c2, že v případě reálného prostoru X může být $\operatorname{Inv} T = \{\{0\}, X\}$. Per Enflo byl prvním, kdo v roce 1981 poslal k publikaci výsledek ukazující, že $\operatorname{Inv} T$ může obsahovat pouze triviální invariantní podprostory. Jeho práce [1987] ovšem vyšla mnohem později. Mezitím C.J. Read [1984] sestrojil také protipříklad a v [1985] ukázal dokonce příklad (omezeného) operátoru T na separabilním Banachově prostoru l^1, který nemá žádné netriviální T-invariantní podprostory. Zjednodušená konstrukce Enfloova příkladu je v B. Beauzamy [1985].

Do dneška není známo, zda každý operátor na reflexivním Banachově prostoru má netriviální invariantní podprostor. Pokud vím, dokonce to není známo ani pro Hilbertovy prostory.

Dalším problémem je úplná charakteristika všech invariantních podprostorů daného operátoru. Ty se dají popsat v některých konkrétních případech (kupříkladu v *8.1.c3), ale někdy charakteristika $\operatorname{Inv} T$ není vůbec známa. Jak uvádí J.B. Conway [*1985] na str. 184, v případě operátoru $Tf(z) := zf(z)$ na prostoru $\mathcal{L}^2(\mathbf{D}, \lambda)$, kde $\mathbf{D} := \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ a λ je Lebesgueova míra, je struktura $\operatorname{Inv} T$ zatím nejasná.

V dalším ukážeme příklady, co se může stát, upustíme-li od požadavku uzavřenosti podprostoru, omezenosti operátoru či úplnosti prostoru.

(g) `Protipříklady`. Existuje příklad omezeného operátoru T na (neúplném) separabilním komplexním prostoru se skalárním součinem nemající žádný netriviální invariantní podprostor. Stačí uvažovat vektorový prostor všech komplexních polynomů na $[0,1]$ se skalárním součinem $(p,q) := \int_0^1 p\overline{q}$ a operátor $T : p(t) \mapsto tp(t)$. Pokud by se vám nepodařilo ověřit, že toto je hledaný protipříklad, můžete se podívat do A. Mukherjea and K. Pothoven [*1986].

Tam je též uveden příklad od H.H. Schaefera [1963]: Je-li T nenulový lineární operátor na vektorovém prostoru W, existuje podprostor $A \subset\subset W$ tak, že $TA \subset A$ (o uzavřenosti nemá smysl mluvit).

Konečně výsledek A.L. Shieldse [1970] ukazuje, že na každém separabilním nekonečně dimenzionálním Hilbertově prostoru existuje neomezený operátor nemající žádné netriviální (uzavřené) invariantní podprostory.

`(h) Existence invariantních podprostorů`. Nyní uveďme pozitivní výsledky.

Pokud uvažovaný Banachův prostor X je neseparabilní, má každý operátor $T \in \mathcal{L}(X)$ netriviální invariantní podprostor. Stačí vzít $x \neq 0$ a uvažovat uzavřený lineární podprostor X generovaný množinou $\{T^n x : n = 0, 1, 2, \dots\}$. Ten je totiž separabilní, a tedy vlastní.

Již v roce 1930 ukázal J. von Neumann, že každý kompaktní operátor na Hilbertově prostoru má netriviální invariantní podprostor. N. Aronszajn a K.T. Smith [1954] dokázali, že pro každý kompaktní operátor K na Banachově prostoru je prostor $\operatorname{Inv} K$ netriviální.

Používajíce metod nestandardní analýzy A.R. Bernstein and A. Robinson odvodili v [1966] následující výsledek: *Je-li T operátor na nekonečně dimenzionálním Banachově prostoru, pro nějž existuje polynom p tak, že $p(T)$ je kompaktní, potom T má netriviální invariantní podprostor.* Načež ihned nato podal P.R. Halmos v [1966] důkaz tohoto tvrzení pomocí standardní analýzy.

Teprve nedávno se objevil silný výsledek s poměrně jednoduchým důkazem. V.I. Lomonosov v [1973] použil Schauderovu větu o pevném bodu a dokázal následující tvrzení.

`(i) Lomonosovova věta.` *Nechť X je Banachův prostor nekonečné dimenze, K kompaktní operátor na X a $T \in \mathcal{L}(X)$ takový, že $TK = KT$. Potom existuje T-invariantní podprostor $A \subset X$ s vlastností, že A je B-invariantní pro každý operátor B na X komutující s T.*

Podprostorům majících uvedenou vlastnost se říká *T-hyperinvariantní*. Důkaz této krásné věty lze nalézt v J.B. Conway [*1985], elementárnější náležející M. Hildenovi pak v C. Swartz [*1992].

Zkuste si rozmyslet, že Bernstein-Robinsonův výsledek je snadným důsledkem Lomonosovovy věty.

`(j) Poznámka.` Z multiplikativní verze spektrální věty *9.10.g plyne, že každý normální operátor na Hilbertově prostoru má netriviální invariantní podprostor.

*9. Funkční kalkulus

***9.1. Vlastnosti odmocniny**. V následující sérii víceméně cvičení se seznamte s dalšími vlastnostmi odmocnin.

(a) Předpokládejme, že A je pozitivní operátor na Hilbertově prostoru. Starší konstrukce odmocniny $\sqrt{A}$ využívaly analogie výpočtu druhé odmocniny pomocí binomického rozvoje. Omezíme-li se na případ $0 \leq A \leq I$ (což stačí) a definujeme-li rekurentně

$$B_0 = 0 \quad \text{a} \quad B_{j+1} := B_j + \frac{1}{2}\big(A - B_j^2\big)\,,$$

je poměrně hezké cvičení ukázat, že existuje $\lim B_j =: B$, že B je pozitivní a $B^2 = A$. Můžete se do toho pustit.

Rovněž tak jednoznačnost odmocniny lze dokázat relativně elementárně. I o to se můžete pokusit sami.

(b) Nechť $\mathcal{Z}$ je C^*-algebra, x její pozitivní prvek a n přirozené. Ukažte, že existuje právě jeden pozitivní prvek $h \in \mathcal{Z}$ tak, že $h^n = x$. Tento jednoznačně určený prvek h značíme $x^{\frac{1}{n}}$.

Návod. Podívejte se na 9.21.b. ♣

(c) Rovněž tak n-tou odmocninu lze získat limitním přechodem z rekurentní posloupnosti. Definujeme-li pro pozitivní operátor A na Hilbertově prostoru

$$D_0 = 0 \quad \text{a} \quad D_{j+1} := D_j + \frac{1}{n}\big(A - D_j^n\big)\,,$$

je opět $D := \lim D_j$ pozitivní operátor a $D^n = A$. Čtenáři mohu doporučit článek N.M. Rice [1982].

(d) Nalezněte příklad pozitivního operátoru T na Hilbertově prostoru H a operátoru $B \in \mathcal{L}(H)$, který není hermiteovský a splňuje rovnost $B^2 = T$.

(e) Je-li operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ invertibilní, je invertibilní i $\sqrt{T}$.

Návod. Využijte toho, že $T\sqrt{T} = \sqrt{T}\,T$. Inverzí k $\sqrt{T}$ je operátor $T^{-1}\sqrt{T}$. ♣

(f) Nechť x je prvek C^*-algebry $\mathcal{Z}$, e její jednotka. Ukažte, že následující výroky jsou ekvivalentní:

(i) x je pozitivní,
(ii) existuje hermiteovský prvek $s \in \mathcal{Z}$ (ne nutně jednoznačně určený) tak, že $s^2 = x$,
(iii) existuje (jednoznačně určený) pozitivní prvek $h \in \mathcal{Z}$ tak, že $h^2 = x$,
(iv) existuje $a \in \mathcal{Z}$ tak, že $x = a^*a$,
(v) x je hermiteovský a $\|\lambda e - x\| \leq \lambda$ pro všechna $\lambda \geq \|x\|$,
(vi) x je hermiteovský a existuje $\lambda_0 \geq \|x\|$ tak, že $\|\lambda_0 e - x\| \leq \lambda_0$.

Návod. Něco jsme již dokázali v 9.21.b. Je-li $f \in \mathcal{C}(\sigma(x))$ nezáporná funkce, je $|f(t) - \lambda| \leq \lambda$ pro všechna $t \in \sigma(x)$ a $\lambda \geq \|f\|$. Toto cvičení není úplně nejjednodušší, pokud byste si nebyli s ním schopni poradit, podívejte se do J.B. Conway [*1985], Th. 3.6. ♣

***9.2. Polární rozklad.** *Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je libovolný operátor na Hilbertově prostoru H. Potom existuje právě jeden operátor $U \in \mathcal{L}(H)$ tak, že $T = U|T|$, $\ker U = \ker T$ a $\|Ux\| = \|x\|$ pro $x \in (\ker T)^\perp$.*

Důkaz. Ježto $|T|$ je vždy hermiteovský operátor, máme pro libovolné $x \in H$

$$\big\|\, |T|\, x \,\big\|^2 = \big(x, |T|^2 x\big) = (x, T^*Tx) = \|Tx\|^2 .$$

Odtud ihned plyne, že $\ker |T| = \ker T$, a tedy i jednoznačnost polárního rozkladu.

Je-li $y \in \mathcal{R}|T|$, $y = |T|x$, můžeme položit $Vy := Tx$. Potom $V : \mathcal{R}|T| \to \mathcal{R}T$ je izometrie, kterou můžeme jednoznačně rozšířit na izometrii $U : \overline{\mathcal{R}|T|} \to \overline{\mathcal{R}T}$. Nyní stačí položit $U = 0$ na $(\mathcal{R}|T|)^\perp = \ker |T|$. ■

***9.3. Poznámky**. (a) Operátoru U se někdy říká *částečná izometrie*.

(b) Rovnost $T = U|T|$ připomíná polární rozklad komplexního čísla: $\alpha = e^{i\varphi}|\alpha|$.

***9.4. Spojitost měřitelného kalkulu**. Nechť H je Hilbertův prostor, A hermiteovský operátor na H a Ψ zobrazení prostoru omezených borelovských funkcí na spektru $\sigma(A)$ do $\mathcal{L}(H)$ dané borelovským měřitelným funkčním kalkulem.

V průběhu důkazu věty 9.29 jsme ukázali, že zobrazení Ψ je spojité v následujícím smyslu: Kdykoliv $\{f_n\}$ je omezená posloupnost v $\mathcal{B}^b(\sigma(A))$ a $f_n \to f$ bodově na $\sigma(A)$, potom $(f_n(A)x, y) \to (f(A)x, y)$ pro každé $x, y \in H$. Podíváme-li se na 14.20.c, poslední konvergence není nic jiného než konvergence $f_n(A) \to f(A)$ ve slabé operátorové topologii τ_{WOT} na prostoru $\mathcal{L}(H)$.

Povšimneme-li si zároveň bodové konvergence omezených posloupností na prostoru $\mathcal{B}^b(\sigma(A))$. Začněme poněkud obecněji. Je-li K kompakt, je duál $(\mathcal{C}(K))^*$ izometricky-izomorfní prostoru $\mathcal{M}(K)$ všech Radonových měr na K (můžete se vrátit k 2.14.d). Je-li nyní $g \in \mathcal{B}^b(K)$, je zobrazení $\Phi_g : \mu \mapsto \int_K g\, d\mu$ prvek $(\mathcal{M}(K))^*$ a $\|\Phi_g\| = \|g\|$. V tomto smyslu tedy můžeme chápat $\mathcal{B}(K)$ jako podprostor $(\mathcal{M}(K))^*$ a lze mluvit o w^*-konvergenci na $\mathcal{B}^b(K)$. Je-li $\{f_n\} \subset \mathcal{B}^b(K)$ omezená posloupnost a $f \in \mathcal{B}^b(K)$, je $f_n \to f$ bodově na K, právě když $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

Dostáváme tedy tvrzení, že zobrazení $\Psi : \mathcal{B}^b(\sigma(A)) \to \mathcal{L}(H)$ je (sekvenciálně) spojité, uvažujeme-li na prvním prostoru w^*-topologii a na druhém slabou operátorovou topologii.

Lze však tvrdit mnohem více. Je-li $\{f_n\}$ omezená posloupnost v $\mathcal{B}^b(\sigma(A))$ konvergující bodově k funkci f na $\sigma(A)$, potom $f_n(A)x \to f(A)x$ pro každé $x \in H$. Poslední konvergence je konvergencí v tak zvané silné operátorové topologii τ_{SOT} prostoru $\mathcal{L}(H)$ zavedené taktéž v 14.20.c. Naznačme myšlenku, proč tomu tak je. Mějme tedy naši posloupnost $\{f_n\}$ a $x \in H$. Především si vzpomeneme, jak vypadá slabá konvergence v Hilbertových prostorech (pokud ne, nakládneme do *3.1.l). Tím dostaneme podle předešlého, že $f_n(A)x \xrightarrow{w} f(A)x$. Dále použijeme opět již dokázané o slabé operátorové topologii tentokráte na posloupnost $\{\overline{f_n} f_n\}$. Máme tedy

$$\|f_n(A)x\|^2 = \big(f_n(A)x, f_n(A)x\big) = \big((f_n(A))^* f_n(A)x, x\big) = \big((\overline{f_n} f_n)(A)x, x\big) \to \big((\overline{f} f)(A)x, x\big) = \big\|f(A)x\big\|^2 .$$

Vidíme, že $\|f_n(A)x\| \to \|f(A)x\|$. A protože pracujeme v Hilbertových prostorech, dostáváme odtud $f_n(A)x \to f(A)x$ podle 3.14.l.

***9.5. Spektrální míry**. Nechť K je lokálně kompaktní (σ-kompaktní) topologický prostor a H Hilbertův prostor. Zobrazení E σ-algebry $\mathfrak{B}(K)$ všech borelovských podmnožin prostoru K do množiny všech ortogonálních projekcí na H nazveme *spektrální mírou*, jestliže

(a) $E(\emptyset) = 0$, $E(K) = I$,
(b) $E(B_1 \cap B_2) = E(B_1)E(B_2)$ pro libovolné borelovské množiny v K,
(c) $E(B_1 \cup B_2) = E(B_1) + E(B_2)$ pro libovolné $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}(K)$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$,
(d) zobrazení $E_x : B \mapsto \big(E(B)x, x\big)$ je pro každé $x \in H$ Radonova míra na K.

`Příklady spektrálních měr.` (a) Nechť T je hermiteovský operátor na Hilbertově prostoru H. Z věty 9.16 vyplývá, že zobrazení $B \mapsto E_B := c_B(T)$, kde $B \subset \sigma(T)$ je borelovská množina, je spektrální míra na $\sigma(T)$. Je totiž $c_B^2 = c_B$ (a tudíž $E_B^2 = E_B$), $\overline{c_B} = c_B$ (takže $E_B^* = E_B$). Rovněž tak podmínky (b), (c) i (d) vyplývají z vlastností funkčního kalkulu.

(b) Je-li $H = \mathcal{L}^2([0,1])$ a $Af : t \mapsto tf(t)$ pro $f \in H$ a $t \in [0,1]$, je A hermiteovský operátor na H. V 5.9.c jsme ukázali, že $\sigma(A) = [0,1]$. Je-li $B \subset [0,1]$ borelovská množina, položme $E_B : f \mapsto c_B f$. Potom $E_B \in \mathcal{L}(H)$ je ortogonální projekce a $E : B \mapsto E_B$, $B \in \mathfrak{B}([0,1])$, spektrální míra. Speciálně dostáváme, že

$$E_f(B) = (E_B f, f) = \int_0^1 c_B\,|f|^2 = \int_B |f|^2\,,$$

pokud $f \in H$ a $B \in \mathfrak{B}([0,1])$.

***9.6. Integrál vzhledem ke spektrální míře**. Nechť H je Hilbertův prostor, K lokálně kompaktní σ-kompaktní prostor a $E : \mathfrak{B}(K) \to \mathcal{L}(H)$ spektrální míra. Je-li $f \in \mathcal{B}^b(K)$ omezená borelovská funkce na K, chtěli bychom definovat $\int_K f\,dE$ jako jakousi analogii Lebesgueova integrálu. Aniž se příliš zatížíme detaily, podejme hlavní myšlenku konstrukce tohoto integrálu.

Označme $\mathcal{J}$ lineární obal množiny $\{c_B : B \in \mathfrak{B}(K)\}$. To není nic jiného než prostor jednoduchých funkcí. Je známo, že J je hustý podprostor Banachova prostoru $\mathcal{B}^b(K)$. Je-li $\varphi = \sum_{j=1}^n \alpha_j c_{B_j} \in \mathcal{J}$, máme pro každé $x \in H$

$$\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j E(B_j)x, x\right) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \bigl(E(B_j)x, x\bigr) = \int_K \varphi\,dE_x\,.$$

Je-li $\varphi = \sum_{i=1}^k \beta_i c_{M_i}$ jiné vyjádření funkce φ, dostáváme tedy, že

$$\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j E(B_j)x, x\right) = \left(\sum_{i=1}^k \beta_i E(M_i)x, x\right)$$

pro každé $x \in H$. Použijeme-li cvičení 8.28.c (ortogonální projekce jsou hermiteovské operátory) či 8.28.e, vidíme, že $\sum_{j=1}^n \alpha_j E(B_j) = \sum_{i=1}^k \beta_i E(M_i)$. Máme tedy korektně definováno zobrazení $\mathcal{S} : \mathcal{J} \to \mathcal{L}(H)$ předpisem $\mathcal{S}(\sum_{j=1}^n \alpha_j c_{B_j}) = \sum_{j=1}^n \alpha_j E(B_j)$.

Lehko se zjistí, že $\mathcal{S}$ je lineární zobrazení, $\mathcal{S}(\overline{\varphi}) = \mathcal{S}(\varphi)^*$ a $\mathcal{S}(\varphi\psi) = \mathcal{S}(\varphi)\,\mathcal{S}(\psi)$. Protože $E_x(K) = (E(K)x, x) = (x, x) = \|x\|^2$, dostáváme pro každé $x \in H$ a $\varphi \in \mathcal{J}$ odhad

$$\|\mathcal{S}(\varphi)x\|^2 = \int_K |\varphi|^2\,dE_x \le \|f\|^2_{\mathcal{B}^b(K)} E_x(K) \le \|\varphi\|^2_{\mathcal{B}^b(K)} \|x\|^2\,.$$

Je tedy zobrazení $\mathcal{S}$ také spojité a lze jej jednoznačně rozšířit na spojité lineární zobrazení $\widehat{\mathcal{S}}$ na $\mathcal{B}^b(K)$.

Integrál $\int_K f\,dE$ definujeme pro $f \in \mathcal{B}^b(K)$ jako operátor $\widehat{\mathcal{S}}(f) \in \mathcal{L}(H)$. Potom $\int_K f\,dE$, což je prvek prostoru $\mathcal{L}(H)$, nazýváme *integrálem z f podle spektrální míry E*.

Máme-li nyní zaveden integrál (Lebesgueova typu) pro omezené borelovské funkce vzhledem ke spektrální míře, můžeme vyslovit jednu z hlavních vět o spektrálním rozkladu. Důkaz nebudeme uvádět.

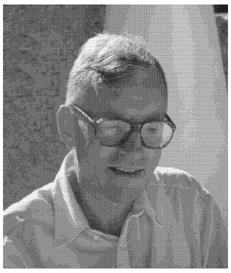
***9.7. Spektrální věta.** *Nechť T je normální operátor na Hilbertově prostoru H a* id *identita na spektru $\sigma(T)$. Potom existuje právě jedna spektrální míra E na $\sigma(T)$ tak, že*

$$T = \int_{\sigma(T)} \mathrm{id}\, dE\,.$$

Je-li $f \in \mathcal{B}^b(\sigma(T))$ omezená borelovská funkce na $\sigma(T)$, je

$$f(T) = \int_{\sigma(T)} f\, dE\,.$$

Jestliže operátor $U \in \mathcal{L}(H)$ komutuje s T a T^*, komutuje již se všemi operátory $f(T)$, kde $f \in \mathcal{B}^b(\sigma(T))$.



B. Fuglede

***9.8. Poznámky.** (a) Věty o spektrálních rozkladech mají samozřejmě celou řadu aplikací v mnoha oborech. Tím se těžko můžeme zabývat.

(b) Snad přidejme jenom jednu aplikaci. Je-li T normální operátor a E příslušná spektrální míra, potom $\lambda \in \sigma_p(T)$ je jeho vlastní hodnotou, právě když $E(\{\lambda\}) \neq 0$. V tom případě je $E(\{\lambda\})$ ortogonální projekcí na $\ker(T - \lambda I)$.

(c) V dovětku spektrální věty jsou zbytečně silné předpoklady. Platí totiž zajímavé tvrzení. *Je-li $U \in \mathcal{L}(H)$ operátor, který komutuje s normálním operátorem $T \in \mathcal{L}(H)$, potom U již komutuje i s T^*.* To je *Fugledeho věta*. Původní důkaz je v B. Fuglede [1950]. O rok později C.R. Putnam tuto větu zobecnil. Platí totiž následující tvrzení.

***9.9. Fuglede-Putnamova věta.** *Jsou-li T, S normální operátory na Hilbertově prostoru H a $U \in \mathcal{L}(H)$ má vlastnost, že $TU = US$, potom $T^*U = US^*$.*

***9.10. Ještě jedna spektrální věta**. Začněme opět lineární algebrou z 8.16. Tam jsme nazvali komplexní matici $\mathbf{A}$ *unitárně diagonalizovatelnou*, můžeme-li nalézt unitární matici $\mathbf{P}$ tak, že matice $\mathbf{D} := \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ má diagonální tvar.

(Komplexní matice $\mathbf{A}$ je *unitární*, jestliže $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^*$, kde $\mathbf{A}^*$ značí hermiteovsky transponovanou matici k $\mathbf{A}$.)

Komplexní matice je unitárně diagonalizovatelná, právě když je *normální* : $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A}$. Na diagonále matice $\mathbf{D}$ jsou pak právě vlastní čísla matice $\mathbf{A}$.

Zabývejme se nyní stručně otázkou, jakou analogii můžeme očekávat u nekonečně dimenzionálních Hilbertových prostorů. Začněme jednoduchým příkladem.

`(a) Multiplikativní operátor` M_φ. *Nechť $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor se σ-konečnou mírou μ a $\varphi \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$. Definujeme-li operátor $M_\varphi : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ předpisem $M_\varphi : f \mapsto \varphi f$, je $M_\varphi \in \mathcal{L}(L^2(\Omega))$ a $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$.*

Návod. Zřejmě $\|M_\varphi(f)\|_2 = \|\varphi f\|_2 \le \|\varphi\|_\infty \|f\|_2$. Opačná nerovnost platí v případě $\|\varphi\|_\infty = 0$. Jinak, předepíšeme-li $\varepsilon > 0$, musí existovat (díky σ-konečností míry μ) množina $A \in \mathcal{S}$ tak, že $0 < \mu A < \infty$ a $|\varphi(t)| \ge \|\varphi\|_\infty - \varepsilon$ pro $t \in A$. Potom $c_A \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ a $\|\varphi c_A\|_2 \ge (\|\varphi\|_\infty - \varepsilon)\|c_A\|_2$. ♣

`Poznámky.` (a) Pokud by míra μ byla zcela obecná, mohlo by stát, že $\|M_\varphi\| < \|\varphi\|$. Na druhé straně existují obecnější prostory s mírou, pro které tvrzení z (a) stále platí. Patří mezi ně prostory, jimž se říká *striktně lokalizovatelné* (někdy též v angličtině „decomposable").

(b) Protože $(M_\varphi)^* = M_{\overline{\varphi}}$, je M_φ hermiteovský, právě když $\varphi = \overline{\varphi}$ μ-skoro všude, tedy právě když φ je reálná funkce.

(c) Uvažujme nyní speciální operátor B na prostoru l^2 daný předpisem $B : \{x_n\} \mapsto \{\lambda_n x_n\}$, kde $\{\lambda_n\}$ je daná omezená posloupnost v $\mathbf{C}$. Definujeme-li funkci φ na l^2 tak, že $\varphi(n) := \lambda_n$ $(n \in \mathbf{N})$, je $\varphi \in \mathcal{L}^\infty(\mathbf{N})$, uvažujeme-li na $\mathbf{N}$ aritmetickou (sčítací) míru. Operátor B pak není nic jiného než multiplikativní operátor M_∞ pro tuto speciální funkci φ. Není těžké ukázat, že operátor B je vždy normální. Navíc je hermiteovský, právě když všechna čísla λ_n jsou reálná, a je kompaktní, právě když $\lambda_n \to 0$. Můžete porovnat s příkladem 8.17.

`(b) Unitární zobrazení`. Zobrazení $U : H_1 \to H_2$ mezi Hilbertovými prostory se nazývá *unitární*, jestliže U je izometricky-izomorfní zobrazení prostoru H_1 na H_2.

(c) Unitární ekvivalence. Nechť H_1 a H_2 jsou Hilbertovy prostory. Operátory $T_1 \in \mathcal{L}(H_1)$ a $T_2 \in \mathcal{L}(H_2)$ jsou *unitárně ekvivalentní*, jestliže existuje unitární zobrazení $U : H_1 \to H_2$ tak, že $UT_1U^{-1} = T_2$.

Je-li T kompaktní hermiteovský operátor na Hilbertově prostoru H, říká nám Hilbert-Schmidtova spektrální věta ve tvaru 8.20, že T je unitárně ekvivalentní multiplikativnímu operátoru B z předešlé poznámky (c). Unitární zobrazení $U : H \to l^2$ je dáno vztahem $Uh := \{\lambda_n(h, u_n)\}$, pokud $Th = \sum_n \lambda_n(h, u_n)u_n$ má vyjádření jako v 8.20. Spektrální věta tedy v tomto případě říká, že kompaktní hermiteovský operátor je unitárně ekvivalentní s jistým multiplikativním funkcionálem na prostoru l^2.

Obdobná věta platí i pro hermiteovské operátory, ne nutně kompaktní. Než k ní přejdeme, zaveďme ještě pojem cyklického vektoru.

(d) Cyklické vektory. Je-li T operátor na Banachově prostoru X, nazveme $x \in X$ jeho *cyklickým* vektorem v případě, kdy celý prostor X je uzavřeným lineárním obalem množiny $\{T^n x : n = 0, 1, 2, \dots\}$. Ekvivalentně lze říci, že x je cyklickým vektorem T, jestliže nejmenší uzavřený T-invariantní podprostor X obsahující x je sám celý prostor X. Ještě jinak, x je cyklický vektor T, jestliže množina $\{p(T)x : p \text{ je polynom}\}$ je hustá v X.

Operátorům majícím cyklický vektor se někdy říká operátory s *prostým spektrem*.

Příklady. (d1) Pokud si ještě vzpomenete na elementární lineární algebru, potom existence cyklického vektoru pro operátor T na eukleidovském prostoru $H = \mathbf{R}^n$ či $H = \mathbf{C}^n$ je ekvivalentní tomu, že operátory $I, T, T^2, \dots, T^{n-1}$ jsou lineárně nezávislé. Nebo také existenci takového vektoru $\xi \in H$, že množina $\{\xi, T\xi, T^2\xi, \dots, T^{n-1}\xi\}$ tvoří bázi H.

Je-li dimenze Banachova X prostoru n a operátor $T \in \mathcal{L}(X)$ má n navzájem různých vlastních čísel, a jsou-li $x_1, \dots, x_n$ příslušné vlastní vektory, je $x := x_1 + \dots + x_n$ cyklický vektor T.

(d2) Multiplikativní operátor M_x definovaný na prostoru $L^2([-1, 1])$ vztahem $M_x(f(t)) = tf(t)$ má funkci $k(t) = 1$ za cyklický vektor.

(d3) Multiplikativní (hermiteovský) operátor $M_{x^2} : f(t) \mapsto t^2 f(t)$ nemá na prostoru $L^2([-1, 1])$ cyklický vektor. To nahlédneme takto: Je-li f libovolný prvek prostoru $L^2([-1, 1])$ a $g(t) := f(-t) \operatorname{sign} t$, je g ortogonální k podprostoru $\{p(M_{x^2})f : p \text{ je polynom}\}$.

Povšimněte si, že multiplikativní operátor M_{x^2} na prostoru $L^2([0, 1])$ má cyklický vektor (a to funkci identicky rovnu 1).

A ještě jeden poznatek. Označíme-li H_l a H_s podprostory všech lichých či sudých funkcí v $L^2([-1, 1])$, jsou H_l a H_s navzájem kolmé M_{x^2}-invariantní podprostory $L^2([-1, 1])$ a $L^2([-1, 1])$ je jejich součtem. Navíc operátor M_{x^2} restringovaný na H_l či H_s má na těchto prostorech cyklické vektory.

(e) Spektrální věta. *Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je hermiteovský operátor mající cyklický vektor h. Potom existuje Radonova míra μ_h na spektru $\sigma(T)$ tak, že T je unitárně ekvivalentní multiplikativnímu operátoru na prostoru $L^2(\sigma(T), \mu_h)$. Přesněji, existuje unitární operátor $U : H \to L^2(\sigma(T), \mu_h)$ tak, že pro každou funkci $g \in \mathcal{L}^2(\sigma(T), \mu)$ je*

$$(UTU^{-1}g)(\lambda) = \lambda g(\lambda) \quad \text{pro } \mu_h\text{-skoro všechna } \lambda \in \sigma(T)\,.$$

Důkaz. Využijeme vlastností Rieszova spojitého funkčního kalkulu. Především, μ_h je Radonova míra na $\sigma(T)$ jednoznačně určená vztahem $(f(T)h, h) = \int_{\sigma(T)} f\, d\mu_h$ pro $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$. Nechť $\mathcal{R} := \{f(T)h : f \in \mathcal{C}(\sigma(T))\}$. Podle předpokladů je $\mathcal{R}$ hustá podmnožina H. Je-li $f(T)h \in \mathcal{R}$, položme $U(f(T)h) := f$. Definice je korektní. Je-li totiž $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$ a $f(T)h = 0$, je vzhledem k rovnosti získané z vlastností Rieszova funkčního kalkulu

$$\|f(T)h\|^2 = \big(f(T)h, f(T)h\big) = \big((f(T)^* f(T)h, h\big) = \int_{\sigma(T)} \overline{f}\, f\, d\mu_h = \|f\|^2$$

$f = 0$ μ_h-skoro všude (a tudíž i $f = 0$ v $L^2(\sigma(T), \mu_h)$). Poslední rovnost též říká, že (lineární) zobrazení $U : \mathcal{R} \to L^2(\sigma(T), \mu_h)$ je izometrie. Lze tedy zobrazení U jednoznačně rozšířit na lineární izometrické zobrazení celého prostoru H na $L^2(\sigma(T), \mu_h)$ (nezapomeňte, že $\mathcal{C}(\sigma(T))$ je hustá podmnožina $L^2(\sigma(T), \mu_h)$). Označme toto rozšíření opět symbolem U. Je tedy U unitární zobrazení. Nechť j je identita na $\sigma(T)$. Volíme-li $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$, máme

$$UTU^{-1}f = UTf(T)h = Uj(T)f(T)h = U(jf)(T)h = jf\,.$$

Vzhledem k hustotě a spojitosti platí tato rovnost i pro každou funkci z $L^2(\sigma(T), \mu_h)$. ∎

Poznámka. Povšimněte si, že v tomto případě multiplikativní operátor M_φ spočíval v násobení identitou.

Ne každý hermiteovský operátor musí mít cyklický vektor. Poslouží třeba příklad identického zobrazení. Jiný příklad je obsažen v odstavci (d3). Nicméně spektrální věta ve tvaru unitární ekvivalence s multiplikativním operátorem stále platí. Její důkaz však již vyžaduje další složitější aparát. Náš prostor rozdělíme na menší části, kde restrikce daného operátoru již cyklické vektory mají (porovnejte s příkladem v (d3)). Uvedeme proto následující tvrzení bez důkazu.

`(f) Multiplikativní verze spektrální věty.` *Ke každému hermiteovskému operátoru T na Hilbertově prostoru H existuje prostor s mírou $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$, funkce $\varphi \in \mathcal{L}^2(\mu)$ a unitární operátor $U : H \to L^2(\mu)$ tak, že*

$$(UTU^{-1})f = \varphi f \quad \mu\text{-skoro všude na } \Omega$$

pro každou funkci $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$.

`Poznámka.` Míra μ není určena nikterak jednoznačně. Je-li H separabilní, lze volit míru μ konečnou.

Dá se očekávat, že analogická věta bude platit i pro normální operátory. Vskutku, lze vyslovit následující větu, jejíž důkaz lze nalézt v monografii N. Dunford and J. Schwartz [*1963].

`(g) Spektrální věta pro normální operátory.` *Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální operátor. Potom existuje Radonova míra μ definovaná na borelovské σ-algebře $\mathcal{B}$ v lokálně kompaktním metrickém prostoru P, omezená spojitá (komplexní) funkce φ na P a unitární transformace $U : H \to L^2(P, \mathcal{B}, \mu)$ tak, že $T = U^{-1} M_\varphi U$.*

*10. Další třídy operátorů

***10.1. Více o fredholmovských operátorech**. Především není těžké zobecnit definici fredholmovských operátorů na zobrazení mezi Banachovými prostory. Jsou-li X, Y Banachovy, řekneme, že operátor $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je *fredholmovský*, jestliže dimenze jádra T a kodimenze oboru hodnot jsou konečné. Symbolem $\mathcal{F}(X, Y)$ značme množinu všech fredholmovských operátorů z X do Y.

Index Fredholmova operátoru $T \in \mathcal{F}(X, Y)$ definujeme jako $\operatorname{ind} T := \dim \ker T - \dim Y/\mathcal{R}T$.

Je-li jeden z prostorů X či Y konečné dimenze a druhý nekonečné, tvoří $\mathcal{F}(X, Y)$ prázdnou množinu. Jsou-li prostory X a Y izomorfní a T je izomorfní zobrazení X na Y, je evidentně T fredholmovský operátor, a tudíž množina $\mathcal{F}(X, Y)$ je neprázdná. Dlouhou dobu nebylo známo, zda X a Y jsou izomorfní v případě, kdy $\mathcal{F}(X, Y) \neq \emptyset$. O tomto problému, jakož i o tom, kdy je množina všech Fredholmových operátorů neprázdná, si řekneme něco více v následujícím odstavci *10.2.

Pokud jeden z prostorů X či Y má nekonečnou dimenzi, nemůže být nulové zobrazení Fredholmův operátor. V tomto případě tedy netvoří $\mathcal{F}(X, Y)$ vektorový prostor.

`(a) Věta.` *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) *T je Fredholmův,*
(ii) *existuje $S \in \mathcal{L}(Y, X)$ tak, že operátory $ST - I \in \mathcal{L}(Y)$ a $TS - I \in \mathcal{L}(X)$ jsou konečně dimenzionální,*
(iii) *existují $L, R \in \mathcal{L}(Y, X)$ tak, že operátory $LT - I \in \mathcal{L}(X)$ a $TR - I \in \mathcal{L}(Y)$ jsou kompaktní.*

Návod. Nechť $T \in \mathcal{F}(X, Y)$. Protože podprostory konečné dimenze a uzavřené podprostory konečné kodimenze mají topologické doplňky, existují uzavřené podprostory $X_T \subset X$ a $Y_T \subset Y$ tak, že $\dim Y_T < \infty$ a $X = \ker T \oplus X_T$, $Y = \mathcal{R}T \oplus Y_T$. Restrikce zobrazení T na X_T je zřejmě izomorfizmem mezi X_T a $\mathcal{R}T$. Nechť $S \in \mathcal{L}(Y, X)$ je takový operátor, že $S = (T \restriction X_T)^{-1}$ na $\mathcal{R}T$ a $S = 0$ na Y_T. Stačí si uvědomit, že $\ker S \subset Y_T$ a ukázat, že $\mathcal{R}(I - ST) \subset \ker T$ a $\mathcal{R}(I - TS) \subset Y_T$. Tím jsme ukázali, že z (i) plyne (ii).

Každý konečně dimenzionální operátor je kompaktní.

K důkazu implikace (iii) $\Rightarrow$ (i) si osvěžme tvrzení: Je-li K kompaktní operátor na Banachově prostoru Z, je $\ker(I - K)$ (uzavřený) podprostor Z konečné dimenze a $\mathcal{R}(I - K)$ je (uzavřený) podprostor konečné kodimenze. Jinými slovy, operátor $I - K$ je fredholmovský.

Jsou-li nyní $LT - I$ a $TR - I$ kompaktní operátory, jsou tudíž operátory LT a TR fredholmovské. Protože $\ker T \subset \ker LT$ a $\mathcal{R}T \supset \mathcal{R}(TR)$, plyne odtud, že T je fredholmovský. ♣

(b) **Poznámka.** Podíváte-li se na předchozí důkaz, musí být jasné, že operátor S, který se nalezl v průběhu důkazu implikace (i) $\Rightarrow$ (ii), je fredholmovský.

(c) **Skoro invertibilní operátory.** Je-li $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, nazveme operátor $S \in \mathcal{L}(Y,X)$ *skoro inverzí* k T, jestliže operátory $ST - I$ a $TS - I$ jsou kompaktní. Má-li T skoro inverzi, nazýváme T *skoro invertibilním.* Ekvivalenci (i) a (ii) z předchozí věty lze vyslovit též ve formě *Noetherova kriteria.*

(d) **Noetherovo kriterium.** *Operátor $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je Fredholmův, právě když je skoro invertibilní.*

(e) **Poznámka.** Vzhledem k poznámce (b) je T fredholmovský, právě když existuje dokonce fredholmovský operátor S tak, že $ST - I$ a $TS - I$ jsou kompaktní.

(f) **Levé a pravé regularizátory.** Nechť $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Operátor $L \in \mathcal{L}(Y,X)$ nazveme *levým regularizátorem* T, jestliže operátor $LT - I$ je kompaktní na X a $R \in \mathcal{L}(Y,X)$ pak *pravým regularizátorem* T, jestliže $TR - I \in \mathcal{L}_c(Y)$. Ekvivalence (ii) a (iii) z věty (a) nám dá následující tvrzení. Připojme však i jeho jiný důkaz.

(g) **Větička.** *Operátor $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, který má současně levý i pravý regularizátor, je již skoro invertibilní.*

Důkaz. Jsou-li L a R levým a pravým regularizátorem T, je operátor $K := L - R \in \mathcal{L}_c(Y,X)$. Zajisté, označíme-li $K_X := LT - I$ a $K_Y := TR - I$, jsou K_X a K_Y kompaktní, a tudíž $L - R = L(TR - K_Y) - (LT - K_X)R = K_X R - LK_Y$ je kompaktní. Protože $(L-K)T - I = (LT - I) - KT \in \mathcal{L}_c(X)$, je $L - K$ levý regularizátor. Nyní si stačí všimnout, že $R = L - K$. ■

(h) **Věta.** *Jsou-li X, Y, Z Banachovy prostory, $T \in \mathcal{F}(X,Y)$, $S \in \mathcal{F}(Y,Z)$, je $ST \in \mathcal{F}(X,Z)$ a* $\operatorname{ind} ST = \operatorname{ind} S + \operatorname{ind} T$.

Návod. Tvrzení, že ST je fredholmovský operátor plyne ihned z Noetherova kriteria. Složení dvou skoro inverzí je totiž skoro inverze ke složení (ve vhodném pořádku).

Pokud jde o index složení, musíme se obrátit k algebře. Uvažujeme-li totiž *exaktní posloupnost* konečně dimenzionálních prostorů

$$\{0\} \to \ker T \to \ker ST \to \ker S \to Y/\mathcal{R}T \to Z/\mathcal{R}ST \to Z/\mathcal{R}S \to \{0\}$$

(tím je míněno, že pro každou trojici $M \to N \to P$ existují jisté operátory $A \in \mathcal{L}(M,N)$ a $B \in \mathcal{L}(N,P)$ tak, že $\ker B = \mathcal{R}A$), je podle t.zv. *Eulerovy identity*

$$\dim\ker T - \dim\ker ST + \dim\ker S - \dim Y/\mathcal{R}T + \dim Z/\mathcal{R}ST - \dim Z/\mathcal{R}S = 0\,.$$

Odtud okamžitě plyne tvrzení.

Pokud bychom chtěli opsat předchozí úvahu a připojit přímý, ale technicky náročnější důkaz, můžeme postupovat následovně. Využitím fredholmovosti operátorů T a S rozložíme $Y = Y_1 \oplus Y_2 \oplus Y_3 \oplus Y_4$ tak, aby prostory Y_1, Y_2 a Y_4 měly konečnou dimenzi a $\ker S = Y_1 \oplus Y_2$, $\mathcal{R}T = Y_2 \oplus Y_3$. Dále nechť $Z = \mathcal{R}S \oplus Z_1$. Potom $Z = \mathcal{R}(ST) \oplus \mathcal{S}(Y_4) \oplus Z_1$. Prostory Y_4 a $\mathcal{S}(Y_4)$ jsou izomorfní, tedy stejné dimenze. Pro $A \in \mathcal{L}(M,N)$ označme $n(A) := \dim\ker A$ a $d(A) := \operatorname{codim}\mathcal{R}A$. Potom $d(ST) = \dim Y_4 + \dim Z_1 = \dim Y_4 + d(S)$, $n(ST) = n(T) + \dim Y_2$, $d(T) = \dim Y_1 + \dim Y_4$, $\dim Y_2 + \dim Y_1 = n(S)$, a tedy

$$n(ST) + d(T) + d(S) = n(T) + \dim Y_4 + n(S) + d(S) = n(T) + n(S) + d(ST)\,.$$

Takže

$$\operatorname{ind}(ST) = n(ST) - d(ST) = n(S) + n(T) - d(T) - d(S) = \operatorname{ind} T + \operatorname{ind} S\,.$$

♣

Poznámka. I když se jedná o větu obecně v nekonečné dimenzi, má čistě algebraický charakter a lze ji vlastně převést na konečně dimenzionální případ. Přitom využijeme jen tvrzení, že součet dimenze jádra a oboru hodnot lineárního operátoru v konečně dimenzionálním vektorovém prostoru je roven právě dimenzi tohoto prostoru. Čtenáře můžeme odkázat na článek D. Sarason [1987].

`(i) Důsledek.` *Je-li $T \in \mathcal{F}(X,Y)$ a $K \in \mathcal{L}_c(X,Y)$ kompaktní, je součet $T+K$ fredholmovský a $\operatorname{ind}(T+K) = \operatorname{ind} T$.*

Návod. Použijte Noetherovo kriterium. Existuje takový operátor $S \in \mathcal{L}(Y,X)$, že $ST-I$ a $TS-I$ jsou kompaktní. Nyní si uvědomte, že $S(T+K)-I = (ST-I)+SK$ a $(T+K)S-I = (TS-I)+KS$. Jinak řečeno, S je skoro inverzí i k $T+K$. Protože tedy $S(T+K) = I+K_X$, kde K_X je kompaktní operátor na X, je s použitím předchozích výsledků $\operatorname{ind} S + \operatorname{ind}(T+K) = \operatorname{ind} S(T+K) = \operatorname{ind}(I+K_X) = 0$. Obdobně dostaneme, že $\operatorname{ind} S + \operatorname{ind} T = 0$. ♣

`(j) Poznámky.` (j1) Důsledek (i) říká, že součet fredholmovského a kompaktního operátoru je fredholmovský. To je zobecněním tvrzení, že $I+K$ je fredholmovský operátor, pokud K je kompaktní.

(j2) Uvědomme si, že důsledek (i) je vlastně zobecněním známé Fredholmovy alternativy (mimochodem, tu jsme k jeho důkazu použili). Totiž, z (i) dostáváme, že $\operatorname{ind}(I+K) = \operatorname{ind} I = 0$, pokud K je kompaktní operátor na Banachově prostoru X. To neříká nic jiného než že $\dim \ker(I+K) = \dim Y/\mathcal{R}(I+K)$. A z této rovnosti je jen krůček k Fredholmově alternativě 5.24: Operátor $I+K$ je prostý, právě když je na.

(j3) V průběhu důkazu důsledku (i) jsme vlastně ukázali, že $\operatorname{ind} T = -\operatorname{ind} S$ v případě, kdy $S \in \mathcal{L}(Y,X)$ je skoro inverzí k fredholmovskému operátoru $T \in \mathcal{F}(X,Y)$. Vlastně stačilo předpokládat méně. Stejné tvrzení platí, předpokládáme-li, že S je pravý nebo levý regularizátor.

`(k) Věta.` *Množina fredholmovských operátorů $\mathcal{F}(X,Y)$ je otevřená v $\mathcal{L}(X,Y)$ a funkce $T \mapsto \operatorname{ind} T : \mathcal{F}(X,Y) \to \mathbf{Z}$ je spojitá.*

Návod. Volme $T \in \mathcal{F}(X,Y)$ a najděme podle (a) $S \in \mathcal{L}(Y,X)$ tak, aby operátory $ST-I$ a $TS-I$ byly konečně dimenzionální. Necháme-li stranou triviální případ $S=0$ (v tom případě by prostory X a Y musely být konečně dimenzionální), stačí ukázat, že

$$\{F \in \mathcal{L}(X,Y) : \|F-T\| < \|S\|^{-1}\} \subset \mathcal{F}(X,Y)\,.$$

Volme tedy F tak, aby $\|F-T\| < \|S\|^{-1}$. Protože $\|S(T-F)\| < 1$, je operátor $I - S(T-F)$ invertibilní. Položíme-li

$$A := \big(I - S(T-F)\big)^{-1} S \quad \text{a} \quad B := S\big((T-F)S - I\big)^{-1}\,,$$

zjistíme po chvilce počítání, že operátory $AF-I$ a $FB-I$ jsou kompaktní (dokonce konečně dimenzionální). Stačí pak znovu užít větu (a).

Nyní ke spojitosti indexu. Odvoláním na poznámku (j3) máme

$$\operatorname{ind} F = -\operatorname{ind} A = -\operatorname{ind}\big(I - S(T-F)\big)^{-1} S = -\operatorname{ind}\big(I-S(T-F)\big)^{-1} - \operatorname{ind} S = -\operatorname{ind} S = \operatorname{ind} T\,,$$

což nám stačí. Zde jsme využili faktu (viz 10.1.b2), že index invertibilního operátoru je 0. ♣

***10.2. Stabilní Banachovy prostory**. Vraťme se nejdříve k problému, zda Banachovy prostory X a Y jsou izomorfní, pokud existuje Fredholmův operátor z X do Y. Tento dlouhou dobu otevřený problém byl řešen poměrně nedávno. Uveďme příklad.

`(a) Příklad.` W.T. Gowers [1994] podal příklad Banachova (separabilního) prostoru X, který není izomorfní žádnému svému vlastnímu podprostoru. Nechť Y je jeho vlastní uzavřený podprostor kodimenze 1 (tedy Y je jádro nenulového funkcionálu z X^*). Protože Y má podle věty *2.5 topologický doplněk, existuje podle věty 2.38 spojitá (lineární) projekce $P : X \to Y$. Potom P je Fredholmův operátor z $\mathcal{F}(X,Y)$. Přitom X a Y nemohou být izomorfní.

`(b) Poznámka.` Pokud jde o index operátoru P z předchozího příkladu, je kladný: $\operatorname{ind} P > 0$. Označíme-li $S : Y \to X$ identické vnoření, je $S \in \mathcal{F}(Y,X)$ a $\operatorname{ind} S = -\operatorname{ind} P < 0$. To není náhoda, platí totiž následující tvrzení.

`(c) Tvrzení.` *Nechť X,Y jsou Banachovy prostory, pro něž existuje $F \in \mathcal{F}(X,Y)$, $\operatorname{ind} F = 0$. Potom X a Y jsou izomorfní.*

Návod. Existují uzavřené podprostory $X_F \subset X$ a $Y_F \subset Y$ tak, že $X = \ker F \oplus X_F$ a $Y = \mathcal{R}F \oplus Y_F$. Zobrazení F (restringované na X_F) je izomorfizmem X_F na $\mathcal{R}F$. Protože $\dim Y_F = \dim \ker F < \infty$, existuje izomorfizmus $T : \ker F \to Y_F$. Položíme-li $L : x + y \mapsto Fx + Ty$ pro $x \in X_F$ a $y \in \ker F$, je $L : X \to Y$ hledaný izomorfizmus. ♣

`(d) Stabilní prostory.` Banachův prostor X nad tělesem $\mathbf{F}$ (uvažujeme pouze $\mathbf{R}$ či $\mathbf{C}$) se nazývá *stabilní*, jestliže $X \times \mathbf{F}$ a X jsou izomorfní. Samozřejmě žádný konečně dimenzionální prostor nemůže být stabilní. Prostory l^p ($p \in [1, \infty]$) a c_0 jsou zřejmě stabilní. Také prostor $\mathcal{C}([0,1])$ je stabilní, důkaz je již obtížnější.

Až do nedávna byla nevyřešeným problémem otázka, zda každý Banachův prostor nekonečné dimenze je stabilní. Již v (a) jsme uvedli, že W.T. Gowers [1994] vyřešil slavný Banachův „hyperplane problem" tím, že sestrojil příklad separabilního Banachova prostoru, který není izomorfní žádnému svému vlastnímu podprostoru. Tento prostor nemůže být stabilní.

Vztah k neprázdnosti množiny fredholmovských operátorů udává následující věta.

`(e) Věta.` *Nechť X a Y jsou Banachovy prostory, X stabilní. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *X a Y jsou izomorfní,*
(ii) $\mathcal{F}(X,Y) \neq \emptyset$,
(iii) $\mathcal{F}(Y,X) \neq \emptyset$.

Návod. Říkali jsme již v úvodu v *10.1, že $\mathcal{F}(X,Y) \neq \emptyset$ a $\mathcal{F}(Y,X) \neq \emptyset$, pokud X a Y jsou izomorfní.

Pro důkaz jedné z opačných implikací je třeba nejdříve uvážit, že uzavřený podprostor stabilního Banachova prostoru X mající konečnou kodimenzi je stabilní a izomorfní s X. To plyne z toho, že všechny uzavřené nadroviny jsou izomorfní. Volíme-li pak $F \in \mathcal{F}(X,Y)$, najdeme uzavřené podprostory $X_F \subset X$ a $Y_F \subset Y$ tak, aby $X = \ker F \oplus X_F$ a $Y = \mathcal{R}F \oplus Y_F$. Zobrazení F, respektive jeho restrikce na X_F, je izomorfizmem X_F na $\mathcal{R}F$. Protože X je stabilní, je X_F podle předešlé úvahy izomorfní s X. Tedy X je izomorfní s $\mathcal{R}F$, odkud plyne, že i $\mathcal{R}F$ je stabilní. Protože Y_F je konečně dimenzionální (a $\mathcal{R}F$ je stabilní), je $\mathcal{R}F \times Y_F$ izomorfní s $\mathcal{R}F$. Dáme-li vše dohromady, vyjde nám, že X a Y jsou izomorfní. ♣

10.3. Slabě kompaktní operátory**. Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Řekneme, že T je ***slabě kompaktní, jestliže obraz uzavřené jednotkové koule $T(B_X)$ je relativně slabě kompaktní podmnožina Y. Tedy T je slabě kompaktní, jestliže $\overline{T(B_X)}$ je slabý kompakt v Y (protože $T(B_X)$ je konvexní množina, vyjde nastejno, uvažujeme-li uzávěr v normové či slabé topologii prostoru Y).

Operátor T je slabě kompaktní, právě když T zobrazuje omezené množiny na množiny relativně slabě kompaktní.

Jelikož máme k dispozici Eberlein-Šmuljanovu větu 16.12, lze říci, že T je slabě kompaktní, právě když pro každou omezenou posloupnost $\{x_n\}$ v X posloupnost $\{T(x_n)\}$ má slabě konvergentní podposloupnost.

Symbolem $\mathcal{W}(X,Y)$ označme prostor všech slabě kompaktních operátorů z X do Y. Dále $\mathcal{W}(X) := \mathcal{W}(X,X)$.

`(a) Příklady.` (a1) Každý kompaktní operátor je slabě kompaktní.

(a2) Identické zobrazení na Banachově prostoru X je slabě kompaktní, právě když X je reflexivní. Tudíž identita na reflexivním Banachově prostoru nekonečné dimenze je příkladem slabě kompaktního operátoru, který není kompaktní.

(a3) Je-li prostor X či Y reflexivní, je každý operátor z $\mathcal{L}(X,Y)$ slabě kompaktní. Stačí si jen vzpomenout na Banach-Bourbakiho charakteristiku reflexivity v 16.9 a použít větu (a) v *14.11. Speciálně každý omezený lineární operátor na Hilbertově prostoru je slabě kompaktní.

(a4) Je-li X Banachův prostor, je $\mathcal{L}_c(X,l^1) = \mathcal{W}(X,l^1)$ a $\mathcal{L}_c(c_0,X) = \mathcal{W}(c_0,X)$. To není těžké ukázat.

(a5) Je-li $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ prostor s konečnou mírou a $k \in \mathcal{L}^\infty(\Omega \times \Omega, \mathcal{S} \times \mathcal{S}, \mu \times \mu)$, potom integrální operátor $T : \mathcal{L}^1(\mu) \to \mathcal{L}^1(\mu)$ definovaný předpisem

$$Tf(t) := \int_{\Omega\times\Omega} k(s,t)\, f(s)\, d\mu(s)$$

je slabě kompaktní

Na začátek uveďme jednoduché tvrzeníčko.

`(b) Ideálové vlastnosti slabě kompaktních operátorů.` *Nechť X, Y, Z jsou Banachovy prostory. Je-li $A \in \mathcal{L}(Z, X)$, $W \in \mathcal{W}(X, Y)$ a $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$, je $WA \in \mathcal{W}(Z, Y)$ a $BT \in \mathcal{W}(X, Z)$.*

Návod. Tvrzení je lehounkým cvičením, můžete třeba použít „sekvenciální" charakteristiku slabě kompaktních operátorů. ♣

Do následujících vět shrňme základní vlastnosti slabě kompaktních operátorů. Z hlediska techniky důkazů je nejobtížnějším krokem implikace (i) $\Rightarrow$ (v). Důkaz pochází od W.J. Davis, T. Figiel, W.B. Johnson and A. Pełczyński [1974] a lze jej nalézt v J.B. Conway [*1985] či [HHZ]. Ekvivalence (i) $\Leftrightarrow$ (iv), která je analogií Schauderovy věty 2.53 o kompaktních operátorech, bývá nazývána *Gantmacherovou větou.*

`(c) Charakteristiky slabě kompaktních operátorů.` *Pro operátor $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ jsou následující výroky ekvivalentní:*

(i) *T je slabě kompaktní,*
(ii) *$T' : (Y^*, w^*) \to (X^*, w)$ je spojitý,*
(iii) *$T''(X^{**}) \subset \varepsilon(Y)$,*
(iv) *$T' : Y^* \to X^*$ je slabě kompaktní,*
(v) *existuje reflexivní prostor $\mathcal{R}$ a operátory $A \in \mathcal{L}(\mathcal{R}, Y)$, $B \in \mathcal{L}(X, \mathcal{R})$ tak, že $T = AB$.*

Návod. Pro důkaz implikace (v) $\Rightarrow$ (i) stačí použít (b). O opačné implikaci již byla řeč.

Rovněž důkaz implikace (i) $\Rightarrow$ (iv) by neměl činit potíže, uvážíme-li, že máme k dispozici Davis-Figiel-Johnson-Pełczyńského charakteristku. Jestliže totiž $T = AB$, kde A, B jsou jako v (v), je $T' = B' A'$. Protože $B' \in \mathcal{L}(\mathcal{R}^*, X^*)$ a prostor X^* je reflexivní podle Pettisovy charakteristiky v 16.15, je B' slabě kompaktní. Opět se stačí podívat na (b). Je-li nyní $T' \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ slabě kompaktní, je $T'' \in \mathcal{L}(X^{**}, Y^{**})$ slabě kompaktní podle předešlého. Označíme-li ε_X a ε_Y kanonická vnoření X do X^{**} a Y do Y^{**}, je $T = \varepsilon_Y^{-1} T'' \varepsilon_X$ (porovnejte s rovností v důkazu Schauderovy věty 2.53). A znovu použijeme (b).

Pro důkaz implikace (i) $\Rightarrow$ (iii) lze zase využít s úspěchem Davis-Figiel-Johnson-Pełczyńského charakteristiku. Je-li totiž $\mathcal{R}$ reflexivní prostor a $A \in \mathcal{L}(\mathcal{R}, Y)$, $B \in \mathcal{L}(X, \mathcal{R})$ takové operátory, že $T = AB$, potom $T'' = A'' B''$. Protože $\varepsilon\mathcal{R} = \mathcal{R}^{**}$, je nutně $\mathcal{R} T'' \subset \varepsilon Y$.

Předpokládejme (iii). Alaogluova věta 16.6 a w^*-spojitost T'' říkají, že $Z := T''(B_{X^{**}})$ je w^*-kompaktní podmnožina Y^{**}. Tudíž podle předpokladu $\varepsilon_Y^{-1}(Z)$ je w-kompaktní podmnožina Y. Protože $TB_X \subset Z$, je T slabě kompaktní.

Konečně k ekvivalenci (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Nechť T je slabě kompaktní a $\varphi_\gamma \xrightarrow{w^*} 0$. Volme $\Phi \in X^{**}$ a najděme $y \in Y$ tak, aby $\varepsilon_Y(y) = \Phi$. Potom $\Phi\big(T'(\varphi_\gamma)\big) = \varphi_\gamma(y) \to 0$. Nechť naopak $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $\Phi \in X^{**}$. Chceme ukázat, že $T''(\Phi) \in \varepsilon Y$ a použít již dokázanou implikaci (ii) $\Rightarrow$ (i). Volme k tomu (zobecněnou) posloupnost $\{\varphi_\gamma\}$ v Y^*, $\varphi_\gamma \xrightarrow{w^*} 0$. Podle předpokladu $T'(\varphi_\gamma) \xrightarrow{w} 0$. Potom $T''(\Phi)(\varphi_\gamma) = \Phi(T'(\varphi_\gamma)) \to 0$, odkud plyne, že $T''\Phi$ je w^* spojitý na Y^*. Takže musí být $T''(\Phi) \in \varepsilon Y$, což jsme potřebovali ukázat. ♣

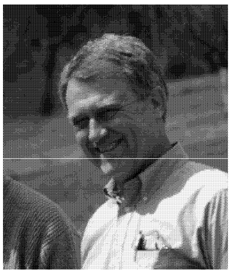
Poznámka. Všechny ekvivalence (i)–(iv) lze dokázat poměrně „elementárně" bez využití Davis-Figiel-Johnson-Pełczyńského charakteristiky. Tak je to třeba uděláno v Ch. Swartz [*1992].

`(d) Vlastnosti` $\mathcal{W}(X, Y)$. *Nechť X, Y, jsou Banachovy prostory. Slabě kompaktní operátory $\mathcal{W}(X, Y)$ tvoří uzavřený podprostor $\mathcal{L}(X, Y)$.*

Návod. Není pochyb o tom, že $\mathcal{W}(X, Y)$ je vektorový podprostor $\mathcal{L}(X, Y)$. Nechť $T_n \in \mathcal{W}(X, Y)$, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $\|T_n - T\| \to 0$. Je-li $\Phi \in X^{**}$, je $T_n'' \Phi \in \varepsilon Y$ a $T_n'' \Phi \to T'' \Phi$. Protože εY je uzavřený podprostor Y^{**}, je i $T'' \Phi \in \varepsilon Y$. Podle implikace (iii) $\Rightarrow$ (i) z (c) je tedy T slabě kompaktní. ♣

`(e) Důsledek.` *Je-li X Banachův prostor, tvoří $\mathcal{W}(X)$ uzavřený ideál v $\mathcal{L}(X)$.*

***10.4. Absolutně sčítající operátory**. V souvislosti s absolutně a bezpodmínečně konvergentními řadami je možno zavést různé třídy operátorů. Kupříkladu, jsou-li X a Y Banachovy prostory, operátor z $\mathcal{L}(X, Y)$ se nazve *absolutně sčítající*, jestliže každou bezpodmínečně konvergentní řadu v X převádí na absolutně konvergentní řadu v Y. Podle Dvoretzky-Rogersovy věty tedy identický operátor není absolutně sčítající v žádném nekonečně dimenzionálním Banachově prostoru. Moderní teorie Banachových prostorů, která se zdá v posledním období prožívat svoji renesanci, rozvinula bohatou teorii okolo sčítajících operátorů. Nová monografie J. Diestel, H. Jarchow and A. Tonge [*1995] je právě věnována studiu těchto operátorů. Než si povíme o základních vlastnostech absolutně sčítajících operátorů, začněme s některými příklady. Ty jsou převzaty z právě citované monografie.



H. Jarchow

(a) **Příklady.** (a1) Nechť μ je Radonova míra na prostoru $\mathcal{C}(K)$, kde K je kompakt a $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Operátor

$$M_\varphi : f \mapsto f\,\varphi \ : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{L}^1(\mu)$$

je absolutně sčítající.

Speciálně, kanonické vnoření $id : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{L}^1(\mu)$ je absolutně sčítající operátor.

(a2) Nechť $\{\lambda_n\} \in l^1$. Potom zobrazení z l^∞ do l^1 definované předpisem $\{x_n\} \mapsto \{\lambda_n x_n\}$ je absolutně sčítající.

(a3) Je-li $\Omega \in \mathbf{R}^n$ omezená otevřená množina a $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ prostor všech funkcí na Ω, jejichž všechny parciální derivace prvního řádu lze spojitě rozšířit na $\overline{\Omega}$, je identické vnoření $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ do Sobolevova prostoru $\mathbf{W}^{1,1}(\Omega)$ absolutně sčítající.

(a4) Identický operátor na l^2 není absolutně sčítající. Stačí uvažovat posloupnost $\{x_n\}$, kde $x_n = (0, \dots, 0, \frac{1}{n}, 0, \dots)$.

(b) **Grothendieckova věta.** *Každý operátor v $\mathcal{L}(l^1, l^2)$ je absolutně sčítající.*

Důkaz. Stačí vhodně použít Chinčinovy nerovnosti, viz *10.6 či konsultovat J. Diestel, H. Jarchow and A. Tonge [*1995], str. 39. ■

Poznámka. Platí obecnější tvrzení, podle kterého libovolný operátor $T : L^1(\mu) \to H$, kde H je Hilbertův prostor, je absolutně sčítající.

Je celá řada charakteristik absolutně sčítajících operátorů. Nejdůležitější z nich shrňme do následující věty.

(c) **Věta.** *Nechť X a Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *T je absolutně sčítající,*

(ii) *T převádí slabě bezpodmínečně konvergentní řady v X na absolutně konvergentní řady v Y,*

(iii) *existuje $C > 0$ tak, že*

$$\sum_{j=1}^{n} \|Tx_j\| \le C \sup\{\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)| : \varphi \in X^*, \|\varphi\| \le 1\}$$

kdykoliv volíme $x_1, \dots, x_n \in X$ zcela libovolně,

(iv) *existuje pravděpodobnostní Radonova míra μ na (w^*-kompaktní) jednotkové kouli B_{X^*} a konstanta $D > 0$ tak, že*

$$\|Tx\| \le D \int_{B_{X^*}} |\varphi(x)|\, d\mu(\varphi)$$

pro každé $x \in X$.

Návod. Uveďme pouze stručně některé myšlenky. Protože každá bezpodmínečně konvergentní řada je i slabě bezpodmínečně konvergentní (můžete si zopakovat odstaveček *3.5), je jasné, že (ii) $\Rightarrow$ (i). Předpokládejme (i) a volme slabě bezpodmínečně konvergentní řadu $\{x_n\}$ v X. Volme ještě posloupnost $\{\beta_n\} \in c_0$. Podle větičky v citovaném odstavci *3.5 řada $\sum_n \beta_n x_n$ konverguje (bezpodmínečně). Podle předpokladu tedy konverguje řada $\sum_n |\beta_n|\,\|Tx_n\|$. Protože posloupnost $\{\beta_n\}$ byla libovolná, cvičení 4.22.k nám řekne, že $\sum_n Tx_n$ konverguje absolutně. Tedy (i) $\Rightarrow$ (ii).

Předpokládejme nyní (iii) a volme slabě bezpodmínečně konvergentní řadu $\sum_n x_n$ v X. Potom pro každé k máme

$$\sum_{j=1}^{k} \|Tx_j\| \le C \sup\bigl\{\sum_{j=1}^{k} |\varphi(x_j)| : \|\varphi\| \le 1\bigr\} \le C \sup\bigl\{\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)| : \|\varphi\| \le 1\bigr\}\,.$$

Tudíž $\sum_n \|Tx_n\| < \infty$.

A nyní k implikaci (iii) $\Rightarrow$ (iv). Její hezký důkaz podal B. Maurey [1974] a lze jej v detailech nalézt třeba v uvedené monografii či v [HHZ]. Myšlenka důkazu je následující. Předpokládejme, že platí (iii) pro $C = 1$. Pro $f \in \mathcal{C}(B_{X^*})$ položme

$$p(f) := \inf\bigl\{\sup\{f(\varphi) + \sum_{j=1}^{n}\bigl(|\varphi(x_j)| - \|Tx_j\|\bigr) : \|\varphi\| \le 1\} : x_1, \dots, x_n \in X\bigr\}\,.$$

Není obtížné zjistit, že p je na prostoru $\mathcal{C}(B_{X^*})$ konvexní funkcionál a že $\inf f(B_{X^*}) \le p(f) \le \sup f(B_{X^*})$. Nyní použijeme jednu z variant Hahn-Banachovy věty *2.9.a. Podle ní existuje $F \in \bigl(\mathcal{C}(B_{X^*})\bigr)^{\#}$ tak, že $F \le p$ na $\mathcal{C}(B_{X^*})$. Je-li $f \in \mathcal{C}(B_{X^*})$, $f \le 0$, potom $F(f) \le p(f) \le 0$ (nezapomeňte na (iii) a volbu $\varphi = 0$ v definici $p(f)$). Podle Rieszovy věty o reprezentaci D.5 existuje (nezáporná) Radonova míra μ na B_{X^*} tak, že

$$F(f) = \int_{B_{X^*}} f\,d\mu \quad \text{pro každou funkci} \quad f \in \mathcal{C}(B_{X^*})\,.$$

Buď nyní $x \in X$. Je-li $f : \varphi \mapsto -|\varphi(x)|$ pro $\varphi \in B_{X^*}$, je $f \in \mathcal{C}(B_{X^*})$ a platí

$$-\int_{B_{X^*}} |\varphi(x)|\,d\mu(\varphi) = \int_{B_{X^*}} f\,d\mu = F(f) \le p(f) \le -\|Tx\|\,,$$

což je odhad, který jsme právě potřebovali. Přitom $\mu(B_{X^*}) = \mu(1) \le 1$. Vhodným vynásobením bychom mohli dostat kýženou nerovnost s jistou konstantou D a pravděpodobnostní mírou.

Nechť je splněna podmínka (iv) a $x_1, \dots, x_n \in X$. Potom aplikací (iv) máme

$$\sum_{j=1}^{n} \|Tx_j\| \le D \int_{B_{X^*}} \sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|\,d\mu(\varphi) \le D \sup\{\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)| : \|\varphi\| \le 1\}\,.$$

K završení důkazu ukážeme, že (i) $\Rightarrow$ (iii). Nechť tedy $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je absolutně sčítající operátor. Označme

$$l^1_w(X) := \bigl\{\{x_n\} \subset X : \{\varphi(x_n)\} \in l^1 \text{ pro každé } \varphi \in X^*\bigr\}\,.$$

Definujeme-li pro $\{x_n\} \in l^1_w(X)$

$$\|\{x_n\}\|_w := \sup\bigl\{\sum_n |\varphi(x_n)| : \varphi \in X^*, \|\varphi\| \le 1\bigr\}\,,$$

je $\|.\|_w$ normou na $l^1_w(X)$ a v ní je tento prostor úplný. Dokázat poslední tvrzení není úplně triviální, umíme-li však dokázat úplnost prostoru l^1, měli bychom si umět poradit i s úplností $l^1_w(X)$. Především však ještě musíme odůvodnit, proč $\|\{x_n\}\|_w$ je konečné číslo. K tomu účelu volme $\{x_n\} \in l^1_w(X)$ pevně a uvažujme zobrazení $F : \varphi \to \{\varphi(x_n)\} : X^* \to l^1$. Zobrazení F je lineární. Má také uzavřený graf, a to proto, že $\varphi_k(x_n) \xrightarrow{k} \varphi(x_n)$ pro každé n, pokud $\varphi_k \to \varphi$. Tudíž F je omezený operátor, čili

$$\|F\| = \sup\bigl\{\sum_n |\varphi(x_n)| : \varphi \in X^*, \|\varphi\| \le 1\bigr\} < \infty\,.$$

Položme $T_w : \{x_n\} \mapsto \{Tx_n\}$ pro $\{x_n\} \in l^1_w(X)$. Je-li $\{\alpha_n\}$ libovolná posloupnost složená z čísel $+1$ a -1 a k je přirozené, najděme podle Hahn-Banachovy věty $\varphi \in X^*$ tak, aby $\|\varphi\| \le 1$ a $\varphi\Big(\sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j x_j\Big) = \Big\|\sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j x_j\Big\|$. Potom

$$\Big\|\sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j\Big\| = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \varphi(x_j) \le \sum_{j=1}^{k} |\varphi(x_j)| \le \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)| < \infty\,.$$

Tudíž řada $\sum_n x_n$ konverguje bezpodmínečně (srovnej s větou *3.4.a) a podle předpokladu je $\sum_n \|Tx_n\| < \infty$.

Označíme-li ještě pro tento důkaz

$$l^1(X) := \big\{\{x_n\} \subset X : \sum_n \|x_n\| < \infty\big\} \quad \text{a} \quad \|\{x_n\}\| := \sum_n \|x_n\|\,,$$

je opět $l^1(X)$ Banachův prostor (viz též *1.1.h). Operátor $T_w : l^1_w(X) \to l^1(Y)$ je zajisté lineární. Ale je též omezený. Předpokládáme-li totiž opak, nalezneme pro každé n prvek $w_n = \{w^n_j\}_j \in l^1_w(X)$ a k_n tak, aby $\|w_n\|_w \le 1$ a $\sum\limits_{j=1}^{k_n} \|Tw^n_j\| > 2^n$. Potom ovšem řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(\sum\limits_{j=1}^{k_n} \frac{w^n_j}{2^n}\Big)$ slabě bezpodmínečně konverguje a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(\sum\limits_{j=1}^{k_n} \|T(\frac{w^n_j}{2^n})\|\Big) = \infty$. A operátor T by nemohl být absolutně sčítající. Nyní stačí položit $C := \|T_w\|$. Je-li $x_1, \dots, x_n \in X$, uvažujme posloupnost $x := \{x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots\} \in l^1_w(X))$. Potom

$$\sum_{j=1}^{n} \|T_w x_j\| = \|T_w x\| \le C\,\|x\|_w = C\,\sup\big\{\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)| : \varphi \in X^*, \|\varphi\| \le 1\big\}\,.$$

♣

Poznámky. (α) Charakteristice absolutně sčítajících operátorů uvedené v (iv) se obvykle říká *Pietschova dominační věta.*

(β) Jak jsme již řekli, existují i další charakteristiky absolutně sčítajících operátorů. Jedna z nich říká, že $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je absolutně sčítající, právě když existuje $K > 0$ tak, že pro každou konečnou posloupnost $x_1, \dots, x_n \in X$ máme

$$\sum_{j=1}^{n} \|Tx_j\| \le K\,\max\Big\{\Big\|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\Big\| : \alpha_j = +1 \text{ anebo } \alpha_j = -1\Big\}\,.$$

To není těžké ověřit, máme-li již dokázánu předchozí větu. Platí totiž následující samo o sobě zajímavé lemma.

(γ) **Lemma.** *Nechť X je Banachův prostor a $x_1, \dots, x_n \in X$. Potom*

$$\max\Big\{\Big\|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\Big\| : \alpha_j = +1 \textit{ anebo } \alpha_j = -1\Big\} = \sup\big\{\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)| : \varphi \in X^*, \|\varphi\| \le 1\big\}$$

$$= \sup\big\{\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)| : \varphi \in X^*, \|\varphi\| = 1\big\}\,.$$

Důkaz. Volme $\varphi \in B_{X^*}$. Položíme-li $\alpha_j = +1$ v případě $\varphi(x_j) \ge 0$ a $\alpha_j = -1$ pokud $\varphi(x_j) < 0$, jest

$$\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi(x_j) = \varphi\Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\Big) \le \Big\|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\Big\|$$

$$\le \max\Big\{\Big\|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\Big\| : \alpha_j = +1 \text{ anebo } \alpha_j = -1\Big\}\,.$$

Opačnou nerovnost jsme vlastně dokázali již v průběhu důkazu předchozí věty. Nicméně argument zopakujme. Je-li $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ n-tice složená z čísel $+1$ a -1, existuje podle důsledku Hahn-Banachovy věty 2.20 $\varphi \in X^*$, $\|\varphi\| = 1$ tak, že $\varphi(\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j x_j) = \|\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\|$. Potom

$$\Big\|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\Big\| = \varphi\Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi(x_j) \le \sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)| \le \sup\big\{\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)| : \varphi \in X^*, \|\varphi\| = 1\big\}\,.$$

■

Ruku v ruce s Pietschovou dominační větou jde i následující věta o faktorizaci.

`(d) Pietschova faktorizační věta.` *Nechť T je absolutně sčítající operátor mezi Banachovými prostory X a Y a μ Radonova míra na B_{X^*} jako ve větě (c). Nechť $j : \mathcal{C}(B_{X^*}) \to \mathcal{L}^2(B_{X^*}, \mu)$ značí identické vnoření. Potom existují operátory*

$$\varepsilon \in \mathcal{L}\big(X, \mathcal{C}(B_{X^*})\big) \quad a \quad F \in \mathcal{L}\big(\mathcal{L}^2(B_{X^*}, \mu), Y\big)$$

tak, že $T = Fj\varepsilon$.

Návod. Je-li ε kanonické vnoření X do X^{**}, zobrazuje ε prostor X izometricky-izomorfně do $\mathcal{C}(B_{X^*})$, kde na B_{X^*} uvažujeme w^*-topologii (pokud nevíte proč, podívejte se na 2.55.p). Volme $x \in X$. Protože podle Pietschovy dominační věty (a Hölderovy nerovnosti)

$$\|Tx\| \le D \int_{B_{X^*}} |\varphi(x)|\, d\mu(\varphi) \le D \Big(\int_{B_{X^*}} |\varphi(x)|^2\, d\mu(\varphi) \Big)^{\frac{1}{2}},$$

je zobrazení $f : \varepsilon X \subset \mathcal{L}^2(B_{X^*}, \mu) \to Y$ definované předpisem $f(\varepsilon_x) = Tx$ spojité a lineární. Podle Hahn-Banachovy věty pro zobrazení z Hilbertova prostoru v *2.19.b existuje rozšíření $F \in \mathcal{L}\big(\mathcal{L}^2(B_{X^*}, \mu), Y\big)$ tak, že $F = f$ na εX. Dáme-li vše dohromady, vidíme, že $T = Fj\varepsilon$. ♣

Použijeme-li výše uvedené charakteristiky, lze již poměrně snadno odvodit některé další vlastnosti absolutně sčítajících operátorů.

`(e) Věta.` *Každý absolutně sčítající operátor mezi Banachovými prostory je úplně spojitý a slabě kompaktní.*

Důkaz. Nechť $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je absolutně sčítající a $x_n \to 0$ slabě v X. Volme $\varphi \in B_{X^*}$. Protože posloupnost $\{x_n\}$ je omezená v normě (viz 4.7) a $|\varphi(x_n)| \le \|\varphi\|\,\|x_n\| \le \|x_n\|$, je posloupnost $\{\varphi(x_n)\}$ omezená konstantou na B_{X^*}. Pomocí Pietschovy dominační věty najdeme pravděpodobnostní míru μ na B_{X^*} a $D > 0$ mající vlastnost (iv) z předešlé věty (c). Nyní stačí zavolat na pomoc Lebesgueovu dominační větu pro integrál, abychom dostali

$$\|Tx_n\| \le D \int_{B_{X^*}} |\varphi(x_n)|\, d\mu(\varphi) \to 0\,.$$

Důkaz, že T je slabě kompaktní je ještě jednodušší. Použijeme Pietschovu faktorizační větu, fakt, že prostor $\mathcal{L}^2(B_{X^*}, \mu)$ je reflexivní a větu (c2) z *10.3. ■

Pokud máme takhle daleko vybudovanou teorii absolutně sčítajících operátorů, není již příliš obtížné dokázat Dvoretzky-Rogersovu větu. Zformulujme ji tedy potřetí v tomto textu.

`(f) Dvoretzky-Rogersova věta.` *Nechť X je (reálný) Banachův prostor, v němž každá bezpodmínečně konvergentní řada konverguje absolutně. Potom* $\dim X < \infty$.

Důkaz. Stačí si uvědomit, že identický operátor na X je podle předpokladů absolutně sčítající. Vskutku, je-li $\dim X = \infty$, uvažujme libovolnou posloupnost $\{x_n\}$ z jednotkové koule B_X prostoru X s vlastností $\|x_n - x_k\| \ge \frac{1}{2}$ pro $n \ne k$. Protože tedy víme, že identické zobrazení je podle věty (e) slabě kompaktní, existuje vybraná posloupnost z $\{x_n\}$, která slabě konverguje. Protože však identita je podle téže věty úplně spojité zobrazení, je tato vybraná posloupnost (silně) konvergentní. A to je samozřejmě spor. ■

***10.5. Rademacherovy funkce**. Posloupnost *Rademacherových funkcí* $\{r_n\}$ se definuje předpisem

$$r_n(t) := \operatorname{sign} \sin(2^n \pi t)\,, \quad t \in [0, 1]\,.$$

Někdy se klade $r_0 := 1$ na $[0, 1]$. Je dobré si nakreslit graf prvních tří Rademacherových funkcí, abychom si udělali o nich trochu představu.

Kdybychom Rademacherovu funkci r_1 (kterážto je rovna $+1$ na $(0, \frac{1}{2})$ a -1 na $(\frac{1}{2}, 1)$) rozšířili periodicky na celé $\mathbf{R}$, jest potom $r_{n+1}(t) = r_1(2^n t)$.

Posloupnost Rademacherových funkcí $\{r_n\}$ tvoří v $\mathcal{L}^2([0, 1])$ ortonormální soustavu. Netvoří však ortonormální bázi, kupříkladu funkce $1 - 2t$, $\cos(2\pi t)$ či $r_1\, r_2$ jsou ortogonální ke všem Rademacherovým funkcím.

Z hlubších vlastností uveďme následující.

`Tvrzení.` *Pro $p \in (1,\infty)$ označme symbolem $\mathfrak{R}_p$ uzavřený lineární obal množiny Rademacherových funkcí v $L^p([0,1])$. Potom Banachův prostor $\mathfrak{R}_p$ je izomorfní Hilbertovu prostoru l^2 a v prostoru $L^p([0,1])$ má topologický doplněk.*

***10.6. Chinčinovy nerovnosti.** *Buď $p \in (0,\infty)$. Existují konstanty γ_p, Γ_p tak, že*

$$\gamma_p \Big(\sum_n |a_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \le \Big(\int_0^1 \Big|\sum_n a_n r_n\Big|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \le \Gamma_p \Big(\sum_n |a_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

pro každou posloupnost $\{a_n\} \in l^2$.

***10.7. Poznámky**. (a) Uvedené Chinčinovy nerovnosti lze také zapsat ve tvaru

$$\gamma_p \left\|\{a_n\}\right\|_{l^2} \le \Big\|\sum_n a_n r_n\Big\|_{L^p([0,1])} \le \Gamma_p \left\|\{a_n\}\right\|_{l^2}.$$

Neříkají vlastně nic jiného, než že prostor $\mathfrak{R}_p$ je pro každé $p \ge 1$ stejná množina a všechny L^p-normy na něm jsou ekvivalentní.

(b) Většinou se Chinčinovy nerovnosti využívají pro konečné posloupnosti čísel $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

(c) Možná by neškodilo Chinčinovy nerovnosti trochu elementárně přiblížit. Uvažujme tedy libovolnou n-tici reálných čísel $x = (x_1, \dots, x_n)$ a označme jako D množinu všech n-tic složených z čísel $+1$ či -1. Nyní můžeme vytvořit celkem 2^n rozličných kombinací

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n\,, \quad \text{kde} \quad (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in D\,.$$

Pro dané $p \ge 1$ vytvořme nyní p-průměr

$$M_p(x) := \Big(\frac{1}{2^n} \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in D} |\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Není těžké ověřit, že $x \mapsto M_p(x)$ je norma na prostoru $\mathbf{R}^n$ všech n-tic. Pro $p = 2$ dostáváme, že

$$M_2(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

je eukleidovská norma na $\mathbf{R}^n$. Chinčinovy nerovnosti lze pak přepsat ve tvaru (alespoň pro $p \ge 1$)

$$\gamma_p\, M_2(x) \le M_p(x) \le \Gamma_p\, M_2(x)\,,$$

kteréžto neříkají nic jiného než že p-průměry (jakožto normy) jsou ekvivalentní eukleidovské normě na $\mathbf{R}^n$ (s konstantou nezávislou na n).

(d) Je celá řada prací o konstantách γ_p, Γ_p. Dnes již existují výrazy pro „nejpřesnější" takové konstanty. Výsledky jsou shrnuty v monografii J. Diestel, H. Jarchow and A. Tonge [*1995], str.23.

Vraťme se ke sčítajícím operátorům. Motivováni charakterizací absolutně sčítajících operátorů v *10.4.c, definujeme jejich zobecnění následovně.

***10.8. p-sčítající operátory**. Buďte X a Y Banachovy prostory a $p \in (0,\infty]$. Řekneme, že operátor $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je *p-sčítající*, jestliže existuje $C > 0$ tak, že pro libovolnou konečnou posloupnost $x_1, \dots, x_n \in X$ máme

$$\Big(\sum_{j=1}^n \|Tx_j\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \le C \sup\Big\{\Big(\sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)|^p\Big)^{\frac{1}{p}} : \varphi \in X^*, \|\varphi\| \le 1\Big\}.$$

`(a) Poznámka.` S velkou dávkou tolerance lze říci, že p-sčítající jsou ty operátory, které převádějí „slabě p-bezpodmínečně konvergentní posloupnosti" v X na „p-absolutně konvergentní posloupnosti" v Y. Všem uvozovkám v této větě lze dát dobrý smysl a celý výrok pořádně precizovat.

Prostor všech p-sčítajících operátorů, který evidentně tvoří vektorový podprostor $\mathcal{L}(X,Y)$, označme symbolem $\Pi_p(X,Y)$. Pro $T \in \Pi_p(X,Y)$ nechť $\pi_p(T)$ značí infimum všech konstant $C > 0$, pro něž uvedená nerovnost v definici p-sčítajících operátorů platí.

`(b) Příklady.` (b1) Případ $p = \infty$ je nezajímavý, neboť $\Pi_\infty(X,Y) = \mathcal{L}(X,Y)$ a $\pi_\infty(T) = \|T\|$ pro $T \in \Pi_\infty(X,Y)$.

(b2) Identický operátor id : $l^2 \to l^2$ není p-sčítající pro žádné $p \in [1, \infty)$. Abychom si to uvědomili, stačí se podívat na definici p-sčítatelnosti id a uvažovat konečné ortonormální soustavy.

Platí dokonce věta, podle které identické zobrazení na libovolném nekonečně dimenzionálním Banachově prostoru není p-sčítající.

Důkaz tohoto tvrzení není příliš obtížný, vezmeme-li v potaz následující větu, podle které p-sčítající operátory jsou slabě kompaktní a úplně spojité. Stačí kopírovat důkaz Dvoretzky-Rogersovy věty z *10.4.e.

(b3) Nechť μ je pravděpodobnostní míra na kompaktu K a $p \in [1, \infty)$. Protože každá spojitá funkce na K leží v prostoru $\mathcal{L}^p(K, \mu)$, můžeme uvažovat identické zobrazení $T : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{L}^p(K, \mu)$. Vzhledem k nerovnosti

$$\Big(\sum_{j=1}^n \|Tf_j\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(\sum_{j=1}^n \int_K |f_j|^p\, d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \le \Big(\sup\Big\{\sum_{j=1}^n |f_j(x)|^p : x \in K\Big\}\Big)^{\frac{1}{p}}$$
$$\le \sup\Big\{\Big(\sum_{j=1}^n \Big|\int_K f_j\, d\nu\Big|^p\Big)^{\frac{1}{p}} : \nu \in (\mathcal{C}(K))^*, \|\nu\| = 1\Big\}$$

platné pro libovolné $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}(K)$, je T p-sčítající operátor. Současně vidíme, že $\pi_p(T) \le 1$. Ovšemže $\pi_p(T) = 1$, stačí totiž uvažovat konstantní funkci $f = 1$ na K.

Základní vlastnosti p-sčítajících operátorů shrnuje následující věta.

(c) Věta. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $p \in [1, \infty)$. Potom π_p je norma na prostoru $\Pi_p(X, Y)$ všech p-sčítajících operátorů a $\Pi_p(X, Y)$ s normou π_p tvoří Banachův prostor. Pro každý p-sčítající operátor T máme $\|T\| \le \pi_p(T)$. Navíc $\Pi_p(X, Y)$ tvoří ideál v $\mathcal{L}(X, Y)$ obsahující prostor všech konečně rozměrných operátorů.*

Libovolný p-sčítající operátor je slabě kompaktní a úplně spojitý.

***10.9. Typ a kotyp Banachova prostoru**. Nechť X je Banachův prostor, $p > 0$ a $\{r_n\}$ posloupnost Rademacherových funkcí. Řekneme, že X má *typ p*, jestliže existuje $C \ge 0$ tak, že

$$\Big(\int_0^1 \Big\|\sum_{j=1}^n r_j(t) x_j\Big\|^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}} \le C \Big(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

kdykoliv $x_1, \dots, x_n \in X$.

Říkáme, že X má *kotyp p*, existuje-li konstanta $D > 0$ tak, že

$$\Big(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \le D \Big(\int_0^1 \Big\|\sum_{j=1}^n r_j(t) x_j\Big\|^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}}$$

pro jakýkoliv výběr $x_1, \dots, x_n \in X$.

(a) Poznámky. (a1) Pro $p = \infty$ musíme uvedené výrazy nahradit $\max\{\|x_1\|, \dots, \|x_n\|\}$.

(a2) Každý Banachův prostor má typ p, pokud $0 < p \le 1$. Pro tato p vždy totiž platí

$$\Big(\int_0^1 \Big\|\sum_{j=1}^n r_j(t) x_j\Big\|^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}} \le \sum_{j=1}^n \|x_j\| \le \Big(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Obdobně, každý Banachův prostor má kotyp ∞.

(a3) Žádný netriviální Banachův prostor nemůže mít typ $p > 2$ a kotyp $p < 2$. To plyne z Chinčinových nerovností. Proto se omezujeme při studiu prostorů na typ $p \in [1, 2]$ a kotyp $p \in [2, \infty]$.

(b) Příklady. (b1) Hilbertův prostor má současně typ 2 i kotyp 2. To plyne ihned z ortonormality Rademacherových funkcí.

(b2) Prostor l^1 má kotyp 2. Důkaz tohoto ne zrovna triviálního tvrzení lze najít třeba v J. Lindenstrauss and L. Tzafriri [*1979].

Uveďme nyní bez důkazů v přehledu základní věty, které platí pro prostory určitého typu či kotypu.

(c) Věta. *Má-li Banachův prostor kotyp p a $\sum_n x_n$ je bezpodmínečně konvergentní řada v X, potom $\sum_n \|x_n\|^p < \infty$.*

(d) Věta. *Jestliže Banachův prostor X má typ p, potom jeho duál X^* má kotyp q, kde $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.*

(e) Kwapieňova věta. *Má-li Banachův prostor typ 2 i kotyp 2, je již izomorfní Hilbertovu prostoru.*

***10.10. Závěrečná poznámka.** O vývoji pojmu indexu se lze dočíst v J. Dieudonné [1985].

*11. Neomezené operátory

***11.1. Cayleyova transformace**. I pro neomezené samoadjungované operátory na Hilbertově prostoru lze vyslovit různé varianty spektrální věty. Von Neumannova myšlenka spočívala na transformaci takového operátoru na omezený, na něj se aplikovala již známá spektrální věta a poté se opět aplikovala inverzní transformace.

Dnes existují spektrální věty pro neomezené operátory v různém stupni obecnosti. Nebudeme se jimi zabývat, lze odkázat třeba na W. Rudin [*1973], zmiňme se jen stručně o oné transformaci. Počátek byl u obyčejné transformace v komplexní rovině.

(a) Möbiova transformace. Definujme *Möbiovu transformaci* M v rozšířené komplexní rovině jako zobrazení $M : z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$. Lehce zjistíme, že $M(0) = -1$, $M(1) = -i$ a $M(\infty) = 1$. Möbiova transformace M zobrazuje horní polorovinu na $\mathbf{D} := \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ a je prostým zobrazením $\mathbf{R}$ na $\{z \in \mathbf{T} : z \neq 1\}$.

(b) Cayleyova transformace pro omezené operátory. Nechť T je hermiteovský operátor na komplexním Hilbertově prostoru H. Zkuste si sami dokázat následující cvičení:

- (b1) operátory $T - iI$ a $T + iI$ jsou invertibilní,
- (b2) položíme-li $U_T := (T - iI)(T + iI)^{-1}$, je U_T unitární operátor ($U_T U_T^* = U_T^* U_T = I$); nazývá se *Cayleyovou transformací* operátoru T,
- (b3) operátor $I - U_T$ je invertibilní a $T = i(I + U_T)(I - U_T)^{-1}$.

Návod. Ukažte zprvu, že $\|(T + iI)x\|^2 = \|(T - iI)x\|^2 = \|Tx\|^2 + \|x\|^2$. ♣

(c) Lemma. *Nechť A je symetrický uzavřený operátor na Hilbertově prostoru H. Potom operátory $T - iI$ a $T + iI$ jsou prosté a množiny $\mathcal{R}(T - iI)$ a $\mathcal{R}(T + iI)$ jsou uzavřené.*

Návod. Je-li $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, je $\|Tx - zx\| \geq \operatorname{Im} z\|x\|$. ♣

(d) Cayleyova transformace. Nechť A je symetrický uzavřený operátor na Hilbertově prostoru H. Podle předešlého je operátor $A+iI$ prostý a můžeme položit $U_A := (A-iI)(A+iI)^{-1}$. Operátor U_A, který je definován na $D_U := \mathcal{R}(A + iI)$ se nazývá *Cayleyovou transformací* operátoru A.

(e) Vlastnosti Cayleyovy transformace. *Nechť A samoadjungovaný operátor na Hilbertově prostoru H. Potom:*

- (e1) *$\mathcal{R}(A + iI) = H$, operátor $U_A \in \mathcal{L}(H)$ je unitární a operátor $I - U_A$ je prostý (tj. $1 \notin \sigma_p(U_A)$),*
- (e2) *$D_A = \mathcal{R}(I - U_A)$ a $A = i(I + U_A)(I - U_A)^{-1}$.*

(f) Věta. *Nechť U je unitární operátor na Hilbertově prostoru H nemající 1 jako vlastní číslo (tj. nechť operátor $I - U$ je prostý). Definujeme-li operátor A na D_A vztahy*

$$D_A := \mathcal{R}(I - U) \quad a \quad A := i(I + U)(I - U)^{-1}\,,$$

je operátor A samoadjungovaný a jeho Cayleyova transformace $U_A = U$.

(g) Poznámky. (g1) Lze vyslovit věty daleko obecnější.

(g2) Z uvedených tvrzení vyplývá, že množina všech samoadjungovaných operátorů si navzájem jednoznačně odpovídá s množinou všech (omezených) unitárních operátorů nemajících 1 ve svém bodovém spektru.

***11.2. Exponenciála**. V *6.12 jsme naznačili možnost definice exponenciály $\exp a$ pro prvky Banachových algeber. Speciálně tedy máme definováno e^A (značíme raději než $\exp A$) pro omezené operátory na Hilbertových prostorech. Definovat e^A i pro neomezené operátory je poněkud oříšek, jsou různé možnosti. Můžeme třeba použít funkční kalkulus pro neomezené operátory či definovat přímo

$$e^{tA} := \lim_{n\to\infty}\Big(I - \frac{t}{n}A\Big)^{-n}.$$

Lze odkázat třeba na příslušnou partii v T. Kato [*1976].

*12. Teorie semigrup

***12.1. Grupy operátorů na Banachově prostoru**. (a) Třídu omezených operátorů $\{T_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ na Banachově prostoru X nazveme $\mathcal{C}_0$-*grupou*, jestliže

(a) $T_0 = I$,
(b) $T_s T_t = T_{s+t}$ pro každou dvojici $s, t \in \mathbf{R}$,
(c) $\lim\limits_{t\to 0} T_t x = x$ pro každé $x \in X$.

(b) Poznámky. (b1) Povšimněte si, že limita v podmínce (c) se uvažuje oboustranná. Obdobně jako u semigrup se pak odvodí, že pro každé $x \in H$ je funkce $t \mapsto T_t x$ spojitá na $\mathbf{R}$.

(b2) Z definice $\mathcal{C}_0$-grupy ihned vidíme, že operátor T_t má inverzi pro každé $t \in \mathbf{R}$. Zřejmě $\big(T_t\big)^{-1} = T_{-t}$. Tudíž $\{T_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ vzhledem ke skládání operátorů tvoří skutečně grupu.

Následující tvrzení si zkuste dokázat sami.

(c) Tvrzení. *Nechť $\{T_t\}_{t\ge 0}$ je $\mathcal{C}_0$-semigrupa operátorů na Banachově prostoru X. Nechť dále operátor T_t má inverzi pro každé $t > 0$. Položíme-li $S_t := \big(T_{-t}\big)^{-1}$ pro $t < 0$ a $S_t = T_t$ pro $t \ge 0$, tvoří $\{S_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ $\mathcal{C}_0$-grupu operátorů.*

(d) Poznámka. Je-li $\{T_t\}$ $\mathcal{C}_0$-semigrupa a existuje-li $\tau > 0$ tak, že operátor T_τ má inverzi, má inverzi již každý operátor T_t z této semigrupy.

Lze též ukázat, že T_τ je invertibilní, pokud operátor $T_\tau - I$ je kompaktní.

(e) Generátor $\mathcal{C}_0$-grupy. *Generátor $\mathcal{C}_0$-grupy $\{T_t\}$* se zavádí obdobně jako v případě semigrup. Jeho definiční obor je definován jako $D_A := \big\{x \in X : \lim\limits_{t\to 0} \frac{T_t x - x}{t} \text{ existuje}\big\}$, přičemž sám operátor A je pak definován pro $x \in D_A$ předpisem $A : x \mapsto \lim\limits_{t\to 0} \frac{T_t x - x}{t}$.

***12.2. Disipativní operátory**. Hille-Yosidova věta 12.22 říkala jak poznat, kdy operátor A je generátorem nějaké semigrupy $\{T_t\}$. Jinou možnost nabízí Lumer-Phillipsova charakteristika. Pro ni ovšem potřebujeme pojem disipativního operátoru.

Buď x prvek Banachova prostoru X. Označme

$$\mathfrak{T}(x) := \big\{\varphi \in X^* : \|\varphi\| = 1 \text{ a } \varphi(x) = \|x\|\big\}$$

množinu všech tečných funkcionálů v bodě x. Hahn-Banachova věta, respektive její důsledek 2.20 o tečném funkcionálu zaručuje, že množina $\mathfrak{T}(x)$ je vždy neprázdná. Řekneme, že lineární operátor $A : D_A \subset X \to X$ je *disipativní*, jestliže ke každému $x \in D_A$ existuje $\varphi \in \mathfrak{T}(x)$ tak, že $\operatorname{Re}\varphi(Ax) \le 0$. Následují některé charakteristiky disipativních operátorů.

(a) Tvrzení. *Operátor A je disipativní, právě když $\big\|(\lambda I - A)x\big\| \ge \lambda\,\|x\|$ pro všechna $x \in D_A$ a $\lambda > 0$.*

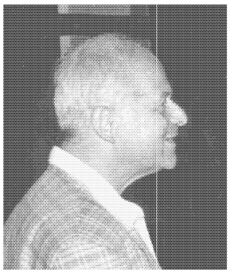
Návod. Předpokládejme, že A je disipativní, $x \in D_A$ a $\lambda > 0$. Volme $\varphi \in \mathfrak{T}(x)$ tak, aby $\operatorname{Re}\varphi(Ax) \le 0$. Potom

$$\big\|(\lambda I - A)x\big\| \ge \big|\varphi(\lambda x - Ax)\big| \ge \operatorname{Re}\varphi(\lambda x - Ax) = \lambda\|x\| - \operatorname{Re}\varphi(Ax) \ge \lambda\|x\|\,.$$

Důkaz opačné implikace je již složitější a využívá Alaogluovu větu o w^*-kompaktnosti jednotkové koule v X^*. V této obecnosti nebudeme tento důkaz provádět, omezíme se pouze na Hilbertovy prostory. Volme tedy $x \in D_A$, $x \ne 0$ a $\lambda > 0$. Protože $(\lambda x - Ax, \lambda x - Ax) \ge \lambda^2\,(x,x)$, je $(Ax, Ax) \ge 2\lambda \operatorname{Re}(Ax, x)$. Odtud plyne, že $\operatorname{Re}(Ax, x) \le 0$ ($\lambda > 0$ bylo libovolné). Položíme-li $\varphi : h \to \frac{1}{\|x\|}(h, x)$ pro $h \in X$, je $\varphi \in \mathfrak{T}(x)$ a $\operatorname{Re}\varphi(Ax) = \operatorname{Re}\frac{1}{\|x\|}(Ax, x) \le 0$. ♣

(b) Tvrzení. *Nechť $A : D_A \subset H \to H$ je lineární operátor na Hilbertově prostoru H. Potom A je disipativní, právě když $\mathrm{Re}(Ax, x) \le 0$ pro každé $x \in D_A$.*

Návod. Stačí si uvědomit, že $\varphi \in \mathfrak{T}(x)$ $(x \neq 0)$, právě když $\varphi(h) = \frac{1}{\|x\|}(h, x)$ pro každé $h \in H$. ♣



G. Lumer

(c) Lumer-Phillipsova věta. *Nechť $A : D_A \subset X \to X$ je hustě definovaný lineární operátor. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *A je generátor jisté kontrakční $\mathcal{C}_0$-semigrupy,*
(ii) *A je disipativní a $\varrho(A) \cap (0, \infty) \neq \emptyset$.*

Je-li splněna jedna z těchto podmínek, je $(0, \infty) \subset \varrho(A)$ a $\mathrm{Re}\,\varphi(Ax) \le 0$ pro každé $x \in D_A$ a každý tečný funkcionál $\varphi \in \mathfrak{T}(x)$.

Návod. Nechť A je disipativní a $\lambda_0 \in \varrho(A) \cap (0, \infty)$. Protože podle (a) je $\|(\lambda I - A)x\| \ge \lambda \|x\|$ pro všechna $x \in D_A$ a $\lambda > 0$, dostáváme, že $\|(\lambda I - A)^{-1}\| \le \frac{1}{\lambda}$, pokud $\lambda \in (0, \infty) \cap \varrho(A)$. Protože pro libovolné $\lambda > 0$

$$\lambda I - A = \big(I + (\lambda I - \lambda_0 I)(\lambda_0 I - A)^{-1}\big)\big(\lambda_0 I - A\big)\,,$$

vidíme, že $(0, 2\lambda_0) = \{\lambda > 0 : |\lambda - \lambda_0| < \lambda_0\} \subset \varrho(A)$. Volíme-li $\lambda_1 = \frac{3}{2}\lambda_0$, obdobnou úvahou dostaneme, že $(0, \frac{5}{2}\lambda_0) \subset \varrho(A)$. Postupujíce takto dál, dokážeme, že $(0, \infty) \subset \varrho(A)$. A protože jsme ukázali, že $\|(\lambda I - A)^{-1}\| \le \frac{1}{\lambda}$ pro $\lambda \in \varrho(A) \cap (0, \infty)$, Hille-Yosidova věta 12.22 říká, že A je generátor jisté kontrakční $\mathcal{C}_0$-semigrupy.

Nechť naopak, A je generátor kontrakční $\mathcal{C}_0$-semigrupy $\{T_t\}$. Volme $x \in D_A$. Existuje $\varphi \in \mathfrak{T}(x)$. Volme ještě $t > 0$. Potom $\mathrm{Re}\,\varphi(T_t x - x) = \mathrm{Re}\,\varphi(T_t x) - \|x\| \le \|\varphi\|\,\|T_t\|\,\|x\| - \|x\| \le 0$. Limitním přechodem pro $t \to 0_+$

$$\mathrm{Re}\,\varphi(Ax) = \lim_{t \to 0_+} \mathrm{Re}\,\varphi\Big(\frac{T_t x - x}{t}\Big) \le 0\,.$$

Z Hille-Yosidovy věty pak ještě plyne, že $(0, \infty) \subset \varrho(A)$.

Důkaz dovětku je pak zřejmý. ♣

***12.3. Grupy unitárních operátorů**. (a) Nechť H je Hilbertův prostor. $\mathcal{C}_0$-grupu $\{U(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$ nazýváme *unitární silně spojitou grupou* na H, krátce jen *unitární* grupou, jestliže $U(t)$ je pro každé $t \in \mathbf{R}$ unitární operátor na H.

Připomeňme, že omezený operátor U na Hilbertově prostoru H je *unitární*, jestliže U je izometrií a $U(H) = H$. Ekvivalentně, jestliže U je invertibilní a $U^{-1} = U^*$.

Je-li tedy $\{U(t)\}$ unitární grupa, je $U(-t) = \big(U(t)\big)^{-1} = \big(U(t)\big)^*$.

(b) Příklad. Nechť H je Hilbertův prostor a $A : D_A \subset H \to H$ samoadjungovaný (obecně neomezený) operátor. Položme $U(t) := e^{itA}$ pro $t \in \mathbf{R}$ (viz *11.2). Potom $U(t)$ je unitární operátor na H a $\{U(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$ tvoří unitární grupu.

(c) Stoneova věta. *Nechť A je generátor $\mathcal{C}_0$-grupy $\{T_t\}$ operátorů na Hilbertově prostoru H. Potom $\{T_t\}$ je unitární, právě když operátor iA je samoadjungovaný. Jinak řečeno, operátor A je generátorem nějaké unitární grupy, právě když iA je samoadjungovaný operátor.*

Návod. Je-li A generátor unitární grupy, z definice řádkovou úvahou zjistíme, že $A = -A^*$, tudíž $iA = (iA)^*$.

Je-li operátor iA samoadjungovaný, je $\overline{D_A} = H$, $A = -A^*$ a $D_{A^*} = D_A$. Volíme-li $x \in D_A$, je $(Ax, x) = (x, A^*x) = (x, -Ax) = -\overline{(Ax, x)}$, a tudíž $\mathrm{Re}(Ax, x) = 0$. Operátor A je tedy disipativní (viz *12.2.b). Také operátor A^* je disipativní. Větička 11.9 nám říká, že A^*, a tím pádem také $A = -A^*$, jsou uzavřené operátory. Nyní je skoro vše připraveno k užití Lumer-Phillipsovy věty *12.2.c. Potřebujeme pouze ukázat, že $\varrho(A) \cap (0, \infty) \neq \emptyset$. Stačí si tedy rozmyslet, že $\mathcal{R}(A - I) = H$ (víme totiž, že operátor $A - I$ je uzavřený a podle *12.2a prostý). Kdyby tomu tak nebylo, našli bychom $a \in \big(\mathcal{R}(A - I)\big)^{\perp}$, $a \neq 0$. Potom ovšem $A^*a - a = 0$. Protože A^* je také disipativní, je nutně $a = 0$ opět podle *12.2.a. Takže vzhůru k Lumer-Phillipsově větě. Podle ní existují kontrakční $\mathcal{C}_0$-semigrupy $\{T_t\}$ a $\{S_t\}$ mající A a A^* za své generátory. Stačí položit $U(t) := T_t$

pro $t \geq 0$ a $U(t) := S_{-t}$ pro $t \leq 0$. Potom $\{U(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$ tvoří grupu operátorů. Zbývá ukázat, že $U(t)$ jsou unitární operátory pro každé $t \in \mathbf{R}$. Protože však $\big(U(t)\big)^{-1} = U(-t)$, $\|U(t)\| \leq 1$ a $\|U(-t)\| \leq 1$, je $U(t)$ izometrie a $\mathcal{R}\big(U(t)\big) = H$. ♣

(d) Poznámky. (d1) V kontextu Stoneovy věty je pak $T_t = e^{iAt}$ pro každé $t \in \mathbf{R}$. Navíc operátor A je omezený, právě když $\lim\limits_{t \to 0} \|T_t - I\| = 0$.

(d2) Je zajímavé, že z vlastností $\mathcal{C}_0$-grupy plyne tvrzení, podle kterého zobrazení $U : t \mapsto U(t)$ je spojité zobrazení $\mathbf{R}$ do $\mathcal{L}(H)$, uvažujeme-li na prostoru $\mathcal{L}(H)$ silnou operátorovou topologii τ_{SOT} z 14.20.c. K tomu, aby zobrazení U bylo spojité v topologii τ_{SOT} stačí jenom předpokládat, že je spojité ještě ve slabší topologii τ_{WOT}. Podmínku (c) z definice $\mathcal{C}_0$-grupy lze dokonce nahradit jakousi podmínkou měřitelnosti, o čemž vypovídá jedna z von Neumannových vět v J. von Neumann [1932].

***12.4. Další třídy semigrup**. Při hlubším studiu teorie semigrup bychom se mohli zaměřit na semigrupy, jejichž jednotlivé operátory T_t mají další specifické vlastnosti. To je obsahem mnoha monografií věnovaných teorii semigrup. My připojíme pouze pár poznámek.

(a) Kompaktní semigrupy. $\mathcal{C}_0$-semigrupa $\{T_t\}$ na Banachově prostoru X se nazývá *kompaktní*, jestliže T_t je kompaktní operátor pro každé $t > 0$. Netriviální charakteristika říká, že $\mathcal{C}_0$-semigrupa $\{T_t\}$ s generátorem A je kompaktní, právě když zobrazení $t \mapsto T_t : (0, \infty) \to \mathcal{L}(X)$ je spojité a existuje $\lambda \in \varrho(A)$ tak, že operátor $(\lambda I - A)^{-1}$ je kompaktní.

(b) Diferencovatelné semigrupy. *Diferencovatelnou semigrupou* rozumíme každou $\mathcal{C}_0$-semigrupu $\{T_t\}$ s vlastností, že zobrazení $t \mapsto T_t x$ je diferencovatelné na $(0, \infty)$ pro každé $x \in X$. Je-li A generátor semigrupy $\{T_t\}$, je zobrazení $t \mapsto T_t x$ je diferencovatelné v každém bodě $t \in (0, \infty)$ za předpokladu, že $x \in D_A$. To jsme dokázali v lemmatu 12.10.

(c) Analytické semigrupy. Abychom mohli studovat analytické semigrupy, museli bychom především rozšířit definici semigrupy na jisté podmnožiny komplexní roviny obsahující interval $(0, \infty)$. To však již překračuje rámec těchto Zápisků.

Takto bychom mohli pokračovat dále. Studují se kupříkladu semigrupy, jejichž prvky jsou pozitivní operátory, ale také semigrupy distribucí či nelineárních operátorů anebo též semigrupy na lokálně konvexních prostorech. Zájemce o tuto problematiku lze odkázat na širokou škálu monografií. Klasickým textem je E. Hille and R. Phillips [*1957]. Dále mohu doporučit třeba J.A. Goldstein [*1985] či A. Pazy [*1983]. Hlubší pohled na teorii semigrup je možno nalézt v Ph. Clément et al. [*1987].

*13. Topologické vektorové prostory

***13.1. Konečně dimenzionální prostory**. V následujícím shrneme základní vlastnosti konečně dimenzionálních topologických vektorových prostorů a podprostorů. Je vhodné porovnat následující věty s obdobnými tvrzeními v normovaných lineárních prostorech. Detailní důkazy si musí čtenář obstarat sám.

(a) Věta. *Nechť (X, τ) je Hausdorffův topologický vektorový prostor konečné dimenze (nad tělesem $\mathbf{F}$). Potom platí:*

- (a1) *Je-li σ další lineární Hausdorffova topologie na X, potom $\tau = \sigma$. Dokonce, jestliže $\dim X = n$, potom (X, τ) je izomorfní $\mathbf{F}^n$ (se standardní eukleidovskou topologií).*
- (a2) *Uzavřené omezené podmnožiny X jsou kompaktní.*
- (a3) *Každý lineární funkcionál na X je spojitý.*

(b) Rieszova věta. *Každý lokálně kompaktní Hausdorffův topologický vektorový prostor je již konečné dimenze.*

Návod. Můžete použít následující Choquetovu ideu (a porovnat s *5.2). Předpokládejte, že K je kompaktní vyvážené okolí 0. Potom existují $x_1, \ldots, x_n \in K$ tak, že $K \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} (x_j + \frac{1}{2}K)$. Nechť M je lineární obal množiny $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Podle věty v (c) je M uzavřený podprostor X, a tudíž faktorprostor X/M je podle *13.2 Hausdorffův. Je-li $q : X \to X/M$ kanonické zobrazení, je $q(M) = \{0\}$, takže $q(K) \subset q(M) + q(\frac{1}{2}K) \subset \frac{1}{2}q(K)$. Indukcí pak dostáváme $q(K) \supset 2^n q(K)$. Protože $q(K)$ je vyvážená množina, musí být $q(K) = X/M$. Zobrazení q je však spojité, z čehož plyne, že $q(K)$ je kompakt. Ale X/M je kompaktní Hausdorffův topologický vektorový prostor, právě když $X/M = \{0\}$. Konečně dostáváme, že $X = M$ ♣

(c) Věta. *Nechť X je topologický vektorový prostor a M jeho podprostor konečné dimenze. Potom M je uzavřený.*

***13.2. Faktorprostor**. Buď M lineární podprostor topologického vektorového prostoru (X, τ) a q kanonické vnoření X do X/M dané jako $q : x \mapsto [x] := x + M$. Motivováni *1.11, definujme topologii τ/M na X/M jako největší topologii, pro niž je zobrazení q spojité a otevřené. Musí se ovšem ověřit, že τ/M je lineární topologie. Navíc, topologie τ/M je Hausdorffova, právě když M je uzavřený podprostor. To je jasné z toho, že $X/M \setminus \{[0]\} = q(X \setminus M)$ a q je spojité a otevřené.

***13.3. Úplnost v topologických vektorových prostorech**. Nechť (X, τ) je topologický vektorový prostor. Zobecněná posloupnost $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ v X se nazývá *cauchyovská*, jestliže ke každému okolí nuly $U \in \tau(0)$ existuje $\gamma_0 \in \Gamma$ tak, že $x_\alpha - x_\beta \in U$ pro každou dvojici $\alpha, \beta \succ \gamma_0$.

Podmnožinu A topologického vektorového prostoru X nazveme *úplnou*, jestliže každá cauchyovská zobecněná posloupnost v A konverguje k nějakému bodu v A. Tedy speciálně, prostor X je *úplný*, jestliže každá cauchyovská zobecněná posloupnost v X konverguje.

Množinu A nazveme *sekvenciálně úplnou*, jestliže každá cauchyovská posloupnost v A konverguje k nějakému prvku A.

Konečně, prostor X nazveme *kvaziúplným*, jestliže každá jeho uzavřená omezená podmnožina je úplná. Ekvivalentně, jestliže každá omezená cauchyovská zobecněná posloupnost v X je konvergentní.

(a) Věta. *Každý reflexivní Banachův prostor je slabě sekvenciálně úplný.*

Návod. Nechť $\{x_n\}$ je slabě cauchyovská posloupnost v reflexivím Banachově prostoru X. Protože pro každé $\varphi \in X^*$ je posloupnost čísel $\{\varphi(x_n)\}$ cauchyovská (to je ovšem třeba zdůvodnit), existuje $\lim \varphi(x_n)$. Podle principu stejnoměrné omezenosti 4.3 s využitím reflexivity X existuje $M > 0$ tak, že $\sup \|x_n\| \le M < \infty$. Položme $F\varphi := \lim \varphi(x_n)$. Funkcionál F je lineární a spojitý ($\lim |\varphi(x_n)| \le M \|\varphi\|$). Existuje tedy $z \in X$ tak, že $\varepsilon_z = F$. Tudíž $\varphi(z) = F\varphi = \lim \varphi(x_n)$ pro každé $\varphi \in X^*$, což neznamená nic jiného, než že $x_n \xrightarrow{w} z$. ♣

(b) Úplnost slabých topologií. *Nechť E je normovaný lineární prostor. Je-li E w-úplný, je již konečně dimenzionální. Jestliže E^* je w^*-úplný, je také již konečně dimenzionální.*

Návod. Důkaz prvního tvrzení je poměrně obtížný a vynecháme ho.

Abychom dokázali druhé, předpokládejme, že $\dim E = \infty$. Naším úkolem je vyrobit w^*-cauchyovskou zobecněnou posloupnost, která není w^*-konvergentní. Podle poznámky 2.6.c existuje $\varphi \in E^\# \setminus E^*$. Uspořádejme množinu $\mathcal{K}$ všech konečně dimenzionálních podprostorů inkluzí: $M_1 \prec M_2$ v případě, kdy $M_1 \subset M_2$. Podle vět 2.27 a 2.38 existuje pro každé $M \in \mathcal{K}$ projekce $P_M : E \to M$. Položme $\varphi_M := \varphi \circ P_M$. Protože φ_M je konečně dimenzionální operátor a jeho jádro $\ker \varphi_M$ je w^*-uzavřené, je s přihlédnutím k větě 14.24 φ_M w^*-spojitý. Nyní si stačí uvědomit, že $\{\varphi_M : M \in \mathcal{K}\}$ je w^*-cauchyovská zobecněná posloupnost, která není w^*-konvergentní. ♣

(c) Tvrzení. *Kompaktní podmnožina topologického vektorového prostoru je úplná, úplná podmnožina je uzavřená. Uzavřená podmnožina úplného topologického vektorového prostoru je úplná.*

Návod. Toto by mělo být jednoduché cvičení. Protože však práce se zobecněnými posloupnostmi je přeci jen obtížnější než s obvyklými posloupnostmi, předveďme důkaz prvního tvrzení. Zadejme si tedy cauchyovskou zobecněnou posloupnost $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ v kompaktní podmnožině K topologického vektorového prostoru E. Pro $\gamma \in \Gamma$ označme $K_\gamma := \{x_\alpha : \alpha \succ \gamma\}$. Protože množina Γ je usměrněná, je soustava $\{K_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ centrovaná a podle věty B.5 existuje $k \in \bigcap \{\overline{K_\gamma} : \gamma \in \Gamma\}$. Stačí ukázat, že $x_\gamma \to k$. Volme tedy okolí nuly U v E a nalezněme podle von Neumannovy věty 13.7 okolí nuly V tak, aby $V + V \subset U$. Jelikož naše zobecněná posloupnost je cauchyovská, existuje $\gamma \in \Gamma$ tak, že $x_i - x_j \in V$ pro každé $i, j \succ \gamma$. A protože $k \in \overline{K_\gamma}$, existuje $\alpha \succ \gamma$ tak, že $x_\alpha \in (k + V) \cap K_\gamma$. Potom ovšem pro $\beta \succ \gamma$ máme $x_\beta - k = (x_\beta - x_\alpha) + (x_\alpha - k) \in V + V \subset U$. Takže $x_\gamma \to k$. ♣

(d) Kvaziúplnost slabých topologií. *Nechť X je Banachův prostor. Potom X je w-kvaziúplný, právě když X je reflexivní. Duál X^* je vždy w^*-kvaziúplný.*

Návod. Je-li X w-kvaziúplný, je uzavřená jednotková koule B_X w-úplná. Pomocí Goldstineova lemmatu 16.8 ukažte, že $\varepsilon(B_X) = B_{X^{**}}$. Nechť naopak A je slabě uzavřená a slabě omezená množina v X. Potom A je omezená, a tudíž A je podmnožina nějaké uzavřené koule, která v důsledku reflexivity X je slabě kompaktní. Odtud plyne, že A musí být slabě úplná množina.

Je-li B w^*-uzavřená a w^*-omezená podmnožina X, je X omezená. Podle důsledku Alaoglu-Bourbakiho věty 15.15 je B w^*-kompaktní, a tudíž i w^*-úplná. ♣

(e) Zúplnění. *Předpokládejme, že E je topologický vektorový prostor. Potom existuje úplný topologický vektorový prostor $\widetilde{E}$ (t.zv.* zúplnění *E) obsahující E jakožto hustý podprostor. Je-li E navíc Hausdorffův, lze volit $\widetilde{E}$ jako Hausdorffův. V tomto případě je $\widetilde{E}$ určen jednoznačně až na (topologický) izomorfizmus.*

V případě, že E je lokálně konvexní, existuje jeho zúplnění $\widetilde{E}$, které je lokálně konvexní.

***13.4. Prekompaktní množiny v topologických vektorových prostorech**. Připomeňme, že podmnožina B metrického prostoru P je prekompaktní, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje konečná množina $F \subset P$ tak, že $B \subset \bigcup\{U(x,\varepsilon) : x \in F\}$. V případě, že P je dokonce normovaný lineární prostor, množina B je prekompaktní, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje konečná množina $F \subset P$ tak, že

$$B \subset \bigcup\big\{U(x,\varepsilon) : x \in F\big\} = \bigcup\big\{x + U(0,\varepsilon) : x \in F\big\} = F + U(0,\varepsilon)\,.$$

Přenesení této definice do topologických vektorových prostorů tedy nečiní potíže. Řekneme, že podmnožina B topologického vektorového prostoru (X,τ) je *prekompaktní*, jestliže ke každému okolí nuly $U \in \tau(0)$ existuje konečná množina $F \subset X$ tak, že $B \subset F + U$.

(a) **Poznámka**. Vždy lze dokonce volit $F \subset B$. Vskutku, najděme nejdříve $V \in \tau(0)$ tak, aby $V + V \subset U$. Existuje tedy konečná množina $K = \{v_1, \dots, v_n\} \subset X$ tak, že $B \subset K + V$. Lze předpokládat, že $(v_j + V) \cap B \neq \emptyset$ pro každé $j = 1, \dots, n$. Volíme-li $x_j \in (v_j + V) \cap B$ vcelku libovolně a označíme $M := \{x_1, \dots, x_n\}$, je $B \subset M + U$.

Základní vlastnosti prekompaktních množin shrňme do následujících tvrzení.

(b) Tvrzení. *Kompaktní i relativně kompaktní množiny jsou prekompaktní, každá prekompaktní množina je omezená. Uzávěr prekompaktní množiny je prekompaktní.*

Návod. Nechť K je kompaktní množina a U okolí 0. Protože $\{k + U : k \in K\}$ je otevřené pokrytí K, existují $k_1, \dots, k_n \in K$ tak, že $\bigcup\{k_j + U : j = 1, \dots, n\} \supset K$.

Nechť B je prekompaktní v E a U vyvážené okolí 0. Existuje vyvážené okolí 0 tak, že $V + V \subset U$ a konečná množina F tak, že $B \subset F + V$. Protože F je omezená množina v E, existuje n tak, že $F \subset nV$. Tudíž $B \subset nV + V \subset nV + nV = n(V + V) \subset nU$.

Je samozřejmé, že podmnožina prekompaktní množiny je prekompaktní. Takže relativně kompaktní množiny jsou i prekompaktní.

Nechť konečně B je prekompaktní a U okolí 0. Existuje uzavřené okolí V nuly, $V \subset U$ a konečná množina F tak, že $B \subset F + V$. Potom $\overline{B} \subset \overline{F + V} = F + V \subset F + U$. ♣

Analogicky, jako v teorii metrických prostorů, platí i zde následující charakteristika. Její důkaz je ale již komplikovanější.

(c) Věta. *Podmnožina topologického vektorového prostoru E je kompaktní, právě když je úplná a prekompaktní.*

Návod. Každá kompaktní množina je úplná podle *13.3.c a předešlého tvrzení (b). Nechť obráceně K je úplná a prekompaktní množina v E. Chceme ukázat, že je kompaktní. Abychom se vyhnuli (alespoň explicitně) použití ultrafiltrů (obvyklý důkaz jich využívá), použijeme charakteristiku kompaktnosti z B.5. Důkaz jen naznačíme. Nechť tedy $\mathcal{T}$ je centrovaná soustava uzavřených podmnožin K. Ta je obsažena v nějaké maximální centrované soustavě uzavřených podmnožin K (Zornovo lemma !), ponechme ji označení $\mathcal{T}$. Ukážeme-li, že ke každému okolí U nuly existuje $B \in \mathcal{T}$ a $x \in E$ tak, že $B \subset x + U$, vyplyne z úplnosti K, že $\bigcap\{T : T \in \mathcal{T}\} \neq \emptyset$ (toto tvrzení není úplně zřejmé a vyžaduje menší zdůvodnění). K tomu využijeme právě prekompaktnost a maximalitu $\mathcal{T}$. Stačí totiž ukázat, že pokud uzavřené množiny $B_1, \ldots, B_n$ pokrývají K, potom jedna z nich náleží $\mathcal{T}$. Kdyby však množina B_j nenáležela $\mathcal{T}$, potom $\mathcal{T} \cup B_j$ by již nemohl být centrovaný systém. Tím bychom pro každou z množin $B_1, \ldots, B_n$ našli konečný podsystém v $\mathcal{T}$ mající s ní prázdný průnik. Jejich sjednocením bychom pak získali konečný podsystém $\mathcal{T}$ s prázdným průnikem. ♣

***13.5. Konvexní obaly různých množin**. Nechť B je podmnožina topologického vektorového prostoru X a $\operatorname{co} B$ její konvexní obal.

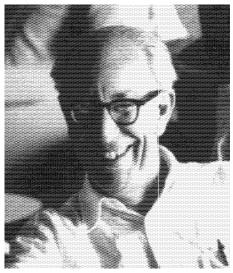
(a) `Tvrzení.` *Je-li B prekompaktní podmnožina lokálně konvexního prostoru, je i $\operatorname{co} B$ prekompaktní.*

Návod. Nechť U je okolí nuly v X. Existuje barel V, který je také okolím 0 tak, že $V + V \subset U$. Podle definice prekompaktnosti v *13.4 existuje konečná množina $F \subset B$ s vlastností $B \subset F + V$. Protože $\operatorname{co} F + V$ je konvexní množina obsahující $F + V$, musí být $\operatorname{co} B \subset \operatorname{co} F + V$. Ve tvrzení (d) ukážeme, že množina $\operatorname{co} F$ je kompaktní, což nám dovolí vybrat konečnou množinu $F^* \subset \operatorname{co} F$ tak, aby $\operatorname{co} F \subset F^* + V$. Potom ovšem $\operatorname{co} B \subset \operatorname{co} F + V \subset (F^* + V) + V \subset F^* + U$. ♣

(b) `Tvrzení.` *Je-li B omezená množina v lokálně konvexním prostoru (X, τ), je i $\operatorname{co} B$ omezená množina.*

Návod. Nechť V je okolí 0. Najděme konvexní $U \in \tau(0)$, $U \subset V$. Existuje $\lambda > 0$ tak, že $B \subset \lambda U$. Potom $\operatorname{co} B \subset \operatorname{co}(\lambda U) = \lambda U \subset \lambda V$ ♣

(c) `Příklad.` Předpoklad lokální konvexity prostoru X v (b) je podstatný. Uvažujeme-li metrický lineární prostor $L^p(\mathbf{R})$ pro $0 < p < 1$ z 13.13.c, je množina $B := \{f \in L^p(\mathbf{R}) : \varrho(f, 0) < 1\}$ omezená. Ale $\operatorname{co} B = L^p(\mathbf{R})$, což je množina neomezená.



W. Rudin

Rovněž tak předpoklad lokální konvexivity nelze vynechat v tvrzení (a). Stačí se třeba podívat na *Rudinův protipříklad* z následujícího odstavce *13.6.b. Zkrátka množina $\{x_n\}$, kde $x_0 := (0, 0, \ldots)$ a $x_n := \frac{1}{\sqrt{n}} e_n$ je (dokonce) kompaktní v prostoru $l^{\frac{1}{2}}$, ale posloupnost konvexních kombinací $\frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$ není (ani) omezená.

(d) `Tvrzení.` *Je-li X topologický vektorový prostor a B konečné sjednocení jeho kompaktních konvexních podmnožin, je $\operatorname{co} B$ kompaktní.*

Návod. Nechť $\{x_1, \ldots, x_n\}$ jsou body X a B jejich konvexní obal. Potom B je obraz kompaktní množiny $\{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) : \lambda_j \geq 0\ ,\ \sum_j \lambda_j = 1\} \subset \mathbf{R}^n$ při spojitém zobrazení $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \sum_j \lambda_j x_j$. Takže B musí být kompakt. Tím je dokázáno tvrzení pro případ, že uvažované kompaktní množiny jsou jednobodové. Důkaz obecného tvrzení lze vést podobně. Je dobré si uvědomit, že konvexní obal množin $K_1, \ldots, K_n$ je roven množině

$$\{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j : \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1\ ,\ \lambda_j \geq 0 \text{ a } x_j \in K_j \text{ pro všechna } j = 1, \ldots, n\}$$

a uvažovat tentokráte zobrazení $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \times (x_1, \ldots, x_n) \to \sum_j \lambda_j x_j$. ♣

(e) `Tvrzení.` *Je-li B kompaktní podmnožina úplného lokálně konvexního prostoru X, je $\operatorname{co} B$ relativně kompaktní množina.*

Návod. V případě, kdy X je úplný, je $\operatorname{co} B$ prekompaktní podle části (a). Podle *13.4.b je potom $\overline{\operatorname{co}} B$ prekompaktní množina. Protože $\overline{\operatorname{co}} B$ je uzavřená podmnožina v úplném prostoru, je $\overline{\operatorname{co}} B$ kompakt podle věty *13.4.c. ♣

***13.6. Uzavřený konvexní obal kompaktní množiny**. Otázka, kterou se budeme zabývat, se týká problému, zda-li uzavřený konvexní obal kompaktní množiny je kompakt. Ukážeme, že v obecných lokálně konvexních prostorech tomu tak být nemusí a uvedeme poměrně hluboké věty, že v Banachových prostorech, ať už je uvažujeme s normovou topologií či se slabými topologiemi w a w^*, tomu tak je.

(a) Ukažte, že v $\mathbf{R}^n$ již konvexní obal kompaktní množiny je kompakt.

(b) Je-li K kompaktní podmnožina lokálně konvexního prostoru X, nemusí být $\overline{\text{co}}K$ kompakt.

Návod. Uvažujme normovaný lineární podprostor E všech posloupností Hilbertova prostoru l^2, které jsou vždy od určitého indexu rovny 0. Položme $x_n := \frac{1}{n}e_n$, kde $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (1 je na n-tém místě) a $K := \{0\} \cup \{x_n\}$. Protože $x_n \to 0$ v E, je množina K kompaktní v E. Uvažujme nyní vektory

$$a_n := \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j} \right)^{-1} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j} \, x_j \,,$$

které leží v konvexním obalu $\text{co}\,K$ množiny K. Stačí nyní ukázat, že posloupnost $\{a_n\}$ nemá v prostoru E limitu.

W. Rudin [*1973] udává ve cvičení 22 třetí kapitoly následující návod: V prostoru l^p pro $0 < p < 1$ uvažujte (kompaktní) množinu tvořenou prvky posloupnosti $\{x_n\}$, kde $x_0 := (0, 0, \dots)$, $x_n := n^{p-1}e_n$ (e_n jsou standardní vektory). Stačí ukázat, že posloupnost $\frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$ není v prostoru l^p omezená. Jiný příklad uvádí H.H. Schaefer [*1966] ve cvičení 27 druhé kapitoly. ♣

(c) Mazurova věta. *Je-li K kompaktní podmnožina Banachova prostoru X, je $\overline{\text{co}}K$ kompakt.*

Návod. Stačí ukázat, že $\text{co}\,K$ je prekompaktní množina. Volme tedy $\varepsilon > 0$. Protože K je kompakt, existuje v K ε-síť $F_1 := \{x_1, \dots, x_n\}$. Označme

$$C := \{\lambda x_1 : \lambda \in [0,1]\} + \dots + \{\lambda x_n : \lambda \in [0,1]\} \,.$$

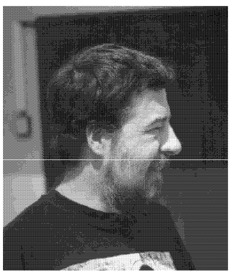
Jelikož C je kompakt, existuje opět konečná ε-síť F_2 tak, že $C \subset F_2 + \varepsilon B_X$. Máme tedy

$$K \subset F_1 + \varepsilon B_X \subset C + \varepsilon B_X \subset F_2 + \varepsilon B_X + \varepsilon B_X = F_2 + 2\varepsilon B_X \,.$$

Protože $C + \varepsilon B_X$ je konvexní množina obsahující K, musí obsahovat i $\text{co}\,K$. Tudíž $\text{co}\,K \subset F_2 + 2\varepsilon B_X$ a vidíme, že F_2 je konečná 2ε-síť pro $\text{co}\,K$. ♣

(d) Krejnova věta. *Nechť K je w-kompaktní podmnožina Banachova prostoru X. Potom $\overline{\text{co}}^w K$ (což je totéž jako $\overline{\text{co}}K$) je opět w-kompaktní množina.*

Návod. Je-li X reflexivní, je podle věty v *13.3.d w-kvaziúplný a stačilo by použít tvrzení *13.6.f.



G. Godefroy

Důkaz v obecném případě dá chvilku práce. Lze třeba využít *Jamesovu charakteristiku* w-kompaktnosti uzavřených omezených konvexních množin Podle ní každá taková množina C je w-kompaktní, právě když každý funkcionál $f \in X^*$ nabývá na C svého maxima (důkaz Jamesovy charakteristiky pro případ separabilního prostoru X založený na poměrně nové Godefroyově větě lze nalézt v [HHZ], str. 52). Přijmeme-li tedy Jamesovu charakteristiku za dokázanou a $K \subset X$ je w-kompaktní množina, a označíme-li pro $C \subset X$

$$\mathcal{P}_C := \{\varphi \in X^* : \text{existuje } x \in C \text{ tak, že } \varphi(x) = \sup\{\varphi(c) : c \in C\}\} \,,$$

stačí ukázat, že $\mathcal{P}_{\overline{\text{co}}K} = X^*$. Protože ale $\sup\{\varphi(t) : t \in K\} = \sup\{\varphi(t) : t \in \overline{\text{co}}K\}$ pro každé $\varphi \in X^*$ a $\mathcal{P}_K = X^*$ (protože K je w-kompaktní), musí být $X^* = \mathcal{P}_K \subset \mathcal{P}_{\overline{\text{co}}K}$. ♣

(e) **Poznámky.** (e1) Lokálně konvexní prostory, v nichž uzavřený konvexní obal kompaktní množiny je vždy kompakt, bývají často nazývány *Krejnovými prostory*.

(e2) Nechť X je Banachův prostor a $K \subset X^*$ je w^*-kompaktní množina. Potom $\overline{\text{co}}^{w^*} K$ je w^*-kompaktní množina. To plyne z Alaogluovy věty a omezenosti.

(e3) Je-li X Banachův prostor a K w^*-kompaktní podmnožina X^*, nemusí být množina $\overline{\text{co}}K$ w^*-kompaktní.

(f) Uzavřený konvexní obal prekompaktní množiny. *Je-li B prekompaktní množina kvaziúplného lokálně konvexního prostoru X, je $\overline{\text{co}}B$ kompakt.*

Návod. Důkaz tohoto tvrzení je poněkud obtížnější a lze jej nalézt v R.B. Holmes [*1975]. ♣

*14. Lokálně konvexní prostory

***14.1. Příklady nebarelovaných prostorů**. (a) Buď

$$X := \{ f \in \mathcal{C}([0,1]) : f = 0 \text{ na jistém okolí nuly } [0, \varepsilon_f] \}$$

podprostor Banachova prostoru $\mathcal{C}([0,1])$. Jestliže

$$B := \{ f \in X : |f(\tfrac{1}{n})| \le \tfrac{1}{n} \text{ pro všechna } n \in \mathbf{N} \},$$

potom B je barel, který není okolím nuly v X.

(b)Uvažujme prostor $\mathcal{C}([0,1])$ opatřený integrální normou ($\|f\|_i := \int_0^1 |f|$). Potom množina $\{f \in \mathcal{C}([0,1]) : \max\{|f(t)| : t \in [0,1]\} \le 1\}$ je barel, který není okolím nuly.

(c) Buď $\mathcal{P}$ vektorový prostor všech polynomů na $\mathbf{R}$, kde definujeme normu vztahem

$$\|a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n\| = \sup\{|a_i| : i = 1, \dots, n\}.$$

Pokud $B =: \{p \in \mathcal{P} : p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, |a_i| \le \frac{1}{i} \text{ pro každé } i = 1, \dots, n\}$, je B barel v $\mathcal{P}$ a opět není okolím nulového polynomu. (Uvědomte si, že vlastně prostor $\mathcal{P}$ není nic jiného než c_{00} z příkladu *1.1.b.)

(d) Dalším příkladem nebarelovaného prostoru může sloužit Hilbertův prostor opatřený slabou topologií (viz poznámku 17.24).

***14.2. Návrat k normovaným prostorům**. Než přejdeme k různým charakteristikám barelovaných prostorů, vraťme se k případu normovaných lineárních prostorů.

`(a) Stejná spojitost`. Jsou-li M, N normované lineární prostory a $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}(M,N)$ množina spojitých lineárních zobrazení, řekneme, že $\mathcal{H}$ je *stejně spojitá množina*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $\|Lx\| < \varepsilon$ pro každé $x \in M$, $\|x\| < \delta$ a každé $L \in \mathcal{H}$.

V *1.14.a jsme definovali stejnou spojitost v případě množiny funkcí. Obdobně i v našem případě bychom mohli definovat stejnou spojitost. Vzhledem k tomu, že nyní uvažujeme lineární zobrazení, mohli bychom si rozmyslet, že „stejná spojitost v 0“ již zaručí „stejnou spojitost“ v libovolném bodě prostoru M. Není tedy nová definice stejné spojitosti v rozporu s definicí z *1.14.a.

`(b) Větička.` *Nechť M, N jsou normované lineární prostory a $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}(M,N)$. Potom množina $\mathcal{H}$ je stejně spojitá, právě když $\sup\{\|L\| : L \in \mathcal{H}\} < \infty$.*

Důkaz. Je-li $\mathcal{H}$ stejně spojitá množina, existuje $\delta > 0$ tak, že $\|Lx\| < 1$, kdykoliv $\|x\| < \delta$ a $L \in \mathcal{H}$. Je-li potom $\|z\| \le 1$ a $L \in \mathcal{H}$, je $\|Lz\| \le \frac{1}{\delta}$, a tudíž $\sup\{\|L\| : L \in \mathcal{H}\} \le \frac{1}{\delta}$.

Je-li $\sup\{\|L\| : L \in \mathcal{H}\} = K < \infty$, je $\|Lx\| \le \|L\| \|x\| \le K \|x\|$ pro každé $L \in \mathcal{H}$ a $x \in M$. A každý vidí, že $\mathcal{H}$ je stejně spojitá množina. ■

Princip stejnoměrné spojitosti z 4.2 můžeme tedy zformulovat následujícím způsobem.

`(c) Princip stejnoměrné omezenosti.` *Nechť X je Banachův prostor, E normovaný lineární prostor a $\mathcal{G} \subset \mathcal{L}(X,E)$. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) *$\mathcal{G}$ je stejně spojitá množina ,*
(ii) *$\sup\{\|Lx\| : L \in \mathcal{G}\} < +\infty$ pro každé $x \in X$.*

***14.3. Více o barelovaných prostorech**. Než uvedeme některé věty o barelovaných prostorech, vyslovme nové definice. Nesmíme přitom zapomenout na předchozí odstaveček.

`(a) Stejná spojitost v topologických vektorových prostorech`. Nechť X, Y jsou topologické vektorové prostory a $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}(X,Y)$. Řekneme, že $\mathcal{H}$ je *stejně spojitá množina*, jestliže ke každému okolí U nuly v Y existuje okolí nuly V v X tak, že $L(V) \subset U$ pro každé $L \in \mathcal{H}$.

Následující postřeh dává jednoduché kriterium pro stejnou spojitost podmnožin duálu.

`(b) Větička.` *Nechť (X, τ) je topologický vektorový prostor a $B \subset X^*$. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) *B je stejně spojitá množina,*
(ii) *existuje $V \in \tau(0)$ tak, že $B \subset V^\circ$,*
(iii) *${}^\circ B \in \tau(0)$.*

Důkaz. Předpokládáme-li (i), existuje okolí $V \in \tau(0)$ tak, že $|f(x)| < 2$ pro každé $x \in V$ a $f \in B$. Tudíž $B \subset V^\circ$.

Nechť $B \subset V^\circ$ pro jisté okolí $V \in \tau(0)$. Volme $\varepsilon > 0$. Protože $|f(\varepsilon x)| \le \varepsilon$ pro každé $f \in B$ a $x \in V$, je $f(\varepsilon V) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$ pro každé $f \in B$. Je tedy množina B stejně spojitá.

Nechť $V \in \tau(0)$ a $B \subset V^\circ$. Protože ${}^\circ B \supset {}^\circ(V^\circ) \supset V$, je ${}^\circ B \in \tau(0)$. Pokud ${}^\circ B \in \tau(0)$ a $V := {}^\circ B$, je $B \subset ({}^\circ B)^\circ = V^\circ$. ■

`(c) Princip stejnoměrné omezenosti.` *Nechť X, E jsou lokálně konvexní prostory, prostor X navíc barelovaný a $\mathcal{G} \subset \mathcal{L}(X, E)$. Následující dvě podmínky jsou ekvivalentní.*

(i) *$\mathcal{G}$ je stejně spojitá množina,*
(ii) *pro každé $x \in X$ je $\{Lx : L \in \mathcal{G}\}$ omezená množina v E.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{G}$ je bodově omezená množina, tedy nechť $\mathcal{G}$ splňuje podmínku (ii). Volme okolí U nuly v E a rovnou předpokládejme, že U je barel. Položme $V := \bigcap \{L^{-1}U : L \in \mathcal{G}\}$. Stačí ukázat, že V je okolí nuly v prostoru X. A k tomu vzhledem k barelovanosti X zase stačí, že V je barel. Bez nejmenších problémů je vidět, že V je uzavřená absolutně konvexní množina. Zbývá tedy ověřit, že V je pohlcující. Vyberme tedy nějaké $x \in X$. Protože množina $D_x := \{Lx : L \in \mathcal{G}\}$ je omezená v E, existuje $\lambda > 0$ tak, že $D_x \subset \lambda U$. Tudíž $x \in \lambda V$ a vidíme, že V je pohlcující.

Předpokládejme naopak, že $\mathcal{G}$ je stejně spojitá množina a $x \in X$. Chceme ukázat, že při výše uvedeném označení je množina D_x omezená v E. Předepišme si tedy okolí U nulového prvku v E. Existuje okolí V nuly v X tak, že $L(V) \subset U$ pro každé $L \in \mathcal{G}$. Protože tedy $V \subset Z := \bigcap \{L^{-1}U : L \in \mathcal{G}\}$, je Z okolím nuly v X. Musí tedy existovat $\lambda > 0$ tak, že $x \in \lambda Z$. Tudíž $Lx \in \lambda U$ pro každé $L \in \mathcal{G}$. ■

`(d) Banach-Steinhausova věta.` *Nechť X je barelovaný lokálně konvexní prostor a E lokálně konvexní prostor. Jestliže $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(X, E)$ je taková posloupnost, že existuje $\lim T_n x =: Tx$ pro každé $x \in X$, potom $T \in \mathcal{L}(X, E)$.*

Důkaz. Především podle principu stejnoměrné omezenosti v (c) je množina $\{T_n\}$ stejně spojitá. Je-li U uzavřené okolí nuly v E, existuje okolí V nuly v X tak, že $T_n V \subset U$ pro každé n. Podle předpokladu je pak $TV \subset U$, což nám říká, že T je spojité v 0. A tedy spojité na X. ■

Následující lemma můžete porovnat se cvičením 15.21.a.

`(e) Lemma.` *Nechť X je lokálně konvexní prostor a $B \subset X^*$. Potom B je $\sigma(X^*, X)$-omezená množina, právě když polára ${}^\circ B$ je pohlcující množina v X.*

Důkaz. Dokázat lemma znamená vlastně jenom hrátky s definicemi. Zkusme to. Je-li B $\sigma(X^*, X)$-omezená množina a $x \in X$, je $\lambda := \sup\{|f(x)| : f \in B\} < \infty$. Pokud $\lambda = 0$, je $x \in {}^\circ B$. Pokud $\lambda > 0$, je $x \in \lambda\, {}^\circ B$. Tudíž ${}^\circ B$ je pohlcující množina.

Je-li naopak ${}^\circ B$ pohlcující množina a $x \in X$, existuje $\lambda > 0$ tak, že $x \in \lambda\, {}^\circ B$. Potom ovšem $|f(x)| \le \lambda$ pro každé $f \in B$. Mackeyho věta 17.11, respektive následující poznámka 17.12, nám pak říká, že B je $\sigma(X^*, X)$-omezená množina. ■

`(f) Tvrzení.` *Nechť (X, τ) je Hausdorffův lokálně konvexní prostor a $A \subset X$. Potom A je barel, právě když existuje $\sigma(X^*, X)$-omezená množina $\mathcal{F} \subset X^*$ tak, že $A = {}^\circ\mathcal{F}$.*

Důkaz. Polára ${}^\circ\mathcal{F}$ libovolné množiny je vždy absolutně konvexní a $\sigma(X, X^*)$-uzavřená, Je tedy i τ-uzavřená. Je-li $\mathcal{F}$ $\sigma(X^*, X)$-omezená množina, je její polára ${}^\circ\mathcal{F}$ pohlcující množina podle předešlého lemmatu.

Je-li A barel, je podle věty o bipoláře $A = {}^\circ(A^\circ)$. Položíme-li $\mathcal{F} := A^\circ$, je $\mathcal{F}$ $\sigma(X^*, X)$-omezená množina (opět podle předchozího lemmatu) a samozřejmě $A = {}^\circ\mathcal{F}$. ■

Přicházíme k různým charakteristikám barelovaných prostorů. Dokážeme však jen ekvivalenci prvních tří výroků, podmínku (iv) uvádíme bez důkazu.

`(g) Věta.` *Nechť (X, τ) je lokálně konvexní prostor. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:*

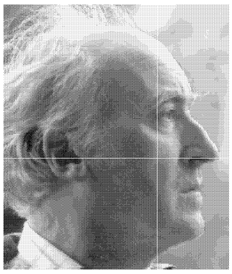
(i) *X je barelovaný,*
(ii) *libovolná $\sigma(X^*, X)$-omezená podmnožina X^* je stejně spojitá,*

(iii) *libovolná zdola polospojitá pseudonorma na X je spojitá,*
(iv) $\tau = \beta(X, X^*)$.

Návod. Předpokládejme, že X je barelovaný a $B \subset X^*$ je $\sigma(X^*, X)$-omezená množina. Podle (f) je $^\circ B$ barel, a tudíž $^\circ B \in \tau(0)$. Podle větičky (b) je B stejně spojitá množina. Platí-li (ii) a $A \subset X$ je barel, existuje podle tvrzení (f) $\sigma(X^*, X)$-omezená množina $\mathcal{F} \subset X^*$ tak, že $A = {^\circ\mathcal{F}}$. Protože však podle předpokladu je množina $\mathcal{F}$ stejně spojitá, je opět podle větičky (b) $A = {^\circ\mathcal{F}} \in \tau(0)$.

Je-li p zdola polospojitá pseudonorma na barelovaném prostoru X, je množina $B := \{x \in X : p(x) \leq 1\}$ barel. Tudíž $B \in \tau(0)$. Podle lemmatu 14.10.a je pseudonorma p spojitá.

Předpokládejme nyní (iii). Je-li B barel v X, je Minkowského funkcionál p_B zdola polospojitá pseudonorma (neboť $\{x \in X : p_B(x) \leq \alpha\} = \alpha B$ je uzavřená množina pro každé $\alpha > 0$). Podle předpokladu je tedy p_B spojitá pseudonorma a stačí se odkázat na větu 14.10.b. Podle ní je B okolím nuly. ♣


V. Pták

***14.4. Ptákovy prostory**. V předchozím odstavci jsme diskutovali platnost principu stejnoměrné omezenosti a jeho důsledku ve formě Banach-Steinhausovy věty v lokálně konvexních prostorech. Viděli jsme, že podstatnou roli tam hrála barelovanost. Můžeme se tedy vcelku přirozeně ptát, v jakých lokálně konvexních prostorech máme také šanci odvodit analogie vět o otevřeném zobrazení či o uzavřeném grafu. Ukazuje se, že důležitou roli kromě barelovaných prostorů zde hrají *Ptákovy prostory*. Není snadné v několika řádcích pořádně osvětlit tento pojem, čtenáře mohou odkázat třeba na příslušné partie v novější učebnici Ch. Swartze [*1992]. Věta o otevřeném zobrazení pak zní takto: *Jsou-li X, Y Hausdorffovy lokálně konvexní prostory, X Ptákův a Y barelovaný, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $TX = Y$, potom T je otevřené zobrazení.*

***14.5. Verze Hahn-Banachovy věty**. Zkuste dokázat následující verze Hahn-Banachovy věty v lokálně konvexních prostorech.

(a) **Věta.** *Nechť M je uzavřený lineární podprostor lokálně konvexního prostoru X a $z \in X \setminus M$. Potom existuje $F \in X^*$ tak, že $F(z) = 1$ a $F = 0$ na M.*

Návod. Inspirujte se důkazy malé Mazurovy věty 14.27 a *2.9.b. Nechť V je otevřené absolutně konvexní okolí 0, $(z + V) \cap M = \emptyset$ a p_V Minkowského funkcionál V. Uvědomte si, že p_V je spojitá pseudonorma a $V = \{x \in X : p_V(x) < 1\}$. Nyní definujte funkcionál f na množině $A := \{m + \lambda z : m \in M, \lambda \in \mathbf{F}\}$ předpisem $f(m + \lambda z) = \lambda$. Ukažte, že $|f| \leq p_V$ na A. Podle algebraické Hahn-Banachovy věty 2.16 existuje $F \in X^{\#}$ tak, že $F = f$ na A a $|F| \leq p_V$ na X. Odtud již tvrzení lehko plyne. ♣

(b) **Věta.** *Nechť M je lineární podprostor lokálně konvexního prostoru X a f spojitý lineární funkcionál na M. Potom existuje $F \in X^*$ tak, že $F = f$ na M.*

Návod. Podle 14.24 existuje okolí U bodu 0 v prostoru M tak, že $|f| \leq 1$ na U. Nechť V je okolí počátku v X takové, že $U = V \cap M$ a B barel, který je okolím 0 v X, $B \subset V$. Není těžké ověřit, že $|f(t)| \leq p_B(t)$ pro všechna $t \in M$ (p_B je samozřejmě Minkowského funkcionál barelu B). Nyní stačí užít algebraickou verzi Hahn-Banachovy věty 2.16 a uvědomit si, že p_B je spojitý. ♣

***14.6. Oddělování konvexních množin ve vektorových prostorech**. Začněme s tvrzením, které bývá připisováno S. Kakutanimu a/či M.H. Stoneovi. Důkaz si proveďte sami jako hezké cvičení na použití Zornova lemmatu.

(a) **Věta.** *Nechť A, B jsou disjunktní konvexní podmnožiny vektorového prostoru W. Potom existují disjunktní konvexní množiny C_A a C_B tak, že $A \subset C_A$, $B \subset C_B$ a $C_A \cup C_B = W$.*

Návod. Na množině $\mathcal{Z}$ všech konvexních množin ve W obsahujících A a disjunktních s B definujme uspořádání pomocí inkluze. Zornovo lemma nám zaručí existenci maximálního prvku $C_A \in \mathcal{Z}$. Položíme-li $C_B := W \setminus C$, jde jen o to ukázat, že C_B je konvexní množina. ♣

Je řada vět algebraického charakteru o oddělování konvexních množin. Abychom mohli uvést bez důkazu alespoň tu nejdůležitější, definujme následující pojem. Je-li A podmnožina vektorového prostoru W, řekneme, že bod x je *vnitřním bodem* (v algebraickém smyslu) A, jestliže existuje pohlcující množina V tak, že $x + V \subset A$.

(b) Věta. *Nechť A, B jsou disjunktní konvexní podmnožiny reálného vektorového prostoru W, z nichž alespoň jedna má vnitřní bod. Potom lze A a B oddělit nadrovinou. Existuje tedy $f \in W^\#$ a α tak, že $A \subset \{x \in W : f(x) \le \alpha\}$ a $B \subset \{x \in W : f(x) \ge \alpha\}$.*

(c) Mazur-Orliczova věta. *Nechť W je reálný vektorový prostor, C jeho konvexní podmnožina a p konvexní funkcionál na W. Potom existuje taková lineární forma $F \in W^\#$, že $F \le p$ na W a $\inf\{F(x) : x \in C\} = \inf\{p(x) : x \in C\}$.*

Návod. Označme $\alpha := \inf\{p(x) : x \in C\}$. Protože máme k dispozici 2.17, není co dokazovat v případě $\alpha = -\infty$. V opačném případě položme

$$q(x) := \inf\big\{p(x + \lambda y) - \lambda\alpha : y \in C,\ \lambda \ge 0\big\} \quad \text{pro} \quad x \in W\,.$$

Funkcionál q je konvexní. K odůvodnění „trojúhelníkové nerovnosti" se využije konvexita C a chvilka přemýšlení. Podle algebraické verze Hahn-Banachovy věty (respektive podle poznámky v 2.17) existuje $F \in W^\#$ tak, že $F \le q$ na W. Potom ovšem též $F \le p$ na W, a protože $F(-x) \le q(-x) \le p(-x + x) - \alpha$ pro $x \in C$, je $F \ge \alpha$ na C a jsme s důkazem hotovi. ♣

(d) Důsledek. *Buďte A, B dvě konvexní podmnožiny reálného Banachova prostoru X mající kladnou vzdálenost. Potom existuje $\varphi \in X^*$ tak, že $\varphi(A) \cap \varphi(B) = \emptyset$.*

Návod. Množina $A - B$ je konvexní. Podle Mazur-Orliczovy věty v (c) existuje lineární forma $\varphi \in X^\#$ tak, že $\varphi(x) \le \|x\|$ pro $x \in X$ a

$$\begin{aligned} 0 < \operatorname{dist}(A, B) &= \inf\{\|a - b\| : a \in A,\ b \in B\} = \inf\{\varphi(x) : x \in A - B\} = \\ &= \inf\{\varphi(x) : x \in A\} - \sup\{\varphi(x) : x \in B\}\,. \end{aligned}$$

♣

(e) Poznámka. Ukázali jsme více. Dokonce $\operatorname{dist}\big(\varphi(A), \varphi(B)\big) > 0$.

***14.7. Oddělování konvexních množin — geometrické Hahn-Banachovy věty**. Řekneme, že neprázdné konvexní podmnožiny A, B reálného topologického vektorového prostoru X jsou *separovány*, existují-li $f \in X^*$ a $\lambda \in \mathbf{R}$ tak, že

$$A \subset \big\{x \in X : f(x) \le \lambda\big\} \quad \text{a} \quad B \subset \big\{x \in X : f(x) \ge \lambda\big\}\,.$$

Je-li dokonce možno nalézt $f \in X^*$ a λ tak, aby

$$A \subset \big\{x \in X : f(x) < \lambda\big\} \quad \text{a} \quad B \subset \big\{x \in X : f(x) > \lambda\big\}\,,$$

nazveme A, B *silně separovanými*.

Poznámky. (a) V případě, že bychom uvažovali komplexní prostory, musíme v definicích nahradit funkcionál f jeho reálnou částí $\operatorname{Re} f$.

(b) Můžeme též říci, že A a B jsou *supersilně* separovány, existují-li $f \in X^*$, $\lambda \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon > 0$ tak, že

$$f(a) \le \lambda - \varepsilon < \lambda + \varepsilon \le f(b) \quad \text{pro každé} \quad a \in A\,, b \in B\,.$$

Jinými slovy, jestliže $\sup f(A) < \inf f(B)$. Mnozí autoři silné separovanosti (v našem smyslu) říkají *striktní*, zatímco supersilné separovanosti říkají silná.

(a) Ukažte na příkladě v rovině, že ne každé dvě separované množiny musejí být silně separovány.

(b) Podle malé Mazurovy věty 14.27 jsou body a uzavřené konvexní množiny silně separovány (dokonce supersilně).

(c) Věta. *Nechť A, B jsou disjunktní konvexní množiny v lokálně konvexním prostoru X. Je-li A otevřená, jsou A a B separovány.*

Návod. Protože množina $A - B$ je otevřená, konvexní a neobsahuje 0, stačí oddělit otevřenou konvexní množinu C obsahující 0 a bod $x_0 \notin C$. Postupujte obdobně jako u důkazu malé Mazurovy věty - uvědomte si, že $C = \{x \in X : p_C(x) < 1\}$ a použijte Hahn-Banachovu větu na Minkowského funkcionál p_C. ♣

(d) **Věta.** *Jsou-li A, B disjunktní konvexní a otevřené podmnožiny lokálně konvexního prostoru X, jsou A, B silně separovány.*

Návod. Podle věty (c) najděte $f \in X^*$ a λ tak, aby $A \subset \{x \in X : f(x) \le \lambda\}$ a $B \subset \{x \in X : f(x) \ge \lambda\}$. Protože podle větičky (b) v 2.23 jsou množiny $f(A)$ a $f(B)$ otevřené, lehko již odvodíte, že A, B musejí být separovány silně. ♣

(e) **Věta.** *Jsou-li A, B disjunktní konvexní a uzavřené podmnožiny Hausdorffova lokálně konvexního prostoru X a B je navíc kompaktní, lze A a B silně oddělit (dokonce supersilně).*

Návod. Protože množina $A - B$ je uzavřená a neobsahuje 0, existuje otevřené konvexní okolí $V \in \tau(0)$ tak, že $(A + V) \cap (B + V) = \emptyset$. Nyní použijte větu (d). ♣

Poznámka. Kde se při důkazu věty (e) využije kompaktnosti B?

(f) **Věta.** *Libovolné dvě disjunktní konvexní podmnožiny $\mathbf{R}^n$ lze oddělit.*

Návod. Důkaz lze nalézt třeba v R.T. Rockafellar [*1970] či v R.B. Holmes [*1975], str.15 (dokonce pro libovolný vektorový prostor konečné dimenze).

Můžete se pokusit o samostatný důkaz využitím *14.6.a: Jsou-li $A, B \subset \mathbf{R}^n$ disjunktní konvexní množiny, nalezněte disjunktní konvexní množiny C_A, C_B tak, aby $A \subset C_A$, $B \subset C_B$ a $C_A \cup C_B = \mathbf{R}^n$. Nejdříve ukažte, že množina $C_A \cap \partial C_A$ je konvexní. Poté ověřte, že i množina $D := (C_A \cap \partial C_A) \cup (C_B \cap \partial C_B)$ je konvexní. Z rovnosti $C_A = \mathbf{R}^n \setminus C_B$, dostaneme, že $\partial C_A = \partial C_B = D$. Protože množina $C_A \cap \partial C_A$ je konvexní a má prázdný vnitřek, je obsažena v jisté nadrovině. Obdobně $C_B \cap \partial C_B$. Tudíž konvexní množina $\partial C_A = \partial C_B$ je obsažena ve sjednocení dvou nadrovin. A tím získáme separující nadrovinu. ♣

(g) Obecně dvě disjunktní konvexní množiny ani v normovaném lineárním prostoru nemusí být separované.

Návod. V prostoru c_{00} uvažujte konvexní množinu C sestávající z těch posloupností, jejichž poslední nenulová souřadnice je kladná. Množiny C a $\{0\}$ nelze oddělit nadrovinou. ♣

(h) V l^2 existují disjunktní uzavřené konvexní množiny, které nelze oddělit. Takový příklad podal v J.W. Tukey [1942]. Tam lze nalézt detaily. Hledané množiny vypadají takto:

$$\left\{\{x_n\} \subset l^2 : x_1 \ge n\left|x_n - n^{-\frac{2}{3}}\right|, n \ge 2\right\} \quad \text{a} \quad \left\{\{x_n\} \in l^2 : x_2 = x_3 = \cdots = 0\right\}.$$

***14.8. Tvrzení.** *Je-li f nespojitý lineární funkcionál na topologickém vektorovém prostoru X, je* $\ker f$ *hustý podprostor X.*

Návod. Především f je nenulový funkcionál. Tudíž $H := \ker f$ je maximální vlastní podprostor X podle A.4. Protože podle charakteristiky 14.24 podprostor H není uzavřený, a protože $\overline{H}$ je podprostor X, musí být $\overline{H} = X$. ♣

***14.9. Omezená a spojitá lineární zobrazení.** Ve větě 2.2 jsme ukázali, že lineární zobrazení mezi normovanými lineárními prostory je spojité, právě když je spojité v 0, a to nastává právě když je omezené. Podívejme se, jaká je situace v obecných topologických vektorových prostorech.

(a) **Věta.** *Nechť X, Y jsou topologické vektorové prostory a $L : X \to Y$ lineární zobrazení. Potom L je spojité, právě když je spojité v 0.*

Návod. Předpokládejme, že L je spojité v 0, $x \in X$ a U je okolí bodu Lx. Protože $-Lx + U$ je okolí 0, existuje okolí V nuly v X tak, že $LV \subset -Lx + U$. Tudíž $L(x + V) \subset U$, a jelikož $x + V$ je okolí bodu x, je L spojité v x. ♣

Připomeňme, že zobrazení $L : X \to Y$ se zove *omezené*, jestliže zobrazuje omezené množiny v X na množiny omezené v Y.

(b) **Tvrzení.** *Každé spojité zobrazení mezi topologickými vektorovými prostory je omezené.*

Návod. Nechť $L : X \to Y$ je spojité zobrazení a $D \subset X$ omezená množina. Chceme ukázat, že množina $L(D)$ je omezená. Volme tedy $z_n \in L(D)$. Existují $x_n \in D$ tak, že $Lx_n = z_n$. Protože D je omezená, máme $\frac{1}{n} x_n \to 0$ podle *14.15.a. Tudíž $\frac{1}{n} z_n = L(\frac{1}{n} x_n) \to 0$ a znovu využijeme *14.15.a. ♣

`Poznámka.` Při důkazu předchozího tvrzení jsme využili pouze sekvenciální spojitost zobrazení L.

`(c) Věta.` *Nechť (X, ϱ) je metrický lineární prostor, Y topologický vektorový prostor a $L : X \to Y$ lineární omezené zobrazení. Potom L je spojité.*

Návod. Nechť L není spojité v 0. Existuje tedy takové okolí nuly V v Y, že $U := L^{-1}V$ není okolí nuly v X. Můžeme tedy nalézt posloupnost $\{x_n\}$ v X tak, že $\varrho(x_n, 0) < \frac{1}{n}$ a $x_n \notin nU$. Potom $x_n \to 0$, a tedy podle *14.15.f je posloupnost $\{x_n\}$ omezená v X. Protože však $\frac{1}{n}Lx_n \notin V$ pro žádné n, není $\{Lx_n\}$ omezená. ♣

`(d) Příklad.` Buď X nekonečně dimenzionální Banachův prostor. Protože slabá topologie w na X je striktně menší nežli normová topologie X, není identické zobrazení $(X, w) \to (X, \|.\|)$ spojité. Ježto však podle Mackeyho věty 17.13 omezené množiny v (X, w) a $(X, \|.\|)$ jsou stejné, je toto zobrazení omezené.

***14.10. Bornologické prostory**. Lokálně konvexní prostor X, který má tu vlastnost, že omezená lineární zobrazení z X do libovolného lokálně konvexního prostoru jsou spojitá, se nazývá *bornologický*.

Tyto prostory se dají charakterizovat mnoha způsoby, uveďme některé. Nejdříve však definice.

`(a) Silně pohlcující množiny.` Podmnožina M lokálně konvexního prostoru X se nazve *silně pohlcující* (anglicky „bornivorous"), jestliže pro každou omezenou množinu $D \subset X$ existuje $\lambda > 0$ tak, že $D \subset \lambda M$.

Kupříkladu každé okolí nuly je silně pohlcující. Silně pohlcující množina je samozřejmě pohlcující.

`(b) Věta.` *Pro lokálně konvexní prostor (X, τ) jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) *X je bornologický,*
(ii) *každá silně pohlcující absolutně konvexní podmnožina X je okolím nuly,*
(iii) *libovolná omezená pseudonorma na X je spojitá,*
(iv) *topologie τ je Mackeyho topologie $\tau(X, X^*)$ a každá omezená lineární forma na X je spojitá.*

Chceme-li najít příklad prostoru, který není bornologický, stačí se podívat na *14.9.d. Existují barelované prostory, které nejsou bornologické. To vyplyne z následujícího tvrzení (c) a příkladu v 14.5.

`(c) Tvrzení.` *Každý metrizovatelný lokálně konvexní prostor je bornologický.*

Návod. Nechť $\{U_n\}$ je klesající posloupnost prvků báze okolí 0. Je-li M silně pohlcující absolutně konvexní množina, která není okolím 0, existují pro každé n prvky $x_n \in U_n$ tak, že $x_n \notin n\,M$. Potom $\{x_n\}$ je omezená množina a muselo by existovat $\lambda > 0$ tak, že $\{x_n\} \subset \lambda M$. To je ale zjevně nemožné. (Podívejte se též na větu *14.9.c.) ♣

`(d) Tvrzení.` *Nechť X, Y jsou lokálně konvexní prostory, X bornologický a $f : X \to Y$ lineární zobrazení. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) *f je spojité,*
(ii) *f je omezené,*
(iii) *f je sekvenciálně spojité.*

Zobrazení f je *sekvenciálně spojité*, jestliže $f(x_n) \to 0$, kdykoliv $x_n \to 0$.

Důkaz. Stačí se podívat na tvrzení *14.9.b, následnou poznámku a definici bornologického prostoru. ■

`(e) Další vlastnosti bornologických prostorů.` (e1) Je-li X Hausdorffův bornologický prostor, je duál X^* (opatřený silnou topologií $\beta(X^*, X)$) úplný.

(e2) Nechť (X, τ) je lokálně konvexní prostor. Kolekce všech absolutně konvexních silně pohlcujících podmnožin X tvoří bázi jisté lokálně konvexní topologie na X. Označme ji τ^b a nazývejme *bornologickou modifikací* původní topologie τ. I následující tvrzení je zajímavé: *Prostor (X, τ^b) je bornologický a topologie τ^b je nejsilnější lokálně konvexní topologií na X dávající stejné omezené množiny jako (X, τ). Prostor (X, τ) je bornologický, právě když $\tau = \tau^b$.*

***14.11. Spojitost lineárních operátorů ve slabých topologiích**. Ve cvičení 3.14 jsme konstatovali, že spojitá lineární zobrazení v Banachových prostorech převádějí slabě konvergentní posloupnosti na slabě konvergentní. Podívejme se nyní na věty, které platí obecně.

`(a) Věta.` *Nechť X, Y jsou (Hausdorffovy) lokálně konvexní prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Potom T je spojité zobrazení, uvažujeme-li na X a Y slabé topologie.*

Důkaz. Nechť $x_\gamma \xrightarrow{w} 0$ v X a $\psi \in Y^*$. Potom $\psi \circ T \in X^*$, a tudíž $\psi(Tx_\gamma) \to 0$. Což není nic jiného než $Tx_\gamma \xrightarrow{w} 0$ v Y. ■

`(b) Příklad.` Opačná implikace neplatí. Uvažujme nějaký nekonečně dimenzionální Banachův prostor X. Podle 15.6 či *16.1.b víme, že jeho normová topologie nesplývá se slabou w-topologií. Identické zobrazení z (X, w) na (X, w) je spojité, zatímco není spojité jako zobrazení z (X, w) na $(X, \|.\|)$.

Nicméně platí alespoň následující tvrzení.

`(c) Věta.` *Nechť X, Y jsou (Hausdorffovy) lokálně konvexní prostory a $T : X \to Y$ lineární zobrazení spojité ve slabých topologiích na X a Y. Potom T je omezené.*

Důkaz. Protože $T \in \mathcal{L}\big((X,w),(Y,w)\big)$, zobrazuje podle *14.9.b w-omezené množiny v X na w-omezené množiny v Y. Ale podle Mackeyho věty 17.13 jsou omezené množiny v původní topologii X a jeho slabé topologii w stejné (a totéž platí i pro prostor Y). ■

`(d) Věta.` *Nechť X je metrický lineární prostor, Y (Hausdorffův) lokálně konvexní prostor a $T : X \to Y$ lineární zobrazení spojité vzhledem ke slabým topologiím na X a Y. Potom $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.*

Důkaz. Stačí použít předchozí větu (c) a *14.9.c. ■

***14.12. $\mathfrak{S}$-topologie**. Existuje i další způsob jak zadávat lokálně konvexní topologie. Myšlenka je následující — $\mathcal{G}$ nechť je vektorový prostor reálných funkcí na dané množině Z a $\mathfrak{S}$ soustava podmnožin množiny Z. Cílem je zadat na $\mathcal{G}$ takovou topologii, aby posloupnost funkcí $\{f_n\}$ v ní konvergovala, právě když bude konvergovat stejnoměrně na každé množině z $\mathfrak{S}$. Budeme předpokládat, že jsou splněny dvě podmínky:

(a) soustava $\mathfrak{S}$ je *nahoru usměrněná*: ke každé dvojici $A, B \in \mathfrak{S}$ existuje $C \in \mathfrak{S}$ tak, že $A \cup B \subset C$,

(b) množiny z $\mathfrak{S}$ jsou *$\mathcal{G}$-omezené*: je-li $S \in \mathfrak{S}$ a $f \in \mathcal{G}$, je množina $f(S)$ omezená.

Zaveďme nyní označení. Pro $S \subset Z$ a $\varepsilon > 0$, označme

$$W_{S,\varepsilon} := \big\{f \in \mathcal{G} : f(S) \subset (-\varepsilon, \varepsilon)\big\} \quad \text{a} \quad \mathcal{W} := \big\{W_{S,\varepsilon} : S \in \mathfrak{S}, \varepsilon > 0\big\}.$$

Základem je následující jednoduché lemma.

`(a) Lemma.` *$\mathcal{W}$ tvoří bázi nějakého filtru v $\mathcal{G}$ a splňuje von Neumannovy axiomy. Přesněji, množiny z $\mathcal{W}$ jsou vyvážené, pohlcující a konvexní a $W_{S,\varepsilon} + W_{S,\varepsilon} \subset W_{S,2\varepsilon}$.*

Důkaz. Vše je velice snadné. Protože $f = 0$ patří do $\mathcal{G}$, je $\mathcal{W}$ neprázdný systém a $\emptyset \notin \mathcal{W}$. Ježto

$$W_{C,\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \subset W_{A,\varepsilon_1} \cap W_{B,\varepsilon_2} \quad \text{pro} \quad A \cup B \subset C\,, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0\,,$$

tvoří $\mathcal{W}$ bázi filtru. Pro důkaz ostatních tvrzení si snad jen uvědomme, že $\lambda W_{S,\varepsilon} = W_{S,\lambda\varepsilon}$. ■

`(b) Věta.` *Nechť Z,$\mathfrak{S}$, $\mathcal{G}$ a $\mathcal{W}$ jsou jako výše. Potom na $\mathcal{G}$ existuje právě jedna lineární topologie $\tau_{\mathfrak{S}}$ pro niž $\mathcal{W}$ je bází filtru $\tau_{\mathfrak{S}}(0)$. Jestliže $\bigcup_{S\in\mathfrak{S}} S = Z$, je topologie $\tau_{\mathfrak{S}}$ Hausdorffova.*

Přitom $f_n \xrightarrow{\tau_{\mathfrak{S}}} f$, právě když $f_n \rightrightarrows f$ na každé množině $S \in \mathfrak{S}$.

Důkaz. Tvrzení ihned vyplývá z předešlého lemmatu a 13.8. Je-li $f \in \bigcap_{\varepsilon>0} W_{S,\varepsilon}$, je $f(S) = 0$, a tudíž za předpokladu $\bigcup_{S\in\mathfrak{S}} S = Z$, je $f = 0$. Podívejme se nyní, kdy posloupnost $\{f_n\}$ konverguje v topologii $\tau_{\mathfrak{S}}$ k f ($f_n, f \in \mathcal{G}$). To bude právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ a každé množině $S \in \mathfrak{S}$ existuje index n_0 tak, že $f - f_n \in W_{S,\varepsilon}$ pro každé $n \geq n_0$. Rozepíšeme-li definici $W_{S,\varepsilon}$, vidíme, že $f_n \xrightarrow{\tau_{\mathfrak{S}}} f$, právě když $f_n \rightrightarrows f$ na každé množině $S \in \mathfrak{S}$. ■

`(c) Topologie stejnoměrné konvergence.` Lokálně konvexní topologii $\tau_{\mathfrak{S}}$ se také říká *topologie stejnoměrné konvergence* na množinách ze $\mathfrak{S}$.

(d) Poznámky. (d1) Uvědomme si, že různé systémy $\mathfrak{S}$ mohou určovat stejnou topologii.

(d2) Důležitý příklad dostaneme, jestliže za Z zvolíme lokálně konvexní prostor X, $\mathcal{G}$ bude jeho duál X^* a za $\mathfrak{S}$ vezmeme nějaký nahoru usměrněný systém omezených podmnožin v X (podle Mackeyho věty 17.13 víme, že omezené a $\sigma(X, X^*)$-omezené množiny splývají). Bude-li systém $\mathfrak{S}$ mít navíc tu vlastnost, že s každou množinou S obsahuje i množinu λS pro $\lambda \neq 0$, bude filtr okolí nuly v topologii $\tau_{\mathfrak{S}}$ tvořen množinami

$$\{f \in X^* : |f(x)| \leq 1 \text{ pro } x \in S\}\,, \quad S \in \mathfrak{S},$$

kteréžto množiny nejsou nic jiného než poláry k množinám ze $\mathfrak{S}$.

Jako speciální volbu položme:

(α) $\mathfrak{S} = \{S \subset X : S \text{ je konečná}\}$,
(β) $\mathfrak{S} = \{S \subset X : S \text{ je absolutně konvexní a } \sigma(X, X^*)\text{-kompaktní}\}$,
(γ) $\mathfrak{S} = \{S \subset X : S \text{ je } \sigma(X, X^*)\text{-omezená}\}$.

V prvním případě dostaneme na X^* slabou topologii $\sigma(X^*, X)$, v případě (β) Mackeyho topologii $\tau(X^*, X)$ a v posledním případě pak silnou topologii $\beta(X^*, X)$.

Roli X a X^* můžeme také zaměnit (neboli uvažovat X^* a za $\mathcal{G}$ volit εX), respektive lze uvažovat obecný případ, kdy za Z volíme vektorový prostor X a za $\mathcal{G}$ přípustný vektorový podprostor $X^{\#}$.

Naskýtá se otázka, zda každou lokálně konvexní topologii lze vytvořit jako nějakou $\tau_{\mathfrak{S}}$-topologii stejnoměrné konvergence na množinách ze $\mathfrak{S}$. Odpověď dává následující věta.

(e) Věta. *Nechť (X, τ) je (Hausdorffův) lokálně konvexní prostor. Potom na X^* existuje takový systém $\mathfrak{S}$, že $\tau = \tau_{\mathfrak{S}}$.*

Návod. Volme $\mathfrak{S} = \{S^\circ : S \in \tau(0) \text{ je barel}\}$. Je-li $S \in \tau(0)$ barel, je jeho polára S° množina $\sigma(X^*, X)$-omezená (viz 15.21.a), a protože každá konvexní uzavřená množina je i $\sigma(X, X^*)$-uzavřená podle 15.20.b, je podle věty o bipoláře 15.17 $S = S^{\circ\circ}$. Vidíme, že náš systém $\mathfrak{S}$ splňuje všechny nutné předpoklady a báze $\tau_{\mathfrak{S}}(0)$ je tvořena kolekcí $\{S^{\circ\circ} : S \in \tau(0) \text{ je barel}\} = \{S : S \in \tau(0) \text{ je barel}\}$, což je samozřejmě také báze filtru $\tau(0)$. ♣

***14.13. Kvazinormované lineární prostory**. Nechť W je vektorový prostor a q reálná nezáporná funkce na W splňující následující požadavky:

(a) $\mathsf{q}(0) = 0$,
(b) $\mathsf{q}(-x) = \mathsf{q}(x)$ pro každé $x \in W$,
(c) $\mathsf{q}(x + y) \leq \mathsf{q}(x) + \mathsf{q}(y)$ pro každou dvojici $x, y \in W$.

Potom funkce $\varrho(x, y) := \mathsf{q}(x - y)$ je translačně invariantní pseudometrika na W. Jestliže navíc

(d) zobrazení $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ je spojité,

v pseudometrice ϱ, řekneme, že q je *kvazinorma* na W.

Kvazinormovaným lineárním prostorem rozumíme každý vektorový prostor opatřený kvazinormou. Ta na něm určuje výše popsaným způsobem pseudometriku.

Pokuste se dokazovat následující tvrzení, nejsou nikterak obtížná.

(a) Tvrzení. *Každá pseudonorma je kvazinorma. Ne každá kvazinorma má všechny vlastnosti pseudonormy.*

Návod. Stačí se podívat na příklad prostoru s z 13.13.a. ♣

(b) Tvrzení. *Je-li $\{p_n\}$ posloupnost kvazinorem (a speciálně pseudonorem), je funkce*

$$\mathsf{q}(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \, \frac{p_n(x)}{1 + p_n(x)}$$

kvazinorma. Přitom $\mathsf{q}(x_k) \to 0$, právě když $p_n(x_k) \to 0$ pro každé n.

Návod. K důkazu poslednímu tvrzení použijte odhad $\mathsf{q}(x) \geq \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x)}{1+p_n(x)}$ platícího pro každé n. Jestliže $p_n(x_k) \to 0$ pro každé n a $\varepsilon > 0$ je zadáno, najděte m, pro něž $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Poté n_1 tak, aby $p_n(x_k) < \frac{\varepsilon}{m}$ pro každé $k \geq n_1$ a $n = 1, \ldots, m$. Potom $\mathsf{q}(x_k) \leq 2\varepsilon$ pro $k \geq n_1$. ♣

(c) Tvrzení. *Kvazinorma na kvazinormovaném lineárním prostoru je vždy spojitá funkce.*

(d) Připomeňme, že topologie každého lokálně konvexního prostoru je generována systémem nějakých pseudonorem. J. Burzyk a P. Mikusiński [1980] ukázali, že topologie libovolného topologického vektorového prostoru je generována systémem kvazinorem.

(e) Kvazinormovaný lineární prostor je topologický vektorový prostor, který však nemusí být lokálně konvexní. Jak vyplývá z následující věty, pojmy pseudometrického lineárního prostoru a kvazinormovaného lineárního prostoru splývají.

***14.14. Kakutaniho věta.** *Nechť (X,τ) je topologický vektorový prostor. Následující podmínky jsou ekvivaletní:*

(i) *X je pseudometrizovatený,*
(ii) *topologie τ vyhovuje 1. axiomu spočetnosti,*
(iii) *topologie τ je vytvořena nějakou kvazinormou,*
(iv) *topologie τ je generována translačně invariantní pseudometrikou.*

Návod. Zřejmě (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (ii), takže zbývá dokázat implikaci (ii) $\Rightarrow$ (iii). Důkaz je proveden v C. Swartz [*1992]. Vezmeme-li za základ Burzyk-Mikusińského tvrzení z *14.13.d, lze postupovat takto: Podle nich je topologie τ generována systémem nějakých kvazinorem. Protože předpokládáme, že τ splňuje 1. axiom spočetnosti, stačí tedy vzít jen spočetný systém kvazinorem tak, aby generoval τ. A využitím *14.13.b vystačíme jen s jednou kvazinormou. (Porovnejte též s 14.22.) ♣

***14.15. Omezené množiny**. Uveďme některé vlastnosti a charakteristiky omezených množin v topologických vektorových prostorech. V rámci dobrého pochopení proveďte důkazy jako užitečné cvičení.

(a) Věta. *Nechť D je podmnožina topologického vektorového prostoru X. Následující výroky, z nichž každý charakterizuje pojem omezené množiny, jsou ekvivalentní:*

(i) *ke každému okolí nuly V existuje takové $\lambda > 0$, že $D \subset \lambda V$,*
(ii) *jestliže $\{x_n\} \subset D$ a $\lambda_n \to 0$, potom $\lambda_n x_n \to 0$,*
(iii) *pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset D$ je $\frac{1}{n} x_n \to 0$,*
(iv) *ke každému okolí nuly U existuje takové $\varepsilon > 0$, že $tD \subset U$ pro každé $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.*

Návod. Můžete dokazovat v pořadí (i) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i). ♣

(b) Větička. *Množina D je omezená, právě když každá její spočetná podmnožina je omezená.*

Návod. Využijte (ii) či (iii) předchozí charakteristiky. ♣

(c) Větička. *Podmnožina omezené množiny je omezená a sjednocení konečného počtu omezených množin je množina omezená. Také konečný součet omezených množin je množina omezená.*

(d) Tvrzení. *Kompaktní i prekompaktní podmnožiny topologického vektorového prostoru jsou omezené.*

Návod. Nechť K je kompaktní množina a V otevřené (pohlcující) vyvážené okolí 0. Potom $\bigcup_n nV \supset K$, existuje tedy n tak, že $K \subset nV$. Je-li B prekompaktní a U okolí nuly, najděme nejdříve vyvážené okolí V nuly tak, aby $V + V \subset U$ a potom podle definice v *13.4 konečnou množinu F tak, aby $B \subset F + V$. Existuje $\lambda > 1$ tak, že $F \subset \lambda V$ (konečné množiny jsou omezené). Potom $B \subset F + V \subset \lambda V + V = \lambda(V + \frac{1}{\lambda}V) \subset \lambda(V + V) \subset \lambda U$. (Můžete porovnat s tvrzením (b) v *13.4.) ♣

Poznámka. Ukázali jsme, že dokonce spočetně kompaktní množiny jsou omezené.

(e) Tvrzení. *Uzavřený vyvážený obal omezené množiny v topologickém vektorovém prostoru je opět omezená množina.*

Uzavřený absolutně konvexní obal omezené množiny v lokálně konvexním prostoru je omezená množina.

Návod. Nechť D je omezená množina v lokálně konvexním prostoru, A její uzavřený absolutně konvexní obal a U okolí 0. Najděme barel B, který je též okolím 0 a podmnožinou U. Existuje $\lambda > 0$ tak, že $D \subset \lambda B$. Potom $A \subset \lambda B \subset \lambda U$.

Pokud jde o tvrzení o omezenosti uzavřeného vyváženého obalu omezené množiny v obecných topologických vektorových prostorech, potrapte se sami (samozřejmě využijete toho, že v těchto prostorech existuje báze z uzavřených vyvážených množin). ♣

Poznámky. (a) *Vyvážený obal* podmnožiny B vektorového prostoru je podle definice průnik všech vyvážených množin obsahujících B. A *uzavřený vyvážený obal* podmnožiny B topologického vektorového prostoru je průnik všech uzavřených vyvážených množin obsahujících B. Vyjde to na stejno jako uzávěr vyváženého obalu B?

(b) Z tvrzení okamžitě plyne, že i uzávěr, konvexní obal, uzavřený konvexní obal či absolutně konvexní obal omezené množiny v lokálně konvexním prostoru je množina omezená. Obdobně uzávěr či vyvážený obal omezené množiny v topologickém vektorovém prostoru je omezený.

(c) Konvexní obal omezené množiny nemusí být obecně omezená množina. Zkuste se zamyslet nad příkladem v prostoru $L^p([0,1])$, pokud $p \in (0,1)$. Podívejte se též na *13.5.b.

(f) Tvrzení. *Každá konvergentní posloupnost tvoří omezenou množinu.*

Návod. Použijte třeba opět (iii) předchozí věty v (a). ♣

***14.16. Prostor $\mathcal{H}(G)$.** Prostor $\mathcal{H}(G)$ z 14.20.b je vektorovým prostorem všech holomorfních funkcí na otevřené množině G komplexní roviny $\mathbf{C}$ s lokálně konvexní topologií stejnoměrné konvergence na kompaktních podmnožinách G. Je podprostorem Fréchetova prostoru $\mathcal{C}(G)$, uvažujeme-li tento opatřený kompaktně-otevřenou topologií z 14.20.a. Jeho základní vlastnosti shrnuje následující věta. Její důkaz a ještě mnoho dalších zajímavostí o prostoru $\mathcal{H}(G)$ lze nalézt v monografii D.H. Luecking and L.A. Rubel [*1984].

Věta. *Prostor $\mathcal{H}(G)$ má následující vlastnosti:*

(a) *Prostor $\mathcal{H}(G)$ je lokálně konvexní,úplný a metrizovatelný.*
(b) *Zobrazení $f \to f'$ z $\mathcal{H}(G)$ do $\mathcal{H}(G)$ je spojité.*
(c) *Množina $A \subset \mathcal{H}(G)$ je kompaktní, právě když A je omezená a uzavřená.*
(d) *Identita na $\mathcal{H}(G)$ je kompaktní operátor. Obecněji, každý spojitý operátor s hodnotami v $\mathcal{H}(G)$ je kompaktní.*

Návod. Pokud jde o (a), stačí ukázat, že $\mathcal{H}(G)$ je uzavřený podprostor $\mathcal{C}(G)$. Zadejme tedy posloupnost $\{f_n\}$ konvergující v $\mathcal{H}(G)$ k funkci f. Volme dále $z \in G$ a jeho kompaktní okolí $z \in \operatorname{Int} V \subset \overline{V} \subset G$. Pro $x \in \operatorname{Int} V$ vyjádřeme $f_n(x)$ pomocí Cauchyova integrálu a proveďme limitní přechod. Dostaneme, že f je holomorfní v $\operatorname{Int} V$.

Pokud jde o tvrzení v (c), jedná se vlastně o parafrázovanou *Montelovu větu* o normální třídě holomorfních funkcí.

Tedy vlastnosti vlastnosti (a), (b) i (c) vlastně plynou z vět o holomorfních funkcích a z toho, že konvergence v prostoru $\mathcal{H}(G)$ je lokálně stejnoměrnou konvergencí. Pokud jde o (d), tvrzení je bezprostřední důsledek (c). ♣

Poznámka. Snad že bychom přeci jen řekli pár slov o klasické Montelově větě. Množina $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}(G)$ se nazve *normální třídou*, jestliže z každé její spočetné podmnožiny lze vybrat posloupnost konvergující v prostoru $\mathcal{H}(G)$ (ne nutně k prvku z $\mathcal{H}$). *Montelova věta* pak říká, že $\mathcal{H}$ je normální třída, právě když pro každou kompaktní množinu $K \subset G$ je $\sup\{|h(x)| : h \in \mathcal{H}, x \in K\} < \infty$. Vidíme vlastně, že normální třídy jsou identické s relativně kompaktními podmnožinami $\mathcal{H}(G)$ a Montelova věta v modernější terminologii tvrdí, že množina $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}(G)$ je relativně kompaktní, právě když je omezená.

***14.17. Striktní topologie na prostoru $\mathcal{C}^b(P)$.** Uvažujme Banachův prostor $\mathcal{C}_0(P)$ všech spojitých funkcí f na lokálně kompaktním prostoru P majících tu vlastnost, že množina $\{x \in P : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ je kompaktní pro každé $\varepsilon > 0$. Není těžké ověřit, že $\mathcal{C}_0(P)$ tvoří vektorový prostor a že každá funkce z $\mathcal{C}_0(P)$ je omezená. Protože prostor $\mathcal{C}^b(P)$ všech spojitých omezených funkcí na P uvažovaný se sup-normou je úplný a $\mathcal{C}_0(P)$ je jeho uzavřená podmnožina, tvoří $\mathcal{C}_0(P)$ Banachův prostor.

Je-li P_∞ alexandrovská jednobodová kompaktifikace prostoru P (Appendix B.16), lze říci, že prostor $\mathcal{C}_0(P)$ je tvořen všemi restrikcemi na P spojitých funkcí z $\mathcal{C}(P_\infty)$ majících hodnotu 0 v ideálním bodě ∞.

Volíme-li pevně $\varphi \in \mathcal{C}_0(P)$ a položíme-li $p_\varphi(f) := \|\varphi f\|_{\mathcal{C}^b(P)} = \sup\{|\varphi(t)\, f(t)| : t \in P\}$, je p_φ spojitá pseudonorma na Banachově prostoru $\mathcal{C}^b(P)$. Nechť β je lokálně konvexní topologie na $\mathcal{C}^b(P)$ generovaná kolekcí $\{p_\varphi : \varphi \in \mathcal{C}_0(P)\}$. Tato bývá často nazývána *striktní topologií*.

Na prostoru $\mathcal{C}^b(P)$ máme tedy (zatím) tři topologie: topologii τ_n danou sup-normou, striktní β a kompaktně-otevřenou τ_c. Vždy je $\tau_c \subset \beta \subset \tau_n$. Základní poznatky o striktní topolgii shrňme do následující věty.

`Vlastnosti striktní topologie.` *Nechť P je lokálně kompaktní prostor a β striktní topologie na prostoru $\mathcal{C}^b(P)$. Potom*

(a) *lokálně konvexní prostor $(\mathcal{C}^b(P), \beta)$ je úplný,*
(b) *množina $M \subset \mathcal{C}^b(P)$ je β-omezená, právě když je omezená v sup-normě prostoru $\mathcal{C}^b(P)$,*
(c) *prostor $(\mathcal{C}^b(P), \beta)$ je metrizovatelný, právě když P je kompaktní, a to je v právě v případě kdy β splývá s normovou topologií na $\mathcal{C}^b(P)$,*
(d) *duálem k prostoru $(\mathcal{C}^b(P), \beta)$ je Banachův prostor $\mathcal{M}(P)$ všech Radonových měr na P, přesněji, je-li $L \in (\mathcal{C}^b(P), \beta)^*$, existuje právě jedna Radonova míra $\mu \in \mathcal{M}(P)$ tak, že $Lf = \int_P f\, d\mu$ pro každou funkci $f \in \mathcal{C}^b(P)$.*

Návod. Důkazy těchto tvrzení, jakožto i zavedení a vlastnosti celé plejády dalších „striktních“ topologií, lze nalézt v přehledném článku R.F. Wheeler [1983]. ♣

Poznámka. Je-li P kompakt, je $\tau_c = \beta = \tau_n$. Pro nekompaktní prostory P topologie β a τ_n jsou různé. Aniž vysvětlíme, co je lokálně kompaktní (nekompaktní) prostor $[0, \omega_1)$ ordinálních čísel, poznamenejme, že na něm je $\beta = \tau_c$.

***14.18. Vlastnosti prostoru $\mathcal{D}(\Omega)$.** Uvažujme prostory $\mathcal{D}(\Omega)$ a $\mathcal{D}_K(\Omega)$ z příkladu 14.20.e opatřené příslušnými lokálně konvexními topologiemi. Shrňme některé vlastnosti těchto prostorů do následujících tvrzení. Druhé tvrzení nebudeme dokazovat, většinou se leccos dokazuje v obecnějším kontextu. Prostor $\mathcal{D}(\Omega)$ je (striktní) *induktivní limitou* prostorů $\mathcal{D}_K(\Omega)$ (uvažujeme-li identická zobrazení $\mathrm{id}_K : \mathcal{D}_K(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$, je topologie $\mathcal{D}(\Omega)$ nejsilnější lokálně konvexní topologií na $\mathcal{D}(\Omega)$, pro niž jsou všechna vnoření id_K spojitá).

`(a) Tvrzení.` *Prostor $\mathcal{D}(\Omega)$ je nemetrizovatelný prostor 1. kategorie.*

Návod. Protože $\mathcal{D}_K(\Omega) = \bigcap_{x \in \Omega \setminus K} \ker \varepsilon_x$, kde forma $\varepsilon_x \in (\mathcal{D}(\Omega))^*$ je definována přirozeným způsobem $\varepsilon_x : f \mapsto f(x)$, je $\mathcal{D}_K(\Omega)$ uzavřený podprostor $\mathcal{D}(\Omega)$. Tyto podprostory jsou také řídké v $\mathcal{D}(\Omega)$ a $\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup\{\mathcal{D}_{K_n}(\Omega) : \{K_n\}$ je vyčerpání $\Omega\}$.

V prostoru $\mathcal{D}(\Omega)$ každá cauchyovská posloupnost konverguje (je tedy prostor $\mathcal{D}(\Omega)$ sekvenciálně úplný ve smyslu definice v *13.3). Nemůže tedy být metrizovatelný, to by bylo ve sporu s Baireovou větou B.3. ♣

`(b) Tvrzení.` *Lokálně konvexní prostor $\mathcal{D}(\Omega)$ je barelovaný, kvazi-úplný, bornologický a reflexivní. Každá jeho omezená uzavřená podmnožina je kompaktní.*

`(c)` **Poznámka.** Barelované Hausdorffovy lokálně konvexní prostory, v nichž každá omezená uzavřená množina je kompaktní, se nazývají *Montelovy*. To samozřejmě souvisí s klasickou Montelovou větou pro holomorfní funkce. Podívejte se na odstaveček *14.16.

***14.19. Prostor distribucí $\mathcal{D}^*(\Omega)$.** Nechť $\mathcal{D}^*(\Omega)$ je prostor všech distribucí na otevřené množině $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, tedy duál k prostoru $\mathcal{D}(\Omega)$. Na $\mathcal{D}^*(\Omega)$ uvažujme vždy silnou topologii $\beta := \beta(\mathcal{D}^*(\Omega), \mathcal{D}(\Omega))$.

Pro $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ položme $T_f : \varphi \mapsto \int_\Omega f\varphi$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Potom $T_f \in \mathcal{D}^*(\Omega)$. Označme ještě $\Psi : f \mapsto T_f$ zobrazení $\mathcal{D}(\Omega)$ do $\mathcal{D}^*(\Omega)$. Potom Ψ je lineární (žádný problém s ověřením), prosté (to je již těžší) a spojité zobrazení. Tímto způsobem můžeme tedy vnořit $\mathcal{D}(\Omega)$ do $\mathcal{D}^*(\Omega)$ (ostatně, do $\mathcal{D}^*(\Omega)$ můžeme takto vnořit i $\mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$) a budeme tedy chápat $\mathcal{D}(\Omega)$ jako podprostor $\mathcal{D}^*(\Omega)$.

`(a) Tvrzení.` *Množina $\mathcal{D}(\Omega)$ je hustá v prostoru $(\mathcal{D}^*(\Omega), \beta)$.*

Návod. Nechť $L \in (\mathcal{D}^*(\Omega), \beta)^*$ je takový funkcionál, že $L = 0$ na $\mathcal{D}(\Omega)$. Protože $\mathcal{D}(\Omega)$ je podle předchozího reflexivní prostor, existuje $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ tak, že $L(\varphi) = \varphi(f) = \int_\Omega f\varphi$ pro každé $\varphi \in \mathcal{D}^*(\Omega)$. Speciálně tedy (nezapomeňte, že f chápeme jako prvek $\mathcal{D}^*(\Omega)$) dostáváme, že $0 = L(f) = \int_\Omega f f = \int_\Omega f^2$. Odtud plyne, že $f = 0$ (skoro všude) a Hahn-Banachova věta ve tvaru důsledku 14.28 dá tvrzení. ♣

`(b) Věta.` *Nechť* $\{T_n\}$ *je posloupnost distribucí na* Ω *a nechť existuje* $\lim_n T_n f$ *pro každou testovací funkci* $f \in \mathcal{D}(\Omega)$*. Označíme-li* $T : f \mapsto \lim_n T_n f$*, je* T *opět distribuce na* Ω*.*

Návod. To je vlastně Banach-Steinhausova věta z *14.3.d. Musíme ovšem vědět, že prostor $\mathcal{D}(\Omega)$ je barelovaný. Což jest, jak jsme uvedli v *14.18.b. ♣

*15. Slabé topologie a poláry

***15.1. Alaoglu-Bourbakiho věta.** *Nechť* X *je vektorový prostor,* $M \subset\subset X^{\#}$*,* τ *přípustná topologie na* X *a* $S \subset M = (X,\tau)^*$ *stejně spojitá množina (*τ*-spojitých funkcí na* X*). Potom* S *je relativně kompaktní v topologii* $\sigma(M,X)$*.*

Návod. Podle větičky v *14.3.b existuje $V \in \tau(0)$ tak, že $S \subset V^\circ$. Dále stačí postupovat jako v důkazu Alaoglu-Bourbakiho věty v 15.19. ♣

***15.2. Kanonické vnoření topologického prostoru**. Nechť T je topologický prostor (Hausdorffův, samozřejmě) a $X := \mathcal{C}^b(T)$ Banachův prostor všech omezených spojitých funkcí na T opatřený sup-normou. Je-li $t \in T$, položme $\varphi_t : f \mapsto f(t)$ pro $f \in X$. Potom zřejmě φ_t je spojitý lineární funkcionál na X a $\|\varphi_t\| = 1$. Zobrazení $\kappa : t \mapsto \varphi_t$ je spojité zobrazení T do X^* uvažovaného se slabou w^*-topologií. Zajisté, jestliže totiž $t_\alpha \to t$ v T a f je libovolná spojitá funkce na T, potom $f(t_\alpha) \to f(t)$, což není nic jiného než $\varphi_{t_\alpha}(f) \to \varphi_t(f)$, čili $\kappa(t_\alpha) \xrightarrow{w^*} \kappa(t)$.

Protože $\kappa(T) \subset B_{X^*} := \{\varphi \in X^* : \|\varphi\| \le 1\}$, a jednotková koule B_{X^*} je podle důsledku Alaoglu-Bourbakiho věty 16.6 w^*-kompaktní, je $\kappa(T)$ podmnožinou w^*-kompaktní množiny, tedy zajisté $\kappa(T)$ je úplně regulární prostor ve w^*-topologii. Lze říci něco více o vlastnostech vnoření κ a množině $\kappa(T)$?

Je-li T dokonce kompakt, lze ztotožnit X^* s prostorem všech Radonových měr na T. Zobrazení κ je prosté (spojité funkce na T oddělují body T), $\kappa(T)$ je kompakt ve w^*-topologii (jakožto spojitý obraz kompaktu) a κ je homeomorfizmus.

Otázka, kdy κ je homeomorfní zobrazení v obecném případě, je zodpovězena v následující větě.

***15.3. Věta.** *Zobrazení* κ *je homeomorfním zobrazením prostoru* T *na* $(\kappa(T), w^*)$*, právě když* T *je úplně regulární prostor.*

Důkaz. Nechť T je úplně regulární topologický prostor. Protože omezené spojité funkce na T oddělují body, je zobrazení κ prosté. Potřebujeme ještě dokázat, že κ je otevřené zobrazení. Buď tedy $U \subset T$ otevřená množina a $z \in \kappa(U)$. Nechť $t \in U$ je takový bod, že $z = \kappa(t)$. Nalezněme funkci $f \in \mathcal{C}^b(T)$ tak aby $f(t) = 1$ a $f = 0$ na $T \setminus U$. Uvažujeme-li množinu $V := \{\varphi \in X^* : \varphi(f) > 0\}$, je V zajisté w^*-otevřená podmnožina X^* a $z \in V \cap \kappa(T) \subset \kappa(U)$. Tím jsme ukázali, že množina $\kappa(U)$ je otevřená v $\kappa(T)$.

Předpokládáme-li nyní, že κ je homeomorfizmem mezi T a $\kappa(T)$, musí být podle výše zmíněných úvah T úplně regulární prostor. ■

***15.4. Stone-Čechova kompaktifikace.** *Nechť* T *je úplně regulární topologický prostor. Potom existuje kompaktní topologický prostor* βT *a spojité vnoření* $\kappa : T \to \beta T$ *s vlastnostmi:*

(a) κT *je hustá podmnožina* βT*,*

(b) κ *je homeomorfizmus mezi* T *a* κT*,*

(c) *je-li* f *omezená spojitá funke na* T*, existuje* $\tilde f \in \mathcal{C}(\beta T)$ *tak, že* $f = \tilde f \circ \kappa$ *na* T*.*

Důkaz. Nechť κ je kanonické vnoření T do $\mathcal{C}^b(T)^*$ zkonstruované v *15.2. Tam a v následující větě jsme ukázali, že κ je homeomorfní zobrazení T na κT, přičemž κT je podmnožina w^*-kompaktní množiny $B_{\mathcal{C}^b(T)^*}$. Položíme-li $\beta T = \overline{\kappa T}^{w^*}$, je βT kompakt obsahující κT jakožto svoji hustou podmnožinu. Buď nyní $f \in \mathcal{C}^b(T)$ a $x \in \beta T$. Protože $\beta T \subset B_{\mathcal{C}^b(T)^*}$, lze definovat $\tilde f(x) = x(f)$. Potom $\tilde f$ je spojitá funkce na βT (nezapomeňte, že na βT uvažujeme w^*-topologii) a pro $t \in T$ platí

$$\tilde f\big(\kappa(t)\big) = \tilde f(\varphi_t) = \varphi_t(f) = f(t)\,. \qquad ■$$

***15.5. Poznámky.** (a) Vzhledem k homeomorfnímu vnoření T do βT se většinou rovnou předpokládá, že $T \subset \beta T$.

(b) Existují různé konstrukce Stone-Čechovy kompaktifikace. Ta je vpodstatě jednoznačně určená a někdy se též nazývá *Stone-Čechovým beta obalem*. Platí totiž následující věta.

Věta. *Nechť T je úplně regulární topologický prostor a Z kompakt. Nechť existuje homeomorfní zobrazení κ prostoru T na hustou podmnožinu Z s vlastností, že pro libovolnou $f \in \mathcal{C}^b(T)$ existuje funkce $\tilde{f} \in \mathcal{C}^b(Z)$ tak, že $f = \tilde{f} \circ \kappa$ na T. Potom Z a prostor βT z předchozí věty jsou homeomorfní.*

(c) Je-li T úplně regulární topologický prostor, potom jeho *kompaktifikací* nazveme každý kompaktní prostor, který obsahuje T jako hustou podmnožinu. Do třídy $\mathcal{K}(T)$ všech kompaktifikací lze zavést uspořádání. Řekneme, že $K_1 \prec K_2$, kde $K_1, K_2 \in \mathcal{K}(T)$, jestliže existuje spojité zobrazení K_1 do K_2, které je na T identita. Potom mezi všemi kompaktifikacemi existuje nejmenší, tou je alexandrovská jednobodová kompaktifikace z B.16, a největší. Tu tvoří právě Stone-Čechův beta obal.

*16. Slabé topologie v Banachových prostorech

***16.1. Metrizovatelnost slabých topologií.** Slabé topologie v nekonečně rozměrných prostorech nejsou skoro nikdy metrizovatelné. Svědčí o tom následující tvrzení.

(a) Věta. *Je-li X vektorový prostor a M podprostor $X^\#$, potom slabá topologie $\sigma(X,M)$ je pseudometrizovatelná, právě když algebraická dimenze M je spočetná.*

Důkaz. Je-li $\sigma(X,M)$ pseudometrizovatelná, má filtr okolí nuly spočetnou bázi. Můžeme předpokládat, že tato báze je tvořena množinami

$$B_n := \left\{x \in X : |\varphi_i^n| < 1 \text{ pro } i = 1, \dots, k_n\right\}, \quad \varphi_i^n \in M\,.$$

Volme nyní $\varphi \in M$. Protože $D := \{x \in X : |\varphi(x)| < 1\}$ je $\sigma(X,M)$-okolím 0, existuje n tak, že $B_n \subset D$. Lehko se nyní ukáže, že $\ker \varphi_1^n \cap \dots \cap \ker \varphi_{k_n}^n \subset \ker \varphi$, odkud plyne, že φ je lineární kombinací $\varphi_1^n, \dots, \varphi_{k_n}^n$ (srovnejte s důkazem věty 15.13). Tudíž algebraická dimenze M musí být spočetná.

Jestliže naopak $\{\varphi_n\}$ tvoří bázi prostoru M, je

$$\varrho(x,y) := \sum_n \frac{1}{2^n} \min\bigl(1, |\varphi_n(x) - \varphi_n(y)|\bigr)\,, \quad x, y \in X\,,$$

pseudometrikou na X. Protože zobecněná posloupnost $\{x_\gamma\}$ konverguje v topologii $\sigma(X,M)$ k prvku x, právě když $\varphi_n(x_\gamma) \to \varphi_n(x)$ pro každé n, musí pseudometrika ϱ generovat slabou topologii $\sigma(X,M)$. ■

(b) Důsledek. *Je-li X nekonečně dimenzionální Banachův prostor, potom (X,w) ani (X^*,w^*) nejsou metrizovatelné. Pokud X je normovaný lineární prostor spočetné algebraické dimenze, je (X^*,w^*) metrizovatelný.*

Návod. Použijte předchozí větu a *1.12.a. ♣

(c) Příklad . Nechť l^1_{00} je podprostor l^1 tvořený všemi posloupnostmi, které jsou od určitého indexu (závislého na dané posloupnosti) nulové. Protože l^1_{00} je hustý podprostor l^1, jsou duály $(l^1_{00})^*$ a $(l^1)^*$ stejné (a izometricky-izomorfní l^∞). Zatímco w^*-topologie $\sigma(l^\infty, l^1)$ je na l^∞ nemetrizovatelná, je prostor l^∞ s topologií $\sigma(l^\infty, l^1_{00})$ metrizovatelný.

***16.2. Metrizovatelnost jednotkových koulí.** Jak jsme právě odvodili v *16.1, slabé topologie v nekonečně dimenzionálních Banachových prostorech nejsou nikdy metrizovatelné. Naproti tomu jednotkové koule či některé další podmnožiny mohou v některých případech být metrizovatelné ve slabých topologiích. Odvodíme následující tvrzení.

(a) Věta. *Nechť X je normovaný lineární prostor a B_{X^*} uzavřená jednotková koule v X^*. Potom B_{X^*} je metrizovatelná ve w^*-topologii, právě když prostor X je separabilní.*

Důkaz. Nechť $\{x_n\}$ je hustá spočetná podmnožina $S_X := \{x \in X : \|x\| = 1\}$. Pro $\varphi, \psi \in B_{X^*}$ položme

$$\varrho(\varphi, \psi) = \sum_n \frac{1}{2^n} |\varphi(x_n) - \psi(x_n)| .$$

Standardním způsobem se ověří, že ϱ je metrika na B_{X^*}. Označme τ_ϱ topologii na X indukovanou metrikou ϱ. Protože τ_ϱ je Hausdorffova a B_{X^*} je kompaktní ve w^*-topologii (Alaogluova věta), stačí s přihlédnutím k větě B.7 ukázat, že $\tau_\varrho \subset w^*$. Nechť tedy $U := \{\varphi \in B_{X^*} : \varrho(\varphi, 0) < \varepsilon\}$ je τ_ϱ-okolí 0. Najděme n tak velké, že $\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \frac{\varepsilon}{4}$. Je-li potom $f \in B_{X^*}$ ve w^*-okolí nuly $\{\varphi : |\varphi(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2n}$ pro $i = 1, \dots, n\}$, zjistíme snadno, že $\varrho(f, 0) < \varepsilon$, tedy že $f \in U$.

Předpokládejme naopak, že w^*-topologie na B_{X^*} je metrizovatelná. Musí tedy (jako u každé metrizovatelné topologie) existovat spočetná báze $\{U_n\}$ okolí 0 v B_{X^*}. Uvažujeme-li restrikci w^*-topologie na B_{X^*}, zjistíme, že ke každému n existuje konečná množina F_n v X tak, že

$$\big\{\varphi \in B_{X^*} : |\varphi(x)| \le 1 \text{ pro každé } x \in F_n\big\} \subset U_n .$$

Položme $F = \bigcup_n F_n$. Stačí ukázat, že uzavřený lineární obal $Z := \overline{\text{lin}} F$ množiny F je X (potom X bude separabilní, ježto konečné lineární kombinace prvků F s racionálními koeficienty jsou husté v Z). Ale to není problém. Je-li totiž $\varphi \in X^*$ a $\varphi = 0$ na Z, je $\varphi \in \bigcap_n U_n = \{0\}$. Podle 2.26 je $Z = X$. ■

Pro separabilní prostory lze pomocí předchozí věty získat zesílení Alaogluovy věty. Platí následující tvrzení, jehož důkaz spočívá na tom, že v metrických prostorech kompaktní a sekvenciálně kompaktní množiny splývají. Zároveň uvedeme protipříklad, že v neseparabilních prostorech s posloupnostmi nevystačíme.

(b) **Tvrzení.** *Nechť X je separabilní normovaný lineární prostor. Potom z každé omezené posloupnosti $\{\varphi_n\}$ duálu X^* lze vybrat w^*-konvergentní posloupnost.*

(c) **Příklad.** Na (neseparabilním) prostoru l^∞ uvažujme posloupnost funkcionálů $\{F_n\}$ definovaných předpisem $F_n : (x_1, x_2, \dots) \mapsto x_n$. Zřejmě $\|F_n\| = 1$. Ukážeme, že z posloupnosti $\{F_n\}$ nelze vybrat w^*-konvergentní podposloupnost. Předpokládejme naopak, že se nám to podaří. Nechť je to třeba posloupnost $\{F_{n_j}\}$. Definujme posloupnost $x := \{x_n\} \in l^\infty$ následovně. Položme $x_{n_j} = 1$ pokud j je sudé, $x_{n_j} = -1$ pro lichá j a $x_k = 0$ pro ostatní indexy k. Potom posloupnost $F_{n_j}(x)$ nemůže konvergovat, tudíž $\{F_{n_j}\}$ nekonverguje ve w^*-topologii.

Poznámka . Protože uzavřená jednotková koule v prostoru $(l^\infty)^*$ je w^*-kompaktní, lze z posloupnosti $\{F_n\}$ vybrat w^*-konvergentní zobecněnou podposloupnost. Jak vypadá?

Pokud jde o obecnější prostory, můžeme vyslovit následující větu. Její důkaz můžete porovnat s důkazem předchozí věty (a).

(d) **Věta.** *Nechť X je separabilní Hausdorffův lokálně konvexní prostor a K w^*-kompaktní podmnožina X^*. Potom K je metrizovatelná ve w^*-topologii.*

Důkaz. Nechť $\{x_n\}$ je hustá spočetná množina v X. Na prostoru X^* definujme funkcionály $F_n : \varphi \mapsto \varphi(x_n)$. Jestliže $\varphi_\gamma \xrightarrow{w^*} \varphi$, potom zajisté $\varphi_\gamma(x_n) \to \varphi(x_n)$, tudíž $F_n(\varphi_\gamma) \to F_n(\varphi)$. Vidíme, že F_n jsou spojité ve w^*-topologii. Množina všech funkcionálů $\{F_n\}$ také odděluje prvky prostoru X^*. Vskutku, jestliže $F_n(\varphi) = F_n(\psi)$ pro všechna n, musí být $\varphi = \psi$, neboť spojité funkcionály φ a ψ se rovnají na husté podmnožině X. Protože podle Alaogluovy věty je jednotková koule B_{X^*} w^*-kompaktní, stačí nyní užít větu B.10 z Appendixu. ■

Pokud jde o metrizovatelnost jednotkové koule ve slabé topologii prostoru X platí analogické tvrzení jako výše pro w^*-topologii. Je ovšem otázkou, na kolik je taková věta užitečná. Příkladů těch prostorů, které mají separabilní duál, není příliš mnoho (k nim patří třeba Banachův prostor c_0). Jsou mezi nimi ovšem separabilní reflexivní prostory. Pro ně ovšem uzavřená jednotková koule je w-kompaktní a metrizovatelná. Stačí si uvědomit, že v případě separabilního reflexivního prostoru X je X^{**} také separabilní, a že podle *2.8 je i X^* separabilní. Pak stačí použít větu (a) na $B_{X^{**}}$. A samozřejmě Banach-Bourbakiho charakteristiku reflexivity. Proto uvedeme následující větu bez důkazu. Jednu implikaci ovšem můžete odvodit snadno z věty (a) uvažováním druhého duálu X^{**}.

(e) Věta. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Potom uzavřená jednotková koule B_X je metrizovatelná ve slabé w-topologii, právě když X^* je separabilní.*

***16.3. Nabývání normy funkcionálu**. Jako rozcvičku k tomuto odstavci dokažte následující větičku.

(a) Větička. *Libovolný nenulový spojitý lineární funkcionál na Hilbertově prostoru nabývá své normy na uzavřené jednotkové kouli, a to právě v jednom bodě.*

Jamesova věta z 16.15 charakterizovala reflexivní Banachovy prostory jako ty, kde každý spojitý lineární funkcionál nabývá na uzavřené jednotkové kouli své normy. Snad pouze pro úplnost připomeňme, že funkcionál $f \in X^*$, kde X je Banachův prostor, *nabývá své normy*, existuje-li $x \in B_X$ tak, že $f(x) = \|f\|$. Je tedy zcela přirozenou otázkou se ptát, kolik je v obecných Banachových prostorech funkcionálů nabývajících své normy. Odpověď je obsažena v následující větě.

(b) Bishop-Phelpsova věta. *Nechť X je (reálný) Banachův prostor. Potom množina*

$$\{f \in X^* : f \text{ nabývá své normy}\}$$

je hustá v X^*.

Návod. Nejlépe je nahlédnout do R.R. Phelps [*1993]. Důkaz pro případ separabilního Banachova prostoru X je též v [HHZ]. ♣

R.R. Phelps

(c) Poznámky. (c1) Ty normované lineární prostory, v nichž množina funkcionálů nabývajících své normy je hustá v jejich duálu, se nazývaly *subreflexivní*. Teprve E. Bishop a R.R. Phelps v [1961] dokázali, že každý Banachův prostor je subreflexivní. Tedy pojem subreflexivity tak trochu ztratil smysl. I když je pravda, že neúplné normované lineární prostory mohou a nemusejí být subreflexivní.

(c2) Otevřeným problémem zůstává otázka, zda komplexní Banachovy prostory jsou subreflexivní.

(c3) B. Bollobás [1970] poněkud „zpřesnil" tvrzení Bishop-Phelpsovy věty. Zde je jeho verze: *Nechť X je Banachův prostor, $f \in S_{X^*}$, $x \in S_X$ a $|f(x) - \|f\|| = |f(x) - 1| < \frac{\varepsilon^2}{4}$, kde $\varepsilon \in (0,1)$. Potom existuje $\varphi \in S_{X^*}$ a $z \in S_X$ tak, že $\varphi(z) = 1 = \|\varphi\|$, $\|f - \varphi\| \le \varepsilon$ a $\|x - z\| \le \varepsilon$.*

(d) Opěrné body a funkcionály. Bishop-Phelpsovu větu je možno trochu zobecnit. Nejdříve se však dohodněme na následující terminologii: Nechť C je podmnožina Banachova prostoru X. Řekneme, že $x \in C$ je *opěrným bodem* množiny C, existuje-li nenulový funkcionál $\varphi \in X^*$ tak, že $\varphi(x) = \sup \varphi(C)$. Každý takový funkcionál nazvěme *opěrným funkcionálem* množiny C (v bodě x).

Označme tedy

$$\mathcal{P}_C(X^*) := \{\varphi \in X^* : \text{existuje } z \in C \text{ tak, že } \sup\{\varphi(t) : t \in C\} = \varphi(z)\}$$

množinu všech opěrných funkcionálů množiny C.

Z Hahn-Banachovy věty lehce vyplyne tvrzení, podle kterého každý hraniční bod uzavřené konvexní množiny C s neprázdným vnitřkem (!) je opěrným bodem C. Netriviální jsou ovšem následující „Bishop-Phelpsovy věty", které se též někdy rozlišují pořadím.

(e) První Bishop-Phelpsova věta. *Nechť C je uzavřená konvexní podmnožina Banachova prostoru X. Potom množina všech opěrných bodů C je hustá v hranici ∂C množiny C.*

(f) Druhá Bishop-Phelpsova věta. *Nechť C je uzavřená konvexní podmnožina Banachova prostoru X, $f \in X^*$ shora omezený funkcionál na C a $\varepsilon \in (0,1)$. Potom existuje opěrný funkcionál $\varphi \in \mathcal{P}_C(X^*)$ tak, že $\|f - \varphi\| < \varepsilon$.*

Nyní je jasné, že Bishop-Phelpsova věta z (b) je snadným důsledkem druhé Bishop-Phelpsovy věty. Z ní také plyne i následující tvrzení. Znovu si povšimněte, že v něm jde řeč o funkcionálech nabývajících svého maxima na C (a nikoliv o funkcionálech nabývajících své normy).

(g) Bishop-Phelpsova věta. *Nechť C je uzavřená, konvexní, omezená podmnožina Banachova prostoru X. Potom množina $\mathcal{P}_C(X^*)$ je hustá v X^*.*

Naskýtá se otázka, zda Bishop-Phelpsovy věty, či alespoň některé z jejich variant, platí také pro zobrazení do Banachových prostorů. Z výsledků uveďme alespoň následující větu, je však možno vyslovit i věty mnohem obecnější. K tomu účelu řekneme, že $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *nabývá své normy*, jestliže existuje $x \in B_X$ tak, že $\|T\| = \|Tx\|$.

(h) Lindenstraussova věta. *Nechť X a Y jsou Banachovy prostory, X reflexivní. Potom množina všech $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ nabývajících své normy je hustá v prostoru $\mathcal{L}(X,Y)$.*

*17. Topologie souhlasející s dualitou a reflexivita

***17.1. Svazy lineárních a lokálně konvexních topologií**. V B.13 se budeme zabývat kolekcí $\Omega(T)$ všech topologií na dané množině T. Množina $\Omega(T)$ uspořádána inkluzí tvoří úplný svaz. Je-li T dokonce vektorový prostor, lze uvažovat na T též kolekce všech lineárních či lokálně konvexních topologií. Z jejich základních vlastností uveďme alespoň následující dvě věty.

(a) Věta. *Množina $\mathcal{TV}(W)$ všech lineárních topologií na vektorovém prostoru W s uspořádáním daným inkluzí tvoří úplný svaz. Přitom pro každou množinu $\mathcal{A} \subset \mathcal{TV}(W)$ je*

$$\sup_{\mathcal{TV}(W)} \mathcal{A} = \sup_{\Omega(W)} \mathcal{A}\,,$$

kde $\Omega(W)$ značí kolekci všech topologií na W a suprema se vztahují vždy k příslušným svazům.

Návod. Lze argumentovat takto. Zobecněná posloupnost $\{x_\gamma\}$ ve W konverguje k prvku $x \in W$ v topologii $\sup_{\Omega(W)} \mathcal{A}$, právě když konverguje k x v každé topologii z $\mathcal{A}$. Odtud pak vyplyne, že $\sup_{\Omega(W)} \mathcal{A}$ je lineární topologie. ♣

(b) Věta. *Množina $\mathcal{LC}(W)$ všech lokálně konvexních topologií na vektorovém prostoru W s uspořádáním daným inkluzí tvoří úplný svaz. Přitom pro každou množinu $\mathcal{A} \subset \mathcal{LC}(W)$ je*

$$\sup_{\mathcal{LC}(W)} \mathcal{A} = \sup_{\mathcal{TV}(W)} \mathcal{A} = \sup_{\Omega(W)} \mathcal{A}\,.$$

Návod. Je-li U okolí nuly v topologii $\sup_{\Omega(W)} \mathcal{A}$, kde $\mathcal{A}$ je množina lokálně konvexních topologií, existují konvexní okolí $G_1, \dots, G_n$ nuly v různých topologiích z $\mathcal{A}$ tak, že $G_1 \cap \dots \cap G_n \subset U$. Protože průnik konvexních množin je konvexní, je $G_1 \cap \dots \cap G_n$ konvexní okolí 0 v topologii $\sup_{\Omega(W)} \mathcal{A}$ obsažené v U. A tedy $\sup_{\Omega(W)} \mathcal{A}$ je lokálně konvexní topologie. ♣

***17.2. Nejjemnější lineární topologie**. Uvažujeme-li na daném vektorovém prostoru W kolekci $\mathcal{L}$ všech lineárních topologií, existuje podle předchozí věty *17.1.a nejjemnější (nejsilnější, největší) lineární topologie $\eta := \sup \mathcal{L}$. Topologie η má tedy tu vlastnost, že (W, η) tvoří topologický lineární prostor a je-li τ lineární topologie na W, je již $\tau \subset \eta$.

Mohlo by se zdát, že báze filtru $\eta(0)$ je tvořena všemi pohlcujícími vyváženými množinami. Avšak tomu tak není, alespoň ne v nekonečné dimenzi.

***17.3. Nejjemnější lokálně konvexní topologie**. Nechť W je vektorový prostor. Sami dokazujte sérii následujících tvrzení:

(a) Tvrzení. *Systém všech pohlcujících absolutně konvexních podmnožin W tvoří bázi jisté lokálně konvexní topologie na W, označme ji θ. Topologie θ je nejjemnější ze všech lokálně konvexních topologií na W.*

(b) Tvrzení. *Topologie θ je generována systémem všech pseudonorem na W a je Hausdorffova.*

Návod. Volme $x \in W$, $x \neq 0$. Nechť $\mathcal{B}$ je Hamelova (algebraická) báze W obsahující x a f je lineární funkcionál na W takový, že $f(x) = 1$ a $f = 0$ jinde na $\mathcal{B}$. Potom $p := |f|$ je pseudonorma na W. Stačí použít (c) a větu 14.15. ♣

(c) Tvrzení. *Každý lineární funkcionál je spojitý v topologii θ a každý podprostor W je uzavřený.*

Návod. Je-li f lineární funkcionál na W a U okolí nuly v tělese skalárů, je $f^{-1}(U)$ pohlcující absolutně konvexní množina, a tedy okolí 0 v topologii θ. ♣

(d) Tvrzení. *Je-li A omezená množina v prostoru (W, θ), je* $\dim \operatorname{lin} A < \infty$.

(e) Tvrzení. *Nechť η je nejjemnější lineární topologie na W z předchozího příkladu *17.2. Potom $\eta = \theta$, právě když dimenze prostoru W je spočetná.*

(f) Tvrzení. *Prostor (W, θ) je barelovaný. Přičemž tento prostor je Baireův, právě když je metrizovatelný, a to je právě když* $\dim W < \infty$

Návod. Libovolný barel je okolím 0 v topologii θ, to je víc než jasné.

Pokud jde o metrizovatelnost, spojte (c) s postřehem, že v každém nekonečně dimenzionálním topologickém vektorovém prostoru (X, τ) existuje nespojitá lineární forma. Důkaz posledního tvrzení může probíhat obdobně jako v poznámce 2.6.c. Nechť $\{e_n\}$ je lineárně nezávislá posloupnost v prostoru X nekonečné dimenze a $\{U_n\}$ klesající posloupnost okolí 0 tvořící bázi filtru $\tau(0)$ (viz 14.22 a následující poznámku 14.23). Nechť $\{\alpha_n\}$ je taková posloupnost kladných čísel, že $\alpha_n e_n \in U_n$. Evidentně $\alpha_n e_n \to 0$. Nechť $\mathcal{H}$ je Hamelova báze X obsahující posloupnost $\{e_n\}$. Lineární formu na X určeme tak, aby $f(e_n) = \frac{1}{\alpha_n}$ a $f = 0$ na zbývajících prvcích báze $\mathcal{H}$.

Je-li $\dim W = \infty$, buď opět $A := \{e_n\}$ spočetná podmnožina nějaké Hamelovy báze $\mathcal{H}$ prostoru W. Označíme-li A_n lineární obal množiny $\{e_1, \ldots, e_n\} \cup (\mathcal{H} \setminus A)$, je $W = \bigcup_n A_n$, přičemž všechny podprostory A_n jsou řídké. Jsou to totiž vlastní uzavřené podprostory W. ♣

(g) Poznámka. Topologie η i θ mají řadu dalších pěkných vlastností. Jsou určitě Hausdorffovy, a to proto, že pro každé nenulové $x \in W$ existuje $f \in W^{\#}$ tak, že $f(x) \neq 0$. Obě dvě topologie jsou také úplné (zobecněné cauchyovské posloupnosti konvergují). Důkazy pro topologii θ jsou třeba v H. Jarchow [*1981], Prop.6.6.7 či na str. 56 v S. Rolewicz [*1972]. Jednoduchý důkaz úplnosti topologie η se nachází ve W. Żelazko [1997]. Tam či ve skriptech [Sta]lze nalézt i důkaz tvrzení (e) a řadu dalších zajímavostí. Třeba tvrzení, že separabilní podprostory prostoru (W, η) jsou lokálně konvexní.

***17.4. Topologie kartézského součinu**. V Appendixu jsme definovali součinovou topologii na kartézském součinu $\prod\limits_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ topologických prostorů X_γ. Pokud na prostorech X_γ máme zadány lineární či lokálně konvexní topologie, můžeme se ptát, zda kartézský součin těchto prostorů s příslušnou topologií kartézského součinu je též topologický vektorový či lokálně konvexní prostor. Odpověď dává následující věta.

(a) Věta. *Nechť $\{X_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ jsou topologické vektorové prostory, $\mathfrak{X} := \prod\limits_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$. Potom $\mathfrak{X}$ uvažovaný s topologií kartézského součinu je topologický vektorový prostor.*

Jsou-li všechny prostory X_γ lokálně konvexní, je i jejich kartézský součin $\mathfrak{X}$ lokálně konvexní.

Návod. Předpokládejme, že zobecněné posloupnosti $f_\alpha = \{f_\alpha^\gamma\}$ a $g_\alpha = \{g_\alpha^\gamma\}$ konvergují k $f = \{f^\gamma\}$ a $g = \{g^\gamma\}$ v součinové topologii na $\mathfrak{X}$ (rozpomeňte se, jak vypadají prvky kartézského součinu $\mathfrak{X}$). To znamená, že $f_\alpha^\gamma \xrightarrow{\alpha} f^\gamma$ a $g_\alpha^\gamma \xrightarrow{\alpha} g^\gamma$ v každém z prostorů X_γ. Ze spojitosti součtu v jednotlivých prostorech X_γ a z faktu, že konvergence v kartézském součinu je konvergencí bodovou, vyplyne, že $f_\alpha + g_\alpha \xrightarrow{\alpha} f + g$ v $\mathfrak{X}$. Úvaha pro násobek skalárem je obdobná.

Báze filtru okolí 0 v X je tvořena všemi součiny $\prod\limits_{\gamma \in \Gamma} V_\gamma$, kde každé V_γ je vyvážené okolí 0 v X_γ a $V_\gamma = X_\gamma$ až na konečně mnoho indexů γ. Odtud pak lehko vyplyne, že kartézský součin lokálně konvexních prostorů je lokálně konvexní. ♣

(b) Poznámky. (b1) Součinová topologie na kartézském součinu lokálně konvexních prostorů musí být generována systémem nějakých pseudonorem. Uměli byste je popsat?.

(b2) Součin topologických vektorových prostorů $\prod\limits_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ je lokálně konvexní, právě když každý faktor X_γ je lokálně konvexní.

(b3) Kartézský součin X topologických vektorových prostorů X_γ je Hausdorffův, právě když všechny faktory X_γ jsou Hausdorffovy. To totiž platí obecně pro kartézský součin jakýchkoliv topologických prostorů.

*18. Kompaktní konvexní množiny

***18.1. Charakteristiky Diracových měr.** *Nechť $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ je pravděpodobnostní Radonova míra na kompaktu K. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *μ je Diracova míra,*
(ii) *nosič míry μ je jednobodová množina,*
(iii) *μ nabývá na borelovských množinách pouze hodnot 0 či 1,*
(iv) *je-li $B \subset K$ borelovská množina, potom $\mu B = 0$ anebo $\mu(K \setminus B) = 0$,*
(v) *$\int_K fg\,d\mu = \int_K f\,d\mu \int_K g\,d\mu$ pro každé $f, g \in \mathcal{C}(K)$.*

Návod. Ověření leckterých implikací by nemělo dělat potíže. Pokud ano, nezbývá než nahlédnout do některé učebnice teorie míry. Mohu třeba doporučit E. Hewitt and K. Stromberg [*1965]. ♣

Jako jednu z aplikací Krejn-Milmanovy věty ukážeme důkaz Stone-Weierstrassovy věty (pro algebru funkcí) pocházející od L. De Brangese [1959]. „Svazovou verzi“ Stone-Weierstrassovy věty dokážeme v *19.8.

***18.2. Stone-Weierstrassova věta.** *Nechť T je kompaktní prostor a $\mathcal{A}$ lineární podprostor $\mathcal{C}(T)$. Jestliže $\mathcal{A}$ je uzavřená podalgebra $\mathcal{C}(T)$ oddělující body T a obsahující konstantní funkce, potom $\mathcal{A} = \mathcal{C}(T)$.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{A}^\perp$ je anihilátor $\mathcal{A}$. Připomeňme, že

$$\mathcal{A}^\perp = \left\{\mu \in \mathcal{C}(T)^* : \mu(f) = 0 \text{ pro } f \in \mathcal{A}\right\}$$

a že $\mathcal{A}$ tvoří *algebru funkcí*, jestliže $fg \in \mathcal{A}$ pro každou dvojici $f, g \in \mathcal{A}$.

Abychom dokázali naše tvrzení, stačí podle poznámky 2.26 ukázat, že $\mathcal{A}^\perp$ sestává pouze z nulového prvku. Dokazujme sporem, nechť $\mathcal{A}^\perp \neq \{0\}$. Podle Alaogluovy věty 16.6 je množina $B := \{\mu \in \mathcal{C}(T)^* : \|\mu\| \leq 1\}$ w^*-kompaktní, a protože $\mathcal{A}^\perp$ je, jak je lehko vidět, w^*-uzavřená množina, je i $\mathcal{K} := B \cap \mathcal{A}^\perp$ w^*-kompaktní. Množina $\mathcal{K}$ je ovšem také konvexní a různá od $\{0\}$ (protože $\mathcal{A}^\perp \neq \{0\}$). Podle Krejn-Milmanovy věty 18.5 existuje extremální bod $\nu \in \mathcal{K}$. Samozřejmě $\|\nu\| = 1$ (rovněž B obsahuje nenulové prvky!). Ukážeme-li, že ν je λ-násobkem Diracovy míry ε_t v nějakém bodě $t \in T$, dostaneme již lehko spor, neboť potom bude $0 = \nu(1) = \lambda\varepsilon_t(1) = \lambda$ (nezapomeňte, že $\nu \in \mathcal{A}^\perp$ a $1 \in \mathcal{A}$). Tudíž $\nu = 0$ a to je ve sporu s tím, že $\|\nu\| = 1$.

Abychom dokázali, že ν je násobkem Diracovy míry, stačí ukázat podle charakteristiky v *18.1, že ν má nejvýše jednobodový nosič. Předpokládejme tedy, že $s, t \in \operatorname{supt} \nu$, $s \neq t$. Z vlastností $\mathcal{A}$ najdeme funkci $f \in \mathcal{A}$ tak, aby $0 < f < 1$ na T a $f(t) \neq f(s)$. Nechť ν_f a ν_{1-f} jsou Radonovy míry na T mající hustoty f a $1-f$ (tedy $\nu_f B = \int_B f\,d\nu$ a $\nu_{1-f} B = \int_B (1-f)\,d\nu$ pro borelovské množiny $B \subset T$). Není těžké si uvědomit, že $\nu_f, \nu_{1-f} \in \mathcal{K}$ (f i $1-f$ leží v $\mathcal{A}$), a že jak $\|\nu_f\| > 0$, tak i $\|\nu_{1-f}\| > 0$ ($0 < f < 1$ je spojitá funkce). Máme

$$\|\nu_f\| + \|\nu_{1-f}\| = \int_T f\,d|\nu| + \int_T (1-f)\,d|\nu| = |\nu|(T) = \|\nu\| = 1$$

a

$$\nu = \nu_f + \nu_{1-f} = \|\nu_f\| \frac{\nu_f}{\|\nu_f\|} + \|\nu_{1-f}\| \frac{\nu_{1-f}}{\|\nu_{1-f}\|}\,.$$

Protože ν je extremální bod $\mathcal{K}$ a $\nu_f, \nu_{1-f} \in \mathcal{K}$, musí být $\nu = \frac{\nu_f}{\|\nu_f\|}$. Jinými slovy, $\int_B f\,d\nu = \|\nu_f\|\nu B = \int_B \|\nu_f\|\,d\nu$ pro všechny borelovské množiny $B \subset T$. Jelikož f je spojitá funkce na T, musí být $f = \|\nu_f\|$ na K, což je kýžený spor. ∎

***18.3. Poznámky**. (a) Kde jsme využili toho, že $\mathcal{A}$ tvoří algebru?

(b) V uvedené formulaci Stone-Weierstrassovy věty jsme (mlčky) předpokládali, že $\mathcal{C}(T)$ je prostor reálných funkcí. Pokud bychom připustili i komplexní funkce, uvedená věta by již nemusela platit. Stačí se podívat na případ diskové algebry $\mathcal{A}(\Delta)$ z 6.5.c. Ta je uzavřeným podprostorem $\mathcal{C}(\Delta)$, nikoliv však hustým. Anebo také prostor všech polynomů v proměnné z není hustý v $\mathcal{C}(\Delta)$, existují totiž spojité funkce na Δ, které nejsou na jeho vnitřku analytické (nicméně se podívejte na D.3).

V komplexním případě musíme ještě dodat předpoklad, že algebra $\mathcal{A}$ je *samoadjungovaná*, tedy že s každou funkcí f obsahuje i $\overline{f}$. Protože $f = \frac{1}{2}(f + \overline{f}) + i\frac{1}{2i}(f - \overline{f})$, tato podmínka zaručí, že reálné části funkcí z $\mathcal{A}$ oddělují body prostoru T a důkaz může probíhat jako výše.

(c) V uvedeném důkazu jsme pracovali s mírami mající jisté hustoty. Využívali jsme přitom některých vlastností integrování vůči takovým mírám. Kupříkladu, že $\|\nu_f\| = \int_T f\,d|\nu|$ či jsme potřebovali vědět, že $\nu_f(\varphi) = \int_T f\varphi\,d\nu$ (alespoň) pro spojitou funkci φ. Trochu se nad tím zamyslete.

(d) Je-li $\mathcal{A}$ podprostor $\mathcal{C}(T)$ obsahující konstanty a oddělující body T a máme-li dokázanou Stone-Weierstrassovu větu pro případ, kdy $\mathcal{A}$ tvoří algebru, je již celkem snadné odvodit tvrzení pro podprostor $\mathcal{A}$, který tvoří *svaz* (obsahuje $\max(f,g)$ i $\min(f,g)$, kdykoliv $f,g \in \mathcal{A}$). A naopak. To plyne z věty, podle které za našich předpokladů $\overline{\mathcal{A}}$ tvoří algebru, právě když $\overline{\mathcal{A}}$ tvoří svaz. Jednoduchý důkaz posledního tvrzení lze nalézt v C. Dellacherie [1969].

***18.4. Exponované a silně exponované body**. Uvažujme konvexní množinu C v Banachově prostoru X. Bod $z \in C$ se nazve *exponovaným bodem* C, existuje-li $\varphi \in X^*$ tak, že $\varphi(z) > \varphi(x)$ pro každé $x \in C \setminus \{z\}$.

Jestliže existuje dokonce $\psi \in X^*$ tak, že $\psi(z) > \psi(x)$ pro každé $x \in C \setminus \{z\}$, přičemž $z_n \to z$, kdykoliv $z_n \in C$ a $\psi(z_n) \to \psi(z)$, potom z nazveme *silně exponovaným bodem* množiny C.

`(a) Triviality`. Každý silně exponovaný bod je i exponovaným bodem. To je samozřejmé. Dále, každý exponovaný bod C je extremálním bodem. I to se lehko odůvodní. Kdyby totiž exponovaný bod z nebyl extremálním bodem konvexní množiny C, existovaly by různé body $x, y \in C$ tak, že $z = \frac{1}{2}(x+y)$. Potom ovšem $\varphi(z) = \frac{1}{2}(\varphi(x) + \varphi(y))$ pro každé $\varphi \in X^*$, tudíž žádný funkcionál $\varphi \in X^*$ nemůže nabývat v bodě z svého striktního maxima.

`(b) Protipříklady`. Ne každý extremální bod je exponovaný. Stačí v rovině uvažovat konvexní obal dvou posunutých kruhů.

Existují exponované body, které nejsou silně exponované. Jako protipříklad poslouží Hilbertův prostor l^2 a v něm konvexní (slabě) uzavřená množina

$$C := \left\{x = \{x_n\} \in l^2 : \|x\| \le 1 \text{ a } x_n \ge 0 \text{ pro všechna } n\right\}.$$

Zřejmě $0 \in C$. Je-li φ prvek $(l^2)^*$ určený posloupností $\{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots\}$, je $\varphi(0) = 0$ a $\varphi(x) < 0$ pro každé $x \in C$, $x \neq 0$. Je tedy 0 exponovaným bodem C. Na druhé straně, je-li $\psi \in (l^2)^*$ libovolný funkcionál, je $\psi(e_n) \to 0$, ačkoliv posloupnost standardních jednotkových vektorů $\{e_n\}$ nemůže v žádném případě konvergovat k 0. Tudíž 0 není silně exponovaným bodem C.

`(c) Cvičení.` *Nechť $x \in S_X$ je bod jednotkové sféry striktně konvexního prostoru X. Potom x je exponovaným bodem B_X.*

Návod. Hahn-Banachova věta zaručuje existenci $f \in X^*$ s vlastnostmi $\|f\| = 1$ a $f(x) = \|x\| = 1$. Nechť $y \in B_X$, $y \neq x$, $f(y) = 1$ (protože $|f(y)| \le \|f\|\,\|y\| \le 1$, nemůže být $f(y) > 1$). Volme $\lambda \in (0,1)$. Jelikož $\big\|\lambda x + (1-\lambda)y\big\| \le 1$ a $f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) = 1$, musí být $1 = f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \le \|f\|\,\big\|\lambda x + (1-\lambda)y\big\| \le 1$. Odtud plyne, že $\|\lambda x + (1-\lambda)y\| = 1$, což je samozřejmě ve sporu se striktní konvexitou X. ♣

`(d) Cvičení.` *Nechť $x \in S_X$ je bod jednotkové sféry Hilbertova prostoru X. Potom x je silně exponovaným bodem B_X.*

Návod. Použijte definici silně exponovaného bodu a rovnoběžníkové pravidlo. ♣

Poznámka. Stačilo předpokládat, že prostor X je lokálně uniformně konvexní.

`(e) Lindenstraussova věta.` *Nechť C je konvexní slabě kompaktní podmnožina Banachova prostoru. Potom C je rovna uzavřenému konvexnímu obalu svých silně exponovaných bodů.*

Návod. Uvedená věta je pro separabilní prostory dokázána v [HHZ], Th. 119. ♣

*19. Integrální reprezentace

V celé kapitole bude X (reálný) lokálně konvexní Hausdorffův prostor. Je-li $K \subset X$ kompaktní konvexní množina, $x \in K$ a $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ pravděpodobnostní Radonova míra na K, připomeňme, že míra μ *reprezentuje bod* x, či že x je *těžištěm* μ, jestliže

$$f(x) = \int_K f\,d\mu \quad \text{pro každé} \quad f \in X^*.$$

V tomto případě zkráceně píšeme $r(\mu) = x$. Pro $x \in K$ označme $\mathfrak{M}_x := \{\mu \in \mathcal{M}^1(K) : r(\mu) = x\}$ množinu všech měr reprezentujících bod x.

***19.1. Věta.** *Nechť Y je kompaktní podmnožina X a $x \in Y$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) $x \in \overline{\mathrm{co}}Y$,

(ii) *existuje* $\mu \in \mathcal{M}^1(Y)$ *tak, že* $r(\mu) = x$.

Návod. Předpokládáme-li, že $x \notin \overline{\mathrm{co}}Y$, najděme z malé Mazurovy věty 14.27 $f \in X^*$ a reálné λ tak, aby $f(x) \leq \lambda \leq f(t)$ pro každé $t \in \overline{\mathrm{co}}Y$. Potom ovšem pro žádnou míru $\mu \in \mathcal{M}^1(Y)$ nemůže být $f(x) = \int_Y f\,d\mu$.

Pokud $x \in \overline{\mathrm{co}}Y$, lze najít příslušnou reprezentující míru μ přesně jako v důkazu věty 19.4. ♣

***19.2. Bauerova charakteristika** $\operatorname{ext} X$. *Nechť K je kompaktní konvexní podmnožina X a $x \in K$. Potom $x \in \operatorname{ext} K$, právě když $\mathfrak{M}_x = \{\varepsilon_x\}$.*

Důkaz. Jestliže x není extremálním bodem množiny K, existují $a, b \in K$, $a \neq b$ tak, že $x = \frac{a+b}{2}$. Potom ovšem $\frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_b) \in \mathfrak{M}_x$ podle definice $\mathfrak{M}_x$. Obsahuje tedy $\mathfrak{M}_x$ i jiné pravděpodobnostní míry než ε_x.

Nechť $x \in \operatorname{ext} K$ a $\mu \in \mathfrak{M}_x$. Ukážeme-li, že $\operatorname{supt}\mu = \{x\}$, bude $\mu = \varepsilon_x$ (srovnej s *18.1). K tomu ovšem stačí ukázat, že $\mu D = 0$ pro každou kompaktní množinu $D \subset K \setminus \{x\}$ (z regularity Radonovy míry μ pak bude $\mu(K \setminus \{x\}) = 0$). Předpokládáme-li, že existuje kompaktní množina $D \subset K \setminus \{x\}$, pro niž $\mu D > 0$, najdeme (z kompaktnosti D) $z \in D$ tak, že $\mu(U \cap K) > 0$ pro každé okolí U bodu z. Nechť U je uzavřené konvexní okolí z takové, že $x \notin U \cap K$. Množina $U \cap K$ je kompaktní a konvexní. Pokud by bylo $d := \mu(U \cap K) = 1$, dostali bychom s přihlédnutím k větě *19.1, že $x \in U \cap K$. Také je $d > 0$. Položíme-li nyní

$$\mu_1(B) := \frac{1}{d}\,\mu\big(B \cap U \cap K\big) \quad \text{a} \quad \mu_2(B) := \frac{1}{1-d}\,\mu\big(B \setminus (U \cap K)\big)$$

pro každou borelovskou množinu $B \subset K$, jsou μ_1 a μ_2 pravděpodobnostní Radonovy míry z $\mathcal{M}^1(K)$. Protože $\mu_1(U \cap K) = 1$, je $r(\mu_1) \in U \cap K$, a tudíž $r(\mu_1) \neq x$. Protože $\mu = d\mu_1 + (1-d)\mu_2$, je $x = dr(\mu_1) + (1-d)r(\mu_2)$, což je ve sporu s tím, že x je extremálním bodem K. ∎

***19.3. Milmanova věta.** *Jestliže B je taková podmnožina lokálně konvexního prostoru X, pro niž $K := \overline{\mathrm{co}}B$ je kompakt, potom* $\operatorname{ext} K \subset \overline{B}$.

Důkaz. Nechť $x \in \operatorname{ext} K$. Především poznamenejme, že $\overline{\mathrm{co}}B = \overline{\mathrm{co}}\overline{B}$. To zjistíme snadno jednoduchou úvahou. Podle věty *19.1 aplikované na $Y = \overline{B}$ existuje $\mu \in \mathcal{M}^1(\overline{B})$ reprezentující bod x. Míru μ můžeme lehce rozšířit na míru ν definovanou na celém kompaktu K prostě tak, že položíme $\nu(M) := \mu(M \cap \overline{B})$ pro borelovské množiny $M \subset K$. Míra ν stále reprezentuje bod x. Protože však $x \in K$, je podle Bauerovy charakteristiky *19.2 $\nu = \varepsilon_x$. Míra ν je ovšem nesena (uzavřenou) množinou $\overline{B}$, musí tedy být $x \in \overline{B}$.

Jiný důkaz. Nechť $x \in \operatorname{ext} K$ a U je okolím nuly. Musíme ukázat, že $(x + U) \cap B \neq \emptyset$. Předpokládejme rovnou, že U je barel. Množina B je prekompaktní, existují tedy $x_1, \ldots, x_n \in B$ tak, že $B \subset \bigcup_{j=1}^{n} (x_j + U)$. Položme $K_j := \overline{\mathrm{co}}((x_j + U) \cap B)$. Máme $K_j \subset \overline{\mathrm{co}}B = K$, tudíž množiny $K_1, \ldots, K_n$ jsou kompaktní. A jsou také konvexní. Protože $B \subset \mathrm{co}(K_1 \cup \cdots \cup K_n) \subset K$, konvexní obal $\mathrm{co}(K_1 \cup \cdots \cup K_n)$ je kompaktní (podle *13.5.d) a $\overline{\mathrm{co}}B = K$, musí být $K = \mathrm{co}(K_1 \cup \cdots \cup K_n)$. Tudíž existují $\lambda_j \geq 0$ a $x_j \in K_j$ tak, že $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ a $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$. Protože x je extremálním bodem K, rozmyslíme si, že musí existovat takové j, že $x = x_j$. Ale $x_j \in K_j = \overline{\mathrm{co}}((x_j + U) \cap B) \subset x_j + U \subset B + V$ (využili jsme faktu, že U je uzavřená a konvexní). Jsme tedy hotovi, neboť jsme ukázali, že $(x + U) \cap B \neq \emptyset$. ∎

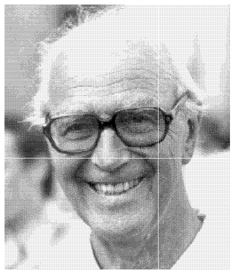
***19.4. Cvičení**. Milmanova věta je jakýmsi „částečným obrácením“ Krejn-Milmanovy věty. Jako užitečné cvičení dokažte následující trvrzení. Můžete přitom využít právě použitých metod.

Věta. *Nechť K je kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru X a $B \subset K$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) $\overline{\mathrm{co}}B = K$,

(ii) $\inf f(B) = \min f(K)$ *pro každý funkcionál* $f \in X^*$,

(iii) $\operatorname{ext} K \subset \overline{B}$.



G. Choquet

***19.5. Choquetova teorie funkčních prostorů**. V 18. kapitole jsme se zabývali Choquetovou teorií pro případ konvexní kompaktní podmnožiny lokálně konvexního prostoru. Zde se budeme věnovat teorii zdánlivě obecnější, a to vyšetřováním jistých funkčních prostorů. Je to skutečně jen zdánlivé, neboť, jak se stručně zmíníme v *19.7, výsledky této nové teorie lze získat také pomocí již vypracované teorie v lokálně konvexních prostorech.

`(a) Základní rámec`. Začněme se základními pojmy. Nechť tedy K je kompaktní prostor, samozřejmě Hausdorffův. *Funkčním prostorem* budeme rozumět vektorový podprostor $\mathcal{H}$ prostoru $\mathcal{C}(K)$ spojitých (reálných) funkcí na K. Budeme předpokládat, že $\mathcal{H}$ obsahuje konstantní funkce a odděluje body K. Jako obvykle symbolem $\mathcal{M}^1(K)$ značíme množinu všech pravděpodobnostních nezáporných Radonových měr na K, ε_x je Diracova míra soustředěná v bodě x. Často místo $\int_K f\,d\mu$ píšeme krátce jen μf.

Pro $x \in K$ definujme množinu $\mathfrak{M}_x(\mathcal{H})$ všech *$\mathcal{H}$-reprezentujících měr* na K jako

$$\mathfrak{M}_x(\mathcal{H}) := \bigl\{\mu \in \mathcal{M}^1(K) : h(x) = \int_K h\,d\mu \text{ pro všechna } h \in \mathcal{H}\bigr\}.$$

Mající na paměti Bauerovu charakteristiku extremálních bodů z *19.2 definujeme nyní analogicky

$$\mathrm{Ch}_{\mathcal{H}}\, K := \bigl\{x \in K : \mathfrak{M}_x(\mathcal{H}) = \{\varepsilon_x\}\bigr\}.$$

Množinu $\mathrm{Ch}_{\mathcal{H}}\, K$ nazýváme *Choquetovou hranicí $\mathcal{H}$*.

Bodu $x \in K$ budeme říkat *$\mathcal{H}$-exponovaný*, existuje-li takové $h \in \mathcal{H}$, že $0 = h(x) < h(y)$ pro každé $y \in K \setminus \{x\}$.

Dále symbolem $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ označíme množinu všech *$\mathcal{H}$-afinních funkcí* na K, tedy

$$\mathcal{A}(\mathcal{H}) := \bigl\{f \in \mathcal{C}(K) : f(x) = \int_K f\,d\mu \text{ pro všechna } x \in K \text{ a } \mu \in \mathfrak{M}_x(\mathcal{H})\bigr\}.$$

Konečně ještě označení pro $f \in \mathcal{C}(K)$:

$$f^* := \inf\{h \in \mathcal{H} : h \geq f\} \quad , \quad f_* := \sup\{h \in \mathcal{H} : h \leq f\}.$$

Základní jednoduché vlastnosti shrňme do následujícího tvrzení.

`(b) Tvrzení.` *Prostor $\mathcal{H}$-afinních funkcí $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ je uzavřený podprostor $\mathcal{C}(K)$ obsahující $\mathcal{H}$. Jsou-li $f, g \in \mathcal{C}(K)$ a $\lambda \geq 0$, je*

$$(f+g)^* \leq f^* + g^*, \quad (\lambda f)^* = \lambda f^* \quad a \quad f_* = -(-f)^*.$$

Každý $\mathcal{H}$-exponovaný bod leží v Choquetově hranici $\mathrm{Ch}_{\mathcal{H}}\, K$.

Důkaz. Evidentně $\mathcal{H} \subset \mathcal{A}(\mathcal{H})$ a $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ tvoří vektorový prostor. Lebesgueova věta o limitním přechodu za integračním znamením ihned dá uzavřenost $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ v $\mathcal{C}(K)$.

Další tvrzení o funkcích f^* a f_* vyplývá bezprostředně z definic.

Předpokládejme teď, že $x \in K$, $h \in \mathcal{H}$ a $0 = h(x) < h(y)$ pro každé $y \in K$, $y \neq x$. Chceme ukázat, že x leží v Choquetově hranici. Volme tedy $\mu \in \mathfrak{M}_x(\mathcal{H})$. Potom ovšem $0 = h(x) = \int_K h\,d\mu$. Nosičem míry μ tudíž musí být množina $\{x\}$ (viz [LM], 15.10.a), a protože $\mu(K) = 1$, musí být $\mu = \varepsilon_x$. ■

Odvození hlubších vlastností nám umožní následující lemma.

(c) Lemma. *Nechť $x \in K$ a $f \in \mathcal{C}(K)$. Potom*

$$\left[f_*(x), f^*(x)\right] = \left\{\mu f : \mu \in \mathfrak{M}_x(\mathcal{H})\right\}.$$

Důkaz. Je-li $\mu \in \mathfrak{M}_x(\mathcal{H})$, $g, h \in \mathcal{H}$ a $g \le f \le h$ na K, je $g(x) = \mu g \le \mu f \le \mu h = h(x)$. Odtud $f_*(x) \le \mu f \le f^*(x)$.

Předpokládejme nyní, že $\alpha \in [f_*(x), f^*(x)]$. Tvrzení (b) nám říká, že zobrazení $p : g \mapsto g^*(x)$ je konvexní funkcionál na $\mathcal{C}(K)$. Položíme-li $M := \{\lambda f : \lambda \in \mathbf{R}\}$ a definujeme-li na podprostoru M lineární formu φ předpisem $\varphi : \lambda f \mapsto \lambda\alpha$, je $\varphi \le p$ na M. Pokud je totiž $\lambda \ge 0$, je

$$\varphi(\lambda f) = \lambda\alpha \le \lambda f^*(x) = (\lambda f)^*(x) = p(\lambda f).$$

A pro $\lambda < 0$ máme zase

$$\varphi(\lambda f) = \lambda\alpha \le \lambda f_*(x) = -\lambda(-f)^*(x) = (\lambda f)^*(x) = p(\lambda f).$$

Algebraická verze Hahn-Banachovy věty 2.16 garantuje existenci lineární formy $\Phi \in (\mathcal{C}(K))^*$ s vlastnostmi $\Phi = \varphi$ na M a $\Phi \le p$ na $\mathcal{C}(K)$. Funkcionál Φ je nezáporný. Je-li totiž $g \in \mathcal{C}(K)$, $g \le 0$ na K, je $\Phi(g) \le p(g) = g^*(x) \le 0$ (připomeňme, že $0 \in \mathcal{H}$). Podle Rieszovy věty existuje (nezáporná) Radonova míra μ na K tak, že $\mu g = \Phi(g)$ pro každou funkci $g \in \mathcal{C}(K)$. Je-li $h \in \mathcal{H}$, je samozřejmě $h_* = h^* = h$, a tudíž

$$\mu h = \Phi(h) \le p(h) = h^*(x) = h(x)$$

a současně

$$-\mu h = -\Phi(h) = \Phi(-h) \le p(-h) = (-h)^*(x) = -h_*(x) = -h(x).$$

Vidíme, že $\mu h = h(x)$. Pokud by $\|\mu\| = 1$, dostali bychom, že $\mu \in \mathfrak{M}_x(\mathcal{H})$. Ale protože $1 \in \mathcal{H}$, je $\|\mu\| = \mu 1 = 1$. A jsme s důkazem hotovi. Našli jsme totiž $\mu \in \mathfrak{M}_x(\mathcal{H})$ tak, že $\mu f = \Phi(f) = \alpha$. ∎

(d) Důsledek. *Nechť $x \in K$ a $f \in \mathcal{C}(K)$. Potom $f^*(x) = \max\{\mu f : f \in \mathfrak{M}_x(\mathcal{H})\}$.*

(e) Důsledek. *Bod $x \in K$ leží v Choquetově hranici $\mathrm{Ch}_{\mathcal{H}}(K)$, právě když $f_*(x) = f^*(x)$ pro každou funkci $f \in \mathcal{C}(K)$.*

(f) Důsledek. *Funkce $h \in \mathcal{C}(K)$ je $\mathcal{H}$-afinní, právě když $h^* = h_*$ na K.*

(g) Choquetova věta. *Nechť $\mathcal{H}$ je funkční prostor na metrizovatelném kompaktu K a $x \in K$. Potom existuje Radonova míra μ soustředěná na Choquetově hranici $\mathrm{Ch}_{\mathcal{H}} K$ taková, že $\mu h = \int_K h\,d\mu$ pro každou funkci $h \in \mathcal{H}$.*

Důkaz. Jednou možností je upravit důkaz Choquetovy věty z 19.6.e na současnou situaci funkčních prostorů. Jinou pak skýtá přenesení celé teorie do stavového prostoru podle *19.7 a pak opět přejít zpět. Poslední idea je podrobně provedena třeba v R.R. Phelps [*1966]. Abychom nic nezakrývali, existují i další důkazy Choquetovy věty. ∎

(h) Příklady. (h1) V klasickém případě bude K konvexní kompaktní podmnožina lokálně konvexního prostoru X a $\mathcal{H}$ množina všech spojitých afinních funkcí na K.

Pro pohodlí poznamenejme, že f je *afinní* funkce na K, je-li současně konvexní i konkávní na K, tedy jestliže $f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$, kdykoliv $x, y \in K$ a $\lambda \in (0,1)$.

V tomto případě splývá Choquetova hranice $\mathrm{Ch}_{\mathcal{H}} K$ s množinou $\operatorname{ext} K$ všech extremálních bodů.

(h2) Jako triviální, avšak ilustrativní, příklady uvažujme funkční prostory

(α) $\mathcal{H}_1 := \left\{f \in \mathcal{C}([0,2]) : f(1) = \frac{1}{2}(f(0) + f(2))\right\}$,
(β) $\mathcal{H}_2 := \left\{f \in \mathcal{C}([0,2]) : f(1) = \frac{1}{2}(f(0) + f(2)) \text{ a } \int_0^1 f = \int_1^2 f\right\}$,
(γ) $\mathcal{H}_3 := \left\{f \in \mathcal{C}([0,1]) : f(0) = \frac{1}{2} f(1) \text{ a } f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2} f(1) + \frac{1}{2n} f(\frac{2}{3}) \text{ pro } n = 2, 3, \dots\right\}$,
(δ) $\mathcal{H}_4 := \left\{f \in \mathcal{C}([0,1]) : f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} f(1) \text{ pro } n = 2, 3, \dots\right\}$.

(h3) Triviální příklad také dostaneme, volíme-li za funkční prostor $\mathcal{H}$ celý prostor $\mathcal{C}(K)$. Je-li K metrizovatelný kompakt, je zajisté každý bod K jeho $\mathcal{C}(K)$-exponovaným bodem. Tudíž Choquetova hranice $\mathrm{Ch}_{\mathcal{C}(K)} K = K$.

(h4) Nechť U je omezená otevřená podmnožina $\mathbf{R}^n$. Předešleme, že funkce h je *harmonická* na U, jestliže h má spojité parciální derivace druhého řádu na U a $\Delta h := \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} + \dots \frac{\partial^2 h}{\partial x_n^2} = 0$ na U. V $\mathcal{H}$ budou spojité funkce na $\overline{U}$, které jsou harmonické na U. Tedy $h \in \mathcal{H}$, jestliže $h \in \mathcal{C}(\overline{U})$, $h \in \mathcal{C}^2(U)$ a $\Delta h = 0$. Není obtížné ověřit, že $\mathcal{H}$ je uzavřený podprostor $\mathcal{C}(\overline{U})$ (stejnoměrná limita harmonických funkcí je funkce harmonická).

Tomuto důležitému příkladu věnujme následující samostatný odstavec, pokud by se čtenář zajímal hlouběji o uvedenou problematiku, lze odkázat třeba na skripta [KNV], J. Lukeš, J. Malý and L. Zajíček [*1986] či L.L. Helms [*1969].

J. Král

(k) Simpliciální prostory. Funkční prostor $\mathcal{H}$ na metrizovatelném kompaktu K je *simpliciální*, jestliže ke každému $x \in K$ existuje právě jedna $\mathcal{H}$-reprezentující míra z $\mathfrak{M}_x(\mathcal{H})$ nesená Choquetovou hranicí $\mathrm{Ch}_{\mathcal{H}} K$.

Uveďme příklady. V případě, kdy funkční prostor $\mathcal{H}$ tvoří afinní funkce na nějaké kompaktní konvexní podmnožině K lokálně konvexního prostoru, si lehce rozmyslíme, že $\mathcal{H}$ je simpliciální, právě když K je *simplex* ve smyslu definice 19.6.f. Pokud specifikujeme a $\mathcal{H}$ je funkční prostor afinních funkcí na kompaktní konvexní podmnožině K v $\mathbf{R}^n$, je K simplex, právě když K je konvexní obal $n+1$ bodů. Tedy simplexy v rovině jsou právě trojúhelníky či v prostoru čtyřstěny.

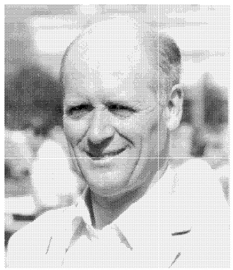
Funkční prostor $\mathcal{H}_1$ z příkladu v (h2) je též simpliciální. Choquetova hranice $\mathrm{Ch}_{\mathcal{H}_1}[0,2] = [0,1) \cup (1,2]$ (každý bod této množiny je $\mathcal{H}$-exponovaný, zatímco v bodě 1 máme dvě reprezentující míry: ε_1 a $\frac{1}{2}(\varepsilon_0 + \varepsilon_2)$). Protože však míra ε_1 reprezentující bod 1 není nesena Choquetovou hranicí, je $\mathcal{H}_1$ simpliciální (body Choquetovy hranice mají jedinou reprezentující míru, a to Diracovu, samozřejmě s nosičem v této hranici).

Pokud jde o další funkční prostory z odstavce (h2), zamyslete se sami, zda-li jsou simpliciální.

Funkční prostor $\mathcal{C}(K)$ z příkladu (h3) je simpliciální. V tomto případě totiž $\mathfrak{M}_x(\mathcal{C}(K)) = \{\varepsilon_x\}$.

A konečně funkční prostor spojitých rozšíření řešení Laplaceovy rovnice $\Delta h = 0$ z (h4) je též simpliciální. Ale to už by byla historie na jiný text.

Simpliciální prostory se dají charakterizovat mnoha způsoby. To je obsahem následující věty, kterou uvedeme bez důkazu. V ní každá uvedená podmínka může být vzata za definici simpliciality funkčního prostoru. Přidejme však některé definice. Shora polospojitá funkce s na K se nazve *$\mathcal{H}$-konvexní*, jestliže $s(x) \le \int_K s\, d\mu$ pro každé $x \in K$ a $\mu \in \mathfrak{M}_x(\mathcal{H})$. Řekneme pak, že $\mathcal{H}$ splňuje *Edwardsovu podmínku*, jestliže pro každou dvojici funkcí f, g na K, kde f a $-g$ jsou $\mathcal{H}$-konvexní a $f \le g$ na K, existuje $\mathcal{H}$-afinní funkce h tak, že $f \le h \le g$ na K.



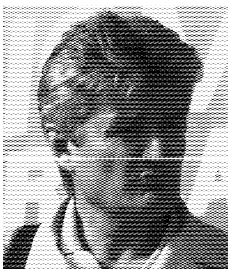
D.A. Edwards

(l) Charakteristika simpliciálních prostorů. *Nechť $\mathcal{H}$ je funkční prostor na metrizovatelném kompaktu K. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:*

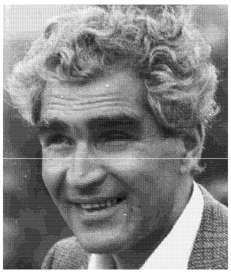
(i) *$\mathcal{H}$ je simpliciální,*
(ii) *je-li $F \subset \mathrm{Ch}_{\mathcal{H}} K$ uzavřená množina a h spojitá funkce na F, existuje $H \in \mathcal{A}(H)$ tak, že $h = H$ na F a $\|h\|_F = \|H\|_K$,*
(iii) *$\mathcal{H}$ splňuje Edwardsovu podmínku.*

(m) Abstraktní Dirichletova úloha. Podmínka (ii) říká, že ke každé spojité funkci h („okrajové podmínce“) definované na uzavřené podmnožině Choquetovy hranice existuje její spojité rozšíření na funkci ze systému $\mathcal{A}(\mathcal{H})$. Tedy vlastně řešení „Dirichletovy úlohy“. Ono rozšíření však zdaleka není jednoznačné (za F můžeme brát i jednobodové množiny!). Často se mluví proto o *abstraktní Dirichletově úloze*, funkci H se pak říká *zeslabené řešení* této úlohy (pozor, nepleťte si se slabým řešením z teorie parciálních diferenciálních rovnic).

(n) Poznámka. Co nám vlastně poslední věta vypovídá o speciálním případě funkčního prostoru $\mathcal{C}(K)$ z příkladu (h3)? V něm je totiž $\mathrm{Ch}_{\mathcal{C}(K)} K = K$ a $\mathcal{C}(K)$ je simpliciální. Podmínka (ii) pak není nic jiného než Tietze-Urysohnova věta (pro metrizovatelný kompakt), Edwardsova podmínka (iii) pak říká, že mezi polospojité funkce lze vložit spojitou funkci (což odpovídá Tong-Katětovově charakteristice normálních topologických prostorů).



N. Boboc



A. Cornea

V tvrzení (b) jsme ukázali, že $\mathcal{H}$-exponované body leží v Choquetově hranici. U simpliciálních prostorů povětšinou tyto dvě množiny splývají. Platí totiž následující dvě tvrzení. Důkaz prvního lze nalézt v H. Bauer [1985], druhé je v N. Boboc and A. Cornea [1967]. Připomeňme, že $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ značí systém všech $\mathcal{H}$-afinních funkcí definovaný v (a).

`(o) Bauerovo tvrzení.` *Nechť $\mathcal{H}$ je funkční prostor na K. Potom $\mathcal{A}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$, právě když existuje uzavřená množina $\mathcal{W} \subset \mathcal{C}(K)$ stabilní na tvoření konečných infim taková, že $\mathcal{H} = \mathcal{W} \cap (-\mathcal{W})$.*

`(p) Věta.` *Je-li $\mathcal{H}$ simpliciální funkční prostor na K, potom každý bod z Choquetovy hranice je $\mathcal{A}(H)$-exponovaný.*

Choquetova hranice hraje také význačnou roli v následujícím abstraktním *principu minima.*

`(q) Princip minima.` *Nechť $\mathcal{H}$ je funkční prostor na K. Je-li $f \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$ afinní funkce na K a $f \geq 0$ na $\mathrm{Ch}_{\mathcal{H}} K$, potom $f \geq 0$ na K.*

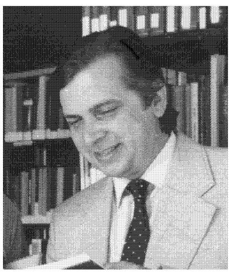
`(o) Bauerovy simplexy.` *Bauerovým simplexem* rozumíme každý simpliciální funkční prostor, pro nějž je jeho Choquetova hranice uzavřenou množinou. Existuje opět řada charakteristik Bauerových simplexů. Je důležité si uvědomit, že to jsou právě ty funkční prostory, v nichž umíme (již jednoznačně) řešit abstraktní Dirichletovu úlohu s „okrajovými podmínkami“ zadanými na celé Choquetově hranici.

***19.6. O Dirichletově úloze**. Uvažujme otevřenou omezenou množinu $U \subset \mathbf{R}^n$ a spojitou funkci f na hranici ∂U. *Klasickou Dirichletovou úlohou* rozumíme nalezení spojitého rozšíření f na $\overline{U}$, které by bylo harmonické na U. Hledáme tedy takovou funkci $F_f \in \mathcal{C}(\overline{U})$, aby $\Delta F_f = 0$ na U a $F_f = f$ na ∂U. Harmonickou funkci F_f na U nazýváme *klasickým řešením Dirichletovy úlohy* příslušným „okrajové podmínce“ f. Vektorový prostor všech spojitých funkcí na $\overline{U}$, které jsou harmonické na U budeme značit $\mathbf{H}(\overline{U})$. Pokud jde o jednoznačnost klasického řešení, nejsou žádné problémy. Je-li totiž $h \in \mathbf{H}(\overline{U})$ a $h = 0$ na ∂U, je $h = 0$ na U.

Zajímáme-li se o existenci řešení Dirichletovy úlohy, záležitost je mnohem delikátnější. Na počátku století totiž H. Lebesgue podal příklad otevřené množiny U v $\mathbf{R}^3$ a spojité funkce f na ∂U, pro niž neexistuje klasické řešení Dirichletovy úlohy. Množinám, které mají tu vlastnost, že ke každé spojité funkci na její hranici existuje klasické řešení Dirichletovy úlohy, říkejme *regulární*.

Pokud máme tedy neregulární množinu U, chtěli bychom i nyní nějakým „rozumným“ způsobem přiřadit každé funkci $f \in \mathcal{C}(\partial U)$ funkci H_f harmonickou na U, a to takovým způsobem, aby v případě, kdy existuje klasické řešení Dirichletovy úlohy pro f, toto splývalo s H_f. K tomu slouží různé metody, z nichž nejznámější je Perronova či Wienerova. Ať již uvažujeme jakoukoliv metodu, výsledek je tentýž, neboť klasická Keldyšova věta dává následující tvrzení. V ní ještě použijeme symbolu $\mathfrak{H}(U)$ pro systém všech funkcí harmonických na U.

`(a) Keldyšova věta.` *Existuje právě jeden lineární operátor $L : \mathcal{C}(\partial U) \to \mathfrak{H}(U)$ s vlastností $L(F \restriction \partial U) = F \restriction U$, pokud $F \in \mathbf{H}(\overline{U})$.*



I. Netuka

Jinak řečeno, Lf dává klasické řešení, pokud existuje. Elementární důkaz této poněkud kuriozní věty (kuriozní proto, že množina všech funkcí, pro něž existuje klasické řešení Dirichletovy úlohy, je v případě neregulární množiny pouze řídká v prostoru $\mathcal{C}(\partial U)$) lze nalézt v I. Netuka [1980].

`(b) Zobecněné řešení.` Harmonické funkci H_f říkáme *zobecněné řešení Dirichletovy úlohy* příslušné „okrajové podmínce“ $f \in \mathcal{C}(\partial U)$. Volme nyní $z \in \partial U$ a $f \in \mathcal{C}(\partial U)$. Může se stát, ale také nemusí, že $\lim\limits_{x \to z} H_f(x) = f(z)$. V případě, že uvedená rovnost platí pro každou funkci $f \in \mathcal{C}(\partial U)$, nazýváme z *regulárním* bodem množiny U. Množinu všech regulárních bodů značme symbolem U_{reg}. Množina U je pak regulární, právě když každý její hraniční bod je regulární, tedy pokud $\partial U = U_{reg}$.

Volme nyní $x \in U$. Není těžké se přesvědčit, že zobrazení $x \mapsto H_f(x)$ je nezáporný lineární funkcionál na prostoru $\mathcal{C}(\partial U)$. Podle Rieszovy věty o reprezentaci existuje Radonova míra μ_x na ∂U tak, že $H_f(x) = \int_{\partial U} f\, d\mu_x$ pro každé $f \in \mathcal{C}(\partial U)$. Míře μ_x se říká *harmonická míra* v bodě x.

Protože z je regulární bod množiny U, právě když $\lim_n H_f(x_n) = f(z)$ pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset U$, $x_n \to z$ a každou funkci $f \in \mathcal{C}(\partial U)$, dostáváme, že $z \in U_{reg}$ tehdy a jen tehdy, pokud $\mu_{x_n} \overset{w^*}{\to} \varepsilon_z$, kdykoliv $x_n \in U$ a $x_n \to z$. Jinými slovy, pokud harmonické míry konvergují slabě k ε_z.

V dalším popíšeme Choquetovu hranici prostoru $\mathbf{H}(\overline{U})$. Důkaz je založen na následujícím lemmatu náležejícímu M.V. Keldyšovi [1941].

(c) Keldyšovo lemma. *Nechť z je regulárním bodem U. Potom existuje $h \in \mathbf{H}(\overline{U})$ tak, že $h(z) = 0$ a $h > 0$ všude jinde na $\overline{U}$. Jinak řečeno, každý regulární bod množiny U je $\mathbf{H}(\overline{U})$-exponovaný bod $\overline{U}$.*

Následující věta je připisována H. Bauerovi [1961].

(d) Věta. *Choquetova hranice $\operatorname{Ch}_{\mathbf{H}(\overline{U})} \overline{U}$ splývá s množinou U_{reg} všech regulárních bodů U.*

Důkaz. Z Keldyšova lemmatu a věty 19.3 ihned plyne, že $U_{reg} \subset \operatorname{Ch}_{\mathbf{H}(\overline{U})} \overline{U}$.

Buď tedy $z \in \operatorname{Ch}_{\mathbf{H}(\overline{U})} \overline{U}$. Nemůže být $z \in U$. Jinak by totiž různé míry ε_z a μ_z (tuto harmonickou míru můžeme také chápat jako míru na $\overline{U}$ s nosičem obsaženým v ∂U) byly obě $\mathbf{H}(\overline{U})$-reprezentující. Volme $h \in \mathbf{H}(\overline{U})$ a $x_n \in U$, $x_n \to z$. Předpokládejme, že $\mu \in \mathcal{M}_1(\overline{U})$ je hromadný bod posloupnosti měr $\{\mu_{x_n}\}$ ve w^*-topologii. Protože $\int_{\overline{U}} h\, d\mu_{x_n} = h(x_n) \to h(z)$, musí být $\int_{\overline{U}} h\, d\mu = h(z)$. Ježto jsme předpoládali, že z leží v Choquetově hranici, je $\mu = \varepsilon_z$. Tudíž $\mu_{x_n} \overset{w^*}{\to} \varepsilon_z$ a z je regulárním bodem U. ■

***19.7. Stavový prostor.** Učiňme na tomto místě krátkou a jen velice informativní poznámku. Nechť K je kompakt a $\mathcal{H}$ uzavřený podprostor $\mathcal{C}(K)$ obsahující konstanty a oddělující body K. *Stavovým prostorem* $\mathcal{H}$ rozumíme množinu

$$\mathcal{S}(\mathcal{H}) := \big\{\Phi \in \mathcal{H}^* : \|\Phi\| = 1 = \Phi(1_K)\big\}$$

opatřený w^*-topologií (zde 1_K značí funkci rovnou identicky 1 na K). Stavový prostor je konvexní w^*-kompaktní podmnožinou $(\mathcal{H}^*, w^*)$.

Kanonické vnoření $\kappa : x \mapsto L_x$, kde $L_x(f) = f(x)$ pro $f \in \mathcal{H}$, je homeomorfním zobrazením K na $\kappa(K) \subset \mathcal{S}(\mathcal{H})$ (porovnejte s větou *15.3). Protože $\mathcal{S}(\mathcal{H}) = \overline{\operatorname{co}}\, \kappa(K)$, dostáváme, že $\operatorname{ext} \mathcal{S}(\mathcal{H}) \subset \kappa(K)$. Choquetova hranice $\operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K$ je pak právě $\kappa^{-1}(\operatorname{ext} \mathcal{S}(\mathcal{H}))$.

Definujeme-li dále zobrazení θ z $\mathcal{H}$ do prostoru $\mathcal{A}(\mathcal{S}(\mathcal{H}))$ všech spojitých afinních funkcí na $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ předpisem $\theta : f \mapsto \widehat{f}$ (kde $\widehat{f}(s) := s(f)$ pro $s \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$), je θ izometricko-izomorfním zobrazením $\mathcal{H}$ na $\mathcal{A}(\mathcal{S}(\mathcal{H}))$.

Tímto způsobem můžeme přenést řadu problémů z teorie funkčních prostorů na teorii pro kompaktní konvexní podmnožiny lokálně konvexních prostorů.

Existují různé důkazy Stone-Weierstrassovy věty. Podejme zde jeden z nich, váže se totiž na Choquetovu teorii a byl inspirován článkem J. Bliedtner [1996].


J. Bliedtner

***19.8. Stone-Weierstrassova věta.** *Nechť K je kompaktní (Hausdorffův) topologický prostor a $\mathcal{H}$ lineární podprostor $\mathcal{C}(K)$ obsahující konstanty, oddělující body a tvořící svaz. Potom $\mathcal{H}$ je hustý v $\mathcal{C}(K)$.*

Jak jsme již vícekrát řekli, $\mathcal{H}$ tvoří *svaz*, jestliže $\max(f,g), \min(f,g) \in \mathcal{H}$, pokud $f, g \in \mathcal{H}$.

Důkaz. Stejně jako v *19.5.a označme symbolem $\mathfrak{M}_x(\mathcal{H})$ množinu všech pravděpodobnostních měr na K reprezentujících bod $x \in K$ a $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ množinu všech $\mathcal{H}$-afinních funkcí na K.

Ukážeme-li, že $\mathfrak{M}_x(\mathcal{H}) = \{\varepsilon_x\}$ pro každé $x \in K$, bude podle důsledků (d) a (f) z *19.5 $\mathcal{A}(\mathcal{H}) = \mathcal{C}(K)$. Volme tedy $x \in K$, $\nu \in \mathfrak{M}_x(\mathcal{H})$ a $h \in \mathcal{H}$. Protože funkce $\varphi : t \mapsto |h(t) - h(x)|$ leží v $\mathcal{H}$, dostáváme $0 = \varphi(x) = \int_K \varphi d\nu = \int_K \big|h(t) - h(x)\big| d\nu(t)$. Tudíž $\operatorname{supt} \nu \subset \big\{t \in K : h(t) = h(x)\big\}$. Protože $\mathcal{H}$ odděluje body, je $\bigcap_{h \in \mathcal{H}} \big\{t \in K : h(t) = h(x)\big\} = \{x\}$. Tedy $\operatorname{supt} \nu \subset \{x\}$ a nutně musí být $\nu = \varepsilon_x$.

Volme konečně $f \in \mathcal{C}(K)$, $x \in K$ a $\varepsilon > 0$. Podle předchozího existuje funkce $h_x \in \mathcal{H}$, pro niž $f \le h_x$ a $f(x) + \varepsilon \ge h_x(x)$. Ze spojitosti funkcí f a h_x plyne existence okolí U_x bodu x, na němž

$f + 2\varepsilon \geq h_x$. Protože K je kompakt, existují $x_1, \ldots, x_n \in K$ tak, že $K = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}$. Potom ovšem pro funkci $h := \min(h_{x_1}, \ldots, h_{x_n}) \in \mathcal{H}$ máme $f \leq h \leq f + 2\varepsilon$ na K. ■

***19.9. Rieszova věta o reprezentaci**. Rieszovu větu zdaleka nebudeme dokazovat, její důkaz pro lokálně kompaktní prostory lze nalézt třeba v [LM]. Chceme pouze ukázat, že ji lze chápat jako speciální případ obecné věty 19.4 o integrální reprezentaci.

`Rieszova věta.` *Nechť K je kompaktní topologický prostor a L nezáporný lineární funkcionál na prostoru $\mathcal{C}(K)$ o normě 1. Potom existuje pravděpodobnostní Radonova míra μ na K tak, že*

$$Lf = \int_K f\, d\mu \quad \textit{pro každou funkci} \quad f \in \mathcal{C}(K).$$

Objasnění. Označme tedy $X = \mathcal{C}(K)$ uvažovaný Banachův prostor všech spojitých funkcí na K. Především si uvědomme, že každý nezáporný lineární funkcionál na X je již omezený, a je tedy prvkem duálu X^*. Množina

$$\Omega := \{\varphi \in X^* : \|\varphi\| = 1 = \varphi(c_K)\}$$

je konvexní w^*-kompaktní podmnožinou X^*. Dále, obdobně jako v 18.8 zjistíme, že množina všech extremálních bodů Ω se shoduje s množinou $\{\varphi_t : t \in K\}$, kde kanonické vnoření $\kappa : t \mapsto \varphi_t : K \to \Omega$ je homeomorfním vnořením K do X^* z *15.2. Protože κ je homeomorfizmus mezi K a Ω, je množina $\operatorname{ext}\Omega$ w^*-uzavřená.

Nechť tedy $L \in \Omega \subset X^*$ je náš lineární funkcionál. Podle věty 19.4 o integrální reprezentaci existuje pravděpodobnostní Radonova míra ν na $Z := \overline{\operatorname{ext}\Omega}^{w^*}$ tak, že

$$F(L) = \int_Z F\, dv \quad \text{pro} \quad F \in (X^*, w^*)^*.$$

Nyní si stačí uvědomit, že $Z = \operatorname{ext}\Omega$ je homeomorfní s K, že duál k (X^*, w^*) je shodný s kanonickým vnořením $\varepsilon X \subset X^{**}$ (tj. ke každému funkcionálu $F \in (X^*, w^*)^*$ existuje $f \in X = \mathcal{C}(K)$ tak, že $F(L) = L(f)$), abychom odvodili, že

$$L(f) = \int_K f\, d\kappa^{-1}(\nu) \quad \text{pro} \quad f \in \mathcal{C}(K).$$

Samozřejmě, $\kappa^{-1}(\nu)$ (obraz míry ν při zobrazení κ^{-1}) je pravděpodobnostní Radonova míra na K (srovnej [LM], cvičení 16.8).

`Poznámka.` Radonova reprezentující míra z Rieszovy věty je vpodstatě jednoznačně určena — všechny takové míry se totiž shodují na borelovských podmnožinách K.

*20. Derivování v Banachových prostorech

***20.1. Gâteauxova a Fréchetova derivace**. Připomeňme základní pojmy z 20. kapitoly. Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a f zobrazení X do Y definované na jistém okolí bodu $x_0 \in X$. Existuje-li omezený lineární operátor $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ tak, že

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x_0 + \lambda x) - f(x_0)}{\lambda} = Lx$$

pro každé $x \in X$, řekneme, že f je *gâteauxovsky diferencovatelná* v bodě x_0.

Jestliže dokonce platí

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Lh}{\|h\|} = 0,$$

nazveme f *fréchetovsky diferencovatelnou* v bodě x_0. Fréchetovsky diferencovatelné zobrazení je i gâteauxovsky diferencovatelné, ne však naopak.

Lineární operátor L v kterékoliv z těchto definic je jednoznačně určen. Pokud existuje, nazývá se *Gâteauxovou* či *Fréchetovou derivací* zobrazení f v bodě x_0.

***20.2. Diferencovatelnost normy**. Shrňme některé výsledky o diferencovatelnosti normy na Banachových prostorech.

Šmuljanova věta dokázaná v 21.21 říká, že norma $\|.\| : x \mapsto \|x\|$ na Banachově prostoru X je gâteauxovsky diferencovatelná v každém nenulovém bodě X, právě když prostor X je hladký.

Pokud je X^* lokálně uniformně konvexní, pak je norma na X fréchetovsky diferencovatelná v každém nenulovém bodě X. Porovnejte toto tvrzení s *21.5.c.

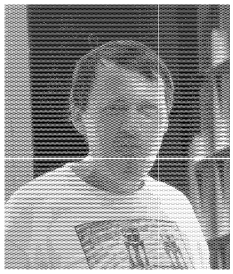
Je celá sada vět o tom, kdy na daném prostoru existuje ekvivalentní norma, která je gâteauxovsky či fréchetovsky diferencovatelná. Mohu doporučit monografii R. Deville, G. Godefroy and V. Zizler [*1993] či [HHZ]. Spojíme-li předešlé věty s Clarksonovou větou 21.26 či Kadec-Klee-Asplundovou větou *21.2.d, dostaneme prototypy takových vět: *Na každém separabilním Banachově prostoru existuje ekvivalentní norma gâteauxovsky diferencovatelná v každém nenulovém bodě. Je-li duál* X^* *separabilní, existuje na* X *ekvivalentní norma, která je dokonce fréchetovsky diferencovatelná v každém bodě* $x \neq 0$.

Jen si uvědomme, že X je separabilní, pokud X^* je separabilní. Pokud nevěříte, podívejte se na větu*2.8.d.

J. Kurzweil

Jako zajímavost uveďme, že na prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ neexistuje žádná ekvivalentní fréchetovsky diferencovatelná norma. To ukázal J. Kurzweil v [1954].

***20.3. Diferencovatelnost konvexních funkcí**. V poznámce ke cvičení 20.10.e jsme uvedli, že spojité konvexní funkce na separabilních Banachových prostorech jsou gâteauxovsky diferencovatelné na hustých G_δ-množinách. Na neseparabilních prostorech množina bodů, v nichž je spojitá konvexní funkce gâteauxovsky diferencovatelná, může být prázdná (podívejte se na cvičení 20.10.e) či nemusí být typu G_δ (příklady jsou již obtížnější). Množina bodů fréchetovské diferencovatelnosti spojité konvexní funkce může být také prázdná, ale je vždy typu G_δ (to je dokázáno v *21.11).



M. Fabián

Tyto postřehy vedou k zavedení Asplundových a slabých Asplundových prostorů. Banachův prostor X je *Asplundův*, jestliže každá spojitá konvexní funkce definovaná na (neprázdné) otevřené konvexní podmnožině X je fréchetovsky diferencovatelná na její husté G_δ-podmnožině. Zaměníme-li slůvko „fréchetovsky“ za „gâteauxovsky“, přijdeme k definici *slabě Asplundových prostorů*. Můžete se podívat na *21.11 a k již zmíněným materiálům přidejme ještě monografie M. Fabiána [*1997] či R.R. Phelpse [*1993].

Zakončeme tento odstaveček větou, jejíž odvození lze nalézt v [HHZ]. Můžete se též podívat na *21.3.

`Věta.` *Buď* X *separabilní Banachův prostor. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) X^* *je separabilní,*
(ii) *na* X *existuje ekvivalentní fréchetovsky diferencovatelná norma,*
(iii) *na* X *existuje ekvivalentní norma, která je fréchetovsky diferencovatelná a v níž je* X *lokálně uniformně konvexní,*
(iv) *na* X *existuje ekvivalentní lokálně uniformně konvexní norma, v jejíž duální normě je* X^* *také lokálně uniformně konvexní,*
(v) X *je Asplundův.*

***20.4. Diferencovatelnost lipschitzovských funkcí**. V prostorech konečné dimenze vypovídá o diferencovatelnosti lipschitzovských funkcí Rademacherova věta, jejíž důkaz lze nalézt třeba v [LM].

`(a) Rademacherova věta.` *Nechť* G *je otevřená podmnožina* $\mathbf{R}^n$ *a* $f : G \to \mathbf{R}^k$ *lokálně lipschitzovské zobrazení. Potom* f *je fréchetovsky diferencovatelné skoro všude (vzhledem k Lebesgueově míře na* G*).*

O zobecnění Rademacherovy věty na Banachovy prostory mající Radon-Nikodýmovu vlastnost se lze dočíst ve větě 22.8.

Hlubokou a zásadní větou je zde následující tvrzení z D. Preiss [1990].

(b) Preissova věta. *Nechť X je Asplundův prostor a f reálná lipschitzovské funkce na otevřené podmnožině $G \subset X$. Potom f je fréchetovsky diferencovatelná na husté podmnožině G.*

***20.5. Diferencovatelnost vektorových funkcí**. Je-li $f : X \to Y$ lipschitzovské zobrazení (dokonce) mezi Hilbertovými prostory, potom f nemusí být nikde fréchetovsky diferencovatelné. Příklad je uveden na str. 115 v [HHZ]. Nicméně máme alespoň následující výsledek.

(c) Věta. *Je-li X separabilní, Y má Radon-Nikodýmovu vlastnost a $f : X \to Y$ je lipschitzovské zobrazení, potom f je gâteauxovsky diferencovatelné na husté množině.*

Tato věta byla dokázána P. Mankiewiczem [1973] jako jakási nekonečně dimenzionální analogie Rademacherovy věty (vlastně obsahuje i silnější tvrzení spočívající v zavedení jistých nulových množin). Nezávisle pak i N. Aronszajnem [1976] a J.P.R. Christensenem [1973] (oba užívali poněkud jiný pojem nulových množin).

*21. Konvexita, hladkost a renormace

***21.1. Modul konvexity**. Buď X Banachův prostor (dimenze alespoň 2). *Modul konvexity δ_X* bude reálná funkce definovaná předpisem

$$\delta_X : \varepsilon \mapsto \inf\bigl\{1 - \tfrac{1}{2}\|x+y\| : x, y \in S_X \ , \ \|x-y\| = \varepsilon\bigr\} \quad \text{pro} \quad \varepsilon \in [0,2]\,.$$

(a) Vlastnosti modulu konvexity. *Modul konvexity δ_X zobrazuje interval $[0,2]$ do $[0,1]$. Funkce δ_X je kladná pro $\varepsilon > 0$ a neklesající na $[0,2]$. Neklesající na intervalu $(0,2]$ je také funkce $\varepsilon \mapsto \frac{1}{\varepsilon}\delta_X(\varepsilon)$.*

Návod. Detailní důkaz lze nalézt třeba v J. Diestel [*1984]. ♣

(b) Cvičení. Jako cvičení ukažte, že modul konvexity Hilbertova prostoru H je dán vzorečkem

$$\delta_H(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2}\,, \quad \varepsilon \in [0,2]\,,$$

a že

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf\{1 - \frac{1}{2}\|x+y\| : x, y \in B_X \ , \ \|x-y\| \geq \varepsilon\}\,.$$

První tvrzení se samozřejmě opírá o rovnoběžníkové pravidlo, důkaz druhého je poněkud technicky náročnější. Lze nahlédnout třeba do [HHZ] či J. Lindenstrauss and L. Tzafriri [*1979].

(c) Poznámka. Modul konvexity nemusí být konvexní funkcí. Příklad takového Banachova prostoru je podán v V.I. Liokoumovich [1973].

(d) Větička. *Banachův prostor X je striktně konvexní, právě když $\delta_X(2) = 1$.*

Důkaz. Nechť $\delta_X(2) = 1$. Volme $x, y \in S_X$ tak, aby $\|\frac{x+y}{2}\| = 1$. Protože

$$\left\|\frac{x-y}{2}\right\| = \left\|\frac{x+(-y)}{2}\right\| \leq 1 - \delta_X\bigl(\|x-(-y)\|\bigr) = 1 - \delta_X(2) = 0\,,$$

je nutně $x = y$. Naopak, nechť X je striktně konvexní a $x, y \in S_X$, $\|x-y\| = 2$. Potom nutně musí být $x + y = 0$ (neboť v opačném případě bychom dostali $1 = \|\frac{x-y}{2}\| = \|\frac{x+(-y)}{2}\| < 1$), odkud plyne, že $\delta_X(2) = 1$. ∎

Následující tvrzení je skoro samozřejmé.

(e) Postřeh. *Banachův prostor X je uniformně konvexní, právě když $\delta_X(\varepsilon) > 0$ pro každé $\varepsilon > 0$.*

Jsou-li X a Y Banachovy prostory, jejichž moduly konvexity splňují na intervalu $[0,2]$ nerovnost $\delta_X \geq \delta_Y$, můžeme říci, že prostor X je „více konvexní“ než Y. Z tohoto hlediska jsou Hilbertovy prostory nejvíce konvexní. Platí totiž následující tvrzení pocházející od G. Nördlandera [1960]. V potaz je ovšem třeba vzít i výsledek cvičení v (b).

(f) Věta. *Nechť X je Banachův prostor a $0 < \varepsilon < 2$. Potom $\delta_X(\varepsilon) \le 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2}$.*

O dalších vlastnostech a významu modulu konvexity se lze dočíst třeba v J. Diestel [*1984], J. Lindenstrauss and L. Tzafriri [*1979] či v B. Beauzamy [*1982].

***21.2. Lokálně uniformní konvexita**. Banachův prostor X nazveme *lokálně uniformně konvexním*, jestliže má následující vlastnost: Kdykoliv volíme posloupnost $\{x_n\}$ z jednotkové sféry S_X a $y \in S_X$ takové, že pro středy úseček platí $\|\frac{x_n+y}{2}\| \to 1$, potom již $x_n \to y$. Ekvivalentně lze říci, že X je lokálně uniformně konvexní, jestliže $x_n - x \to 0$, kdykoliv $x_n, x \in X$ a $\big(2\|x\|^2 + 2\|x_n\|^2 - \|x + x_n\|^2\big) \to 0$.

Pro lokálně uniformně konvexní prostory platí řada tvrzení, uveďme některá z nich.

(a) Větička. *Každý uniformně konvexní prostor je lokálně uniformně konvexní a každý lokálně uniformně konvexní je striktně konvexní.*

Návod. Důkaz by neměl činit obtíže. Můžete třeba použít charakteristiku (iii) v 21.6 a přímo definici striktní konvexity. ♣

(b) Příklady. (b1) Na prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ definujme normu $\|.\|_*$ předpisem $\|f\|_*^2 := \|f\|^2 + \|f\|_2^2$, kde $\|.\|$ je standardní sup-norma na $\mathcal{C}([0,1])$ a $\|.\|_2$ je L^2-norma. Potom $\|.\|_*$ je striktně konvexní norma na $\mathcal{C}([0,1])$, není však lokálně uniformně konvexní. Pokud jde o striktní konvexitu, podívejte se na Kleeovu větu 21.27. Jestliže $f_n \to 0$ v normě $\|.\|_*$, musí posloupnost $\{f_n\}$ konvergovat k nule stejnoměrně. Není tedy těžké sestrojit posloupnost funkcí $\{h_n\}$ z jednotkové sféry tak, aby $\big\|\frac{1}{2}(h_n + 1)\big\|_* \to 1$ a aby posloupnost $\{h_n - 1\}$ nekonvergovala k nule stejnoměrně.

Prostor c_0 uvažovaný s Dayovou normou z *1.2.c je příkladem lokálně uniformního prostoru, který není uniformně konvexní. Dayovu normu v tomto případě můžeme definovat jednoduše takto: Je-li $x = \{x_n\} \in c_0$, přerovnejme posloupnost $\{|x_n|\}$ tak, aby tato přerovnaná posloupnost $\{|x_{n_j}|\}$ byla nerostoucí a definujme $\|x\|_d := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_{n_j}^2}{2^j}$. O důkazu, že c_0 s Dayovou normou je lokálně uniformně konvexní jsme se zmínili v *1.2.c. Zbývá ukázat, že není uniformně konvexní. K tomu můžete využít charakteristiky uniformní konvexity uvedené v 21.6 či 21.7, uvažujete-li posloupnosti dané prvky

$$x_n := (1, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 0, \dots) \quad \text{a} \quad y_n := (0, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 0, \dots),$$

kde cifry 1 jsou od n-tého do $2n$-tého místa.

(c) Tvrzení. *Lokálně uniformně konvexní prostory mají Kadec-Kleeovu vlastnost.*

Návod. Můžete nahlédnout do návodu cvičení 21.28.h. Přitom Kadec-Kleeova vlastnost z *21.14 znamená, že konvergence a slabá konvergence posloupností splývají na jednotkové sféře. ♣

Poznámka. Lokálně uniformně konvexní prostory mají dokonce vlastnost K z *21.14.

Pokud jde o získání norem lepších vlastností, lze vyslovit následující netriviální věty. První z nich dokázal M.I. Kadec [1959]. Pokud jde o druhou, její počátky jdou k nezávislým pracem M.I. Kadec [1965] a V.L. Klee [1960–61]. A pomocí „Asplundovy průměrovací metody“, o které se zmiňujeme v *21.3, pak získáme tvrzení druhé věty.

(d) Kadecova věta. *Na každém separabilním Banachově prostoru X existuje ekvivalentní lokálně uniformně konvexní norma.*

(e) Kadec-Klee-Asplundova věta. *Jestliže X^* je separabilní, potom na X existuje lokálně uniformní norma taková, že i duál X^* s jeho duální normou je lokálně uniformně konvexní.*

(f) Poznámky. (f1) Je-li Banachův prostor X separabilní a X^* je lokálně uniformně konvexní, je i X^* separabilní (kombinací Kadecovy věty z *21.2.d, Asplundovy věty z *21.3.c a ekvivalence ve větě *20.3 se pokuste toto tvrzení osvětlit). Předpoklad separability X^* nelze tedy v tvrzení Kadec-Klee-Asplundovy věty vynechat.

(f2) Je-li X Banachův prostor a duální norma na X^* je lokálně uniformně konvexní, pak (původní) norma na X je fréchetovsky diferencovatelná. Důkaz lze nalézt v R. Deville, G. Godefroy and V. Zizler [*1993], str.43.

Důležitou je i následující věta o spojitosti metrické projekce v lokálně uniformně konvexních prostorech.

(g) Věta. *Nechť X je reflexivní lokálně uniformní Banachův prostor a C jeho konvexní uzavřená podmnožina. Potom metrická projekce $P_C : X \to C$, která je dobře definována podle 21.15, je spojitá.*

Návod. Stačí se podívat na důkaz věty 21.11 a uvědomit si, že v něm jsme vlastně využili pouze lokální uniformní konvexitu. ♣

***21.3. Ještě k renormačním větám**. Je-li X separabilní Banachův prostor, potom na něm podle Clarksonovy věty 21.26 existuje ekvivalentní striktně konvexní norma. V. Klee [1959] dokázal následující zesílení.

(a) Kleeova věta. *Nechť X je separabilní Banachův prostor. Potom na X lze nalézt takovou striktně konvexní ekvivalentní normu, při níž i duál X^* je striktně konvexní.*

(b) Poznámka. Odvoláme-li se na další Kleeovu větu 21.22, je dokonce v této nové normě X nejen striktně konvexní, ale i hladký.

Jsou-li prostory X a X^* separabilní, existují na nich ekvivalentní striktně konvexní normy. Není ovšem nikterak jasné, je-li duál prostoru X uvažovaného s novou ekvivalentní striktně konvexní normou také striktně konvexní. E. Asplund [1967] ukázal metodu, dnes nazývanou *Asplundovou průměrovací metodou*, jak ze dvou „hezkých" norem na X a X^* dostat jednu „hezkou" normu. Nové přístupy k Asplundově metodě využívající metodu kategorií jsou rozpracovány v již zmíněné monografii G. Godefroy, R. Deville and V. Zizler [*1993]. Následující věta je jejich prototypem.

(c) Asplundova věta. *Nechť na Banachově prostoru X i jeho duálu X^* existují striktně konvexní ekvivalentní normy, přičemž norma na X^* je duální normou (k nějaké normě na X). Potom na X existuje taková striktně konvexní ekvivalentní norma, že i její duální norma na X^* je striktně konvexní.*

(d) Poznámka. Obdobné tvrzení platí, uvažujeme-li na X a X^* uniformně konvexní či lokálně uniformně konvexní normy.

Většina doposud uvedených renormačních vět se týkala separabilních prostorů. Jaká je situace v neseparabilních Banachových prostorech napovídá další věta dokázaná J. Lindenstraussem [1966].

(e) Věta. *Nechť X je reflexivní Banachův prostor. Potom na X existuje taková striktně konvexní ekvivalentní norma, že i X^* s jeho duální normou je striktně konvexní.*

(f) Poznámka. Poznamenejme pouze, že předchozí věta platí i pro *WCG*-prostory z odstavce *21.13.

Nakonec z mnoha dalších renormačních vět uveďme následující.

S.L. Trojanski

(g) Trojanského věta. *Nechť X je reflexivní. Potom na X existuje ekvivalentní norma při níž jsou X a jeho duál X^* lokálně uniformně konvexní.*

***21.4. Uniformně hladké prostory**. Striktně konvexní a hladké prostory jsou podle Kleeovy věty 21.22 v jakémsi „duálním" vztahu. Je otázkou, jakého partnera máme hledat pro uniformně konvexní prostory. Ukazuje se, že vhodným kandidátem jsou prostory, kterým se dnes říká uniformně hladké. Jako jejich definici lze uvést následující. Banachův prostor X je *uniformně hladký*, jestliže existuje

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{1}{h}\left(\|x+\tau y\| - \|x\|\right),$$

a to stejnoměrně pro x, y z jednotkové sféry S_X.

Uvědomme si, že Banachův prostor X je uniformně hladký, právě když norma $x \mapsto \|x\|$ je stejnoměrně fréchetovsky diferencovatelná na S_X.

Existují i jiné ekvivalentní definice uniformně hladkých prostorů. Pro jednu z charakteristik uveďme následující definici.

Aby však alespoň trochu bylo vidět, odkud se vynořila, proveďme následující úvahu.

Předpokládejme tedy, že X je uniformně hladký a označme

$$\varphi_x(y) := \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}\left(\|x+\tau y\| - \|x\|\right).$$

Zadejme ještě $\varepsilon > 0$. Podle předpokladu existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x, y \in S_X$ a $|\tau| < \varepsilon$ máme

$$\left|\frac{\|x + \tau y\| - \|x\|}{\tau} - \varphi_x(y)\right| < \varepsilon .$$

Je-li $\tau > 0$, dostáváme odtud

$$\|x + \tau y\| - \|x\| - \tau\varphi_x(y) \le \big|\|x + \tau y\| - \|x\| - \tau\varphi_x(y)\big| < \tau\varepsilon$$

a

$$\|x + \tau y\| - \|x\| + \tau\varphi_x(y) \le \big|\|x + \tau y\| - \|x\| + \tau\varphi_x(y)\big| < \tau\varepsilon .$$

Čili

$$\|x + \tau y\| + \|x - \tau y\| - 2\|x\| = \|x + \tau y\| + \|x - \tau y\| - 2 < 2\tau\varepsilon .$$

Jinými slovy

$$\lim_{\tau \to 0_+} \frac{\|x + \tau y\| + \|x - \tau y\| - 2}{2\tau} = 0 ,$$

a to stejnoměrně vzhledek k $x, y \in S_X$.

Modul hladkosti ϱ_X Banachova prostoru X je pro $\tau \ge 0$ definován předpisem

$$\begin{aligned}
\varrho_X(\tau) &= \sup\Big\{\frac{\|x + y\| + \|x - y\|}{2} - 1 : \|x\| = 1, \|y\| = \tau\Big\} \\
&= \sup\Big\{\frac{\|x + y\|}{2} + \frac{\|x - y\|}{2} - 1 : \|x\| \le 1, \|y\| \le \tau\Big\} \\
&= \sup\Big\{\frac{\|x + \tau y\| + \|x - \tau y\|}{2} - 1 : \|x\| = \|y\| = 1\Big\} .
\end{aligned}$$

Je-li jasné, o jaký Banachův prostor se jedná, budeme často index X vynechávat a modul hladkosti značit krátce jen ϱ.

Protože $2\|x\| \le \|x + \tau y\| + \|x - \tau y\|$, je vždy $\varrho_X(\tau) \ge 0$. Dále $\varrho_X(0) = 0$.

Můžeme vyslovit následující větu. Nebudeme ji dokazovat (implikaci (i) $\Rightarrow$ (ii) jsme ovšem již zdůvodnili), pouze v dalším na jejím základě odvodíme některé vlastnosti uniformně hladkých prostorů. Koneckonců kupříkladu uvedenou charakterizaci v (ii) bychom mohli vzít přímo za definici uniformní hladkosti.

`(a) Věta.` *Následující podmínky jsou pro daný Banachův prostor X ekvivalentní:*

(i) *X je uniformně hladký,*

(ii) $\varrho'_+(0) := \lim\limits_{\tau \to 0} \frac{\varrho(\tau)}{\tau} = 0$,

(iii) *ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každou dvojici $x, y \in X$, $\|x - y\| \le \varepsilon$ jest $\|x + y\|(1 + \varepsilon) \ge \|x\| + \|y\|$.*

`(b) Tvrzení.` *Každý uniformně hladký prostor je hladký.*

Důkaz. Nechť X je uniformně hladký Banachův prostor. Předpokládejme existenci $x \in S_X$ a tečných funkcionálů $\varphi, \psi \in S_{X^*}$ s vlastnostmi $\varphi \ne \psi$, $\varphi(x) = \psi(x) = 1$. Tudíž nutně musíme najít $h \in S_X$ tak, že $\varphi(h) > 0$ a $\psi(h) < 0$. Potom ovšem pro každé $\tau > 0$ máme

$$\begin{aligned}
\|x + \tau h\| + \|x - \tau h\| - 2 &\ge \varphi(x + \tau h) + \psi(x - \tau h) - 2 \\
&\ge 2 + \tau\varphi(h) - \tau\psi(h) - 2 = \tau(\varphi(h) - \psi(h)) .
\end{aligned}$$

Tedy $\frac{\varrho(\tau)}{\tau} \ge \frac{1}{2}(\varphi(h) - \psi(h)) > 0$, a prostor X nemůže být uniformně hladký. ■

`(c) Tvrzení.` *Modul hladkosti a modul konvexity z *21.1 jsou spolu svázány vztahy*

$$\varrho_X(\tau) = \sup\Big\{\frac{\tau\varepsilon}{2} - \delta_{X^*}(\varepsilon) : \varepsilon \in (0, 2]\Big\} \quad a \quad \varrho_{X^*}(\tau) = \sup\Big\{\frac{\tau\varepsilon}{2} - \delta_X(\varepsilon) : \varepsilon \in (0, 2]\Big\}$$

platných pro každé $\tau > 0$.

Důkaz. Dokažme třeba druhý vzoreček, důkaz prvního je analogický. Při sledování následující série rovností vezměte v potaz duální vyjádření normy z 2.24. Máme

$$\begin{aligned}
2\varrho_{X^*}(\tau) &= \sup\big\{\|\varphi+\tau\psi\|+\|\varphi-\tau\psi\|-2 : \|\varphi\|=\|\psi\|=1\big\}\\
&= \sup\big\{\varphi(x)+\tau\psi(x)+\varphi(y)-\tau\psi(y)-2 : \|\varphi\|=\|\psi\|=\|x\|=\|y\|=1\big\}\\
&= \sup\big\{\|x+y\|+\tau\|x-y\|-2 : \|x\|=\|y\|=1\big\}\\
&= \sup\big\{\|x+y\|+\tau\varepsilon-2 : \|x\|=\|y\|=1\ ,\ \|x-y\|=\varepsilon\ ,\ \varepsilon\in[0,2]\big\}\\
&= \sup\big\{\tau\varepsilon-2\delta_X(\varepsilon) : \varepsilon\in[0,2]\big\}\,.
\end{aligned}$$

■

Následující věta pocházející od V.L. Šmuljana [1941] udává základní vlastnosti uniformně hladkých prostorů.

(d) **Věta.** *Banachův prostor X je uniformně hladký, právě když X^* je uniformně konvexní, a X je uniformně hladký, právě když X^* je uniformně konvexní.*
Uniformně hladké prostory jsou reflexivní.

Důkaz. Předpokládejme, že X^* je uniformně hladký. Chceme ukázat, že X je uniformně konvexní. K tomu ukážeme, že $\delta_X(\varepsilon)>0$ pro každé $\varepsilon\in(0,2]$. Volme tedy takové $\varepsilon>0$. Protože X^* je uniformně hladký, z výše uvedené charakteristiky dostaneme existenci $\tau>0$ s vlastností $\varrho_{X^*}(\tau)\le\frac{\tau\varepsilon}{4}$. Použijeme-li vztah v (c) mezi ϱ_{X^*} a δ_X, máme $\frac{\tau\varepsilon}{2}-\delta_X(\varepsilon)\le\frac{\tau\varepsilon}{4}$. Tudíž $\delta_X(\varepsilon)\ge\frac{\tau\varepsilon}{4}>0$. Zbylé implikace se dokáží podobně.

Nechť nyní X je uniformně hladký. Takže podle první části důkazu je X^* uniformně konvexní. K závěru, že X je reflexivní, stačí použít 21.13 a Pettisovu charakteristiku reflexivity z 16.15. ■

(e) **Cvičení.** Abyste se trochu procvičili v této partii, zkuste si dokázat, že $\varrho_X(\tau)=\varrho_{X^{**}}(\tau)$. Tato rovnost plyne z definice modulu hladkosti použitím Golstineova lemmatu 16.8, podle kterého je εB_X (pozor, zde ε značí kanonické vnoření X do X^{**}) $\sigma(X^{**},X^*)$-hustá podmnožina $B_{X^{**}}$.

***21.5. Lokálně uniformně hladké prostory**. Nechť X je Banachův prostor. Šmuljanova věta 21.21 říkala, že X je hladký, právě když norma je gâteauxovsky diferencovatelná v každém bodě jednotkové sféry S_X, zatímco podle věty *21.4 je X uniformně hladký, právě když norma je stejnoměrně fréchetovsky diferencovatelná na S_X. Můžeme si tedy logicky položit otázku, jak vypadají prostory, v nichž je norma fréchetovsky diferencovatelná. Pokusíme se stručně odpovědět.

(a) **Lokální modul hladkosti**. Pro $x\in X$ a $\tau>0$ položme

$$\varrho(\tau,x):=\frac{1}{2}\sup\big\{\|x+\tau y\|+\|x-\tau y\|-2\|x\| : \|y\|=1\big\}\,.$$

Funkci $\tau\mapsto\varrho(\tau,x)$ samozřejmě nazýváme *lokálním modulem hladkosti* prostoru X v bodě x.

(b) **Lokálně uniformní hladkost**. Banachův prostor X je *lokálně uniformně hladký*, jestliže $\lim\limits_{\tau\to0}\frac{1}{\tau}\varrho(\tau,x)=0$ pro každé $x\in X\setminus\{0\}$.

Zřejmě každý uniformně hladký prostor je lokálně uniformně hladký a lokálně uniformně hladké prostory jsou hladké.

(c) **Věta.** *Norma na Banachově prostoru X je fréchetovsky diferencovatelná na $X\setminus\{0\}$, právě když X je lokálně uniformně hladký.*

***21.6. Charakteristika konvexity**. *Charakteristikou konvexity*, někdy též *koeficientem konvexity*, Banachova prostoru X rozumíme číslo $\varepsilon_0(X):=\sup\{\varepsilon\ge0 : \delta_X(\varepsilon)=0\}$. Rozmyslíme-li si trochu geometrický význam charakteristiky konvexity, vidíme, že vyjadřuje, zhruba řečeno, délku nejdelší úsečky ležící „skoro“ na jednotkové sféře S_X.

Prostor X je uniformně konvexní, právě když $\varepsilon_0(X)=0$. Prostor z 1.39.i má charakteristiku konvexity rovnu 1. Ukažte, že prostory l_2^1 a l_2^∞ mají charakteristiku konvexity rovnu 2. Všimněte si, že jejich jednotkové sféry jsou vlastně čtverce v rovině. Čím je koeficient konvexity „bližší“ 2, tím je jednotková sféra podobnější čtverci. Tento postřeh nás vede k zavedení další třídy Banachových prostorů.

***21.7. Uniformně nečtvercové prostory**. Banachův prostor X je *uniformně nečtvercový*, jestliže $\varepsilon_0(X) < 2$. Jinými slovy, existuje-li $\varepsilon \in (0,2)$ tak, že $\delta_X(\varepsilon) > 0$. Rozmyslíme-li si trochu tuto definici, lze říci, že Banachův prostor X je uniformně nečtvercový, existuje-li takové $\beta > 0$, že žádné dva body x, y z jednotkové koule B_X nemohou splňovat současně $\|\frac{x+y}{2}\| > 1-\beta$ a $\|\frac{x-y}{2}\| > 1-\beta$.

Pokusme se podat ještě názorné vysvětlení, jak si představit uniformně nečtvercové prostory. Předpokládejme tedy, že pro (malé) $\beta > 0$ existují body $x, y \in B_X$ tak, že $\|\frac{x+y}{2}\| > 1-\beta$ a současně $\|\frac{x-y}{2}\| > 1-\beta$. Potom ovšem také x i y leží blízko jednotkové sféry S_X, neboť třeba $\|x\| \geq \|x+y\| - \|y\| > 2-2\beta-1 = 1-2\beta$ (obdobně $\|y\| > 1-2\beta$). Což můžeme interpretovat tak, že jednotková sféra v rovině určené body x, y se velice podobá čtverci. Někdy se též říká, že v tomto případě body x a y určují *β-čtverec*.

Poznámka. R.C. James [1964b] ukázal, že uniformně nečtvercové prostory jsou reflexivní. Později P. Enflo [1972] dokázal, že každý takový prostor se dá přenormovat na uniformně konvexní prostor. Což je vlastnost daleko silnější než reflexivita. Vznikla tak nová kategorie superreflexivních prostorů zavedená R.C. Jamesem [1972].

Superreflexivní prostor se obvykle dnes definuje jako Banachův prostor X mající tuto vlastnost: Kdykoliv Banachův prostor Y je „skoro izometrický“ nějakému podprostoru v X, musí již být reflexivní. Je ovšem třeba precizovat výrok v uvozovkách. Především řekneme, že Banachův prostor Y je *konečně reprezentovatelný* v Banachově prostoru X, jestliže pro každý konečně dimenzionální podprostor $F \subset Y$ a každé $\lambda > 1$ existuje izomorfizmus $T_\lambda : F \to X$ tak, že $\frac{1}{\lambda}\|v\| \leq \|T_\lambda v\| \leq \lambda\|v\|$ pro každé $v \in F$.

Banachův prostor X je pak *superreflexivní*, jestliže každý prostor Y, který je konečně reprezentovatelný v X, je reflexivní.

My podáme nyní jinou, ovšem ekvivalentní, definici.

***21.8. Superreflexivní prostory**. Otázka, které Banachovy prostory lze přenormovat na uniformně konvexní, vede k definici superreflexivního prostoru. Banachův prostor je *superreflexivní*, jestliže na něm existuje ekvivalentní uniformně konvexní norma.

Je-li prostor X superreflexivní, je superreflexivní i jeho duál X^*. To znamená, že i duál lze přenormovat tak, aby byl uniformně konvexní. Je otázka, zda lze na X nalézt ekvivaletní normu takovým způsobem, aby v ní byl současně X i jeho duál X^* uniformně konvexní prostor. Odpověď je kladná. V *21.3.b jsme uvedli, že pomocí tzv. „Asplundovy průměrovací metody“ lze dokázat, že na každém uniformně konvexním prostoru X existuje ekvivalentní uniformně konvexní norma, při níž i duál X^* je uniformně konvexní.

Je celá řada charakteristik superreflexivních prostorů, uveďme některé z nich.

(a) Věta. *Následující podmínky jsou ekvivalentní pro Banachův prostor X:*

(i) *X je superreflexivní,*
(ii) *X^* je superreflexivní,*
(iii) *na X existuje ekvivalentní norma, při níž X i X^* jsou uniformně konvexní,*
(iv) *na X existuje ekvivalentní norma, v níž X je současně uniformně konvexní i uniformně hladký,*
(v) *na X existuje ekvivalentní norma, v níž je X uniformně nečtvercový.*

Superreflexivní prostory mají celou řadu zajímavých vlastností, hezkým pramenem k dalšímu studiu může být D. van Dulst [*1978] či B. Beauzamy [*1982]. Nejdůležitější z nich shrňme do následující věty.

(b) Věta. *Každý superreflexivní prostor je reflexivní. Je-li X superreflexivní a Y izomorfní s X, je i Y superreflexivní. Uzavřený podprostor a faktorprostor superreflexivního prostoru jsou superreflexivní.*

Důkaz. Stačí se podívat na *2.13 a 21.13. A samozřejmě na definici superreflexivity.

Je-li $T : X \to Y$ izomorfní zobrazení, je norma $\|.\|_T$ na Y uniformně konvexní (kde $\|.\|_T$ je ekvivalentní norma na Y definovaná v *1.6.c), pokud X je uniformně konvexní. Tohoto postřehu lze využít pro důkaz druhého tvrzení.

Pokud jde o faktorprostor, využijte ekvivalenci (i) a (ii) ve větě (a). ■

(c) Příklad. U každého nově zavedeného pojmu je vhodné zkoumat jeho vztah k již známých objektům. Je tomu i tak v případě superreflexivních prostorů. Není náhodou každý reflexivní prostor již superreflexivní? Odpověď v tomto případě je záporná. Položíme-li $X_n = c_0$ a uvažujeme-li prostor $X := \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n\right)^2$ z *1.1.h, je X reflexivní, nikoliv však superreflexivní.

Poznamenejme ještě, že X je též striktně konvexní a má Banach-Saksovu vlastnost z *21.10.

(d) Super-vlastnosti. Obdobně jako superreflexivitu lze definovat i další *super-vlastnosti* Banachových prostorů. Kupříkladu lze studovat Banachovy prostory mající super-Radon Nikodýmovu vlastnost či super-KMP. Kupodivu, v těchto dvou příkladech nedostaneme nic nového, neboť jsou to přesně superreflexivní prostory.

***21.9. Kolmost v Banachových prostorech**. V obecných Banachových prostorech lze definovat kolmost různým způsobem. Uveďme pouze definici pocházející od G. Birkhoffa. Jsou-li x, y prvky Banachova prostoru X, řekneme, že x je *kolmý* na y, což zapisujeme jako $x \perp y$, jestliže $\|x\| \leq \|x + \lambda y\|$ pro každé $\lambda \in \mathbf{R}$.
Jako cvičení ukažte, že

(a) je-li X Hilbertův prostor, je $x \perp y$, právě když $(x, y) = 0$, tedy pro Hilbertovy prostory se nová definice kolmosti shoduje s původní definicí,
(b) z $x \perp y$ neplyne ještě $y \perp x$.

Důkaz následující věty charakterizující striktní konvexitu a hladkost lze nalézt v J. Diestel [*1975].

Věta. *Nechť X je Banachův prostor. Potom X je striktně konvexní, právě když ke každé dvojici $x, y \in X$, $x \neq 0$ existuje právě jedno $\alpha \in \mathbf{R}$ tak, že $(\alpha x + y) \perp x$.*

A prostor X je hladký, právě když ke každé takové dvojici existuje právě jedno $\alpha \in \mathbf{R}$ tak, že $x \perp (\alpha x + y)$.

***21.10. Banach-Saksova vlastnost**. Jako preludium uveďme následující věty, nad jejichž subtilními rozdíly bychom se měli zprvu zamyslet.

(a) Věta. *Nechť $\{f_n\}$ je omezená posloupnost spojitých funkcí na kompaktu K, $f \in \mathcal{C}(K)$ a $f_n \to f$ bodově na K. Potom existuje posloupnost konvexních kombinací funkcí f_n, která konverguje k f na K stejnoměrně.*

Návod. Nechť $f \notin \overline{\text{co}}\{f_1, f_2, \dots\}$. Podle malé Mazurovy věty 14.27 oddělte f a uvedenou množinu spojitým lineárním funkcionálem. Ten pomocí Rieszovy věty reprezentujte jako integrál vzhledem k (znaménkové) Radonově míře a ke sporu použijte Lebesgueovu větu o dominantní konvergenci. ♣

(b) Věta. *Nechť $x_n \xrightarrow{w} x$ v Banachově prostoru X. Potom existuje posloupnost tvořená konvexními kombinacemi prvků posloupnosti $\{x_n\}$ konvergující k x v normě.*

Návod. Zřejmě $x \in \overline{\text{co}}\,\{x_n\} = \overline{\text{co}}^w\,\{x_n\}$. ♣

(c) Věta. *Nechť $\{x_n\}$ je omezená posloupnost Hilbertova prostoru H. Potom existuje její vybraná slabě konvergentní podposloupnost, jejíž aritmetické průměry konvergují v normě.*

Důkaz. Vzhledem k větě 4.9 lze předpokládat, že posloupnost $\{x_n\}$ konverguje slabě. Také lze předpokládat, že slabá limita posloupnosti $\{x_n\}$ je 0. Položme $a_1 = x_1$ a nalezněme $n_2 > 1$ tak, aby $|(x_{n_2}, a_1)| \leq 1$ (nezapomeňte, že $x \mapsto (x, a_1)$ je spojitá lineární forma na H). Položíme-li $a_2 = x_{n_2}$, existuje $n_3 > n_2$ tak, že $|(x_{n_3}, a_1)| \leq \frac{1}{2}$ a $|(x_{n_3}, a_2)| \leq \frac{1}{2}$. Indukcí tedy najdeme posloupnost $\{a_n\}$ vybranou z původní posloupnosti $\{x_n\}$ s vlastností $|(a_{k+1}, a_j)| \leq \frac{1}{k}$ pro každé $k \in \mathbf{N}$ a $j = 1, \dots, k$. Pro libovolné n máme

$$\left\|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right\|^2 \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |(a_k, a_j)| = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \|a_k\|^2 + 2 \sum_{k=2}^{n} \sum_{j=1}^{k-1} |(a_k, a_j)|\,.$$

Stačí nyní odhadovat a ukázat, že pravá strana konverguje k nule. To není žádný neřešitelný problém. Posloupnost $\{a_n\}$ je omezená (podle předpokladu) a

$$\sum_{k=2}^{n} \sum_{j=1}^{k-1} |(a_k, a_j)| \leq n - 1$$

pro každé n, neboť $\sum_{j=1}^{k} |(a_{k+1}, a_j)| \leq 1$ pro každé k. ■

(d) Szlenkova věta. *Každá w-konvergentní posloupnost v $L^1([0,1])$ má vybranou podposloupnost, jejíž aritmetické průměry konvergují v normě.*

Návod. Viz W. Szlenk [1965]. ♣

Než postoupíme dále, připomeňme, že každá slabě konvergentní posloupnost je omezená (viz 4.7), a že aritmetické průměry jsou speciální konvexní kombinace. Dále, každá omezená posloupnost v reflexivním prostoru má slabě konvergentní vybranou podposloupnost.

(e) Banach-Saksova vlastnost. Banachův prostor má *Banach-Saksovu vlastnost*, jestliže z každé jeho omezené posloupnosti lze vybrat podposloupnost, jejíž aritmetické průměry konvergují. Můžeme dále říci, že Banachův prostor má *slabou Banach-Saksovu vlastnost*, jestliže z každé posloupnosti konvergující slabě k 0 lze vybrat podposloupnost, jejíž aritmetické průměry konvergují k nule.

Následující věty ukazují vztah Banach-Saksovy vlastnosti k reflexivitě a uniformní konvexitě.

(f) Kakutaniho věta. *Každý uniformně konvexní Banachův prostor má Banach-Saksovu vlastnost.*

(g) Nishiura-Watermanova věta. *Banachův prostor s Banach-Saksovou vlastností je reflexivní.*

T. Nishiura

Návod. Jednoduchý důkaz využívající Jamesovu charakteristiku reflexivity z 16.15 lze vést podobně jako v 21.13. Nechť tedy X je prostor mající Banach-Saksovu vlastnost. Volme $\varphi \in X^*$ a posloupnost $\{x_n\}$ tak, aby $\|x_n\| = 1$ a $\varphi(x_n) \to \|\varphi\|$. Banach-Saksova vlastnost X nám zaručí existenci $x \in X$ a vybrané posloupnosti, které ponechme původní označení, s vlastností $z_n := \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) \to x$. Potom ovšem

$$\tfrac{1}{n}\big(\varphi(x_1) + \cdots + \varphi(x_n)\big) = \varphi\big(\tfrac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)\big) = \varphi(z_n) \to \varphi(x)\,.$$

Protože $\{\varphi(x_n)\}$ je číselná posloupnost konvergující k $\|\varphi\|$, musí posloupnost jejích aritmetických průměrů konvergovat k témuž číslu, tedy k $\|\varphi\|$. Ta ovšem konverguje k $\varphi(x)$, jak jsme právě viděli. Musí tedy být $\varphi(x) = \|\varphi\|$. A protože $\|z_n\| \le 1$, je i $\|x\| \le 1$. ♣

(h) Poznámka. Historie okolo Banach-Saksovy vlastnosti je zajímavá. S. Banach se S. Saksem ukázali v [1930], že prostory $L^p([0,1])$ mají pro $p \in (1,\infty)$ „Banach-Saksovu vlastnost" a zkonstruovali posloupnost funkcí, která slabě konvergovala k nule v $L^1([0,1])$, přičemž pro žádnou její podposloupnost aritmetické průměry nekonvergovaly. To byl samozřejmě omyl, jak ukázal v [1965] W. Szlenk. J. Schreier [1930] ukázal, že prostor $\mathcal{C}([0,1])$ nemá slabou Banach-Saksovu vlastnost. S. Kakutani [1939] ukázal, že každý uniformně konvexní prostor má Banach-Saksovu vlastnost a T. Nishiura s D. Watermanem dokázali v [1963], že prostory s Banach-Saksovou vlastností jsou reflexivní. Protipříklad, že reflexivní prostory a prostory s Banach-Saksovou vlastností nesplývají, ukázal poměrně nedávno A. Baernstein II [1972]. 0 Schreierově a Baernsteinově prostoru se lze dočíst v H. Fetter and B. Gamboa de Buen [*1997].

***21.11. Asplundovy prostory**. Zajímavou a význačnou třídu Banachových prostorů tvoří Asplundovy prostory. Ty se dají definovat mnoha ekvivalentními způsoby. My řekneme, že Banachův prostor je *Asplundův*, jestliže každá spojitá konvexní reálná funkce na něm je fréchetovsky diferencovatelná na husté množině.

Vzhledem k tomu, že množina bodů, kde spojitá konvexní funkce je fréchetovsky diferencovatelná, je vždy typu G_δ, jsou na Asplundových prostorech spojité konvexní funkce diferencovatelné na „velkých" množinách (každá hustá G_δ podmnožina úplného prostoru je totiž residuální — její doplněk je pouze 1. kategorie). Označíme-li pro spojitou konvexní funkci f a $n \in \mathbf{N}$

$$G_n := \big\{x \in X : \text{existuje}\,\delta > 0\,\text{tak, že}\, f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) < \frac{\|h\|}{n}\,\text{pro}\,0 < \|h\| < \delta\big\}\,,$$

jsou G_n otevřené množiny a f je fréchetovsky diferencovatelná v bodě x, právě když $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$.

Další možnosti definice přináší následující charakteristika, všechny pojmy v ní se vyskytující jsou definovány někde v těchto skriptech.

Věta. *Nechť X je Banachův prostor. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) *X je Asplundův,*
(ii) *separabilní podprostory X mají separabilní duály,*

(iii) *X^* má Radon-Nikodýmovu vlastnost RNP,*
(iv) *X^* má Krejn-Milmanovu vlastnost KMP,*
(v) *libovolná ekvivalentní norma na X je fréchetovsky diferencovatelná alespoň v jednom bodě,*
(vi) *libovolná omezená separabilní podmnožina X je slabě metrizovatelná.*

Mezi Asplundovy prostory patří reflexivní prostory či prostory se separabilním duálem. Podprostory Asplundova prostoru jsou Asplundovy, kartézský součin dvou Asplundových prostorů je Asplundův a faktorový prostor Asplundova prostoru je opět Asplundův.

***21.12. Vlastnost tří prostorů**. Asplundovy prostory mají zajímavou vlastnost tří prostorů. Je-li $\mathcal{P}$ nějaká vlastnost Banachových prostorů, řekneme, že $\mathcal{P}$ je *vlastnost tří prostorů*, platí-li následující: Kdykoliv M je uzavřený podprostor Banachova prostoru X a M i X/M mají vlastnost $\mathcal{P}$, má vlastnost $\mathcal{P}$ i celý prostor X.

Tedy kupříkladu reflexivita je vlastnost tří prostorů. Této problematice je věnována připravovaná obšírná monografie J.M.F. Castillo and M. González [*199?].

Poznámka. Někdy bývá k vidění i definice jakési „zesílené“ vlastnosti tří prostorů: Je-li M uzavřený podprostor Banachova prostoru X a kterékoliv dva ze tří prostorů X, M a X/M mají vlastnost $\mathcal{P}$, má vlastnost $\mathcal{P}$ i třetí z nich. Tuto vlastnost mají tedy kupříkladu Asplundovy či reflexivní prostory.

***21.13. WCG-prostory**. Banachův prostor X je *slabě kompaktně generovaný*, v hantýrce krátce nazývaný *WCG-prostorem*, jestliže v něm existuje taková slabě kompaktní množina, jejíž lineární obal je hustý v X. Pokud taková množina K existuje, je i její uzavřený absolutně konvexní obal slabě kompaktní množina (podobné tvrzení říkala Krejnova věta *13.6.d pro uzavřený konvexní obal) a můžeme tedy v definici WCG-prostorů předpokládat, že jsou generovány slabě kompaktní absolutně konvexní množinou.

Každý reflexivní prostor je vzhledem k Alaouglově větě 16.6 slabě kompaktně generovaný. Mezi WCG-prostory patří také všechny separabilní Banachovy prostory (uvažujte absolutně konvexní uzávěr množiny $\{\frac{x_n}{n}\}$, kde $\{x_n\}$ je hustá podmnožina jednotkové koule).

Prostory c_0 a $c_0(\Gamma)$ jsou též typickými příklady slabě kompaktně generovaných prostorů. Prostor $\mathcal{L}^1(\mu)$ je WCG, právě když míra μ je σ-konečná.

Prostor l^∞ není slabě kompaktně generovaný. Platí totiž obecnější tvrzení:*Je-li X separabilní prostor s neseparabilním duálem, potom X^* není WCG-prostor.*

***21.14. Kadec-Kleeova vlastnost**. Banachův prostor X má *Kadec-Kleeovu vlastnost*, jestliže silná a slabá konvergence posloupností splývají na jednotkové sféře S_X. Rozmyslete si, že to vyjde na stejno jako následující podmínka:

$$\text{jestliže} \quad x_n \in X\,,\ x_n \xrightarrow{w} x \quad \text{a} \quad \|x_n\| \to \|x\|\,, \quad \text{potom} \quad \|x_n - x\| \to 0\,.$$

Podíváte-li se na cvičení 21.28.h a následnou poznámku, zjistíte že kupříkladu lokálně uniformně konvexní prostory mají Kadec-Kleeovu vlastnost.

Tato vlastnost, samozřejmě ne pod uvedenými jmény, byla studována již J. Radonem. F. Riesz ukázal, že klasické $L^p([0,1])$-prostory mají Kadec-Kleeovu vlastnost pro $1 < p < \infty$. To platí i o obecných L^p-prostorech a příslušné tvrzení bývá označováno jako *Radon-Rieszova věta*. Proto se někdy Kadec-Kleeova vlastnost nazývá *Radon-Rieszovou vlastností*. Někteří autoři též používají termínu *vlastnost (KK)* či *vlastnost (H)*.

Spřízněným pojmem je Kadecova vlastnost. Banachův prostor X má *Kadecovu vlastnost*, někdy jen *vlastnost (K)*, jestliže slabá a normová topologie X splývají na jednotkové sféře S_X. Terminologie je dost nejednotná, v literatuře se někdy rozumí pod touto vlastností Kadec-Kleeova vlastnost. Kupříkladu autoři [HHZ] tak činí.

Je jasné, že Banachův prostor s vlastností (K) má i vlastnost (KK). Opačná implikace však neplatí. S.L. Troyanski [1985] poznamenává, že příklad prostoru s vlastností (K) nemajícího však vlastnost (KK) uvádí M. Smith v [1978]. Tamtéž Troyanski ukázal, že vlastnosti (K) a (KK) jsou ekvivalentní v případě, kdy X je separabilní a neobsahuje kopii l^1. Předpoklad separability lze zřejmě vynechat, to uvádí J.R. Torregrosa v [1993]. S.L. Troyanski také v [1985] podává příklad zajímavého prostoru. Do prostoru c všech konvergentních posloupností zavádí normu

$$\|x\| := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2 + \alpha_n^2}{2^{n+1}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{pro} \quad x = \{x_n\} \in c\,, \quad \text{kde} \quad \alpha_n := \sup\bigl\{|x_j| : j \geq n\bigr\}\,.$$

Tvrzení J.R. Torregrossy, že i to je příklad prostoru mající vlastnost (K), nikoliv však (KK), je silně podezřelé. Tento prostor totiž neobsahuje l^1.

Protor $\mathcal{L}^1([0,1])$ nemá Kadec-Kleeovu vlastnost.

***21.15. Otevřené problémy**. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor. Zopakujme z 21.16, že $M \subset P$ je *Čebyševova množina*, jestliže ke každému $x \in P$ existuje právě jedno $m_x \in M$ tak, že $\varrho(x, m_x) = \operatorname{dist}(x, M)$. Ve větě 21.15 jsme dokázali, že uzavřené konvexní množiny v reflexivních striktně konvexních prostorech jsou Čebyševovy. V Hilbertových prostorech konečné dimenze jsou Čebyševovy množiny právě uzavřené konvexní množiny.

`(a) Problém`. Dají se nějak charakterizovat Banachovy prostory, v nichž každá uzavřená konvexní podmnožina je Čebyševova?

`(b) Problém`. Existuje v nekonečně dimenzionálním Hilbertově prostoru nekonvexní Čebyševova množina?

Množinu Z ve vektorovém prostoru W, který je zároveň metrickým prostorem, nazvěme *jeskyní*, jestliže množina $W \setminus Z$ je omezená a konvexní. Typickým příkladem jeskyně je $\{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| \geq 1\}$. Jeskyně, která je současně Čebyševovou množinou se nazývá *Kleeova jeskyně*.

`(c) Problém`. Existují nekonvexní Kleeovy jeskyně v nekonečně dimenzionálních Hilbertových prostorech?

Jak ukázal V. Klee, pokud v Hilbertově prostoru existuje nekonvexní Čebyševova množina, existuje v něm i Kleeova jeskyně. Je-li N normovaný lineární prostor nekonečné dimenze, existuje na N metrika ϱ dávající stejnou topologii jako původní norma tak, že množina $\{x \in N : \|x\| \geq 1\}$ je Kleeova jeskyně v prostoru (N,ϱ) (viz C. Franchetti [1985]).

***21.16. Závěrečné poznámky**. Reflexivita uniformně konvexních prostorů byla dokázána D. Milmanem [1938] a B.J. Pettisem [1939]. Pettisův původní důkaz využívající integraci vzhledem ke konečně aditivním mírám je popsán v J. Diestel [*1984]. Existují i další důkazy. Upozorněme třeba na S. Kakutani [1939], J. Dieudonné [1942], A.F. Ruston [1949]. První důkaz věty 21.13 pochází od J. Lindenstrausse a L. Tzafririho [*1979]. Druhý důkaz je uveden v J. Diestel [*1975]. Tamtéž se nalézá i jednoduchý důkaz reflexivity uniformně konvexních prostorů náležející J. Ringrosemu.

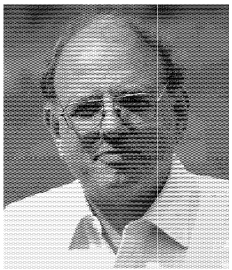
*22. Vektorová integrace a Radon-Nikodýmova vlastnost

V 18. kapitole jsme se ptali, zda-li platí analogie Krejn-Milmanovy věty také pro omezené, uzavřené, konvexní množiny. Nyní ukážeme odpověď pro Banachovy prostory.

***22.1. Lindenstraussova věta.** *Pro Banachův prostor X jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) *každá neprázdná, omezená, uzavřená, konvexní množina v X má extremální bod,*

(ii) *je-li $C \subset X$ omezená, uzavřená, konvexní množina, potom $C = \overline{\operatorname{co}}(\operatorname{ext} C)$.*



J. Lindenstrauss

Důkaz. Předpokládejme (i). Existuje-li neprázdná, omezená, uzavřená, konvexní množina B tak, že $E := \overline{\operatorname{co}}(\operatorname{ext} B)$ je vlastní podmnožina B, volme $z \in B \setminus E$ a najděme pomocí malé Mazurovy věty 14.27 takový funkcionál $f \in X^*$, pro nějž $\sup\{f(t) : t \in E\} < f(z)$. Potom množina

$$\mathcal{G} := \{\varphi \in X^* : \varphi(z) > \sup\{\varphi(t) : t \in E\}\}$$

je neprázdná ($f \in \mathcal{G}$) a otevřená (E je omezená!). Podle Bishop-Phelpsovy věty z *16.3 existuje $\psi \in \mathcal{G} \cap \mathcal{P}_B(X^*)$ a $b \in B$ tak, že

$$\sup\{\psi(t) : t \in E\} < \psi(z) \leq \sup\{\psi(t) : t \in B\} = \psi(b)\,.$$

Položíme-li $C := \{y \in B : \psi(y) = \psi(b)\}$, je C neprázdná, omezená, uzavřená, konvexní množina. Podle předpokladu má extremální bod $s \in \operatorname{ext} C$. Rozmyslíme-li si, že $\operatorname{ext} C \subset \operatorname{ext} B \subset E$, dostáváme $\psi(s) = \psi(b)$, což vede ke sporu.

Opačná implikace je samozřejmá. ■

***22.2. Prostory s Krejn-Milmanovou vlastností**. Banachův prostor má *Krejn-Milmanovu vlastnost*, krátce *KMP*, jestliže každá jeho neprázdná, omezená, uzavřená, konvexní podmnožina má alespoň jeden extremální bod anebo ekvivalentně, jestliže každá taková jeho podmnožina je uzavřeným konvexním obalem svých extremálních bodů.

***22.3. Lindenstraussova věta.** *Každý Banachův prostor s Radon-Nikodýmovou vlastností má i Krejn-Milmanovu vlastnost.*

Důkaz. Stačí použít Phelpsovu charakteristiku (xiii) prostorů s RNP z věty 22.8. ∎

***22.4. Otevřený problém**. Jeden z velkých otevřených problémů geometrie Banachových prostorů není stále vyřešen. Neví se totiž, zda RNP a KMP jsou ekvivalentní vlastnosti.

Jsou známy třídy Banachových prostorů, pro něž RNP a KMP splývají. Kupříkladu, *Huff-Morrisova věta* říká, že pokud X je Banachův prostor, potom X^* má RNP, právě když X^* má KMP.

***22.5. Příklady na KMP**. Každý reflexivní prostor má KMP, neboť jeho omezené, uzavřené, konvexní podmnožiny jsou w-kompaktní a stačí se odkázat na Krejn-Milmanovu větu.

Uzavřené jednotkové koule prostorů c_0 a $L^1([0,1])$ nemají žádné extremální body (viz 18.6.c a d), prostory c_0 a $L^1([0,1])$ tedy nemají KMP, a tím pádem podle Lindenstraussovy věty *22.3 ani RNP.

Uzavřená jenotková koule v $\mathcal{C}([0,1])$ má sice (dva) extremální body (porovnej s 18.6.e), ale rozhodně není jejich uzavřeným konvexním obalem. Prostor $\mathcal{C}([0,1])$ tedy nemá RNP. Lindenstraussova věta *22.1 říká, že v $\mathcal{C}([0,1])$ musí existovat omezená, uzavřená, konvexní podmnožina, která nemá žádný extremální bod. Najdete alespoň jednu takovou? Nepodaří-li se to, nechte se podat a podívejte se na cvičení 18.11.a.

***22.6. Poznámka**. Viděli jsme, že v Banachových prostorech s Radon-Nikodýmovou derivací mají omezené uzavřené konvexní množiny dostatečně mnoho extremálních bodů. Naskýtá se proto otázka, zda by v nich nemohly platit věty o integrálních reprezentacích analogické větám Choquetova typu. V té souvislosti samozřejmě ihned vyvstane další otázka, zda pro takové množiny je vůbec množina jejich extremálních bodů v nějakém smyslu měřitelná a jak vlastně definovat pro ně pojem připomínající Radonovu míru (ta je definovaná na lokálně kompaktních prostorech a Banachův prostor nekonečné dimenze není nikdy lokálně kompaktní — neexistuje v něm podle Rieszovy věty kompaktní okolí nuly!). Odpověď je v článku G.A. Edgar [1975], uveďme ji již bez dalšího komentáře.

`Edgarova věta.` *Nechť K je separabilní uzavřená omezená konvexní podmnožina Banachova prostoru X majícího Radon-Nikodýmovou vlastnost a $x \in K$. Potom existuje borelovská pravděpodobnostní míra μ na K tak, že $f(x) = \int_K f\,d\mu$ pro každou formu $f \in X^*$ a $\mu(\operatorname{ext} K) = 1$.*

***22.7. Závěrečná poznámka**. Jako literaturu k tomuto tématu mohu doporučit R. Bourgin [*1983], J. Diestel [*1975] či J. Diestel and J.J. Uhl [*1977].

*23. Věty o pevných bodech

***23.1. Pevné body neexpanzivních zobrazení**. Nechť C je podmnožina Banachova prostoru X (pro nejzajímavější případy bude C omezená, uzavřená a konvexní). Zobrazení $T : C \to C$ nazveme *neexpanzivním*, jestliže $\|Tx - Ty\| \le \|x - y\|$ pro $x, y \in C$.

Každá izometrie je určitě příkladem neexpanzivního zobrazení. Neexpanzivní zobrazení nemusejí mít pevný bod (uvažujte $x \mapsto x + 1$ na $\mathbf{R}$), mohou jich mít více a Picardovy iterace $x_{n+1} := Tx_n$ nemusejí vůbec konvergovat. Uveďme příklady.

`(a) Příklad.` Je-li $X = \mathcal{C}([0,1])$, $C = \{f \in X : 0 = f(0) \le f(x) \le f(1) = 1 \text{ pro } x \in [0,1]\}$, $Tf(x) = xf(x)$, je T neexpanzivní zobrazení na C nemající pevný bod (dokonce T je *slabě kontraktivní*, to znamená, že $\|Tx - Ty\| < \|x - y\|$ pokud $x \ne y$).

`(b) Příklad.` Pro $X = c_0$, $C = \{\{x_n\} \in X : 0 \le x_n \le 1 \text{ pro všechna } n\}$ a $T : \{x_n\} \mapsto (1, x_1, x_2, \dots)$, je T izometrie na C bez pevných bodů.

`(c) Příklad.` Nechť C je uzavřená jednotková koule v prostoru l^2 a $T : \{x_n\} \mapsto (0, x_1, x_2, \dots)$. Potom T je opět na C izometrie mající jediný pevný bod $0 \in C$. Volíme-li $x_1 = (1, 0, 0, 0, \dots)$ a $x_{n+1} = Tx_n$, posloupnost $\{x_n\}$ Picardových iterací nekonverguje. (Povšimněte si však, že $x_n \xrightarrow{w} 0$.)

(d) Identické zobrazení na Banachově prostoru, kteréžto je samozřejmě neexpanzivní, má vícero pevných bodů. Jednoznačnost pevného bodu pro neexpanzivní zobrazení nemá šanci projít.

***23.2. Aproximativní pevné body**. Nechť ϱ je metrika na metrickém prostoru P a f zobrazení P do P. Řekneme, že f má na P *aproximativní pevný bod*, jestliže $\inf\{\varrho(x, f(x)) : x \in P\} = 0$. Následující věta ukazuje, že neexpanzivní zobrazení na omezených uzavřených konvexních množinách mají alespoň aproximativní pevné body.

(a) **Věta.** *Nechť C je omezená uzavřená konvexní podmnožina Banachova prostoru X a $T : C \to C$ neexpanzivní zobrazení. Potom T má na C aproximativní pevný bod.*

Důkaz. Především, C je úplný metrický prostor. Volme $0 < \varepsilon < 1$ (výjimečně si ho představujme blízko 1) a $c \in C$. Pro $x \in C$ položme $Sx = (1-\varepsilon)c + \varepsilon Tx$. Z konvexity C je patrné, že S zobrazuje C do C. Minutovou úvahou zjistíme, že S je na C dokonce kontrakce. Podle Banachovy věty 23.3 tedy existuje $z \in C$ tak, že $Sz = z$. Nyní stačí sledovat odhad

$$\|z - Tz\| = \|Sz - Tz\| = \big\|(1-\varepsilon)c + \varepsilon Tz - Tz\big\| = (1-\varepsilon)\|c - Tz\| \le (1-\varepsilon)\operatorname{diam} C\,,$$

abychom si uvědomili, že věta je dokázána. ■

(b) **Důsledek.** *Je-li K kompaktní konvexní podmnožina Banachova prostoru X a $T : K \to K$ je neexpanzivní zobrazení, potom T má na K pevný bod.*

Návod. Nalezněte posloupnost $x_n \in K$ tak, aby $\big\|x_n - f(x_n)\big\| \to 0$ a vyberte z ní konvergentní podposloupnost. ♣

(c) **Poznámka.** Stačilo předpokládat, že X je normovaný lineární prostor. Uvedený důsledek samozřejmě plyne také z Schauderovy věty 23.13: Každé spojité zobrazení $K \to K$ má pevný bod.

***23.3. Vlastnosti R a R^*.** Řekneme, že Banachův prostor X má *vlastnost R*, jestliže každé neexpanzivní zobrazení $T : C \to C$, kde $C \subset X$ je omezená, uzavřená a konvexní, má pevný bod. Pozor, mnozí současní autoři poněkud změnili terminologii a místo vlastnosti R říkají, že prostor X má vlastnost FPP. Tento termín jsme my však v 23.5 vyhradili prostorům s jinou vlastností.

Jestliže neexpanzivní zobrazení slabě kompaktních konvexních množin do sebe mají pevný bod, budeme říkat, že X má *vlastnost R^**.

Každý Banachův prostor s vlastností R má i vlastnost R^*. V reflexivních prostorech tyto vlastnosti splývají.

(a) **Věta.** *Každý Hilbertův prostor má vlastnost R.*

Poznámka. Tato věta byla dokázána F.E. Browderem v [1965a]. Relativně elementární důkaz tohoto tvrzení podle K. Goebela [1969] je podán v J. Dugundji and A. Granas [*1982]. Je-li $T : C \to C$ neexpanzivní zobrazení omezené uzavřené konvexní množiny C v Hilbertově prostoru a $x \in C$, nemusejí v tomto případě Picardovy iterace $T^n x$ vůbec konvergovat. Nicméně J.-B. Baillon [1975] ukázal, že posloupnost aritmetických průměrů $\frac{1}{n}(x + Tx + T^2x + \cdots + T^n x)$ konverguje slabě k pevnému bodu T. Důkaz tohoto tvrzení lze nalézt třeba v B. Beauzamy [*1982], str. 78.

Následující věta byla dokázána nezávisle F.E. Browderem [1965b], D. Göhdem [1965] a W.A. Kirkem [1965]. Důkaz lze nalézt v [HHZ], Theorem 182.

(b) **Věta.** *Každý uniformně konvexní prostor má vlastnost R.*

(c) **Příklad.** Prostor c_0 nemá vlastnost R. Zobrazení $T : (x_1, x_2, \dots) \mapsto (1, x_1, x_2, \dots)$ je neexpanzivním zobrazením (dokonce izometrií) jednotkové koule B_{c_0} do B_{c_0} nemající pevný bod.

Na druhé straně prostor c_0 má vlastnost R^*, jak za chvíli uvidíme.

(d) **Alspachův příklad.** *Existuje slabě kompaktní konvexní množina $C \subset L^1([0,1])$ a izometrické zobrazení $T : C \to C$, které nemá pevný bod.*

Návod. Příklad je uveden v D. Alspach [1981]. Abychom čtenáře příliš nehýčkali, naznačme jen velice stručný návod. Položíme $C := \{f \in \mathcal{L}^1([0,1]) : 0 \le f \le 1, \int_0^1 f = \frac{1}{2}\}$. Pro $f \in C$ definujme Tf předpisem

$$Tf(x) := \begin{cases} \min\,(2f(2x), 1) & \text{pro} \quad x \in [0, \frac{1}{2}]\,, \\ \max\,(2f(2x-1) - 1, 0] & \text{pro} \quad x \in (\frac{1}{2}, 1]\,. \end{cases}$$

Nakreslit si obrázek je nejvýše vhodné. Nyní je zapotřebí ukázat, že C je slabě kompaktní konvexní podmnožina $\mathcal{L}^1([0,1])$, $T : C \to C$ je izometrie, která nemá žádný pevný bod. Pro důkaz posledního tvrzení si stačí odvodit, že $f = 0$ či $f = 1$ skoro všude pokud $Tf = f$. ♣

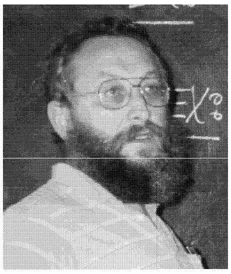
(e) Otevřené problémy. Alspachův příklad tedy říká, že prostor $L^1([0,1])$ nemá vlastnost R^*. Kromě $L^1([0,1])$ (a všech jeho nadprostorů) není znám žádný jiný příklad Banachova prostoru nemající vlastnost R^*.

Navzdory Alspachovu příkladu z (d) B. Maurey [1980] ukázal, že libovolný reflexivní podprostor $L^1([0,1])$ má vlastnost R. Pro zajímavost uveďme, že využitím Maureyovy techniky dokazující toto tvrzení lze ukázat, že prostor c_0 má vlastnost R^*. Důkaz lze nalézt v článku J. Elton, Pei-Kee Lin, E. Odell and S. Szarek [1983]. Tamtéž je dokázáno, že Tsirelsonův prostor z *1.2.e má vlastnost R^*. P.K. Lin [1985] ukázal, že Banachův prostor s bezpodmínečnou bází má vlastnost R^*, pokud ovšem jeho bázová konstanta z *2.17 je menší než $\frac{1}{2}(\sqrt{33}-3)$.

Také Hardyho prostor H^1 na jednotkovém kruhu nemá vlastnost R, ale, jak ukázal B. Maurey, má vlastnost R^*.

Otevřenou otázkou je, zda každý reflexivní prostor má vlastnost R. Dokonce se ani neví, jestli superreflexivní prostory z *21.8 mají vlastnost R.

P.N. Dowling a C.J. Lennard [1997] dokázali, že pokud podprostor v $L^1([0,1])$ má vlastnost R, je již reflexivní. Byla tedy vyslovena domněnka, že podprostor M libovolného Banachova prostoru X má vlastnost R, právě když M je reflexivní. Žádná z těchto implikací nebyla dosud ani potvrzena ani vyvrácena. Zdá se dokonce, že Banachovy prostory s vlastností R by mohly být již reflexivní. To vše čeká, zdá se, teprve na vyřešení.



V. Zizler

Každý separabilní Banachův prostor se dá přenormovat tak, aby měl vlastnost R^*. To je výsledek V. Zizlera z [1971]. Není ale známo, zda se reflexivní prostor dá přenormovat tak, aby měl vlastnost R.

(f) Ještě o vlastnosti R pro l^1. Prostor l^1 nemá vlastnost R. T.C. Lim [1980] však ukázal, že každé neexpanzivní zobrazení $B \to B$, kde $B \subset l^1$ je libovolná uzavřená koule, má pevný bod. Neví se, zda prostory, které jsou izomorfní s l^1 mají vlastnost R.

***23.4. Pevné body slabých kontrakcí**. Buď (P,ϱ) metrický prostor. Zobrazení $T : P \to P$ se nazývá *slabou kontrakcí*, ovšem podle některých autorů *silnou kontrakcí*, jestliže $\varrho(Tx,Ty) < \varrho(x,y)$ pro každou dvojici $x,y \in M, x \neq y$. Slabá kontrakce nemůže mít dva různé pevné body, to je jasné. Nemusí mít však žádný, stačí uvažovat zobrazení $T : x \mapsto \log(1+e^x)$ na $\mathbf{R}$. Nicméně platí následující věta pocházející od M. Edelsteina [1962].

Věta. *Nechť T je slabá kontrakce na kompaktním metrickém prostoru P. Potom T má právě jeden pevný bod. Volíme-li $x \in P$ libovolně, potom Picardovy iterace $\{T^n x\}$ konvergují k tomuto pevnému bodu.*

Důkaz. O jednoznačnosti již byla řeč. Vzhledem k nerovnostem

$$\begin{aligned}|\varrho(x,Tx)-\varrho(a,Ta)| &\le |\varrho(x,Tx)-\varrho(x,Ta)| + |\varrho(x,Ta)-\varrho(a,Ta)| \\ &\le \varrho(Tx,Ta)+\varrho(x,a) \le 2\varrho(x,a)\end{aligned}$$

vidíme, že funkce $f : x \mapsto \varrho(x,Tx)$ je na prostoru P (stejnoměrně) spojitá. Musí tedy na kompaktu P nabývat svého minima v nějakém bodě z. Kdyby $z \neq Tz$, byla by hodnota f v bodě Tz ještě menší, neboť $f(Tz) = \varrho(Tz,T^2z) < \varrho(z,Tz) = f(z)$. Je tedy z (jediným) pevným bodem zobrazení f.

Buď nyní $x \in P$, $x_n := T^n x$ a $d_n := \varrho(x_n,z)$. Chceme ukázat, že $d_n \to 0$. Protože

$$d_{n+1} = \varrho(x_{n+1},z) = \varrho(T^{n+1}x,Tz) \le \varrho(T^n x,z) = d_n\,,$$

je posloupnost nezáporných čísel $\{d_n\}$ nerostoucí. Předpokládejme, že $d := \lim d_n > 0$. Vzhledem ke kompaktnosti P lze z posloupnosti $\{x_n\}$ vybrat konvergentní, nechť $x_{n_k} \to y$. Potom $\varrho(y,z) = d > 0$, což vede ke sporu, neboť

$$d = \lim \varrho(x_{n_k+1},z) = \varrho(Ty,z) = \varrho(Ty,Tz) < \varrho(y,z) = d\,.$$

■

***23.5. Základní věta algebry.** *Nechť p je polynom alespoň prvního stupně. Potom existuje $z \in \mathbf{C}$ tak, že $p(z) = 0$.*

Návod. Nechť $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n$. Položte $R = 2 + |a_0| + \cdots + |a_{n-1}|$ a

$$g(z) = \begin{cases} z - \frac{p(z)}{Re^{i(n-1)\Theta r}} & \text{pro } |z| \le 1, \\ z - \frac{p(z)}{Rz^{n-1}} & \text{pro } |z| \ge 1, \end{cases}$$

kde $z = re^{i\Theta}$, $0 \le \Theta < 2\pi$. Ukažte, že g je spojitá v $\mathbf{C}$. Dále nechť $C := \{z \in \mathbf{C} : |z| \le R\}$. Vcelku jednoduchými odhady

$$|g(z)| \le |z| + R^{-1} \big|p(z)\big| \le 1 + R^{-1}\big(|a_0| + \cdots + |a_{n-1}| + 1\big) \le 1 + 1 < R$$

pro $|z| \le 1$ a

$$\big|g(z)\big| \le \left| z - \frac{z}{R} - \frac{a_0 + \cdots + a_{n-1}z^{n-1}}{Rz^{n-1}} \right| \le \left| z\Big(1 - \frac{1}{R}\Big) \right| + \frac{|a_0| + \cdots + |a_{n-1}|}{R} \le R - 1 + \frac{R-2}{R} \le R$$

pro $|z| \ge 1$ se ověří, že $g(C) \subset C$. Brouwerova věta pak dá existenci $z_0 \in C$, pro něž $g(z_0) = z_0$, tudíž $p(z_0) = 0$. ♣

Poznámka. Povšimněte si odhadu $|z_0| \le 2 + |a_0| + \cdots + |a_{n-1}|$.

***23.6. Ekvivalence s Brouwerovou větou.** Existují ekvivalentní formulace Brouwerovy věty, které leckdy slouží k jejím různým důkazům. Abychom dobře porozuměli následující větě, zaveďme ještě některé pojmy.

Topologický prostor T je *stažitelný do bodu* z, existuje-li spojitá funkce $H : T \times [0,1] \to T$ (nazývaná *homotopií*) tak, že $H(t,0) = t$ a $H(t,1) = z$ pro každé $t \in T$. Je-li topologický prostor stažitelný do nějakého bodu, je pak stažitelný do každého svého bodu. Říkáme pak tedy krátce, že T je *stažitelný*.

Je-li B_1 uzavřená jednotková koule v $\mathbf{R}^n$ a $f : B_1 \to \mathbf{R}^n$, řekneme, že f je *třídy* $\mathcal{C}^1$ na B_1, symbolicky $f \in \mathcal{C}^1(B_1)$, existuje-li otevřená množina $G \supset B_1$ a zobrazení $\varphi : G \to \mathbf{R}^n$ tak, že φ je třídy C^1 na G (tj. φ má spojité všechny parciální derivace prvního řádu na G) a $f = \varphi$ na B_1.

Označme ještě $S_1 := \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| = 1\}$.

(a) Věta. *Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) *B_1 má vlastnost FPP,*
(ii) *S_1 není retraktem B_1,*
(iii) *S_1 není stažitelná,*
(iv) *je-li $f \in \mathcal{C}^1(B_1)$ a $f(B_1) \subset B_1$, existuje $x \in B_1$ tak, že $f(x) = x$.*

Návod. Je jasné, že (i) $\Rightarrow$ (iv). Ukázat, že platí (iv), jinými slovy, že „hladká“ zobrazení mají pevný bod, je mnohem snazší než přímý důkaz (i). Elementární důkaz posledního tvrzení spolu s dokázanou implikací (iv) $\Rightarrow$ (i) je uveden v nedávném článku T. Traynor [1996].

Podívejme se na ostatní implikace.

Nechť tedy B_1 má vlastnost FPP a nechť existuje spojité zobrazení $r : B_1 \to S_1$ tak, že $r(x) = x$ pro $x \in S_1$. Položíme-li $g(x) = -r(x)$, je g spojité zobrazení B_1 na S_1, má tedy pevný bod $z \in B_1$. Protože $z = -r(z)$, je $z \in S_1$, tudíž musí být $z = -z$, což vede ke sporu.

Obráceně, nechť existuje spojité zobrazení $f : B_1 \to B_1$ nemající žádný pevný bod. Definujme zobrazení r tak, že pro $x \in B_1$ je $r(x)$ rovno tomu bodu na S_1, který leží na polopřímce určené $f(x)$ a x. Ukážeme, že r je retrakce B_1 na S_1. To samozřejmě vyžaduje trochu úsilí. Po chvíli však zjistíme, že pro $x \in B_1$ je

$$r(x) = x + s(x)u(x)\,,$$

kde

$$u(x) = \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|} \quad \text{a} \quad s(x) = -(x, u(x)) + \big(1 - \|x\|^2 + (x, u(x))\big)^{\frac{1}{2}}\,.$$

A tudíž z tohoto vzorečku je jasné, že r je skutečně požadovaná retrakce.

Je-li $r : B_1 \to S_1$ retrakce, potom homotopie $H(x,t) := r((1-t)x)$ stáhne S_1 do bodu $r(0)$. Naopak, jestliže homotopie H stáhne S_1 do bodu $z \in S_1$, potom zobrazení

$$r(x) = \begin{cases} z & \text{pro} \quad x = 0\,, \\ H(\frac{x}{\|x\|}, 1 - \|x\|) & \text{pro} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

je retrakcí B_1 na S_1. ♣

(b) **Poznámka.** Předpokládejme, že $f : B_1 \to B_1$ je spojité zobrazení nemající na B_1 pevný bod. Položme

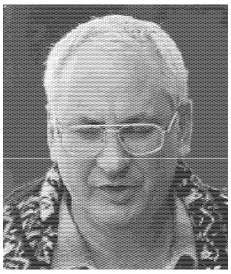
$$r(x) = \begin{cases} \frac{x}{\|x\|} + (2\|x\| - 2) f(\frac{x}{\|x\|})\,, & \text{pokud} \quad \|x\| \geq \frac{1}{2}\,, \\ 2x - f(2x) & \text{pro} \quad \|x\| \leq \frac{1}{2}\,. \end{cases}$$

Jako užitečné cvičení ukažte, že r je opět retrakce B_1 na S_1.

***23.7. Retrakce koule na sféru**. Nechť B_X a S_X jsou, jako obvykle, uzavřená jednotková koule a jednotková sféra v normovaném lineárním prostoru X. Platí následující tvrzení prvně dokázané B. Nowakem [1979].

(a) **Věta.** *Existuje spojitá retrakce B_X na S_X, právě když* $\dim X = \infty$.

Jednodušší důkaz tohoto tvrzení podali Y. Benyamini a Y. Sternfeld [1983]. Dokázali však daleko více, o čemž svědčí následující věta.



Y. Benyamini

(b) **Věta.** *Buď X normovaný lineární prostor. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) *$dim X = \infty$,*
(ii) *existuje lipschitzovská retrakce B_X na S_X,*
(iii) *existuje lipschitzovské zobrazení $f : B_X \to B_X$ tak, že* $\inf\{\|f(x) - x\| : x \in B_X\} > 0$.

Snad pouze pro pohodlí: f je *lipschitzovské zobrazení*, existuje-li $k > 0$ tak, že $\|f(x) - f(y)\| \leq k\,\|x - y\|$ pro všechna x, y. *Lipschitzovská retrakce* je samozřejmě retrakce, která je současně lipschitzovským zobrazením. Konečně *retrakce* M na N je zobrazení $r : M \to N$ s vlastností, že $r(x) = x$ pro $x \in N$.

***23.8. Ještě k Brouwerově větě v nekonečné dimenzi**. S. Ulam ve známé Skotské knize položil okolo roku 1935 problém, zda, v dnešní terminologii, jednotková sféra Hilbertova prostoru je retraktem uzavřené jednotkové koule. Odpověď byla dána A. Tichonovem v [1935], kde je ukázáno, že jednotková sféra v prostoru l^2 je retraktem celé uzavřené jednotkové koule. J. Leray [1935] si pak všiml, že jednotková sféra prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ je stažitelná. Z obou výsledků pak plyne, že existují spojitá zobrazení uzavřených jednotkových koulí ať již prostoru l^2 či $\mathcal{C}([0,1])$ do sebe nemající pevné body.

Jiné řešení Ulamova problému využívá jeden z výsledků V.Kleeho z [1953]. Ten říká, že pro každý nekonečně dimenzionální Banachův prostor X existuje homeomorfní zobrazení h prostoru X na $X \setminus \{0\}$ s vlastností $h(x) = x$ pokud $\|x\| \geq 1$. (Jen tak na okraj, C. Bessaga [1966] a C. Bessaga and A. Pełczyński [*1975] ukázali, že existuje takové zobrazení h dokonce třídy $\mathcal{C}^\infty$.) Potom samozřejmě zobrazení $r : x \mapsto \frac{h(x)}{\|h(x)\|}$ je retrakcí B_X na S_X. A pokud r je retrakcí B_X na S_X, potom zobrazení $-r : B_X \to B_X$ je spojité zobrazení bez pevného bodu.

První konkrétní příklad spojitého zobrazení jednotkové koule do sebe v Hilbertově prostoru nemající pevný bod se obvykle připisuje S. Kakutanimu. Uvedli jsme ho v odstavci 23.11.

J. Dugundji [1951] ukázal, že uzavřená jednotková koule nekonečně dimenzionálního normovaného lineárního prostoru nemá nikdy vlastnost pevného bodu FPP. V. Klee [1955] Dugundjiho výsledek ještě zobecnil: *Konvexní podmnožina C metrizovatelného lokálně konvexního prostoru má vlastnost FPP, právě když C je kompaktní.*

Lze dokonce dokázat ještě silnější tvrzení. Je-li totiž C nekompaktní uzavřená konvexní podmnožina nekonečně rozměrného Banachova prostoru, nejenže C nemá vlastnost pevného bodu, ale P.K. Lin a Y. Sternfeld [1985] ukázali, že na C existují lipschitzovská zobrazení nemající ani aproximativní pevné body. Zde je jejich přesný výsledek.

Věta. *Je-li C nekompaktní uzavřená konvexní podmnožina Banachova prostoru nekonečné dimenze, existuje lipschitzovské zobrazení $f : C \to C$ takové, že* $\inf\{\|f(x) - x\| : x \in C\} > 0$.

***23.9. Tichonovova věta v lokálně konvexních prostorech**. Vyjdeme-li z rámce Banachových prostorů, lze dokázat následující zobecnění Schauderovy věty pro lokálně konvexní prostory. Důkaz lze najít třeba v K. Deimling [*1985], originál v A.N. Tychonov [1935].

Věta. *Je-li C uzavřená konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru a $f : C \to C$ spojité zobrazení, pro něž množina $f(C)$ je relativně kompaktní, potom existuje $x \in C$ tak, že $f(x) = x$.*

***23.10. Kakutani-Markovova věta**. Další důležitou větou o pevných bodech je Kakutani-Markovova věta pro třídu afinních zobrazení. Než ji vyslovíme, řekněme si, že zobrazení T konvexní množiny C do vektorového prostoru je *afinní*, jestliže $T\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\Big) = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j T x_j$, kdykoliv $x_j \in C$, $\lambda_j \geq 0$ a $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$.

(a) **Věta.** *Nechť $\mathcal{F}$ je třída navzájem komutujících spojitých afinních zobrazení na kompaktní konvexní množině C lokálně konvexního prostoru X. Potom existuje $x \in C$ tak, že $Tx = x$ pro všechna $T \in \mathcal{F}$.*

Návod. Nejdříve se dokáže věta v případě, kdy $\mathcal{F}$ sestává pouze z jednoho zobrazení. Nechť tedy $T : C \to C$ je spojité afinní zobrazení nemající pevný bod. Potom množiny $\big\{(x,x) : x \in C\big\}$ a $\big\{(x,Tx) : x \in C\big\}$ jsou disjunktní kompaktní konvexní množiny. Podle geometrické Hahn-Banachovy věty *14.7.e existují $\varphi, \psi \in X^*$ a $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ tak, že

$$\varphi(x) + \psi(Tx) \leq \alpha < \beta \leq \varphi(y) + \psi(Ty)$$

pro každou dvojici $x, y \in C$. Tudíž $\psi(Tx - x) \geq \beta - \alpha$ pro každé $x \in C$, a iterací také $\psi(T^n x - x) \geq n(\beta - \alpha) \to \infty$. Dostáváme, že posloupnost $\big\{\psi(T^n x)\big\}$ je neomezená, což je zřejmý spor s kompaktností množiny $\psi(C)$.

Dokazujme nyní vlastní větu. Označíme-li $K_T = \{x \in C : Tx = x\}$ množinu pevných bodů zobrazení $T \in \mathcal{F}$, je K_T neprázdná kompaktní konvexní množina. K dokončení důkazu potřebujeme ukázat, že $\bigcap\{K_T : T \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset$. K tomu stačí ověřit, že libovolné dvě (a podobně i konečně mnoho) množiny z tohoto systému se protnou. Jsou-li však $T, S \in \mathcal{F}$, máme $S(K_T) \subset K_T$, neboť T a S komutují. Odtud plyne podle začátku důkazu, že zobrazení $S \restriction K_T$ má pevný bod, takže $K_S \cap K_T \neq \emptyset$. ♣

(b) **Poznámky.** (b1) Při důkazu Kakutani-Markovovy věty jsme použili jednu z forem Hahn-Banachovy věty. S. Kakutani v [1938b] naopak využil právě uvedenou větu k důkazu Hahn-Banachovy věty.

(b2) Jednu z hezkých aplikací Kakutani-Markovovy věty tvoří důkazy tvrzení o existenci invariantních měr na grupách, speciálně o existence Haarovy míry na kompaktní grupě.

***23.11. Závěrečné poznámky**. Z novějších publikací o pevných bodech neexpanzivních zobrazení jmenujme K. Goebel and S Reich [*1984], K. Goebel and W.A. Kirk [*1990], J. Dugundji and A. Granas [*1982] či A.G. Aksoy and M.A. Khamsi [*1990].

Appendix

A. Něco málo z lineární algebry

A.1. Vektorové prostory. Nechť $\mathbf{F}$ značí buďto těleso reálných či komplexních čísel. *Vektorovým prostorem* W nad $\mathbf{F}$ rozumíme (neprázdnou) množinu W, kde mezi jejími prvky je definováno sčítání $+ : W \times W \to W$ a skalární násobení $\mathbf{F} \times W \to W$ splňující jisté axiomy. Podstatné je, že W vzhledem ke sčítání tvoří komutativní grupu s nulovým prvkem 0 a že ve W platí distributivní zákony. Vektorový prostor skládající se z jediného prvku $\{0\}$ nazveme *triviálním* a nebudeme se jím vůbec zabývat.

Někdy též mluvíme o *reálném* či *komplexním* vektorovém prostoru, podle toho, nad jakým tělesem ho chápeme.

Podprostorem Z vektorového prostoru W rozumíme takovou jeho podmnožinu splňující $\lambda x + \mu y \in Z$, pokud $\lambda, \mu \in \mathbf{F}$ a $x, y \in Z$. Symbolicky to budeme zapisovat jako $Z \subset\subset W$.

Báze vektorového prostoru je taková jeho podmnožina $\mathcal{B}$, pro niž

(a) každá konečná podmnožina prvků $\mathcal{B}$ je lineárně nezávislá,
(b) každý prvek z W lze napsat (jednoznačně) jako konečnou lineární kombinaci nějakých prvků z $\mathcal{B}$.

Protože bází, s nimiž se v moderní analýze setkáváme, je více (kupř. báze topologie, Schauderova či ortonormální báze), budeme bázi vektorového prostoru nazývat přesněji *Hamelovou* nebo též *algebraickou* bází.

Důležitá je následující věta, jejíž důkaz je jednoduchou aplikací Zornova lemmatu.

Věta. *Buď $\mathcal{B}_0$ lineárně nezávislá podmnožina (netriviálního) vektorového prostoru W. Potom existuje báze prostoru W obsahující $\mathcal{B}$. Speciálně každý vektorový prostor má bázi.*

Existuje-li báze prostoru W mající pouze konečně mnoho prvků, má libovolná báze W stejný počet prvků. Tento počet pak nazveme *dimenzí* vektorového prostoru W. Nekonečně dimenzionální prostory jsou pak ty, které mají báze o nekonečně mnoha prvcích. Tedy v prostoru, kde $\dim W = \infty$, existuje nekonečná lineárně nezávislá množina (zopakujme, že nekonečná podmnožina vektorového prostoru je *lineárně nezávislá*, jestliže každá její konečná podmnožina sestává z lineárně nezávislých prvků). Snad pouze pro přesnost, triviální vektorové prostory budou mít dimenzi 0.

Poznámky. (a) Buď W vektorový prostor nad tělesem komplexních čísel $\mathbf{C}$. Potom lze W chápat také jako vektorový prostor nad $\mathbf{R}$. Přesněji, označme $W_{\mathbf{R}}$ množinu W, kde násobení skalárem omezíme pouze na násobení reálnými čísly. Potom je zřejmě $W_{\mathbf{R}}$ reálný vektorový prostor. Není však pravda, že násobení v reálném vektorovém prostoru lze vždy rozšířit na násobení nad $\mathbf{C}$ tak, abychom dostali komplexní vektorový prostor. Stačí vzít příklad $\mathbf{R}$ či $\mathbf{R}^3$. V tomto vektorovém prostoru nelze definovat násobení komplexními čísly tak, aby $\mathbf{R}$ nebo $\mathbf{R}^3$ byl stále vektorový prostor a násobení se shodovalo s původním násobením reálnými čísly. To není těžké si rozmyslet. Jak bychom totiž definovali kupř. součin ix? Obecně lze ukázat, že takové rozšíření existuje, právě když na W existuje automorfizmus (izomorfizmus W na W) u tak, že $u^2(x) = -x$ pro každé $x \in W$. Potom definujeme $ix := u(x)$.

(b) Podobnou otázku si můžeme položit i v případě Banachových či topologických vektorových prostorů. Vlastně již S. Banach se ptal, zda každý nekonečně dimenzionální reálný Banachův prostor X je „reálnou" částí nějakého komplexního prostoru, tedy zda násobení (reálným) skalárem lze spojitě rozšířit na násobení komplexními čísly. I zde je nutnou a postačující podmínkou existence spojitého izomorfizmu $u : X \to X$ splňujícího $u^2(x) = -x$ pro $x \in X$. Jako protipříklad, že to není vždy možné, poslouží Jamesův prostor z *1.2.d. Čtenáře můžeme odkázat na článek J. Dieudonné [1952] a na monografii H.H. Schaefer [*1966].

A.2. Lineární zobrazení. Jsou-li V a W vektorové prostory (nad týmž tělesem), je $L : W \to V$ *lineárním zobrazením*, pokud zachovává vektorové operace, tj. pokud

$$L(\lambda x + \mu y) = \lambda Lx + \mu Ly$$

pro všechna $x, y \in W$ a $\lambda, \mu \in \mathbf{F}$. V případě, kdy $V = W$ mluvíme též o *operátorech*, pokud $V = \mathbf{F}$ také o *lineárních formách* či o *funkcionálech* na W.

Prostor všech lineárních forem na W nazveme *algebraickým duálem* prostoru W. Ten tvoří opět vektorový prostor s přirozeně definovaným sčítáním a násobením skalárem. Budeme jej značit symbolem $W^{\#}$.

Je-li $L : W \to V$ lineární zobrazení, nazveme množiny

$$\ker L := \{x \in W : Lx = 0\} \quad \text{a} \quad \mathcal{R}L := L(W) = \{Lx : x \in W\}$$

jádrem a *oborem hodnot* zobrazení L.

Vektorové prostory W a V nazveme *(algebraicky) izomorfními*, existuje-li prosté lineární zobrazení W na V. *Izomorfní zobrazení* mezi vektorovými prostory W a V, krátce jen *(algebraický) izomorfimus*, je tedy prosté lineární zobrazení W na V. Izomorfnímu zobrazení W na W se někdy říká *automorfizmus*.

Poznámka. Je-li W vektorový prostor nad $\mathbf{C}$ a $\varphi \in W^{\#}$ (komplexní) lineární forma na něm, je $u := \operatorname{Re}\varphi$ prvkem $W^{\#}_{\mathbf{R}}$. Navíc platí, že $\varphi(x) = u(x) - iu(ix)$ pro každé $x \in W$. Naopak, je-li $u \in W^{\#}_{\mathbf{R}}$ a $\psi : x \mapsto u(x) - iu(ix)$ pro $x \in W$, je $\psi \in W^{\#}$.

A.3. Faktorový prostor. Je-li Z podprostor vektorového prostoru W, definujeme ekvivalenci na W tak, že prvky $x, y \in W$ jsou *ekvivalentní*, jestliže $x-y \in Z$. To je skutečně vztah ekvivalence a prostor W se rozpadne na třídy navzájem ekvivalentních prvků. Třídou obsahující prvek x je pak množina $x+Z$. *Faktorovým prostorem* W/Z rozumíme prostor právě všech tříd ekvivalentních prvků, kde sčítání a násobení skalárem je definováno předpisem

$$(x + Z) + (y + Z) := (x + y) + Z \quad \text{a} \quad \lambda(x + Z) := \lambda x + Z\,.$$

Tato definice je korektní, je totiž nezávislá na výběru prvků v dané třídě. Není těžké ověřit, že W/Z s takto definovanými operacemi tvoří vektorový prostor.

Zobrazení $q : W \to W/Z$, které přiřadí prvku $x \in W$ třídu $x + Z$, nazveme *kanonickým zobrazením*. Kanonické zobrazení je samozřejmě lineární.

Kodimenzí podprostoru Z ve vektorovém prostoru W rozumíme dimenzi $\dim W/Z$.

A.4. Nadroviny. Začněme s následující charakteristikou.

Větička. *Nechť H je podprostor vektorového prostoru W. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *H je maximální vlastní podprostor W,*
(ii) $\operatorname{codim} H := \dim W/H = 1$,
(iii) *existuje nenulový lineární funkcionál f na W tak, že $H = \ker f$.*

Návod. Ekvivalence (i) a (ii) je zřejmá. Je-li $H = \ker f$, kde f je nenulový lineární funkcionál, je H vlastní podprostor W. Volíme-li $x \in W \setminus H$, je lineární obal $(\{x\}, H)$ celý prostor W (neboť $w = \big(w - \frac{f(w)}{f(x)}x\big) + \frac{f(w)}{f(x)}x$, přičemž $\big(w - \frac{f(w)}{f(x)}x\big) \in H$). Tudíž $\operatorname{codim} H = 1$. Je-li naopak H vlastní maximální podprostor W a $z \notin H$, stačí položit $f(x + \lambda z) := \lambda$ pro $x \in H$. Potom f je korektně definovaný nenulový lineární funkcionál a $H = \ker f$. ♣

Nadrovinou ve vektorovém prostoru W rozumíme každou množinu tvaru $x + H$, kde $x \in W$ a H je maximální vlastní podprostor W. S ohledem k výše uvedené charakteristice je H nadrovinou, právě když existuje skalár α a nenulový lineární funkcionál $f \in W^{\#}$ tak, že $H = \{x \in W : f(x) = \alpha\}$.

Je-li W reálný vektorový prostor, $H = \{x \in W : f(x) = \alpha\}$ a A podmnožina W, nazveme H *opěrnou nadrovinou* k A, jestliže $A \subset \{x \in W : f(x) \le \alpha\}$ anebo $A \subset \{x \in W : f(x) \ge \alpha\}$ a existuje $x_0 \in A$ tak, že $f(x_0) = \alpha$.

A.5. Základní lemma. *Nechť W je vektorový prostor (nad $\mathbf{F}$) a $g, f_1, \dots, f_n$ lineární formy na něm. Potom g je lineární kombinací $f_1, \dots, f_n$, právě když $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \ker f_i \subset \ker g$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \ker f_i \subset \ker g$. Pro $w \in W$ položme $L(w) = (f_1(w), \dots, f_n(w))$. Dále ještě definujme funkci T na $L(W)$ předpisem $T(f_1(w), \dots, f_n(w)) = g(w)$. Potom $T : L(W) \to \mathbf{F}$ je lineární zobrazení definované korektně (podle předpokladu) na podprostoru $L(W) \subset \mathbf{F}^n$. Protože T lze rozšířit na lineární zobrazení definované na celém prostoru $\mathbf{F}^n$, existují $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tak, že $g(w) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(w)$ pro každé $w \in W$.
Důkaz opačné implikace je triviální.
Jiný důkaz. Lze postupovat také indukcí podle n, přičemž ve znění lemmatu se lze omezit na případ, kdy formy $f_1, \dots, f_n$ jsou lineárně nezávislé. Jelikož tvrzení je triviální pro $n = 1$, předpokládejme rovnou že platí pro každou k-tici forem, kde $k \le n - 1$. Protože pro žádné $j \in \{1, \dots, n\}$ forma f_j není lineární kombinací zbylých forem, existují podle indukčního předpokladu $a_1, \dots, a_n \in W$ tak, že $f_j(a_j) = 1$ a $f_j(a_k) = 0$ pro každé $j = 1, \dots, n$ a každé $k = 1, \dots, n$, $k \ne j$. Volme j, $1 \le j \le n$ a $x \in W$. Protože $f_j\big(x - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x) a_k\big) = 0$, je podle předpokladu i $g\big(x - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x) a_k\big) = 0$. Potom ovšem $g = \sum\limits_{k=1}^{n} g(a_k) f_k$. ■

A.6. Biortogonální systém. *Nechť $f_1, \dots, f_n$ jsou lineárně nezávislé formy na vektorovém prostoru W. Potom existují lineárně nezávislé prvky $w_1, \dots, w_n \in W$ tak, že $f_i(w_j) = \delta_i^j$ pro každou dvojici i, j.*

Důkaz. Volme $i \in \{1, \dots, n\}$. Existuje $v_i \in \bigcap\limits_{k \ne i} \ker f_k \setminus \ker f_i$. V opačném případě by totiž podle předchozího základního lemmatu A.5 byla forma f_i lineární kombinací zbývajících forem. Položíme-li $w_i := \frac{v_i}{f_i(v_i)}$, máme $f_j(w_i) = 0$ pro $i \ne j$ a $f_i(w_i) = 1$. Zbývá ukázat, že prvky $w_1, \dots, w_n$ jsou lineárně nezávislé. Ale k tomu si stačí pouze vzpomenout na definici lineární nezávislosti. ■

B. Topologie v kostce

B.1. Základní pojmy. Uvažujme množinu T a nějaký systém τ jejích podmnožin. Řekneme, že τ je *topologie*, jestliže $\emptyset$ a T leží v τ a jestliže τ je uzavřena na tvoření konečných průniků a libovolných sjednocení. Množinám z τ říkejme *otevřené*. Chápeme tedy topologii jako kolekci množin s jistými vlastnostmi.

Základním příkladem topologie slouží systém všech otevřených podmnožin metrického prostoru. Ovšem ne každá topologie vznikne tímto způsobem. Existuje-li metrika na T tak, že topologie τ je právě systémem otevřených podmnožin T v této metrice, říkáme, že topologie τ je *metrizovatelná.*

Je-li τ topologie na T a S je podmnožina T, je kolekce $\tau_S := \{G \cap S : G \in \tau\}$ topologie na S. Prostor S opatřený topologií τ_S se pak nazývá *podprostorem*, či přesněji *topologickým podprostorem*, prostoru (T, τ).

Zobrazení f mezi topologickými prostory (T_1, τ_1) a (T_2, τ_2) nazveme *spojitým*, jestliže $f^{-1}(G) \in \tau_1$ pro každou množinu $G \in \tau_2$. Jinými slovy, jestliže vzory otevřených množin z T_2 jsou otevřené v T_1.

Máme-li v T otevřené množiny, není těžké definovat množiny *uzavřené*. To jsou právě doplňky otevřených množin. Z de Morganových pravidel vyplývá, že průnik libovolného počtu a sjednocení konečně mnoha uzavřených množin je množina uzavřená. Samozřejmě $\emptyset$ a T jsou i množiny uzavřené.

Uzávěr $\overline{A}$ množiny $A \subset T$ definujeme jako průnik systému všech uzavřených množin obsahujících A. Protože T je uzavřená množina obsahující A, je tento systém neprázdný. A protože průnik uzavřených množin je množina uzavřená, je $\overline{A}$ množina uzavřená. Je tedy uzávěr $\overline{A}$ nejmenší uzavřená množina obsahující A. Duálně definujeme *vnitřek* $\operatorname{Int} B$ množiny B jako sjednocení všech otevřených množin obsažených v B.

Okolím bodu $t \in T$ rozumíme každou množinu obsahující t ve svém vnitřku.

Poznámka. Topologické prostory lze zadávat i jinými způsoby. Třeba zobrazením $A \mapsto \overline{A}$ splňujícím jisté „Kuratowského axiomy“. V nich se požaduje, aby $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $A \subset \overline{A}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ a $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$. Uzavřené množiny jsou pak ty, které splývají se svým „uzávěrem“. Kolekce jejich doplňků pak vytváří naši topologii otevřených množin.

Topologie lze vytvářet i pomocí filtrů okolí jednotlivých bodů. Toho jsme využili při definici topologických vektorových prostorů, podívejte se na 13.4.

Je-li $\{z_n\}$ posloupnost prvků v topologickém prostoru (T, τ), řekneme, že $\{z_n\}$ konverguje k $z \in T$, jestliže ke každému okolí U bodu z existuje n_0 tak, že $z_n \in U$ pro všechna $n \geq n_0$.

Pokud jde o kompaktnost, můžeme definovat *kompaktní množiny* jako ty, u nichž z každého jejich pokrytí otevřenými množinami lze vybrat konečné podpokrytí, či *sekvenciálně kompaktní množiny*, kde z libovolné posloupnosti jejich prvků lze vybrat konvergentní podposloupnost s limitou v této množině. Zatímco v metrických prostorech pojmy kompaktních a sekvenciálně kompaktních množin splývají (to není úplně triviální dokázat), v obecných topologických prostorech tomu tak být nemusí.

Topologický prostor je *lokálně kompaktní*, jestliže každý jeho bod má kompaktní okolí a *σ-kompaktní*, jestliže je spočetným sjednocením svých kompaktních podmnožin.

Definice topologických prostorů je příliš obecná a nemůže zaručit splnění jistých vlastností, na které jsme zvyklí z teorie metrických prostorů. Proto se často třída všech topologických prostorů zúží a uvažují se pouze ty, kde libovolné dva různé body lze oddělit disjunktními otevřenými množinami. Ty pak nazýváme *Hausdorffovými* topologickými prostory. V nich kupříkladu body jsou již uzavřené množiny.

Existují i další kategorie topologických prostorů. Prostor (T, τ) je *regulární*, jestliže ke každé uzavřené množině $F \subset T$ a $x \in T \setminus F$ existují otevřené množiny $G_1, G_2 \in \tau$ tak, že $x \in G_1$, $F \subset G_2$ a $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. To lze říci i jinak. Prostor T je regulární, jestliže ke každému bodu $t \in T$ a každému okolí U bodu t existuje uzavřené okolí F bodu t tak, že $t \in F \subset U$. Jelikož regulární prostor nemusí být ještě Hausdorffův (jeho jednobodové podmnožiny nemusejí být totiž uzavřené), dávají mnozí autoři do definice regularity i požadavek hausdorffovosti.

Protože v regulárních prostorech spojité funkce mohou být pouze konstanty (příklad regulárního prostoru, na němž je každá spojitá funkce konstantní, sestrojil třeba J. Novák v [1948]-viz též E. Čech [Čech]), ještě dále se vydělí jisté jejich podtřídy. Topologický prostor T je *úplně regulární*, jestliže ke každé uzavřené množině $F \subset T$ a každému bodu $x \in T \setminus F$ existuje spojitá omezená funkce na T tak, že $f(x) = 0$ a $f = 1$ na F.

Normální jsou ty prostory, u nichž každé dvě disjunktní uzavřené množiny lze *oddělit* otevřenými množinami. Tedy T je normální, pokud ke každým dvěma disjunktním uzavřeným množinám F_1, F_2 v T existují disjunktní otevřené množiny $G_1, G_2 \subset T$ tak, že $F_1 \subset G_1$ a $F_2 \subset G_2$. Každý Hausdorffův normální topologický prostor je již úplně regulární (to není úplně triviální), a každý úplně regulární prostor je regulární (to je snadné dokázat). Platí také, že každý Hausdorffův kompaktní prostor či každý metrický prostor je normální.

Bází topologického prostoru (T, τ) rozumíme každou soustavu množin $\mathfrak{B} \subset \tau$ s vlastností, že každá množina z τ je sjednocením nějakých množin z $\mathfrak{B}$. Existuje-li v T spočetná báze jeho topologie, říkáme, že T vyhovuje *2. axiomu spočetnosti*.

Bází okolí bodu x, někdy též *lokální bází*, rozumíme libovolnou bázi filtru všech okolí bodu x (srovnej s C.2). Jestliže každý bod T má spočetnou bázi svých okolí, splňuje T *1. axiom spočetnosti*. *Separabilní* jsou ty prostory, v nichž existuje spočetná hustá podmnožina. Přitom množina je hustá v T, jestliže jejím uzávěrem je celý prostor T. V metrických prostorech je separabilita ekvivalentní existenci spočetné báze topologie. Metrické prostory také splňují 1. axiom spočetnosti.

Množina G se nazve množinou *typu G_δ*, někdy též *G_δ-množinou*, je-li průnikem spočetně mnoha otevřených množin. V metrických prostorech jsou uzavřené množiny (speciálně jednobodové množiny) vždy typu G_δ. V topologických prostorech tomu tak zdaleka není. Množiny *typu F_σ* jsou ty, které jsou spočetným sjednocením uzavřených množin.

Posloupnost $\{x_n\}$ prvků metrického prostoru (P, ϱ) nazveme *cauchyovskou*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že $\varrho(x_i, x_j) < \varepsilon$, kdykoliv $i, j \geq n_0$. Zřejmě každá konvergentní posloupnost je cauchyovská. *Úplné* jsou ty prostory, v nichž každá cauchyovská posloupnost je konvergentní.

Uveďme nyní některá tvrzení z topologie, která jsme v našem výkladu potřebovali.

B.2. Baireovy prostory. Zopakujme, že A je *hustou podmnožinou* topologického prostoru T, jestliže $\overline{A} = T$. Jinak řečeno, je-li $G \subset T$ otevřená neprázdná množina, musí být $G \cap A \neq \emptyset$. Populárně řečeno, množina A nesmí v prostoru T nechat „díry"; přičemž „dírou" rozumíme každou neprázdnou otevřenou podmnožinu T.

Množina B je řídká, jestliže $T \setminus \overline{B}$ je hustá, anebo ekvivalentně, jestliže $\overline{B}$ nemá žádné vnitřní body.

Množina $M \subset T$ je *1. kategorie* (v T), jestliže ji lze vyjádřit jako sjednocení spočetně mnoha řídkých množin.

Množina $M \subset T$ je *2. kategorie* (v T), jestliže není 1. kategorie. To lze formulovat také takto: Kdykoliv $\{G_n\}$ je posloupnost hustých otevřených podmnožin T, potom $\bigcap_n G_n \cap M \neq \emptyset$.

Tedy množina $M \subset T$ je *2. kategorie v sobě* (rozumí se v M), jestliže $\bigcap_n G_n \neq \emptyset$, kdykoliv $\{G_n\}$ je posloupnost hustých otevřených množin v M.

Konečně, množina $M \subset T$ je *reziduální*, jestliže její doplněk $T \setminus M$ je množina 1. kategorie.

Prostor T se zove *Baireův*, jestliže každá jeho neprázdná otevřená podmnožina je 2. kategorie. Ekvivalentně, T je Baireův, právě když pro každou posloupnost $\{G_n\}$ hustých otevřených podmnožin T je průnik $\bigcap_n G_n$ množina hustá.

B.3. Baireova věta. *Každý úplný metrický prostor anebo každý lokálně kompaktní topologický prostor je Baireův.*

Náznak důkazu. Nechť $\{G_n\}$ je posloupnost hustých otevřených množin v úplném metrickém prostoru T. Chceme ukázat, že $\bigcap_n G_n$ je hustá množina. Volme tedy otevřenou neprázdnou množinu $G \subset T$. Protože G_1 je hustá v T, je průnik $G_1 \cap G$ neprázdný. Existuje tedy otevřená koule $U(x_1, \varepsilon_1)$ tak, že $\overline{U(x_1, \varepsilon_1)} \subset G_1 \cap G$. Protože G_2 je hustá, musí protnout $U(x_1, \varepsilon_1)$. Existuje tedy otevřená koule $U(x_2, \varepsilon_2)$ tak, že $\overline{U(x_2, \varepsilon_2)} \subset G_2 \cap U(x_1, \varepsilon_1) \subset G_2 \cap G_1 \cap G$. Takto můžeme pokračovat (indukcí) dále. Pokud by existoval bod v průniku všech (do sebe zařazených koulí $U(x_n, \varepsilon_n)$), je vyhráno. Jestliže tedy ještě během důkazu zaručíme, aby $\varepsilon_n \to 0$, bude podle jedné Cantorovy věty z B.4 průnik $\bigcap_n \overline{U(x_n, \varepsilon_n)}$ neprázdný. A bod v tomto průniku bude zřejmě ležet v $G \cap \bigcap_n G_n$.

V případě lokálně kompaktního prostoru můžeme postupovat úplně stejně. Místo $\overline{U(x_n, \varepsilon_n)}$ budeme volit kompaktní okolí a následující Cantorova věta (tentokráte o neprázdnosti průniku do sebe zařazených neprázdných kompaktů) dá opět tvrzení. Detaily udělejte sami! ■

B.4. Cantorovy věty. *Nechť T je topologický prostor a $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \ldots$ klesající posloupnost jeho neprázdných podmnožin. Jestliže buďto T je úplný metrický prostor, C_n jsou uzavřené množiny a* $\operatorname{diam} C_n \to 0$ *anebo C_n jsou kompaktní množiny, potom $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$.*

Soustava $\mathcal{K}$ podmnožin množiny T se nazve *centrovanou*, jestliže průnik libovolného konečného podsystému z $\mathcal{K}$ je neprázdný. Následující věta udává důležitou charakterizaci kompaktních množin. Její důkaz je opět lehounkým cvičením na definici kompaktnosti.

B.5. Věta. *Nechť T je topologický prostor. Potom T je kompaktní, právě když průnik každé centrované soustavy uzavřených podmnožin T je neprázdný.*

B.6. Cvičení. Jako cvičení na dané pojmy zkuste dokázat následující tvrzení.

Větička. *Uzavřená podmnožina kompaktního prostoru je kompakt. Kompaktní podmnožina Hausdorffova prostoru je uzavřená.*

Je-li topologie τ na T Hausdorffova a $\sigma \supset \tau$ je také topologie na T, je i σ Hausdorffova.

Je-li $f : K \to T$ spojité zobrazení kompaktního prostoru K na T, je $T = f(K)$ kompaktní.

V důkazu následující věty využijeme právě zformulovanou větičku.

B.7. Věta. *Nechť τ a σ jsou topologie na množině K. Jestliže τ je Hausdorffova, prostor K je kompaktní v σ a $\tau \subset \sigma$, potom τ a σ již na K splývají.*

Důkaz. Uvažujme identické zobrazení $\mathrm{id} : (K, \sigma) \to (K, \tau)$. Podle předpokladů je id spojité. Vezmeme-li σ-uzavřenou množinu $F \subset K$, je F kompaktní v topologii σ. Ze spojitosti identity nyní plyne, že musí být uzavřená i v τ. Tím jsme ukázali, že $\sigma = \tau$. ■

Nechť Γ je indexová množina a T_γ topologický prostor pro každé $\gamma \in \Gamma$. *Kartézský součin* $\mathfrak{T} := \prod_{\gamma\in\Gamma} T_\gamma$ je množina všech zobrazení $f : \Gamma \to \bigcup_{\gamma\in\Gamma} T_\gamma$, pro něž $f(\gamma) \in T_\gamma$ pro každé $\gamma \in \Gamma$. (Jen tak stranou, uvědomte si, že axiom výběru zaručuje neprázdnost tohoto kartézského součinu.) Na $\mathfrak{T}$ definujme nyní topologii tím, že popíšeme, jak vypadají okolí jednotlivých bodů. Množinu $G \subset \mathfrak{T}$ nazveme otevřenou v *součinové topologii*, jestliže ke každému $x \in G$ existuje konečně mnoho indexů $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$ tak, že G_{γ_j} jsou otevřené v T_{γ_j} $(j = 1, \dots, n)$ a

$$x \in \Big\{ f \in \prod_{\gamma\in\Gamma} T_\gamma : f(\gamma_j) \in G_{\gamma_j} \text{ pro } j = 1, \dots, n \Big\} \subset G\,.$$

Posloupnost (respektive zobecněná posloupnost) f_n konverguje v této topologii k f, právě když $f_n(\gamma) \to f(\gamma)$ v prostoru T_γ pro každé $\gamma \in \Gamma$. Je tedy součinová topologie na $\mathfrak{T}$ topologií bodové konvergence.

Následující věta patří k pilířům topologie. Existují její různé důkazy, ty by ovšem vyžadovaly další prostředky. Lze je však nalézt v každé knize o topologii. Čtenáře můžeme odkázat též na článek P.R. Chernoff [1992], kde je stručně pojednáno o různých možnostech a proveden důkaz pomocí zobecněných posloupností.

B.8. Tichonovova věta. *Kartézský součin kompaktních topologických prostorů je kompakt.*

B.9. Věta. *Je-li K kompaktní metrický prostor, je prostor $\mathcal{C}(K)$ separabilní.*

Návod. Protože K je separabilní, existuje v něm spočetná báze $\{V_n\}$ jeho topologie (to znamená, že libovolná otevřená množina v K se dá vyjádřit jako sjednocení některých množin z této báze). Položme $f_n : x \mapsto \operatorname{dist}(x, K \setminus V_n)$. Je-li $\mathcal{A}$ algebra funkcí generovaná $\{f_n\}$, zjistíme pomocí Stone-Weierstrassovy věty D.2, že $\mathcal{A}$ je hustá v $\mathcal{C}(K)$. ♣

I další, poměrně méně známou větu, jsme v našem textu potřebovali.

B.10. Věta. *Nechť K je kompaktní topologický prostor. Existuje-li spočetná množina $S \subset \mathcal{C}(K)$ oddělující body K, potom K je metrizovatelný prostor.*

Důkaz. Lze předpokládat, že $|f| \le 1$ na K pro každou funkci $f \in S$. Srovnejme prvky S do posloupnosti. Řekněme, že $S = \{s_n\}$. Položme $\varrho(x,y) = \sum_n \frac{1}{2^n} |s_n(x) - s_n(y)|$. Lehko se ověří, že ϱ je metrika na K (zde potřebujeme, aby S oddělovala body K). Nechť τ_ϱ je topologie na K indukovaná metrikou ϱ a τ původní topologie K. Ukážeme-li, že τ_ϱ je Hausdorffova a je hrubší než τ $(\tau_\varrho \subset \tau)$, bude vzhledem k větě B.7 $\tau_\varrho = \tau$. K tomu ale stačí ukázat, že libovolná koule $\{x \in K : \varrho(x,z) < \varepsilon\}$ je množina τ-otevřená. Ale to je pravda, neboť všechny funkce s_n jsou τ-spojité a řada definující vzdálenost $\varrho(x,y)$ konverguje stejnoměrně. ■

Normální topologické prostory se dají charakterizovat i mnoha dalšími způsoby. Zde je jeden z nich.

B.11. Tietze-Urysohnova věta. *Topologický prostor T je normální, právě když pro každou uzavřenou množinu $F \subset T$ a každou spojitou funkci $f : F \to (a,b)$ existuje spojitá funkce φ_f na T tak, že $f = \varphi_f$ na F a $\varphi_f(T) \subset (a,b)$.*

Analogická věta neplatí pro zobrazení do libovolných Banachových anebo lokálně konvexních prostorů. Nicméně následující věta, dokázaná v J. Dugundji [1951] za předpokladu metrizovatelnosti dnes patří k velice důležitým.

B.12. Dugundjiho věta. *Nechť A je uzavřená podmnožina metrizovatelného prostoru P a C konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru. Jestliže $f : A \to C$ je spojité zobrazení, potom existuje spojité zobrazení $\varphi_f : P \to C$ tak, že $\varphi_f = f$ na A.*

B.13. Svaz topologií. Jsou-li τ a σ topologie na T a $\sigma \subset \tau$, říkáme, že σ je *slabší* než τ. Samozřejmě se pak říká, že τ je *silnější* anebo *jemnější* než σ. S takto definovaným uspořádáním pomocí množinové inkluze tvoří systém $\Omega(T)$ všech topologií na T uspořádanou množinu.

Největším prvkem $\Omega(T)$ je *diskrétní* topologie sestávající ze všech podmnožin množiny T a nejmenším prvkem $\Omega(T)$ pak topologie $\{\emptyset, T\}$. Té se někdy říká *triviální* či *indiskrétní*.

`(a) Úplný svaz.` Nechť $(M, \prec)$ je uspořádaná množina (definice, pokud si ji chcete osvěžit, je uvedena v C.4; tam jsou uvedeny i definice horní závory a maximálního prvku). Je-li S její neprázdná podmnožina, řekneme, že prvek $s \in M$ je *supremem* množiny S, značíme $s = \sup S$, jestliže s je minimálním prvkem množiny všech horních závor množiny S. Jinými slovy, $s = \sup S$, jestliže $x \prec s$ pro každé $x \in S$ a pokud $x \prec s^*$ pro každé $x \in S$, potom nutně $s \prec s^*$. Obdobně se definuje $\inf S$.

Uspořádaná množina $(M, \prec)$ tvoří *svaz*, pokud $\inf\{x, y\}$ a $\sup\{x, y\}$ existují pro každou dvojici $x, y \in M$.

Řekneme, že uspořádaná množina $(M, \prec)$ tvoří *úplný svaz*, jestliže každá její neprázdná podmnožina má infimum a supremum. Obsahuje-li množina M největší a nejmenší prvek, tvoří M úplný svaz, jestliže její každá neprázdná podmnožina má infimum. Je-li totiž pak $S \subset M$ a označíme-li $S^* := \{x \in M : s \prec x \text{ pro každé } s \in S\}$, je S^* neprázdná množina a její infimum je vlastně supremem S.

`(b) Větička.` *Uspořádaná množina $\big(\Omega(T), \subset\big)$ všech topologií na dané množině T tvoří úplný svaz.*

Návod. Protože $\Omega(T)$ obsahuje největší a nejmenší prvek, stačí ukázat, že libovolná neprázdná podmnožina $\mathcal{T} \subset \Omega(T)$ má infimum. Tím je však průnik všech topologií z $\mathcal{T}$ (ověřte, že neprázdný průnik topologií je opět topologie!). Z předchozího pak vyplývá, že množina $\mathcal{T}$ má též supremum. Poznamenejme jenom, že jím zdaleka není sjednocení všech topologií z $\mathcal{T}$. ♣

`(c) Poznámka.` Pokud bychom uvažovali v kolekci $\Omega(T)$ všech topologií na T jeho podmnožinu $\Omega^h(T)$ sestávající jenom z Hausdorffových topologií na T, netvoří $\Omega^h(T)$ podsvaz $\Omega(T)$. Nicméně $\sup_{\Omega(T)} M = \sup_{\Omega^h(T)} M$ pro každou kolekci $M \subset \Omega^h(T)$ (zde symbolem $\sup_{\mathcal{Z}}$ označujeme supremum ve svazu $\mathcal{Z}$). Pokud jde o infima, ta se nemusejí zachovávat. Jako příklad stačí uvažovat kolekci $M = \Omega^h(T)$ všech Hausdorffových topologií na T. Dokonce infima v $\Omega^h(T)$ nemusí existovat. Zde je příklad. Buď T nekonečná množina a $t \in T$. Nechť topologie τ_t je generována systémem množin

$$\{\{y\} : y \in T, y \neq t\} \cup \{T \setminus F : F \subset T \text{ konečná}\}\ .$$

Potom τ_t je pro každé $t \in T$ Hausdorffova, ale $\inf(\tau_x, \tau_y)$ pro $x \neq y$ v $\Omega^h(T)$ neexistuje.

B.14. Věta. *Nechť $\mathcal{F}$ je systém reálných funkcí na topologickém prostoru T. Potom na T existuje nejmenší topologie $\tau_{\mathcal{F}}$, v níž jsou všechny funkce z $\mathcal{F}$ spojité. Přitom $\tau_{\mathcal{F}}$ je Hausdorffova, právě když ke každé dvojici $x, y \in T$, $x \neq y$ existuje $f \in \mathcal{F}$ tak, že $f(x) \neq f(y)$.*

Návod. Uvažujme kolekci $\mathfrak{T}$ všech topologií na T, které mají tu vlastnost, že všechny funkce z $\mathcal{F}$ jsou v každé z nich spojité. Systém $\mathfrak{T}$ je neprázdný, neboť obsahuje diskrétní topologii. Stačí položit $\tau_{\mathcal{F}} = \inf\{\tau : \tau \in \mathfrak{T}\}$. Je-li nyní G otevřená podmnožina $\mathbf{R}$, $f \in \mathcal{F}$ a $\tau \in \mathfrak{T}$, je $f^{-1}(G) \in \tau$. Tudíž $f^{-1}(G) \in \tau_{\mathcal{F}}$ a f je tedy $\tau_{\mathcal{F}}$-spojitá. To, že $\tau_{\mathcal{F}}$ je nejmenší ze všech topologií činících všechny funkce z $\mathcal{F}$ spojitými, je jasné. Menší již existovat nemůže.

Rovněž důkaz dodatku o hausdorffovosti by neměl činit potíže. ♣

B.15. Poznámky. (a) Topologii $\tau_{\mathcal{F}}$ bývá zvykem nazývat *topologií generovanou* systémem $\mathcal{F}$. Někdy též *slabou topologií* určenou $\mathcal{F}$.

(b) Vnímavějšímu čtenářovi by nemělo činit potíže maličké zobecnění. Tvrzení platí i pro systém ne nutně reálných funkcí, ty by mohly nabývat hodnot v nějakém topologickém prostoru. Dokonce každá z nich v jiném. Pro dodatek o hausdorffovosti generované topologie bychom ovšem potřebovali hausdorffovost všech těchto prostorů.

B.16. Alexandrovská jednobodová kompaktifikace. Nechť (T, τ) je nekompaktní Hausdorffův lokálně kompaktní prostor, ∞ označení pro množinu, která není prvkem T a $T_\infty := T \cup \{\infty\}$. Definujme systém τ_∞ podmnožin množiny T_∞ tak, že k množinám z τ přidáme všechny doplňky v T_∞ kompaktních podmnožin T. Potom τ_∞ je topologie na T_∞, v níž je T_∞ Hausdorffův kompaktní topologický prostor obsahující T jako svou hustou podmnožinu. Prostor T_∞ s topologií τ_∞ pak nazýváme *alexandrovskou* či *jednobodovou* kompaktifikací (T, τ).

Podmínku lokální kompaktnosti T jsme uvedli z důvodu, aby T_∞ byl Hausdorffův prostor. Pokud bychom uvažovali obecnější topologické prostory, přijdeme o hausdorffovost topologie na T_∞.

Na okraj poznamenejme, že alexandrovská kompaktifikace je „nejmenší“ kompaktifikací T. Existuje i „největší“ Stone-Čechova kompaktifikace, s kterou jsme se seznámili (dokonce pro úplně regulární prostory) v *7.9 či *15.4.

C. Filtry a zobecněné posloupnosti

C.1. Filtr. *Filtrem* $\mathcal{F}$ na množině A rozumíme soustavu neprázdných podmnožin množiny A splňující podmínky:

(a) jestliže $F \in \mathcal{F}$ a $G \supset F$, potom i $G \in \mathcal{F}$,
(b) jestliže $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, potom $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.

C.2. Báze filtru. Nechť $\mathcal{F}$ je filtr na množině A. Řekneme, že kolekce $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ je *bází filtru* $\mathcal{F}$, jestliže

$$\mathcal{F} = \left\{F \subset A : \text{existuje } B \in \mathcal{B} \text{ tak, že } B \subset F\right\}.$$

Neprázdná kolekce $\mathcal{B}$ neprázdných podmnožin množiny A je bází nějakého filtru, právě když splňuje následující podmínku: Jestliže $B, C \in \mathcal{B}$, potom existuje $D \in \mathcal{B}$ tak, že $D \subset B \cap C$.

C.3. Příklady. (a) V topologickém prostoru T tvoří soustava $\mathcal{V}_x := \{U \subset T : x \in \operatorname{Int} U\}$ všech okolí bodu x filtr. Jeho bázi tvoří kupříkladu systém všech otevřených okolí bodu x anebo v metrických prostorech třeba všechna ε-okolí bodu x.

(b) Soustava $\mathcal{B} = \{(a, \infty) : a > 0\}$ tvoří bázi tzv. *Fréchetova filtru* na $\mathbf{R}$.

Nyní bychom mohli definovat pojem konvergence filtru (filtr $\mathcal{F}$ v topologickém prostoru T konverguje k bodu x, jestliže $\mathcal{V}_x \subset \mathcal{F}$), hromadného bodu filtru, ultrafiltru a další pojmy s filtry souvisejícími a odvodit řadu vět z topologie využívajících těchto pojmů. Místo toho zavedeme pojem „zobecněné“ posloupnosti, kterémužto jsme v textu dávali přednost. Mnoho autorů pracuje raději s filtry, to je samozřejmě věc osobního vkusu a chuti. V žádném případě nelze říci, že to či ono pojetí je lepší. Na závěr si pak všimneme vztahu pojmů filtru a zobecněné posloupnosti.

C.4. Uspořádané množiny. Pod pojmem *částečně uspořádané množiny* budeme vždy rozumět množinu M opatřenou relací „$\prec$“ mající následující vlastnosti:

(a) $a \prec a$ (reflexivita),
(b) jestliže $a \prec b$ a $b \prec c$, potom $a \prec c$ (transitivita)

(a, b, c jsou libovolné prvky M).

Částečně uspořádanou množinu splňující navíc požadavek antisymetrie

(c) jestliže $a \prec b$ a $b \prec a$, potom $a = b$

budeme nazývat *uspořádanou* množinou.

Budeme též psát $a \succ b$ v případě, kdy $b \prec a$.

Řetězcem v uspořádané množině $(M, \prec)$ je každá lineárně uspořádaná podmnožina M, tedy množina, u níž umíme její libovolné dva prvky porovnat. Jinými slovy, $\mathcal{R}$ bude řetězec, kdykoliv $a, b \in \mathcal{R}$, potom nutně buďto $a \prec b$ anebo $b \prec a$.

Je-li M uspořádaná množina, prvek x nazveme *horní závorou* nebo také *majorantou* množiny $P \subset M$, jestliže $p \prec x$ pro každé $p \in P$. Dále, $z \in M$ nazveme *maximálním prvkem* M, jestliže neexistuje žádný prvek $m \in M$, $m \neq z$ s vlastností $z \prec m$.

C.5. Zornovo lemma. Nechť M je neprázdná uspořádaná množina s vlastností, že každý její řetězec má horní závoru. Potom M má maximální prvek.

C.6. Usměrněné množiny a zobecněné posloupnosti. *Usměrněnou množinou* je každá částečně uspořádaná množina $(S, \prec)$ s vlastností, že ke každé dvojici $s_1, s_2 \in S$ existuje $s_3 \in S$, pro něž $s_1 \prec s_3$ a $s_2 \prec s_3$.

Zobecněná posloupnost v množině A je libovolné zobrazení, jehož definičním oborem je nějaká usměrněná množina a jehož hodnoty leží v A. Je-li $(\Gamma, \prec)$ usměrněná množina a $x : \Gamma \to A$ zobecněná posloupnost, píšeme krátce x_γ místo $x(\gamma)$ a $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ či $\{x_\gamma\}$ místo $x : \Gamma \to A$.

C.7. Konvergence zobecněné posloupnosti. Je-li $\{x_\gamma\}$ zobecněná posloupnost v topologickém prostoru (T, τ), řekneme, že $\{x_\gamma\}$ *konverguje* k x v T, což symbolicky značíme $x_\gamma \xrightarrow{\tau} x$ anebo krátce $\lim x_\gamma = x$ či $x_\gamma \to x$, jestliže ke každému okolí U bodu x existuje takový index γ_0, že $x_\gamma \in U$ pro každé $\gamma \succ \gamma_0$.

V Hausdorffově topologickém prostoru, jak lehko ihned zjistíme, nemůže zobecněná posloupnost konvergovat k dvěma různým prvkům.

Následující věta je analogií tvrzení známého z teorie metrických prostorů, tam si ovšem vystačíme s posloupnostmi.

C.8. Věta. *Nechť A je podmnožina topologického prostoru T. Potom $x \in \overline{A}$, právě když v A existuje zobecněná posloupnost $\{x_\gamma\}$ tak, že $x_\gamma \to x$.*

Důkaz. Nechť $x \in \overline{A}$. Je-li U libovolné okolí bodu x, je $A \cap U \neq \emptyset$. Volíme-li $x_U \in A \cap U$ libovolně, je $\{x_U\}$ zobecněná posloupnost v A, který konverguje k x. (Zde tedy usměrnění je dáno inkluzí: $U_1 \prec U_2$, jestliže $U_1 \supset U_2$. Viz též hned následující příklad C.9.b.)

Naopak, je-li $\{x_\gamma\}$ zobecněná posloupnost v A konvergující k x, potom každé okolí bodu x má neprázdný průnik s $\{x_\gamma\}$, a tudíž i s A. Jinými slovy, x musí ležet v $\overline{A}$. ■

C.9. Příklady. (a) Množina přirozených čísel $\mathbf{N}$ s obvyklým uspořádáním tvoří usměrněnou množinu. Každou posloupnost lze chápat jako zobecněnou posloupnost. Pojmy konvergence posloupnosti a zobecněné posloupnosti v tomto případě samozřejmě splývají.

(b) Nechť $\mathfrak{B}_x$ je báze filtru okolí bodu x v topologickém prostoru T (viz C3.a). Usměrnění na $\mathfrak{B}_x$ definujme inkluzí - řekneme, že $U_1 \prec U_2$, jestliže $U_2 \subset U_1$. Není těžké si rozmyslet, proč $(\mathfrak{B}_x, \prec)$ je usměrněná množina. Zvolíme-li libovolně $x_U \in U$ pro každé $U \in \mathfrak{B}_x$, je $\{x_U\}$ zobecněná posloupnost. Navíc $x_U \to x$.

(c) Buď nyní X Banachův prostor a f zobrazení z $[0,1]$ do X. Je-li $\mathcal{D} := \{0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = 1\}$ dělení intervalu $[0,1]$ a $I(\mathcal{D}) = \big\{\xi = \{\xi_i\} : \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]\big\}$, definujme *normu dělení* $\nu\mathcal{D} := \max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, ..., n\}$ a položme

$$\Xi(f, \mathcal{D}, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Číslo $\Xi(f, \mathcal{D}, \xi)$ nazýváme *riemannovským* součtem příslušným funkci f, dělení $\mathcal{D}$ a vektoru $\xi \in I(\mathcal{D})$.

Nyní zavedeme usměrnění do množiny všech dvojic $(\mathcal{D}, \xi)$ pomocí normy dělení. Řekneme, že $(\mathcal{D}_1, \xi_1) \prec (\mathcal{D}_2, \xi_2)$, jestliže $\nu\mathcal{D}_2 \leq \nu\mathcal{D}_1$ (povšimněte si, že definice je nezávislá na volbě vektorů ξ). Opět není těžké ověřit, že $\prec$ skutečně definuje usměrnění.

Řekneme, že zobrazení f je *riemannovsky integrovatelné*, existuje-li $\lim \Xi(f, \mathcal{D}, \xi)$. Jinými slovy, existuje-li takové $z \in X$, že ke každému $\varepsilon > 0$ lze nalézt $\delta > 0$ s vlastností

$$\big\|\Xi(f, D, \xi) - z\big\| < \varepsilon,$$

kdykoliv $\nu D < \delta$ a $\xi \in I(D)$.

V případě riemannovské integrovatelnosti f je limita $\lim \Xi(f, \mathcal{D}, \xi)$ jednoznačně určená a nazve se *Gravesovým* (někdy též *Riemann-Gravesovým*) integrálem zobrazení f.

Obdobně bychom mohli definovat usměrnění na množině všech dvojic $(\mathcal{D}, \xi)$ pomocí „inkluze“: $(\mathcal{D}_1, \xi_1) \prec (\mathcal{D}_2, \xi_2)$, jestliže dělení $\mathcal{D}_2$ je *zjemněním dělení* $\mathcal{D}_1$ (tedy jestliže každý dělící bod dělení $\mathcal{D}_1$ je i dělicím bodem dělení $\mathcal{D}_2$) a definovat opět integrál jako (zobecněnou) limitu riemannovských součtů. Bližší se lze dočíst v [LM], 43.7.

(d) Nechť A je libovolná množina a f reálná funkce na A. Jestliže množinu $\mathcal{S}$ všech konečných podmnožin A uspořádáme pomocí inkluze ($S_1 \prec S_2$, pokud $S_1 \subset S_2$) a položíme

$$\sigma(f, S) = \sum \big\{f(s) : s \in S\big\} \quad \text{pro} \quad S \in \mathcal{S},$$

je $\{\sigma(f, S)\}_{S \in \mathcal{S}}$ zobecněná posloupnost. Jestliže tato zobecněná posloupnost konverguje k nějakému reálnému číslu z, řekneme, že řada $\sum_{a \in A} f(a)$ *bezpodmínečně konverguje* a číslo z nazveme jejím součtem. V případě, kdy za množinu A volíme množinu všech přirozených čísel a za funkci f nějakou posloupnost $\{x_n\}$, potom řada $\sum_n x_n$ bezpodmínečně konverguje podle naší definice, právě když $\sum_n x_n$ konverguje absolutně.

(e) Uvažujme topologický prostor $T = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ všech reálných funkcí na $\mathbf{R}$ s topologií bodové konvergence dané topologií kartézského součinu. Do množiny $\mathcal{S}$ všech konečných podmnožin $\mathbf{R}$ zavedeme opět uspořádání dané inkluzí stejně jako v předešlém případě (d). Pro $F \in \mathcal{S}$ položme

$$f_F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in F, \\ 1 & \text{pro } x \in \mathbf{R} \setminus F. \end{cases}$$

Potom $\{f_F\}_{F \in \mathcal{S}}$ je zobecněná posloupnost v T, konvergující k funkci identicky rovné 0 na $\mathbf{R}$. Abychom poslední tvrzení dokázali, musíme si uvědomit, jak vypadají okolí nulové funkce. Báze okolí 0 je zadána systémem množin

$$U = \bigl\{h \in T : |h(x)| < \varepsilon \text{ pro } x \in F\bigr\}, \text{ kde } \varepsilon > 0 \text{ a } F \text{ je konečná množina}.$$

Víme-li již toto, není těžké ukázat, že $f_F \to 0$.

Konvergence posloupností či zobecněných posloupností v prostoru $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ je vlastně bodovou konvergencí. I odtud je vidět, že $f_F \to 0$.

(f) Uspořádejme množinu $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ všech dvojic přirozených čísel předpisem $(k_1, n_1) \prec (k_2, n_2)$, pokud současně $k_1 \le k_2$ a $n_1 \le n_2$. Pro dvojici (k, n) položme $f_{k,n} = \sin(k + n)$. Potom $\{f_{k,n}\}_{(k,n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}}$ je zobecněná posloupnost, která určitě není posloupností.

C.10. Podposloupnosti a zobecněné podposloupnosti. Jeden z nejtěžších pojmů této teorie je ukryt v definici zobecněné podposloupnosti. Mějme tedy dánu zobecněnou posloupnost $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$. Zobecněná posloupnost $\{z_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ se nazve *zobecněnou podposloupností* zobecněné posloupnosti $\{x_\gamma\}$, jestliže existuje funkce $\varphi : \Lambda \to \Gamma$ s následujícími vlastnostmi:

(a) φ je rostoucí ($\varphi(\lambda_1) \prec \varphi(\lambda_2)$, pokud $\lambda_1 \prec \lambda_2$),
(b) ke každému $\gamma \in \Gamma$ lze nalézt takové $\lambda \in \Lambda$, že $\gamma \prec \varphi(\lambda)$,
(c) $z_\lambda = x_{\varphi(\lambda)}$ pro každé $\lambda \in \Lambda$.

Místo $x_{\varphi(\lambda)}$ píšeme obvykle x_{γ_λ}.

Důležitá poznámka — původní zobecněná posloupnost a její zobecněná podposloupnost nemusejí mít stejnou indexovou množinu. Dále, konverguje-li zobecněná posloupnost k nějakému prvku, konverguje k témuž i každá její zobecněná podposloupnost. Každá podposloupnost je také zobecněnou podposloupností, ale posloupnost může mít i zobecněnou podposloupnost, která již není její podposloupností. Tento, pro pochopení důležitý fenomén, budeme ilustrovat na následujících příkladech.

C.11. Příklady. (a) Uvažujme posloupnost $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ danou třeba předpisem $x_n = \frac{1}{n}$. Uspořádejme opět množinu $\mathcal{S}$ všech konečných podmnožin $\mathbf{N}$ inkluzí, $F_1 \prec F_2$, pokud $F_1 \subset F_2$. Pro $F \in \mathcal{S}$ položme $n(F) = \max\{n \in \mathbf{N} : n \in F\}$ a $z_F = \frac{1}{n(F)}$. Potom $\{z_F\}_{F \in \mathcal{S}}$ je zobecněná podposloupnost posloupnosti $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, která není určitě její podposloupností. Zobrazení φ z definice zobecněné podposloupnosti je dáno jako $F \mapsto n(F)$.

(b) `Arensův příklad.` Nechť $T := \{(n, k) : n, k \text{ jsou celá nezáporná čísla}\}$ a $\tilde{T} := T \setminus \{(0, 0)\}$. Dále, nechť $T_n := \{(n, k) : k \ge 0,\ k \text{ celé}\}$ značí „sloupec nad n“. Na množině T definujme topologii tím způsobem, že veškeré body T s výjimkou $(0, 0)$ budou otevřené; U bude okolím bodu $(0, 0)$, jestliže množina $\{n : T_n \setminus U \text{ je nekonečná}\}$ je konečná. Čili, až na konečně mnoho sloupců může každý sloupec T_n obsahovat pouze konečně mnoho bodů, které nejsou v U. Není těžké ukázat, že T s takto definovanou topologií tvoří Hausdorffův topologický prostor. Tento příklad náleží R. Arensovi [1946] a je převzat z J.L. Kelley [*1955].

Sami ověřte, že bod $(0, 0)$ leží v uzávěru množiny $\tilde{T}$.

Na druhé straně ukážeme, že žádná posloupnost v $\tilde{T}$ nemůže konvergovat k $(0, 0)$. Kdyby totiž taková posloupnost $\{x_j\}$ existovala, mohla by mít v každém sloupci T_n pouze konečně mnoho svých členů (množina $T \setminus T_n$ je okolím $(0, 0)$). V tom případě je však množina $T \setminus \bigcup_j \{x_j\}$ okolím $(0, 0)$ a vidíme, že posloupnost $\{x_j\}$ nemůže k bodu $(0, 0)$ konvergovat.

Pokuste se jako cvičení nalézt takovou posloupnost $\{z_n\}$ v $\tilde{T}$, která by měla zobecněnou podposloupnost konvergující k $(0, 0)$.

(c) `Hustotní topologie.` Otevřenými množinami *hustotní topologie* na reálné ose $\mathbf{R}$ jsou lebesgueovsky měřitelné množiny jejichž každý bod je bodem hustoty. Tedy, lebesgueovsky měřitelná množina $U \subset \mathbf{R}$ je otevřená v hustotní topologii, jestliže

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{2h}\lambda\bigl(U \cap (x-h, x+h)\bigr) = 1 \quad \text{pro každé} \quad x \in U$$

(λ značí Lebesgueovu míru). Dokázat, že takto definovaná kolekce množin tvoří topologii, dá trochu práce; lze odkázat třeba na [LM].

Konverguje-li posloupnost $\{x_n\}$ v hustotní topologii, musí být již od určitého indexu konstantní (doplněk libovolné spočetné množiny je množina otevřená v hustotní topologii). Tudíž libovolný bod $z \in \overline{A} \setminus A$ nemůže být dosažitelný z množiny A pomocí posloupnosti. Existuje však vždy zobecněná posloupnost v A, která k z konverguje.

(d) Zobecněná posloupnost $\bigl\{\sin(k+n)\bigr\}_{(k,n)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}}$ z příkladu C.9.f je zobecněnou podposloupností posloupnosti $\{\sin j\}_{j\in\mathbf{N}}$. Pro ověření stačí uvažovat funkci $\varphi : \mathbf{N}\times\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ dané jako $\varphi(k,n) = k+n$. To je opět příklad (dokonce spočetné) zobecněné podposloupnosti dané posloupnosti, která není její podposloupností.

Následující věty charakterizují některé topologické pojmy. Povšimněme si jejich příbuznosti s obdobnými tvrzeními, platnými pro metrické prostory. Rozdíl není velký, pouze posloupnosti musíme nahradit zobecněnými posloupnostmi. Pokud jde o jejich důkazy, ty jsou obdobou důkazů známých ze základního kurzu analýzy a připojujeme je jedině z důvodu, abychom ukázali práci se zobecněnými posloupnostmi.

C.12. Věta. *Nechť f je zobrazení topologického prostoru X do Y. Potom f je spojité v bodě x, právě když $f(x_\gamma) \to f(x)$, kdykoliv $\{x_\gamma\}$ je zobecněná posloupnost v X a $x_\gamma \to x$.*

Důkaz. Nechť f je spojité v bodě x a $x_\gamma \to x$. Volme ještě okolí V bodu $f(x)$. Protože $f^{-1}(V)$ je okolím bodu x, existuje γ_0 tak, že $x_\gamma \in f^{-1}(V)$ pro každé $\gamma \succ \gamma_0$. Potom ovšem pro tato γ máme $f(x_\gamma) \in V$, čímž jsme dokázali, že $f(x_\gamma) \to f(x)$.

Není-li nyní zobrazení f spojité v bodě x, existuje okolí V bodu $f(x)$ s vlastností, že $f(U)$ není obsaženo ve V, ať si vezmeme jakékoliv okolí U bodu x. Je-li tedy U libovolné okolí x, existuje $x_U \in U$ tak, že $f(x_U) \notin V$. Potom ovšem $\{x_U\}$ je zobecněná posloupnost v X, $x_U \to x$, přičemž zobecněná posloupnost $\{f(x_U)\}$ nekonverguje k $f(x)$. ■

C.13. Věta. *Podmnožina K topologického prostoru T je kompaktní, právě když z každé její zobecněné posloupnosti lze vybrat její konvergentní zobecněnou podposloupnost s limitou v K.*

Náznak důkazu. Nechť K je kompakt a $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ zobecněná posloupnost prvků K. Pro $\gamma \in \Gamma$ položme $F_\gamma := \overline{\{x_\alpha : \gamma \prec \alpha\}}$ (uzávěr v K). Potom $\{F_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ je centrovaný systém uzavřených množin. Podle B.5 existuje $x \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma$. Pro každé $\gamma \in G$ a každé okolí U bodu x existuje $\alpha(U,\gamma) \succ \gamma$ tak, že $x_{\alpha(U,\gamma)} \in U$. Na množině všech dvojic (U,γ) definujme uspořádání $(U,\gamma) \prec (U^*,\gamma^*)$, jestliže $\alpha(U,\gamma) \prec \alpha(U^*,\gamma^*)$. Potom $\bigl\{x_{\alpha(U,\gamma)}\bigr\}$ je zobecněná podposloupnost posloupnosti $\{x_\gamma\}$ konvergující k x.

Obráceně, nechť $\mathcal{F}$ je centrovaný systém uzavřených podmnožin K. Označíme-li Γ množinu všech konečných podsystémů $\mathcal{F}$ s uspořádáním pomocí inkluze a volíme-li $x_\gamma \in \bigcap \gamma$ vcelku libovolně pro každý systém $\gamma \in \Gamma$, je $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ zobecněná posloupnost. Ta má podle předpokladu konvergentní vybranou zobecněnou podposloupnost a její limita (ležící v K) leží v průniku $\bigcap \mathcal{F}$. ■

C.14. Varování. Při práci se zobecněnými posloupnostmi musíme být velice opatrní a nepřenášet automaticky představy, které jsme si přinesli z teorie posloupností. Uveďme alespoň následující příklad.

Nechť $\{x_n\}$ je konvergentní posloupnost prvků metrického prostoru P, $x_n \to x$. Potom množina $\{x, x_1, x_2, x_3, \dots\}$ je kompaktní. To nahlédneme snadno. Situace se zobecněnými posloupnostmi je zcela jiná. Nechť Γ je množina všech racionálních čísel v intervalu $[0,1)$ uspořádaná obyčejným uspořádáním reálných čísel. Na metrickém prostoru $P := [0,1]$ uvažujme zobecněnou posloupnost

$\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ definovanou předpisem $x_\gamma = \gamma$. Evidentně $x_\gamma \to 1$. Přesto množina $\{1\} \cup \{x_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ není kompaktní.

Povšimněme si také, že libovolné reálné číslo z intervalu $x \in [0,1)$ je hromadným bodem množiny $\{x_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, ačkoliv žádná zobecněná podposloupnost zobecněné posloupnosti $\{x_\gamma\}$ nekonverguje k x.

Bod x je *hromadným bodem* množiny A, jestliže pro každé okolí V bodu x máme $(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.

C.15. Vztah zobecněných posloupností a filtrů. Nechť $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je zobecněná posloupnost v množině A. Potom soustava $\mathcal{B} := \big\{\{x_\gamma : \gamma \succ \gamma_0\} : \gamma_0 \in \Gamma\big\}$ je bází jistého filtru. Ten se někdy nazývá filtrem *generovaným zobecněnou posloupností* $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$.

Nechť naopak $\mathcal{F}$ je filtr na množině A. Položme $\Lambda = \big\{(a,F) : a \in F \in \mathcal{F}\big\}$. Na množině Λ definujme usměrnění předpisem $(a_1,F_1) \prec (a_2,F_2)$, jestliže $F_2 \subset F_1$. Definujeme-li nyní zobrazení x z indexové množiny Λ do A předpisem $x(a,F) = a$, je $\{x_{a,F}\}_{(a,F)\in\Lambda}$ zobecněná posloupnost *vytvořená* filtrem $\mathcal{F}$.

Platí nyní řada vět, kupříkladu filtr $\mathcal{F}$ konverguje k bodu x, právě když příslušná zobecněná posloupnost vytvořená $\mathcal{F}$ konverguje k x. A také naopak, $x_\gamma \to x$, právě když filtr generovaný zobecněnou posloupností $\{x_\gamma\}$ konverguje k x. Podobně jako u zobecněných posloupností, lze pomocí filtrů charakterizovat spojitost zobrazení, uzávěr či kompaktní množiny.

D. Co se potřebovalo z analýzy

D.1. Rungeho věta. *Nechť K je kompaktní podmnožina komplexní roviny $\mathbf{C}$ a $\Omega \subset \mathbf{C} \setminus K$ množina mající tu vlastnost, že protne každou komponentu množiny $\mathbf{C} \setminus K$. Je-li f holomorfní v okolí K a $\varepsilon > 0$, existuje racionální funkce g, jejíž póly leží v Ω tak, že $|f-g| < \varepsilon$ na K.*

Důkaz. Existují různé důkazy této věty či některých jejích variant. Hezký (nekonstruktivní) důkaz pocházející pravděpodobně od L.A. Rubela je proveden v W. Rudin [*1977]. Myšlenka je následující: Nechť M je podprostor Banachova prostoru $\mathcal{C}(K)$ tvořený všemi restrikcemi racionálních funkcí s póly mimo K (ty si můžeme dokonce předepsat v každé komponentě doplňku K). Stačí, ukážeme-li, že pro každý funkcionál $F \in (\mathcal{C}(K))^*$, který se anuluje na M, je $F(f) = 0$. Pak totiž bude $f \restriction K$ ležet v uzávěru M podle důsledku Hahn-Banachovy věty 2.25. ■

D.2. Stone-Weierstrassova věta. *Nechť $\mathcal{A}$ je podprostor prostoru spojitých funkcí $\mathcal{C}(K)$ na kompaktu K mající následující vlastnosti:*

(a) *$\mathcal{A}$ tvoří buďto algebru nebo svaz,*
(b) *$\mathcal{A}$ odděluje body K, tj. ke každé dvojici $x, y \in K$, $x \neq y$ existuje $f \in \mathcal{A}$ tak, že $f(x) \neq f(y)$,*
(c) *$\mathcal{A}$ obsahuje konstanty,*
(d) *je-li $f \in \mathcal{A}$, potom i $\overline{f} \in \mathcal{A}$.*

Potom $\mathcal{A}$ je hustý v $\mathcal{C}(K)$.

Poznámky. (a) Důkaz pro případ algebry je v *18.2 a následné poznámce, důkaz svazové verze je pak v *19.8.

(b) Jestliže uvažujeme $\mathcal{C}(K)$ jako prostor spojitých reálných funkcí, je podmínka (d) samozřejmě zbytečná.

D.3. Důsledek. *Nechť K je kompaktní podmnožina komplexní roviny $\mathbf{C}$, $f \in \mathcal{C}(K)$ a $\varepsilon > 0$. Potom existuje polynom p dvou proměnných tak, že $\big|f(z) - p(z,\overline{z})\big| < \varepsilon$ pro každé $z \in K$.*

Návod. Klasická Weierstrassova věta v $\mathbf{R}^n$, která je samozřejmě důsledkem předchozí obecné „algebrové“ verze Stone-Weierstrassovy věty, říká, že prostor všech polynomů $\mathcal{P}_n(K)$ na K je hustý v prostoru $\mathcal{C}(K)$ spojitých funkcí na libovolné kompaktní množině $K \subset \mathbf{R}^n$. Pokud jde o kompaktní podmnožinu K komplexní roviny $\mathbf{C}$, kterou můžeme ztotožnit s $\mathbf{R}^2$, tam prostor polynomů v proměnných z a $\overline{z}$ splývá s prostorem $\mathcal{P}_2(K)$. ♣

D.4. Hustota trigonometrických polynomů. *Je-li $f \in \mathcal{C}_{2\pi} := \big\{f \in \mathcal{C}([-\pi,\pi]) : f(-\pi) = f(\pi)\big\}$ a $\varepsilon > 0$, existuje trigonometrický polynom $g(t) := \sum_{j=0}^{n} (a_j \cos jt + b_j \sin jt)$ tak, že $\big|f(t) - g(t)\big| < \varepsilon$ pro každé $t \in [-\pi,\pi]$.*

Důkaz. Obvykle se důkaz provádí na základě Fejérovy věty o cesàrovské sčítatelnosti Fourierovy řady funkce f a následném využití klasické Weierstrassovy věty. Můžeme argumentovat také takto: Především množina

$$\mathcal{A}(\mathbf{T}) := \Big\{ f \in \mathcal{C}(S) : f(z) = \sum_{j=-n}^{n} \alpha_j z^j \;,\; n \text{ přirozené } \alpha_n, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{C} \Big\}$$

je hustá v prostoru $\mathcal{C}(\mathbf{T})$ (připomeňme, že $\mathbf{T} := \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$). To plyne ihned z předchozího důsledku D.3, neboť $\overline{z} = z^{-1}$ pro $z \in \mathbf{T}$. Dále pak stačí uvažovat zobrazení $\mathcal{C}(\mathbf{T}) \to \mathcal{C}_{2\pi}$, které funkci f přiřadí funkci $t \mapsto f(e^{it})$ a použít právě řečeného o hustotě $\mathcal{A}(\mathbf{T})$. ■

D.5. Rieszova věta o reprezentaci. *Nechť K je kompaktní (Hausdorffův) topologický prostor a $\mathcal{F}$ nezáporný lineární funkcionál na prostoru $\mathcal{C}(K)$. Potom existuje (nezáporná) Radonova míra μ na K tak, že*

$$\mathcal{F}(g) = \int_K g \, d\mu \quad \textit{pro všechny funkce} \quad g \in \mathcal{C}(K)\,.$$

Libovolné dvě Radonovy míry splňující tuto rovnost se shodují na borelovských podmnožinách K

Důkaz. V [LM] je proveden důkaz dokonce pro obecnější případ lokálně kompaktního prostoru K. ■

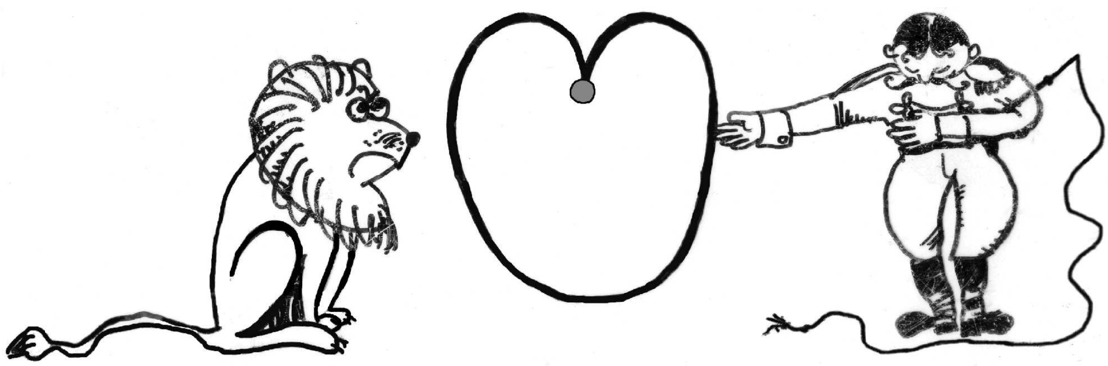
D.6. Poznámka. *Radonovou mírou* na kompaktu K rozumíme každou nezápornou množinovou funkci μ definovanou na σ-algebře $\mathcal{S}$ obsahující všechny borelovské množiny v K takovou, že

(a) $\mu K < \infty$,
(b) $\mu B = \inf\{\mu U : U \supset B\,,\, U \text{ otevřená}\}$ pro každou borelovskou množinu $B \subset K$,
(c) $\mu U = \sup\{\mu T : T \subset U\,,\, T \text{ kompakt}\}$ pro každou otevřenou množinu $U \subset K$.

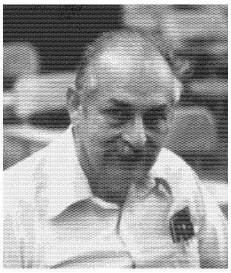
Pokud uvažujeme i znamémkové míry, jsou Radonovy míry rozdíly nezáporných Radonových měr. Komplexní Radonova míra je taková, že její reálná a imaginární část je (znaménková) Radonova míra

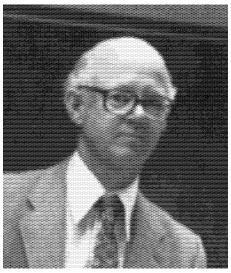
D.7. Věta. *Nechť Ω je otevřená podmnožina $\mathbf{R}^n$. Jestliže funkce h z prostoru $\mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ splňuje rovnost $\int_\Omega h\varphi = 0$ pro všechny testovací funkce $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, je $h = 0$ skoro všude.*

Náznak důkazu. Stačí ukázat, že $\int_K f = 0$ pro každý kompakt $K \subset \Omega$. K tomu účelu najděme posloupnost funkcí $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ tak, aby $\varphi_n \to c_K$. To lze docílit jistým „uhlazením" charakteristické funkce c_K množiny K. Potom podle Lebesgueovy věty bude $\int_k f = \lim \int f\,\varphi_n = 0$. ■

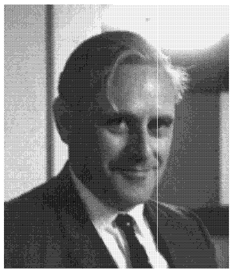


Portréty některých matematiků


L. Alaoglu

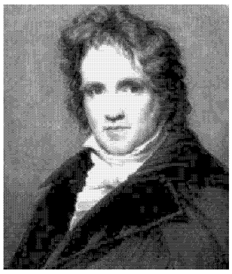

R.F. Arens


N. Aronszajn

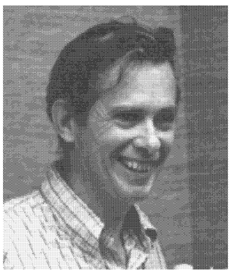

F.V. Atkinson


R.L. Baire


S. Banach


F. Bessel

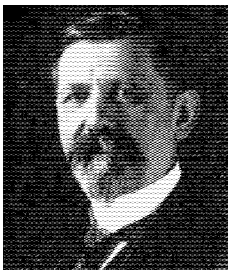

A. Beurling


E. Bishop


S. Bochner


H.F. Bohenblust


B. Bolzano


É. Borel

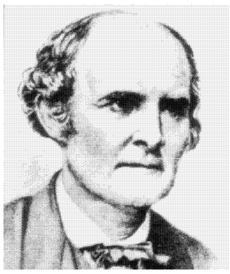

L.E.J. Brouwer

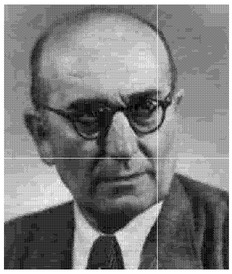

F.E. Browder

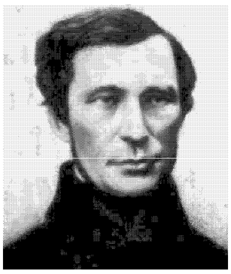

G. Cantor


C. Carathéodory

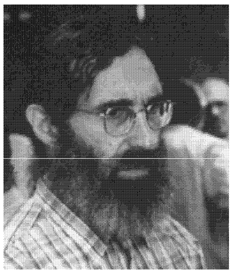

A. Cauchy


A. Cayley

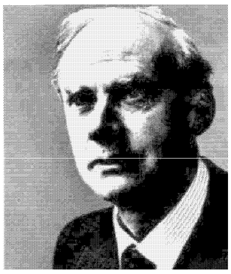

E. Čech

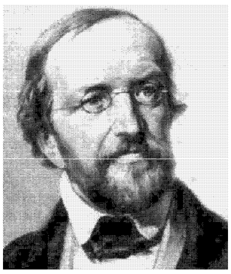

P. Čebyšev

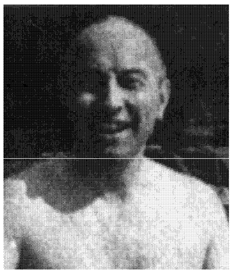

A.M. Davie


L. deBranges


J. Dieudonné


P.A. Dirac

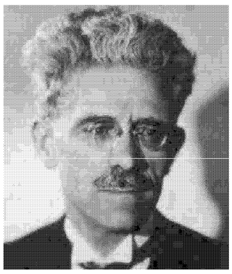

P.L. Dirichlet

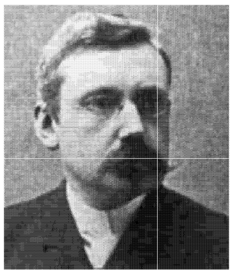

J. Dixmier


P. du Bois Reymond


W.F. Eberlein

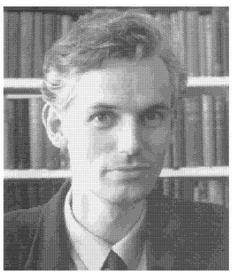

J.B.J. Fourier

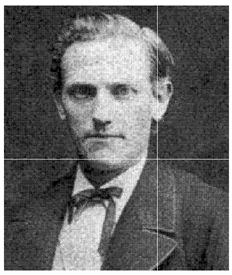

M. Fréchet


E.I. Fredholm


S. Fučík


I.M. Gelfand


W.T. Gowers


J. Gram


L.M. Graves


A. Grothedieck


A. Haar


H. Hahn

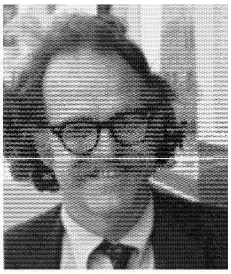

G.H. Hardy

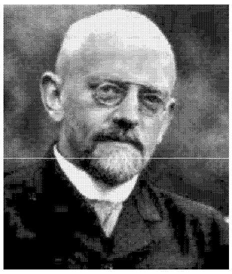

F. Hausdorff


H. Heine

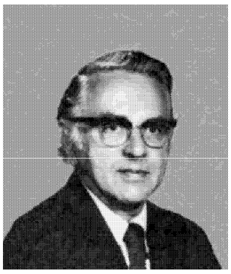

E. Helliger

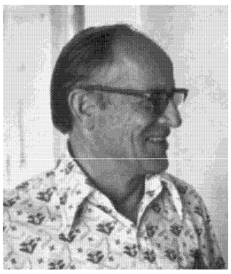

Ch. Hermite

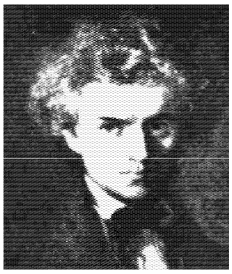

E. Hewitt


D. Hilbert


C.E Hille


N. Jacobson

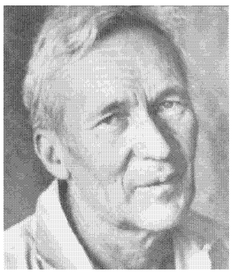

R.C. James


C. Jordan


S. Kakutani

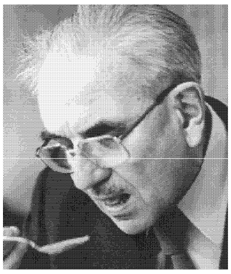

M.V. Keldyš


V.L. Klee


A.N. Kolmogorov

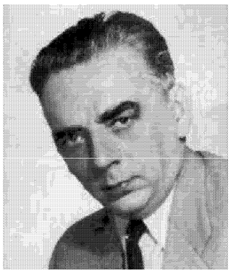

K. Kuratowski

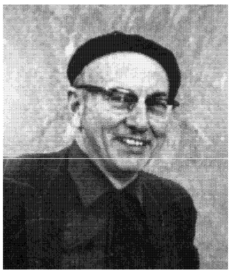

H. Lebesgue


J. Leray


R. Lipschitz

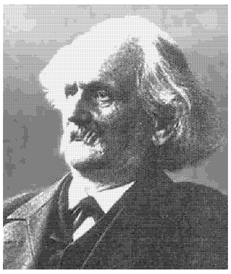

G.W. Mackey


S. Mazur

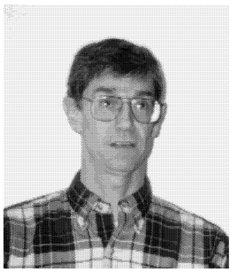

E.J. McShane

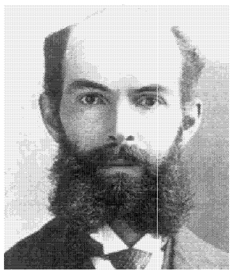

H. Minkowski

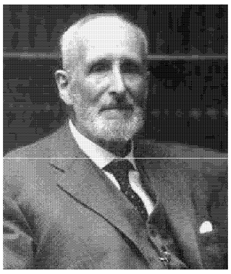

M.A. Naimark

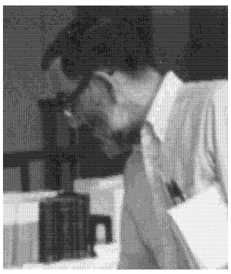

C. Neumann


C. Nirenberg

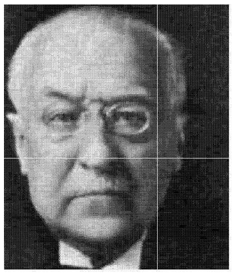

E. Odell


W. Osgood


O. Perron

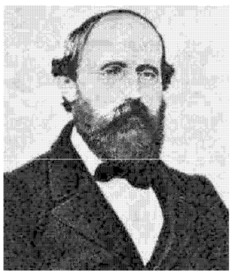

B.J. Pettis


R.S. Phillips

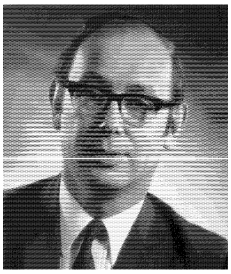

É. Picard


J. Radon


J.W.S. lord Rayleigh


B. Riemann


F. Riesz



J. Ringrose

C.A. Rogers

C. Runge

S. Saks

J. Schauder

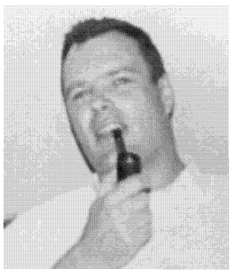
E. Schmidt

I. Schur

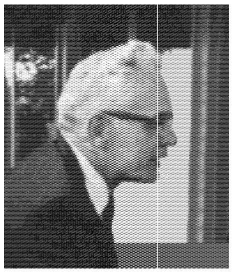
L. Schwartz

H.A. Schwarz

I. Singer



K.T. Smith



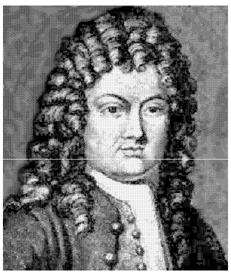
A. Sobczyk

S.L. Sobolev

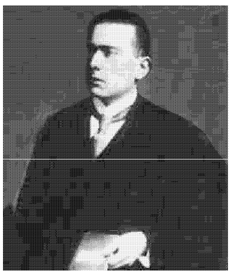
H. Steinhaus

E. Steinitz

T.J. Stieltjes

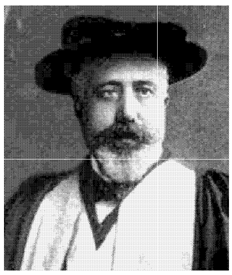


B. Taylor



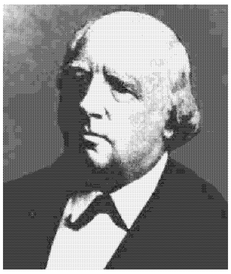
O. Toeplitz

S.M. Ulam



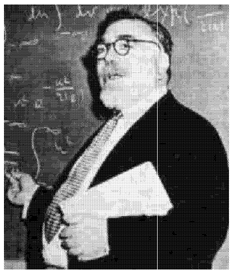
V. Volterra

J. von Neumann

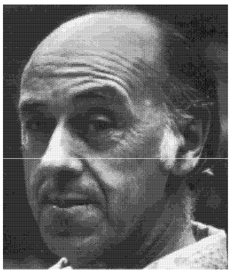


K. Weierstrass

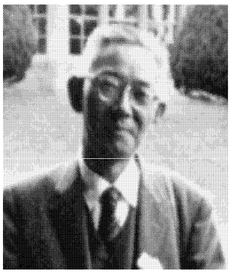
H. Weyl



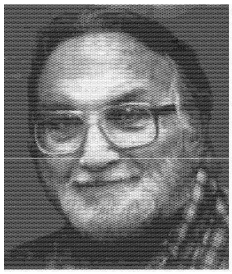
N. Wiener



A. Wilanski



K. Yosida



M. Zorn

Přehled literatury

Učebnice a skripta vydaná v Praze

J. Blank, P. Exner a M. Havlíček
[BEH] *Lineární operátory v kvantové fyzice*, Univerzita Karlova, Praha, 1993.

E. Čech
[Čech] *Topologické prostory*, ČSAV Praha, 1959. MR 21, 2962

P. Doktor
[Dok] *Moderní metody řešení parciálních diferenciálních rovnic*, skripta, SPN Praha, 1975.

S. Fučík a J. Milota
[FM] *Matematická analýza II: Diferenciální počet funkcí více proměnných*, skripta, SPN Praha, 1975.

P.Habala, P. Hájek and V. Zizler
[HHZ] *Introduction to Banach spaces I, II*, Matfyzpress Praha, 1996.

J. Jelínek
[Jel] *Teorie distribucí*, skripta, Univerzita Karlova, Praha 1984.

K. John a V. Zizler
[JZ] *Topologické lineární prostory*, skripta, SPN Praha, 1978.

O. John a J. Stará
[JS] *Funkcionální analýza: Nelineární úlohy*, skripta, SPN Praha, 1986.

M. Katětov a J. Jelínek
[KJ] *Úvod do funkcionální analýzy*, skripta, SPN Praha, 1968.

J. Král, I. Netuka a J. Veselý
[KNV] *Teorie potenciálu IV*, skripta, SPN Praha, 1977.

J. Lukeš a J. Malý
[LM] *Míra a integrál*, skripta, Univerzita Karlova, Praha 1993, 2002.

J. Lukeš and J. Malý
[MI] *Measure and integral*, Matfyzpress Praha, 1995, 2005.

J. Lukeš a kolektiv
[Probl] *Problémy z matematické analýzy*, skripta, SPN Praha, 1972, 1974, 1977, 1982.

L. Motl a M. Zahradník
[MZ] *Pěstujeme lineární algebru*, Karolinum, UK Praha, 1995.

K. Najzar
[Naj] *Funkcionální analýza*, skripta MFF UK, 1988.

I. Netuka a J. Veselý
[NeVe] *Příklady z funkcionální analýzy*, skripta MFF UK, 1972.

A. Pultr
[Pul] *Úvod do topologie a geometrie I*, SPN Praha, 1982.

W. Rudin
[Rud] *Analýza v reálném a komplexním oboru*, Academia Praha, 1977. MR 58, 15765

J. Stará
[Sta] *Příklady z matematické analýzy IV: Funkcionální analýza*, skripta, SPN Praha, 1975.

A.E. Taylor
[Tay] *Úvod do funkcionální analýzy*, Academia Praha, 1973.

M. Vlach
[Vla] *Úvod do funkcionální analýzy*, Universita Karlova, 1967.

Ostatní knihy

R.A. Adams
[*1975] *Sobolev spaces*, Academic Press. MR 56, 5043

A.G. Aksoy and M.A. Khamsi
[*1990] *Nonstandard methods in fixed point theory*, Springer-Verlag. MR 91i:47073

E.M. Alfsen
[*1971] *Compact convex sets and boundary integrals*, Springer-Verlag. MR 56, 3615

C.D. Aliprantis and K.C. Border
[*1994] *Infinite dimensional analysis: A hitchhiker's guide*, Springer-Verlag. MR 96k:46001

C.D. Aliprantis and O. Burkinshaw
[*1981] *Principles of real analysis*, North-Holland, (2. vydání Academic Press 1990). MR 82j:28001

C.D. Aliprantis and O. Burkinshaw
[*1985] *Positive operators*, Academic Press. MR 87h:47086

D. Amir
[*1986] *Characterizations of inner product spaces*, Birkhäuser. MR 88m:46001

L. Asimow and A.J. Ellis
[*1980] *Convexity theory and its applications in functional Analysis*, Academic Press. MR 82m:46009

E. Asplund and L. Bungart
[*1966] *A first course in integration*, Holt, Reinhart and Winston. MR 33, 2780

H.W. Alt
[*1985] *Lineare Funktionalanalysis*, Springer-Verlag.

T.M. Apostol
[*1974] *Mathematical analysis*, Addison-Wesley, (2. vydání). MR 49, 9123

B. Aupetit
[*1991] *A primer on spectral theory*, Springer-Verlag. MR 92c:46001

G. Bachman and L. Narici
[*1966] *Functional analysis*, Academic Press. MR 36, 638

C. Baiocchi and A. Capelo
[*1984] *Variational and quasivariational inequalities: Applications to free boundary problems*, John Wiley. MR 86e:49018

L.W. Baggett
[*1992] *Functional analysis*, Marcel Dekker. MR 93a:46001

A.V. Balakrishnan
[*1976] *Applied functional analysis*, Springer-Verlag. MR 57, 10445

S. Banach
[*1932] *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne I, Warszawa, (angl. vydání 1987 North Holland, dále 1993).

V. Barbu and Th. Precupanu
[*1986] *Convexity and optimization in Banach spaces*, D. Reidel. MR 87k:49045

J. Barros-Neto
[*1973] *An introduction to the theory of distributions*, Marcel Dekker. MR 57, 1113

R.G. Bartle
[*1966] *The elements of integration*, Wiley. MR 34, 293

R. Beals
[*1971] *Topics in operator theory*, The University of Chicago Press. MR 42, 5056

B. Beauzamy
[*1982] *Introduction to Banach spaces and their geometry*, North-Holland, (2. vydání 1985). MR 84g:46017

B. Beauzamy
[*1988] *Introduction to operator theory and invariant subspaces*, North-Holland. MR 90d:47001

E.J. Beltrami and M.R. Wohlers
[*1966] *Distributions and the boundary values of analytic functions*, Academic Press. MR 34, 8172

S.K. Berberian
[*1961] *Introduction to Hilbert space*, Oxford University Press. MR 25, 1424

S.K. Berberian
[*1966] *Notes on spectral theory*, Van Nostrand. MR 34, 3309

C. Bessaga and A. Pełczyński
[*1975] *Selected topics in infinite-dimensional topology*, Monografie Matematyczne, vol. 58. MR 57, 17657

P. Biler and A. Witkowski
[*1990] *Problems in mathematical analysis*, Marcel Dekker. MR 91c:00006

M.S. Birman and M.Z. Solomjak
[*1987] *Spectral theory of self-adjoint operators in Hilbert space*, D. Reidel, (ruský originál 1980). MR 93g:47001

N. Boccara
[*1990] *Functional analysis: An introduction to physicists*, Academic Press. MR 92b:00002

B. Bollobás
[*1990] *Linear analysis: An introductory course*, Cambridge University Press. MR 92a:46001

R.A. Bonic
[*1969] *Linear functional analysis*, Gordon and Breach. MR 41, 2336

F.F. Bonsall and J. Duncan
[*1973] *Complete normed algebras*, Springer-Verlag. MR 54, 11013

N. Bourbaki
[*1987] *Topological vector spaces*, Springer Verlag, (ruské vydání 1959). MR 88g:46002

R. Bourgin
[*1983] *Geometric aspects of convex sets with the Radon-Nikodym property*, Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics 993. MR 85d:46023

A.L. Brown and A. Page
[*1970] *Elements of functional analysis*, Van Nostrand. MR 50, 10732

A. Brown and C. Pearcy
[*1977] *Introduction to operator theory I, Elements of functional analysis*, Springer-Verlag, Graduate texts in mathematics. MR 58, 23463

P.L Butzer and H. Berens
[*1967] *Semi-groups of operators and approximation*, Springer-Verlag. MR 37, 5588

S.R. Caradus, W.E. Pfaffenberger and B. Yood
[*1974] *Calkin algebras and algebras of operators on Banach spaces*, Marcel Dekker. MR 54, 3434

P.P. Carreras and J. Bonet
[*1987] *Barelled locally convex spaces*, North-Holland. MR 88j:46003

P.G. Casazza and Th.J. Shuza
[*1989] *Tsirelson's space*, Lecture Notes in Math. 1363, Springer-Verlag. MR 90b:46030

J.M.F. Castillo and M. González
[*199?] *Three-space problems in Banach space theory*, (teprve vyjde).

D.C. Champeney
[*1987] *A handbook of Fourier theorems*, Cambridge University Press. MR 89e:42001

G. Choquet
[*1969] *Lectures on analysis I, II and III*, W.A. Benjamin. MR 40, 3252, 3253, 3254

I. Cioranescu
[*1990] *Geometry of Banach spaces, duality mappings and nonlinear problems*, Kluwer Academic Publishers. MR 91m:46021

Ph. Clément et al.
[*1987] *One-parameter semigroups*, North-Holland. MR 89b:47058

J.B. Conway
[*1978] *Functions of one complex variable*, Springer-Verlag. MR 80c:30003

J.B. Conway
[*1985] *A course in functional analysis*, Springer-Verlag, (2. vydání 1997). MR 86h:46001

R. Critescu
[*1977] *Topological vector spaces*, Noordhoff International Publishing. MR 56, 12802

R.F. Curtain
[*1977] *Functional analysis in modern applied mathematics*, Academic Press. MR 50, 2

M.M. Day
[*1973] *Normed linear spaces*, Springer-Verlag (3. vydání), (ruské vydání 1961, 1. vydání 1958, 2. vydání 1962). MR 49, 9588

L. Debnath and P. Mikusiński
[*1990] *Introduction to Hilbert spaces with applications*, Academic Press. MR 91f:46001

A. Defant and K. Floret
[*1993] *Tensor norms and operator ideals*, North-Holland. MR 94e:46130

K. Deimling
[*1985] *Nonlinear functional analysis*, Springer-Verlag. MR 86j:47001

J. DePree and C. Swartz
[*1988] *Introduction to real analysis*, Wiley. MR 91c:00001

R. Deville, G. Godefroy and V. Zizler
[*1993] *Smoothness and renormings in Banach spaces*, Longman Scientific & Technical. MR 94d:46012

C.L. DeVito
[*1978] *Functional analysis*, Academic Press. MR 80d:46001

C.L. DeVito
[*1990] *Functional analysis and linear operator theory*, Addison-Wesley. MR 91f:47001

J. Diestel
[*1975] *Geometry of Banach spaces — selected topics*, Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics 485. MR 57, 1079

J. Diestel
[*1984] *Sequences and series in Banach spaces*, Springer-Verlag. MR 85i:46020

J. Diestel and J.J. Uhl
[*1977] *Vector measures*, AMS. MR 56, 12216

J. Diestel, H. Jarchow and A. Tonge
[*1995] *Absolutely summing operators*, Cambridge University Press. MR 96c:00020

J. Dixmier
[*1977] *C^*-algebras*, North-Holland, (franc. originál 1969). MR 56, 16388

J. Dixmier
[*1981] *Von Neumann algebras*, North-Holland. MR 83a:46004

W.F. Donoghue, Jr
[*1969] *Distributions and Fourier transforms*, Academic Press.

R.S. Doran (editor)
[*1994] *C^*-algebras: 1943–1993 a fifty year celebration*, Contemporary mathematics 167, AMS Providence. MR 95d:46002

R.S. Doran and V.A. Belfi
[*1986] *Characterizations of C^*-algebras: The Gelfand-Naimark theorems*, Marcel Dekker. MR 87k:46115

R. Douglas
[*1972] *Banach algebras techniques in operator theory*, Academic Press. MR 50, 14335

H.R. Dowson
[*1978] *Spectral theory of linear operators*, Academic Press. MR 80c:47022

J. Dugundji and A. Granas
[*1982] *Fixed point theory*, PWN Warszawa. MR 80j:54038

D. van Dulst
[*1978] *Reflexive and superreflexive Banach spaces*, Mathematisch Centrum Amsterdam. MR 80d:46019

N. Dunford and J.T. Schwartz
[*1958] *Linear operators I*, Wiley-Interscience, (ruský překlad 1962, reprint 1988). MR 22, 8302
[*1963] *Linear operators II*, Wiley-Interscience, (ruský překlad 1966, reprint 1988). MR 31, 6181
[*1971] *Linear operators III*, Wiley-Interscience, (ruský překlad 1974, reprint 1988). MR 54, 1009

R.E. Edwards
[*1965] *Functional analysis: Theory and applications*, Holt, Rinehart and Winston, (ruský překlad 1969), ?pi.

I. Ekeland and R. Temam
[*1976] *Convex analysis and variational problems*, North-Holland American Elsevier. MR 57, 3931b

M. Fabián
[*1997] *Gâteaux differentiability of convex functions and topology: Weak Asplund spaces*, John Wiley and Sons.

H. Fetter and B. Gamboa de Buen
[*1977] *The James forest*, Cambridge University Press.

K. Floret
[*1980] *Weakly compact sets*, Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics 801. MR 82b:46001

G.B. Folland
[*1989] *Harmonic analysis in phase space*, Priceton Univerity Press. MR 92k:22017

G.B. Folland
[*1984] *Real analysis: Modern techniques and their applications*, John Wiley. MR 86k:28001

I. Fonseca and W. Gangbo
[*1995] *Degree theory in analysis and applications*, Oxford Science Publications. MR 96k:47100

T.W. Gamelin
[*1969] *Uniform algebras*, Prentice-Hall. MR 53, 14137

B.R. Gelbaum
[*1995] *Modern real and complex analysis*, John Wiley. MR 96b:00001

I.M. Gelfand and G.E. Shilov
[*1964] *Generalized functions*, Academic Press. MR 55, 8786a–d

K. Goebel and W.A. Kirk
[*1990] *Topics in metric fixed point theory*, Cambridge University Press, London. MR 92c:47070

K5I. Goebel and S. Reich
[*1984] *Uniform convexity, hyperbolic geometry and nonexpansive mappings*, Marcel Dekker. MR 86d:58012

C. Goffman and G.B. Pedrick
[*1965] *First course in functional analysis*, Englewood Cliffs. MR 32, 1540

I. Gohberg and S. Goldberg
[*1981] *Basic operator theory*, Birkhäuser. MR 83b:47001

S. Goldberg
[*1966] *Unbounded linear operators*, McGraw-Hill. MR 34, 580

J.A. Goldstein
[*1985] *Semigroups of linear operators and applications*, Oxford University Press. MR 87c:47056

D.H. Griffel
[*1981] *Applied functional analysis*, Ellis Horwood Limited, (další vydání 1985, 1988). MR 83h:00004

C.W. Groetsch
[*1977] *Generalized inverses of linear operators*, Marcel Dekker. MR 56, 17059

A. Grothendieck
[*1973] *Topological vector spaces*, Gordan and Breach. MR 51, 8771

M.A. Al-Gwaiz
[*1992] *Theory of distributions*, Marcel Dekker. MR 93g:46035

P.R. Halmos
[*1957] *Introduction to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity*, Chelsea, (1. vydání 1951). MR 13, 563a

P.R. Halmos
[*1974] *Finite dimensional spaces*, Springer-Verlag. MR 53, 13258

P.R. Halmos
[*1982] *A Hilbert space problem book*, Springer-Verlag, (1. vydání v 1967). MR 84e:47001

P.R. Halmos and V.S. Sunder
[*1978] *Bounded integral operators on L^2 spaces*, Springer-Verlag. MR 80i:47070

R. Harte
[*1988] *Invertibility and singularity for bounded linear operators*, Marcel Dekker. MR 89d:47001

G. Helmberg
[*1969] *Introduction to spectral theory in Hilbert space*, North-Holland. MR 39, 4689

L.L. Helms
[*1969] *Introduction to potential theory*, Wiley. MR 41, 5638

H. Hermes and J.P. LaSalle
[*1969] *Functional analysis and time optional control*, Academic Press. MR 54, 8380

E. Hewitt and K.A. Ross
[*1963] *Abstract harmonic analysis I*, Academic Press (2. vydání 1994, ruský překlad 1975). MR 28, 158
[*1970] *Abstract harmonic analysis II*, Academic Press (2. vydání 1994, ruský překlad 1975). MR 41, 7378

E. Hewitt and K. Stromberg
[*1965] *Real and abstract analysis*, Springer Verlag, (2. vydání 1969, 3. vydání 1975). MR 32, 5826

E. Hille and R. Phillips
[*1957] *Functional analysis and semi-groups*, Amer. Math. Soc., (ruský překlad 1962). MR 19, 664d

P.D. Hislop and I.M. Sigal
[*1996] *Introduction to spectral theory: with applications to Schrödinger operators*, Springer-Verlag.

F. Hirzebruch und W. Scharlau
[*1971] *Einführung in die Funktionalanalysis*, Bibliographisches Institut Mannheim/Wien/Zürich, MR 57, 3803.

K. Hoffman
[*1962] *Banach spaces of analytic functions*, Prentice Hall. MR 24, A2844

R.B. Holmes
[*1975] *Geometric functional analysis and its applications*, Springer-Verlag. MR 53, 14085

J. Horváth
[*1966] *Topologial vector spaces and distributions*, Addison-Wesley. MR 34, 4863

V.C.L. Hutson and J.S. Pym
[*1980] *Applications of functional analysis and operator theory*, Academic Press, (ruský překlad 1983). MR 81i:46001

V.I. Istrăţescu
[*1981] *Fixed point theory*, D. Reidel. MR 83c:54065

V.I. Istrăţescu
[*1981] *Introduction to linear operator theory*, Marcel Dekker. MR 83d:47002

V.I. Istrăţescu
[*1984] *Strict convexity and complex strict convexity*, Marcel Dekker. MR 86b:46023

V.I. Istrăţescu
[*1987] *Inner product structures: Theory and applications*, D. Reidel. MR 89c:46001

H. Jarchow
[*1981] *Locally convex spaces*, B.G. Teubner, Stuttgart. MR 83h:46008

K. Jörgens
[*1970] *Lineare Intregraloperatoren*, B.G. Teubner. MR 57, 1036

K. Jörgens
[*1982] *Linear integral operators*, Pitman, Boston-London. MR 83j:45001

V.M. Kadets and M.I. Kadets
[*1991] *Rearrangements of series in Banach spaces*, American Mathematical Society. MR 92d:46029

M.I. Kadets and V.M. Kadets
[*1997] *Series in Banach spaces: Conditional and unconditional convergence*, Birkhäuser.

R.V. Kadison and J.R. Ringrose
[*1983] *Fundamentals of the theory of operator algebras, I*, Academic Press. MR 85j:46099

P.K. Kamthan and M. Gupta
[*1988] *Schauder bases: behaviour and stability*, Longman Scientific&Technical. MR 90i:46011

T. Kato
[*1976] *Pertubation theory for linear operators*, Springer-Verlag, (2. vydání). MR 53, 11389

J.L. Kelley
[*1955] *General topology*, Van Nostrand, (ruský překlad 1968). MR 16, 1136c

J. Kelley and I. Namioka
[*1963] *Linear topological spaces*, Van Nostrand, (přetištěné vydání 1976 u Springera). MR 29, 3851

S. Kesavan
[*1989] *Topics in functional analysis and applications*, John Wiley & Sons. MR 90m:46002

A.A. Kirillov
[*1976] *Elements of the theory of representations*, Springer-Verlag. MR 54, 447

A.A. Kirilov and A.D. Gvishiani
[*1982] *Theorems and problems in functional analysis*, Springer-Verlag, (ruský originál 1979; další vydání 1988). MR 83h:46003

G. Köthe
[*1969] *Topological vector spaces I*, Springer-Verlag (dřívější vydání 1960, 1966). MR 40, 1750
[*1979] *Topological vector spaces II*, Springer-Verlag. MR 81g:46001

R. Kress
[*1989] *Linear integral equations*, Springer-Verlag. MR 90j:45001

E. Kreyszig
[*1978] *Introductory functional analysis with applications*, John Wiley & Sons. MR 57, 7084

A. Kufner, O. John and S. Fučík
[*1977] *Function spaces*, Noordhoff International Publishers, Leyden (též Academia Praha). MR 58, 2189

E. Lacey
[*1974] *The isometric theory of classical Banach spaces*, Springer-Verlag. MR 58, 12308

S. Lang
[*1993] *Real and functional analysis*, Springer-Verlag (3. vydání). MR 94b:00005

R. Larsen
[*1973] *Banach algebras: An introduction*, Marcel Dekker. MR 58, 7010

R. Larsen
[*1973] *Functional analysis: An introduction*, Marcel Dekker. MR 57, 1055

B.V. Limaye
[*1981] *Functional analysis*, John Wiley & Sons. MR 84a:46001

J. Lindenstrauss
[*1964] *Extension of compact operators*, Memoirs of the Amer. Math. Soc. No. 48, Providence. MR 31, 3828

J. Lindenstrauss and L. Tzafriri
[*1977] *Classical Banach spaces I*, Springer-Verlag, (reprint 1996). MR 58, 17766
[*1979] *Classical Banach spaces II*, Springer-Verlag, (reprint 1996). MR 81c:46001

L.A. Ljusternik, V.I. Sobolev
[*1965] *Elementy funkcionalnovo analiza (rusky)*, Nauka, Moskva, (2. vydání). MR 35, 698

L.A. Ljusternik, V.I. Sobolev
[*1982] *Kratkij kurs funkcionalnovo analiza (rusky)*, Vysšaja škola, Moskva.

L.H. Loomis
[*1953] *An introduction to abstract harmonic analysis*, Van Nostrand. MR 14, 883c

D.H. Luecking and L.A. Rubel
[*1984] *Complex analysis: A functional analysis approach*, Springer-Verlag. MR 86d:30002

J. Lukeš, J. Malý and L. Zajíček
[*1986] *Fine topology methods in real analysis and potential theory, Lecture Notes in Mathematics 1189*, Springer-Verlag. MR 89b:31001

J. Lützen
[*1982] *The prehistory of the theory of distributions*, Springer-Verlag. MR 84f:01036

I. Maddox
[*1980] *Infinite matrices of operators*, Springer-Verlag. MR 82c:40012

J. Malý and W.P. Ziemer
[*1997] *Fine regularity of solutions of elliptic partial differential equations*, AMS Surveys and Monographs.

J.T. Marti
[*1969] *Introduction to the theory of bases*, Springer-Verlag. MR 55, 10944

V.G. Mazja
[*1985] *Prostory S.L. Soboleva (rusky)*, Leninradská universita, (anglický překlad). MR 87g:46056

R. Meise und D. Vogt
[*1992] *Einführung in die Funktionalanalysis*, Vieweg. MR 94f:46003

L. Mišík
[*1989] *Funkcionálna analýza*, Alfa Bratislava.

W. Mlak
[*1991] *Hilbert spaces and operator theory*, PWN Warsaw. MR 92m:46001

A. Mukherjea and K. Pothoven
[*1986] *Real and functional analysis, Part B: Functional analysis*, Plenum Press. MR 88k:47001

G.J. Murphy
[*1990] *C^*-algebras and operator theory*, Academic Press. MR 91m:46084

L. Narici and E. Beckenstein
[*1985] *Topologial vector spaces*, Marcel Dekker. MR 87c:46003

A.W. Naylor and G.R. Sell
[*1971] *Linear operator theory*, Holt-Rinehart-Winston. MR 57, 1151

J. Nečas
[1983] *Introduction to the theory of nonlinear elliptic equations*, Teubuer, Band 52. MR 85m:35022

J.T. Oden
[*1979] *Applied functional analysis*, Prentice-Hall.

W. Orlicz
[*1992] *Linear Functional analysis*, World Scientific. MR 94c:46002

E.W. Packel
[*1974] *Functional analysis: A short course*, Intext Educational Publishers. MR 51, 11041

T.W. Palmer
[*1994] *Banach algebras and the general theory of $*$-algebras (Volume I: Algebras and Banach algebras)*, Cambridge University Press. MR 95c:46002

A. Pazy
[*1983] *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer-Verlag. MR 85g:47061

R.R. Phelps
[*1966] *Lectures on Choquet's theorem*, Van Nostrand, Van Nostrand Math. Studies No. 7 (rusky 1968). MR 33, 1690

R.R. Phelps
[*1993] *Convex functions, monotone operators and differentiability*, Springer-Verlag. MR 94f:46055

J.D. Pryce
[*1973] *Basic methods of linear functional analysis*, Hutchinson & Co. MR 50, 10733

P. Quittner
[*1990] *Funkcionálna analýza v príkladoch*, Veda, SAV Bratislava.

H. Radjavi and P. Rosenthal
[*1973] *Invariant subspaces*, Springer-Verlag. MR 51, 3924

M.M. Rao
[*1987] *Measure theory and integration*, John Wiley & Sons. MR 89k:28001

M. Reed and B. Simon
[*1972] *Methods of modern mathematical physics I: Functional analysis*, Academic Press, (2. vydání 1980). MR 58, 12429a
[*1975] *Methods of modern mathematical physics II: Fourier analysis, self-adjointness*, Academic Press. MR 58, 12429b
[*1979] *Methods of modern mathematical physics III: Scattering theory*, Academic Press.

[*1978] *Methods of modern mathematical physics IV: Analysis of operators*, Academic Press. MR 58, 12429c

M. Renardy and R.C. Rogers
[*1993] *An introduction to partial differential equations*, Springer-Verlag. MR 94c:35001

J.R. Retherford
[*1993] *Hilbert space: Compact operators and the trace theorem*, Cambridge University Press. MR 95g:47001

C.E. Rickart
[*1960] *General theory of Banach algebras*, Van Nostrand, (2. vydání 1974 u R.E. Kriegera). MR 22, 5903

F. Riesz and B. Nagy
[*1955] *Functional analysis*, Unger, (též 1990 Dover Publ.). MR 17, 175i

J.R. Ringrose
[*1971] *Compact non-self-adjoint operators*, Van Nostrand Reinhold Co..

A.P. Robertson and W. Robertson
[*1973] *Topological vector spaces*, Cambridge University Press, (1. vydání 1964, ruský překlad 1967). MR 50, 2854

R.T. Rockafellar
[*1970] *Convex analysis*, Princeton University Press. MR 43, 445

S. Rolewicz
[*1972] *Metric linear spaces*, Polish scientific publishers. MR 55, 10993

H.L. Royden
[*1988] *Real analysis*, Macmillan. MR 90g:00004

W. Rudin
[*1966] *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, (viz též české vydání, 2. vydání 1974, 3. vydání 1987). MR 35, 1420

W. Rudin
[*1973] *Functional analysis*, Mc Graw-Hill, (ruský překlad 1975). MR 51, 1315

M. Samuelides and L. Touzillier
[*1989] *Analyse fonctionelle*, Cepaderes Toulouse. MR 91e:46002

H.H. Schaefer
[*1966] *Topological vector spaces*, MacMillan, (ruský překlad 1971). MR 33, 1689

M. Schechter
[*1971] *Principles of functional analysis*, Academic Press. MR 56, 3607

K. Schmüdgen
[*1990] *Unbounded operator algebras and representation theory*, Birkhäuser. MR 91f:47062

L. Schwartz
[*1979] *Analyse Hilbertienne*, Hermann Paris. MR 81a:46001

Z. Semadeni
[*1971] *Banach spaces of continuous functions I*, Warszawa. MR 45, 5730

Ch. Swartz
[*1992] *An introduction to functional analysis*, Marcel Dekker. MR 93c:46002

G.F. Simmons
[*1963] *Introduction to topology and modern analysis*, McGraw-Hill. MR 26, 4145

I. Singer
[*1970] *Bases in Banach spaces I*, Springer-Verlag. MR 45, 7451

M. Takesaki
[*1979] *Theory of operator algebras I*, Springer-Verlag. MR 81e:46038

A. Taylor and D. Lay
[*1980] *Introduction to functional analysis*, Wiley. MR 81b:46001

N. Tomczak-Jaegermann
[*1989] *Banach-Mazur distances and finite-dimensional operator ideals*, Longman Scientific & Technical. MR 90k:46039

F. Treves
[*1967] *Topological vector spaces, distributions and kernels*, Academic Press. MR 37, 726

J. Weidmann
[*1980] *Linear operators in Hilbert spaces*, Springer-Verlag. MR 81e:47001

D. Werner
[*1995] *Funktionalanalysis*, Springer-Verlag.

A. Wilansky
[*1964] *Functional analysis*, Blaisdell. MR 30, 426

A. Wilansky
[*1978] *Modern methods in topological vector spaces*, McGraw-Hill. MR 81d:46001

Y.C. Wong
[*1992] *Introductory theory of topological vector spaces*, Marcel Dekker. MR 94c:46003

A. Wouk
[*1979] *A course of applied functional analysis*, John Wiley. MR 81a:46003

K. Yosida
[*1971] *Functional analysis*, Springer-Verlag, (dříve 1964, 1968, 1974, 1978, 1980, 1995, ruský překlad 1967).

N. Young
[*1988] *An introduction to Hilbert space*, Cambridge University Press. MR 90e:46001

A.C. Zaanen
[*1960] *Linear analysis*, North-Holland.

E. Zeidler
[*1995] *Applied functional analysis (Main principles and their applications)*, Springer-Verlag. MR 96i:00006

W. Żelazko
[*1973] *Banach algebras*, Elsevier. MR 56, 6389

R.J. Zimmer
[*1990] *Essential results of functional analysis*, The University of Chicago Press. MR 91h:46002

Články

G.P. Akilov
[1948] *Necessary conditions for the extension of linear operations (rusky)*, Doklady Acad. Sci. URSS **59**, 417–418. MR 9, 358f

D. Alspach
[1981] *A fixed point free nonexpansive map*, Proc. Amer. Math. Soc. **82**, 423–424. MR 82j:47070

P.R. Andenaes
[1970] *Hahn-Banach extensions which are maximal on a given cone*, Math. Ann. **188**, 90–96. MR 41, 8954

J. Appell, E. De Pascale and P.P. Zabrejko
[1994] *Some remarks on Banach limits*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **42**, 273–278. MR 95e:46017

R. Arens
[1946] *A topology for spaces of transformations*, Ann. of Math. **47**, 480–495. MR 8, 165e

N. Aronszajn
[1976] *Differentiability of Lipschitzian mappings between Banach spaces*, Studia Math. **58**, 147–190. MR 54, 13562

N. Aronszajn and K.T. Smith
[1954] *Invariant subspaces of completely continuous operators*, Ann. Math. **60**, 345–350. MR 16, 488b

E. Asplund
[1967] *Averaged norms*, Israel J. Math. **5**, 227–233. MR 36, 5660

A. Baernstein II
[1972] *On reflexivity and summability*, Studia Math. **42**, 91–94. MR 46, 4174

J.-B. Baillon
[1975] *Un théorème de type ergodique pour les contractions non-linéaires dans un espace de Hilbert*, C.R. Acad. Sci. Paris **280**, A1511–A1514. MR 51, 11205

J.A. Baker
[1971] *Isometries in normed spaces*, Amer. Math. Monthly **78**, 655–658. MR 44, 4490

S. Banach
[1923] *Sur le problème de la mesure*, Fund. Math. **4**, 7–33.

S. Banach and S. Mazur
[1933] *Zur Theorie der der lineare Dimension*, Studia Math. **4**, 100–112.

S. Banach and S. Saks
[1930] *Sur la convergence forte dans les champs L^p*, Studia Math. **2**, 51–57.

H. Bauer
[1961] *Schilowscher Rand und Dirichletsches Problem*, Ann. Inst. Fourier **11**, 89–136. MR 25, 443

H. Bauer
[1985] *Simplicial function spaces and simplexes*, Expo. Math. **3**, 165–168. MR 87c:46009

B. Beauzamy
[1985] *Un opérateur sans sous-espace invariant non-trivial: simplification de l'exemple de P. Enflo*, Integral Equations and Operator Theory **8**, 314–384. MR 88b:47011

Y. Benyamini and Y. Sternfeld
[1983] *Spheres in infinite dimensional spaces are Lipschitz contractible*, Proc. Amer. Math. Soc. **88**, 439–445. MR 85h:46028

A.R. Bernstein and A. Robinson
[1966] *Solution of an invariant subspace problem of K.T. Smith and P.R. Halmos*, Pacific J. Math. **16**, 421–431. MR 33, 1724

C. Bessaga
[1966] *Every infinite dimensional Hilbert space is diffeomorphic with its unit sphere*, Bull. Acad. Polon. Sci. **14**, 27–31. MR 33, 1862

A. Beurling
[1938] *Sur les integrales de Fourier absolument convergentes*, Congrès des Math. Scand., Helsingfors.

R. Bhatia and P. Šemrl
[1997] *Approximate isometries on Euclidean spaces*, Amer. Math. Monthly **104**, 497–504.

G. Birkhoff
[1935] *Integration of functions with values in a Banach space*, Trans. Amer. Math. Soc. **38**, 357–378.

E. Bishop and K. de Leeuw
[1959] *The representation of linear functionals by measures on sets of extreme points*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **9**, 305–331. MR 22, 4945

E. Bishop and R.R. Phelps
[1961] *A proof that every Banach space is subreflexive*, Bull. Amer. Math. Soc. **67**, 97–98. MR 23, A503

J. Bliedtner
[1996] *Approximation by harmonic functions*, In: Potential Theory — ICPT 94 (Proceedings of the International Conference on Potential Theory, Czech Republic, 1994), Walter de Gruyter, 297–302.

N. Boboc and A. Cornea
[1967] *Convex cones of lower semicontinuous functions on compact spaces*, Rev. Roum. Math. Pures Appl. **12**, 471–525. MR 35, 7113

S. Bochner and A.E. Taylor
[1938] *Linear functionals on certain spaces of abstractly-valued functions*, Ann. of Math. **39**, 913–944.

S.V. Bočkarev
[1974] *Existence of a basis in the space of functions analytic in the disc and some properties of the Franklin system (rusky)*, Mat. Sbornik **95,1(137)**, 3–18. MR 50, 8036

H.F. Bohnenblust and S. Karlin
[1955] *Geometrical properties of the unit sphere of Banach algebras*, Ann. of Math. **62**, 217–229. MR 17, 177a

B. Bollobás
[1970] *An extension to the theorem of Bishop and Phelps*, Bull. London Math. Soc. **2**, 181–182. MR 42, 2182

J. Bourgain and F. Delbaen
[1980] *A class of special $\mathcal{L}_\infty$ spaces*, Acta Math. **145**, 155–176. MR 82h:46023

L.E.J. Brouwer
[1912] *Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. **71**, 97–115.

F.E. Browder
[1965a] *Fixed point theorems for noncompact mappings in Hilbert space*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **43**, 1272–1276. MR 31, 2582

F.E. Browder
[1965b] *Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **54**, 1041–1044. MR 32, 4574

A.L. Brown
[1974] *A rotund reflexive space having a subspace of codimension two with a discontinuous metric projection*, Michigan Math. J. **21**, 145–154. MR 50, 2870

L. Burlando
[1994] *Continuity of spectrum and spectral radius in Banach algebras*, In: Functional analysis and operator theory (Warsaw, 1992), Banach Center publ. **30**, 53–100. MR 95i:46062

J. Burzyk and P. Mikusiński
[1980] *On normability of semigroups*, Bull. Acad. polon. Sci. **28**, 33-35. MR 82g:54064

G. Buskes
[1993] *The Hahn-Banach theorem surveyed*, Dissertationes Math. **327**. MR 94h:46007

Z. Charzyński
[1953] *Sur les transformations isométriques des espaces du type (F)*, Studia Math. **13**, 94–121. MR 15, 38f

P.R. Chernoff
[1992] *A simple proof of Tychonoff's theorem via nets*, Amer. Math. Monthly **99**, 932–934. MR 93m:54042

J.P.R. Christensen
[1973] *Measure theoretic zero sets in infinite dimensional spaces and applications to differentiability of Lipschitz mappings*, II Coll. Anal. Fonct., Bordeaux, 29–39. MR 50, 14215

J.B. Conway and B.B. Morrel
[1979] *Operators that are points of spectral continuity*, Integral Equations Operator Theory **2**, 174–198. MR 80h:47004

J.A. Clarkson
[1936] *Uniformly convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **40**, 396–414.

A.M. Davie
[1973] *The approximation problem for Banach spaces*, Bull. London Math. Soc. **5**, 261–266. MR 49, 349a

A.M. Davie
[1975] *The Banach approximation problem*, J. Approx. Theory **13**, 392–394. MR 52, 1262

W.J. Davis, T. Figiel, W.B. Johnson and A. Pełczyński
[1974] *Factoring weakly compact operators*, J. Functional Anal. **17**, 311–327. MR 50, 8010

M.M. Day
[1940] *The spaces L_p with* $0 < p < 1$, Bull. Amer. Math. Soc. **46**, 816–823. MR 2, 102d

L. De Branges
[1959] *The Stone-Weierstrass theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **10**, 822–824. MR 22, 3970

C. Dellacherie
[1969] *Un complément au thèoréme de Weierstrass-Stone*, In: Séminaire de Probabilités 1 (Lecture Notes in Math. 39), 52–53. MR 37, 4584

J. Dieudonné
[1942] *La dualite dans les espaces vectoriels topologiques*, Ann. École Norm. **59**, 107–132. MR 6, 178

J. Dieudonné
[1985] *The index of operators in Banach spaces*, Integral Equations and Operator Theory **8**, 580–589. MR 87c:01020

J. Dieudonné
[1952] *Complex structures on real Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **3**, 162–164. MR 13, 849b

J. Dixmier
[1948] *Sur une théorème de Banach*, Duke Math. J. **15**, 1057–1071. MR 10, 306g

P.N. Dowling and C.J. Lennard
[1997] *Every nonreflexive subspace of $L_1[0,1]$ fails the fixed point property*, Proc. Amer. Math. Soc. **125,2**, 443–446. MR 97d:46034

J. Dugundji
[1951] *An extension of Tietze's theorem*, Pacific J.Math. **1**, 353–367. MR 13, 373c

N. Dunford and B.J. Pettis
[1940] *Linear operations on summable functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **47**, 323–392. MR 1, 338

A. Dvoretzky and C.A. Rogers
[1950] *Absolute and unconditional convergence in normed spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **36**, 192–197. MR 11, 525a

W.F. Eberlein
[1947] *Weak compactness in Banach spaces I*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **33**, 51–53. MR 9, 42a

M. Edelstein
[1962] *On fixed and periodic points under contractive mappings*, J. London Math. Soc. **37**, 74–79. MR 29, A2936

J. Elton, Pei-Kee Lin, E. Odell and S. Szarek
[1983] *Reflexivity and the fixed point property for nonexpansive maps*, Contemporary Math. **18**, 87–119. MR 85d:47059

G. Emmanuele and K. John
[1997] *Uncomplementability of spaces of compact operators in larger spaces of operators*, Czech. Math. J. **47 (122)**, 19–32.

P. Enflo
[1972] *Banach spaces which can be given an equivalent uniformly convex norm*, Israel J. Math. **13**, 281–288. MR 49, 1073

P. Enflo
[1973] *A counterexample to the approximation problem in Banach spaces*, Acta Math. **130**, 309–317. MR 53, 6288

P. Enflo
[1987] *On the invariant subspace problem for Banach spaces*, Acta Math. **158**, 213–313. MR 88j:47006

G. Fichtenholz et L. Kantorovitch
[1934] *Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions bornées*, Studia Math. **5**, 69–98.

T. Figiel and W.B. Johnson
[1973] *The approximation property does not imply the bounded approximation property*, Proc. Amer. Math. Soc. **41**, 197–200. MR 49, 5782

S.R. Foguel
[1958] *On a theorem by A.E. Taylor*, Proc. Amer. Math. Soc. **9**, 325. MR 20, 219

C. Franchetti
[1985] *Lipschitz maps on the unit ball of normed spaces*, Conferenze del Seminario di Matematica dell'Universita di Bari **202**, 1–11. MR 87b:46009

B. Fuglede
[1950] *A commutativity theorem for normal operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. **36**, 35–40. MR 11, 371c

T.W. Gamelin
[1980] *Wolff's proof of the Corona theorem*, Israel J. Math. **37**, 113–119. MR 82a:30042

I.M. Gelfand
[1941] *Normierte Ringe*, Mat. Sb. N.S. **9(51)**, 3–24. MR 13, 373c

I.M. Gelfand
[1941a] *Über absolut konvergente trigonometrische Reihen und Integrale*, Mat. Sb. N.S. **9(51)**, 51–66. MR 3, 51g

D. Göhde
[1965] *Zur Prinzip der kontraktiven Abbildung*, Math. Nachr. **30**, 251–258. MR 32, 8129

H.H. Goldstine
[1938] *Weakly complete Banach spaces*, Duke Math. J. **9**, 125–131.

K. Goebel
[1969] *An elementary proof of the fixed-point theorem of Browder and Kirk*, Michigan Math. J. **16**, 381–383. MR 40, 4831

W.T. Gowers
[1994] *A solution to Banach's hyperplane problem*, Bull. London Math. Soc. **26**, 523–530. MR 96a:46025

W.T. Gowers
[1994a] *A Banach space not containing c_0, l^1 or a reflexive subspace*, Trans. Amer. Math. Soc. **344**, 407–420. MR 94j:46024

W.T. Gowers and B. Maurey
[1993] *The unconditional basic sequence problem*, J. Amer. Math. Soc. **6**, 851–874. MR 94k:46021

A. Grothendieck
[1953] *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $\mathcal{C}(K)$*, Canad. J. Math. **5**, 129–173. MR 15, 438b

A. Grothendieck
[1955] *Produits tensoriels topologiques et espaces nucleaires*, Mem. Amer. Math. Soc. **16**. MR 17, 763c

H. Hadwiger
[1941] *Über die Konvergenzarten unendlicher Reihen im Hilbertschen Raum*, Math. Zeitschr. **47**, 325–329. MR 3, 295a

P.R. Halmos
[1966] *Invariant subspaces of polynomially compact operators*, Pacific J. Math. **16**, 433-437. MR 33, 1725

R. Haydon
[1976] *An extreme point criterion for separability of a dual Banach space and a new proof of a theorem of Carson*, Quart. J. Math. Oxford **27**, 379–385. MR 58, 12293

M. Hervé
[1961] *Sur les représentations intégrales a l'aide des points extremaux dans un ensemble compact convexe métrisable*, C. R. Acad. Sci. (Paris) **253**, 366–368. MR 26, 577

H. Hochstadt
[1979] *Eduard Helly, father of the Hahn-Banach theorem*, Math. Intelligencer **2**, 123–125. MR 82e:01090

R.C. James
[1951] *A non-reflexive space isometric with its second conjugate space*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **37**, 174–177. MR 13, 356d

R.C. James
[1957] *Reflexivity and the supremum of linear functionals*, Ann. of Math. **66**, 159–169. MR 19, 755g

R.C. James
[1964] *Weakly compact sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **113**, 129–140. MR 29, 2628

R.C. James
[1964b] *Uniformly non-square Banach spaces*, Ann. Math. **80**, 542–550. MR 30, 4139

R.C. James
[1964c] *Characterizations of reflexivity*, Studia Math. **23**, 205–216. MR 30, 431

R.C. James
[1964d] *Weak compactness and reflexivity*, Israel J. Math. **2**, 101–119. MR 31, 585

R.C. James
[1972] *Super-reflexive Banach spaces*, Can. J. Math. **24**, 896–904. MR 47, 9248

R.C. James
[1982] *Bases in Banach spaces*, Amer. Math. Monthly **82**, 625–640. MR 84h:46019

V. Jarník
[1928] *Umordnungen von bedingt konvergenten Reihen*, Math. Z. **28**, 360–371.

B.E. Johnson
[1967] *The uniqueness of the (complete) norm topology*, Bull. Amer. Math. Soc. **73**, 537–539. MR 35, 2142

W.B. Johnson, H. König, B. Maurey and J.R. Retheford
[1979] *Eigenvalues of p-summing and l_p-type operators in Banach spaces*, J. Funct. Anal. **32**, 353–380. MR 80i:47033

P. Jordan and J. von Neumann
[1935] *On inner products in linear metric spaces*, Ann. of Math. **2, 36**, 719–723.

M.I. Kadets
[1959] *Spaces isomorphic to a locally uniformly convex spaces*, Izv. Vyš. Učebn. Zaved. Mat. **13**, 51–57. MR 23, A3987

M.I. Kadets
[1965] *Conditions on differentiability of the norm od a Banach space*, Uspechi Mat. Nauk. **20**, 183–187. MR 32, 2883

M.I. Kadets and M.G. Snobar
[1971] *Certains functionals on the Minkowski compactum*, Mat. Zametki **10**, 694–696.

M.I. Kadets and K. Woźniakowski
[1989] *On series whose permutations have only two sums*, Bull. Polon. Acad. Sci. **37**, 15–21. MR 92d:46028

V.M. Kadets
[1986] *A problem of S. Banach, „Problem 106 from the Scottish Book"*, Funkcional. Anal. i Priloženia (Transl.: Funct. Anal. Appl. 20 (1986), 317–319) **20**, 74–75. MR 88f:46027

S. Kakutani
[1938] *Weak convergence in uniformly convex spaces*, Tohoku Math. J. **45**, 188–193.

S. Kakutani
[1938a] *Two fixed-point theorems concerning bicompact convex sets*, Proc. Imp. Acad. Tokyo **14**, 242–245, (viz. též S. Kakutani, Selected papers I, 114–147, Birkhäuser, 1986).

S. Kakutani
[1938b] *A proof of the Hahn-Banach theorem via a fixed point theorem*, ??? **???**, ???, (viz též S. Kakutani, Selected papers I, 154–158, Birkhäuser, 1986).

S. Kakutani
[1939a] *Weak topology and regularity of Banach spaces*, Proc. Imp. Acad. Tokyo **15**, 169–173. MR 1, 59b

S. Kakutani
[1939b] *Some charakterisations of Euclidean space*, Japan J. Math. **16**, 93–97. MR 1, 146d

S. Kakutani
[1943] *Topological properties of the unit sphere of a Hilbert space*, Proc. Imp. Acad. Tokyo **19**, 269–271. MR 7, 2521

M.V. Keldysh
[1941] *On the solvability and stability of the Dirichlet problem (rusky)*, Uspechi Mat. Nauk SSSR **8**, 171–231. MR 3, 123

W.A. Kirk
[1965] *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances*, Amer. Math. Monthly **72**, 1004–1006. MR 32, 6436

V. Klee
[1953] *Convex bodies and periodic homeomorphisms in Hilbert spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **74**, 10–43. MR 14, 989d

V. Klee
[1955] *Some topological properties of convex sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **78**, 30–45. MR 16, 1030c

V. Klee
[1959] *Some new results on smoothness and rotundity in normed linear spaces*, Math. Ann. **139**, 51–63. MR 22, 5879

V. Klee
[1960–61] *Mappings into normed linear spaces*, Fund. Math. **49**, 25–34. MR 23, A3985

V. Klee
[1969] *Separation and support properties of convex sets*, In: Control theory and the calculus of variations (Ed. A.V. Balakrishnan), Academic Press, 235–303. MR 52, 15159

B. Knaster, K. Kuratowski and S. Mazurkiewicz
[1929] *Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale Simplexe*, Fund. Math. **14**, 132–137.

P.A. Kornilov
[1988a] *Structure of the sums set of a functional series*, Vestnik Mosk. Univ. Ser. I (Transl.: Mosc. Univ. Math. Bull. 43,4 (1988), 6–11) **No 4**, 9–13. MR 89m:40001

P.A. Kornilov
[1988b] *On the set of sums of a conditionally convergent series of functions*, Mat. Sbornik (Transl.: Math. USSR Sb. 65(1990), 119–131) **137**, 114–127. MR 89k:40002

C.A. Kottman
[1975] *Subsets of the unit ball that are separated by more than one*, Studia Math. **53**, 15–27. MR 51, 1364a

M. Krein and D. Milman
[1940] *On extreme points of regularly convex sets*, Studia Math. **9**, 133-138. MR 3, 90a

J. Kurzweil
[1954] *On approximation in real Banach spaces*, Studia Math. **14**, 213–231. MR 16, 932g

J. Leray
[1935] *Topologie des espaces de M. Banach*, C. R. Acad. Sci. Paris **200**, 1083–1093.

J. Leray et J. Schauder
[1934] *Topologie et equations fonctionnelles*, Ann. Ecole Norm. Sup. **51**, 45–78.

V.R. Lidskii
[1959] *Non-self adjoint operators with a trace (rusky)*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **125**, 485–487. MR 21, 3769

T.C. Lim
[1980] *Asymptotic centers and nonexpansive mappings in some conjugate spaces*, Pacific J. Math. **90**, 135–143. MR 82h:47052

P.K. Lin
[1985] *Unconditional bases and fixed points of nonexpansive mappings*, Pacific J. Math. **116,1**, 69–76. MR 86c:46075

P.K. Lin and Y. Sternfeld
[1985] *Convex sets with the Lipschitz fixed point property are compact*, Proc. Amer. Math. Soc. **93**, 633-639. MR 86c:47074

J. Lindenstrauss
[1966] *On nonseparable reflexive Banach spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **72**, 967–970. MR 34, 4875

J. Lindenstrauss
[1966a] *On extreme points in* l_1, Israel J. Math. **4**, 59–61. MR 34, 589

J. Lindenstrauss and L. Tzafriri
[1971] *On the complemented subspaces problem*, Israel J. Math. **9**, 263–269. MR 43, 2474

V.I. Liokoumovich
[1973] *The existence of B-spaces with non-convex modules of convexity (rusky)*, Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Matematika **12**, 43–50.

V.I. Lomonosov
[1973] *On invariant subspaces of families of operators, commuting with a compact operator (rusky)*, Funkcional. Anal. i Priložen. **7(3)**, 55–56. MR 54, 8319

E.R. Lorch
[1943] *The theory of analytic functions in normed Abelian vector rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **54**, 414–425. MR 5, 100

P. Mankiewicz
[1973] *On the differentiability of Lipschitz mappings in Fréchet spaces*, Studia Math. **45**, 15–29. MR 48, 9390

B. Maurey
[1974] *Théorèmes de factorisation pour les opérateurs à valeurs dans les espaces* L^p, Soc. Math. France, Astérisque 11, Paris. MR 49, 9670

B. Maurey
[1980] *Points fixes des contractions sur un convexe fermé de* L^1, Seminaire d'Analyse Fonctionelle (Ecole Polytechnique Palaiseau) **80–81**. MR 83h:47041

S. Mazur
[1933] *Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen*, Studia Math. **4**, 70–84.

S. Mazur and W. Orlicz
[1933] *Über Folgen linearen Operationen*, Studia Math. **4**, 152–157.

C.W. McArthur
[1956] *On relationships amongst certain spaces of sequences in an arbitrary Banach space*, Canad. Journ. Math. **8**, 192–197. MR 17, 1227d

E.J. McShane
[1950] *Linear functionals on certain Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **11**, 402–408. MR 12, 110d

D.P. Milman
[1938] *On some criteria for the regularity of spaces of the type (B)*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **20**, 243–246.

W.B. Moors
[1997] *A characterisation of weak compactness in Banach spaces*, Bull. Austral. Math. Soc. **55**, 497–501.

T.S. Motzkin
[1935] *Sur quelques propriétés caractéristiques des ensembles convexes*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. **VI 21**, 562–567.

G.J. Murphy
[1981] *Continuity of the spectrum and spectral radius*, Proc. Amer. Math. Soc. **82**, 619–621. MR 82h:46066

F.J. Murray
[1937] *On complementary manifolds and projections in spaces L^p and l^p*, Trans. Amer. Math. Soc. **41**, 138–152.

K. Musial
[1978] *The weak Radon-Nikodym property in Banach spaces*, Studia Math. **64**, 151–174. MR 80h:46065

I. Netuka
[1980] *The Dirichlet problem for harmonic functions*, Amer. Math. Monthly **87**, 621–628. MR 82c:31005

J. von Neumann
[1932] *Über einen satz von Herrn M.H. Stone*, Ann. Math. **33**, 567–573.

J. von Neumann
[1935] *On complete topological spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **37**, 1–20.

J.D. Newburgh
[1951] *The variation of spectra*, Duke Math. J. **18**, 165–176. MR 14, 481

G. Nördlander
[1960] *The modulus of convexity in normed linear spaces*, Ark. Mat. **4**, 15–17. MR 25, 4329

T. Nishiura and D. Waterman
[1963] *Reflexivity and summability*, Studia Math. **23**, 53–57. MR 27, 5107

J. Novák
[1948] *Regular space, on which every continuous function is constant*, Časopis pro pěst. mat. a fyz. **73**, 58–68. MR 10, 467h

B. Nowak
[1979] *On the Lipschitz retraction of the unit ball in infinite dimensional Banach spaces onto boundary*, Bull. Acad. Polon. Sci. **27**, 861–864. MR 82g:58008

A. Pełczyński
[1960] *Projections in certain Banach spaces*, Studia Math. **19**, 209–228. MR 23, A3441

A. Pełczyński
[1976] *All separable Banach spaces admit for every $\varepsilon > 0$ fundamental and total biorthogonal sequences bounded by* $1 + \varepsilon$, Studia Math. **55**, 295–304. MR 54, 13541

B.J. Pettis
[1939] *A proof that every uniformly convex space is reflexive*, Duke Math. J. **5**, 249–253.

R.R. Phelps
[1960] *Uniqueness of Hahn-Banach extensions and unique best approximation*, Trans. Amer. Math. Soc. **95**, 238–255. MR 22, 3964

R.R. Phelps
[1974] *Dentability and extreme points in Banach spaces*, J. Functional Anal. **16**, 78–90. MR 50, 5227

R.S. Phillips
[1940] *On linear transformations*, Trans. Amer. Math. Soc. **48**, 516–541. MR 2, 318c

R.S. Phillips
[1940] *A characterization of Euclidean spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **46**, 930–933. MR 2, 220f

B. Pospíšil
[1937] *Remark on bicompact spaces*, Ann. Math. **38**, 845–846.

D. Preiss
[1990] *Fréchet differentiability of Lipschitz functions on Banach spaces*, J. Funct. Analysis **91**, 312–345. MR 91g:46051

G.B. Price
[1937] *On the extreme points of convex sets*, Duke Math. J. **3**, 56–67.

C.R. Putnam
[1951] *On normal operators in Hilbert space*, Amer. J. Math. **73**, 357–362. MR 12, 717f

S. Ramaswami
[1978] *A simple proof of Clarkson's inequality*, Proc. Amer. Math. Soc. **68**, 249–250. MR 58, 11286

T.J. Ransford
[1989] *A short proof of Johnson's uniqueness-of-norm theorem*, Bull. London Math. Soc. **21**, 487–488. MR 90g:46069

Ch. Read
[1984] *A solution to the invariant subspace problem*, Bull. London Math. Soc. **16**, 337–401. MR 86f:47013

Ch. Read
[1985] *A solution to the invariant subspace problem on the space l_1*, Bull. London Math. Soc. **17**, 305–317. MR 87e:47020

Ch. Read
[1986] *A short proof concerning the invariant subspace problem*, Journal London Math. Soc. **34**, 335–348. MR 87:47020

N.M. Rice
[1982] *On nth roots of positive operators*, Amer. Math. Monthly **89**, 313–314. MR 83h:47012

C.E. Rickart
[1958] *An elementary proof of a fundamental theorem in the theory of Banach algebras*, Michigan Math. J. **5**, 75–78. MR 20, 4787

F. Riesz
[1918] *Über lineare Funktionalgleichungen*, Acta Math. **41**, 71–98.

H.P. Rosenthal
[1970] *On relatively disjoint families of measures, with some applications to Banach space theory*, Studia Math. **37**, 13–36. MR 42, 5015

H.P. Rosenthal
[1974] *A characterization of Banach spaces containing l^1*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **71**, 2411–2413. MR 50, 10773

A.F. Ruston
[1949] *A note on convexity of Banach spaces*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **45**, 157–159. MR 10, 197e

V.I. Rybakov
[1977] *Some properties of measures on a normed space that has the RN property*, Mat. Zametki **21**, 81–92. MR 58, 17034

J.J. Saccoman
[1991] *Evolution of the geometric Hahn-Banach theorem*, Riv. Mat. Univ. Parma **17**, 257–264. MR 93h:46004

D. Sarason
[1987] *The multiplication theorem for Fredholm operators*, Amer. Math. Monthly **94**, 68–70. MR 88c:47021

W.L.C. Sargent
[1953] *On some theorems of Hahn, Banach and Steinhaus*, Journ. London Math. Soc. **28**, 438–451. MR 15, 134b

H.H. Schaefer
[1963] *Eine Bemerkung zur Existenz invarianter Teilräume linearer Abbildungen*, Math. Z. **82**, 90. MR 27, 4815

T. Schlumprecht
[1991] *An arbitrarily distortable Banach space*, Israel J. Math. **76**, 81–95. MR 93h:46023

J. Schreier
[1930] *Ein Gegenbeispiel zur Theorie der schwachen Konvergenz*, Studia Math. **2**, 58–62.

J. Schwartz
[1951] *A note on the space L_p^**, Proc. Amer. Math. Soc. **2**, 270–275. MR 12, 718c

L. Schwartz
[1974–75] *Fonctions mesurables et $*$-scalairement mesurables*, Séminaire Maurey-Schwartz, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France, (Exposés 4, 5 et 6). MR 56, 6385

A.L. Shields
[1970] *A note on invariant subspaces*, Mich. Math. J. **17**, 231–233. MR 55, 12364

M.A. Smith
[1976] *A smooth non-reflexive second conjugate space*, Bull. Austral. Math. Soc. **15**, 129–131. MR 54, 11039

M. Smith
[1978] *Some examples alucering rotundity in Banach spaces*, Math. Ann. **233**, 155–161. MR 58, 2168

C. Stegall
[1975] *The Radon-Nikodym property in conjugate spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **206**, 213–223. MR 51, 10581

L. Sucheston
[1967] *Banach limits*, Amer. Math. Monthly **74**, 308–311. MR 37, 740

A. Szankowski
[1976] *A Banach lattice without the approximation property*, Israel J. Math. **24**, 329–337. MR 54, 8245

A. Szankowski
[1978] *Subspaces without the approximation property*, Israel J. Math. **30**, 123–129. MR 80b:46032

A. Szankowski
[1981] *$B(H)$ does not have the approximation property*, Acta Math. **147**, 89–108. MR 83a:46033

S.J. Szarek
[1987] *A Banach space without a basis which has the bounded approximation property*, Acta Math. **159**, 81–98. MR 88f:46029

W. Szlenk
[1965] *Sur les suites faiblements convergentes dans l'espace L*, Studia Math. **25**, 337–341. MR 34, 1833

V.L. Šmuljan
[1941] *Sur la structure de la sphere unitaire dans l'espace de Banach*, Mat. Sb. **9**, 545–561. MR 3, 205d

A.E. Taylor
[1939] *The extension of linear functionals*, Duke Math. J. **5**, 538–547. MR 1, 58b

R.L. Thele
[1974] *Some results on the radial projection in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **42**, 483–486. MR 48, 6892

J.R. Torregrosa
[1993] *Weak and norm convergence on the unit sphere*, Rocky Mountain Journal of Mathematics **23**, 379–389. MR 94g:46018

T. Traynor
[1996] *An easy analytic proof of Brouwer's fixed point theorem*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **44**, 479–483. MR 97, 06

S.L. Troyanski
[1970] *An example of a smooth space, the dual of which is not strictly convex (rusky)*, Studia Math. **35**, 305–309. MR 42, 6589

S.L. Troyanski
[1985] *On a property of the norm which is close to local uniform rotundity*, Math. Ann. **271**, 305–313. MR 80g:46030

J.W. Tukey
[1942] *Some notes on the separation of convex sets*, Portugaliae Mathematicae **3**, 95–102. MR 4, 13b

A.N. Tychonov
[1935] *Ein Fixpunktsatz*, Math. Ann. **111**, 767–776.

W.A. Veech
[1971] *A short proof of Sobczyk's Theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **28**, 627–628. MR 43, 879

J.L. Walsh
[1927] *Über die Entwicklung einer analytischen Funktion nach Polynomen*, Math. Ann. **96**, 430–436.

H. Weyl
[1949] *Inequalities between the two kinds of eigenvalues of a linear transformation*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **35**, 408–411. MR 11, 37d

R.F. Wheeler
[1983] *A survey of Baire measures and strict topologies*, Expo. Math. **2**, 97–190. MR 85b:46035

R. Whitley
[1966] *Projecting m onto c_0*, Amer. Math. Monthly **73**, 285–286.

R. Whitley
[1967] *An elementary proof of the Eberlein-Smulian theorem*, Math. Ann. **172**, 116–118. MR 35, 3419

N. Wiener
[1932] *Tauberian theorems*, Ann. of Math. **33**, 1–100.

J.H. Williamson
[1954] *Compact linear operators in linear topological spaces*, J. London Math. Soc. **29**, 149–156. MR 15, 801

A. Witner
[1929] *Zur Theorie der beschränkten Billinearformen*, Math. Z. **30**, 228–282.

W. Żelazko
[1997] *The strongest vector topology is locally convex on separable linear subspaces*, Ann. Polon. Math. **66**, 275–282.

M. Zippin
[1977] *The separable extension problem*, Israel J. Math. **26**, 372–387. MR 56, 1030

V. Zizler
[1971] *On some rotundity and smoothness properties of Banach spaces*, Dissertationes Math. **87**. MR 45, 9108

Stručný průvodce označením

$\mathbf{N}$	přirozená čísla
$\mathbf{Z}$	celá čísla
$\mathbf{R}$	reálná čísla
$\mathbf{C}$	komplexní čísla
$\mathbf{F}$	$\mathbf{R}$ nebo $\mathbf{C}$
Δ	uzavřený jednotkový kruh v $\mathbf{C}$
$\mathbf{T}$	jednotková kružnice v rovině
λ, λ_n	Lebesgueova míra
ε_x	Diracova míra v bodě x
ε_x	obraz prvku x v X^{**}

$\mathbf{R}^n$	n-rozměrný eukleidovský prostor
$\mathbf{C}^n$	n-rozměrný komplexní prostor
$\mathcal{C}(K)$	spojité funkce na K
$\mathcal{C}_K(P)$	spojité funkce s nosičem v K
$\mathcal{C}_c(P)$	spojité funkce s kompaktním nosičem
$\mathcal{C}^b(P)$	omezené spojité funkce
$\mathcal{C}_0(P)$	spojité funkce s nulou v nekonečnu
$\mathcal{M}(P)$	znaménkové Radonovy míry
$\mathcal{M}^1(P)$	pravděpodobnostní míry
$\mathcal{A}(K)$	spojité funkce na K analytické uvnitř K
c_0	posloupností konvergující k nule
c	prostor konvergentních posloupností
$\mathcal{L}^p$, L^p	elpéčka
l^p	malá elpéčka
$\mathcal{D}(\Omega)$	hladké funkce s kompaktním nosičem
$\mathcal{L}(X,Y)$	spojitá lineární zobrazení z X do Y
$\mathcal{L}(X)$	operátory na X
$\mathcal{L}_c(X)$	kompaktní operátory na X
$\mathcal{A}$	(většinou) Banachova algebra
$\Omega(\mathcal{A})$	prostor charakterů

p_A	Minkowského funkcionál
$r(x)$	spektrální poloměr
$\sigma(x)$	spektrum
$\sigma_p(x)$	bodové spektrum
$R_\lambda(x)$	rezolventní funkce

w	slabá topologie
w^*	slabá* topologie
$\sigma(X,M)$	slabá topologie
$\tau(X,M)$	Mackeyho topologie
$\beta(X,M)$	silná topologie
$df(x)$	slabá (Gâteauxova) derivace
$f'(x)$	silná (Fréchetova) derivace

$U(x,r)$	otevřená koule o středu x a poloměru r
$B(x,r)$	uzavřená koule o středu x a poloměru r
B_X	uzavřená jednotková koule v prostoru X
S_X	jednotková sféra v prostoru X
D_T	definiční obor T
$\ker T$	jádro zobrazení T
$\mathcal{R}(T)$	obor hodnot zobrazení T
$X^{\#}$	algebraický duál
X^*	(topologický) duál
εX	kanonický obraz X v X^{**}

L'	banachovsky adjungované zobrazení
L^*	hermiteovsky adjungované zobrazení
lin	lineární obal
$\overline{\operatorname{lin}}$	uzavřený lineární obal
co	konvexní obal
$\overline{\operatorname{co}}$	uzavřený konvexní obal
$\operatorname{ext} A$	extremální body
$A \oplus B$	algebraický součet
$A \oplus_t B$	topologický součet
$A \subset\subset W$	A je podprostor ve W
E/M	faktorprostor
e_n	jednotkový vektor $(0,\dots,0,1,0,\dots)$
$\lVert f\rVert_p$	L^p-norma funkce f
$\operatorname{supt} f$	nosič funkce
$f * g$	konvoluce
$L \circ T$, LT	složení zobrazení
I	identické zobrazení
δ_i^j	Kroneckerovo delta
e	jednotka Banachovy algebry

P_A	projekce na A
$\overline{A}$	uzávěr množiny A
$\operatorname{Int} A$	vnitřek množiny A
∂A	hranice množiny A
$A^\perp$	kolmice, anihilátor
A°	polára
$A^{\circ\circ}$	bipolára

$f_n \xrightarrow{w} f$	slabá konvergence
$f_n \xrightarrow{w^*} f$	slabá* konvergence
$f_n \rightrightarrows f$	stejnoměrná konvergence

Rejstřík