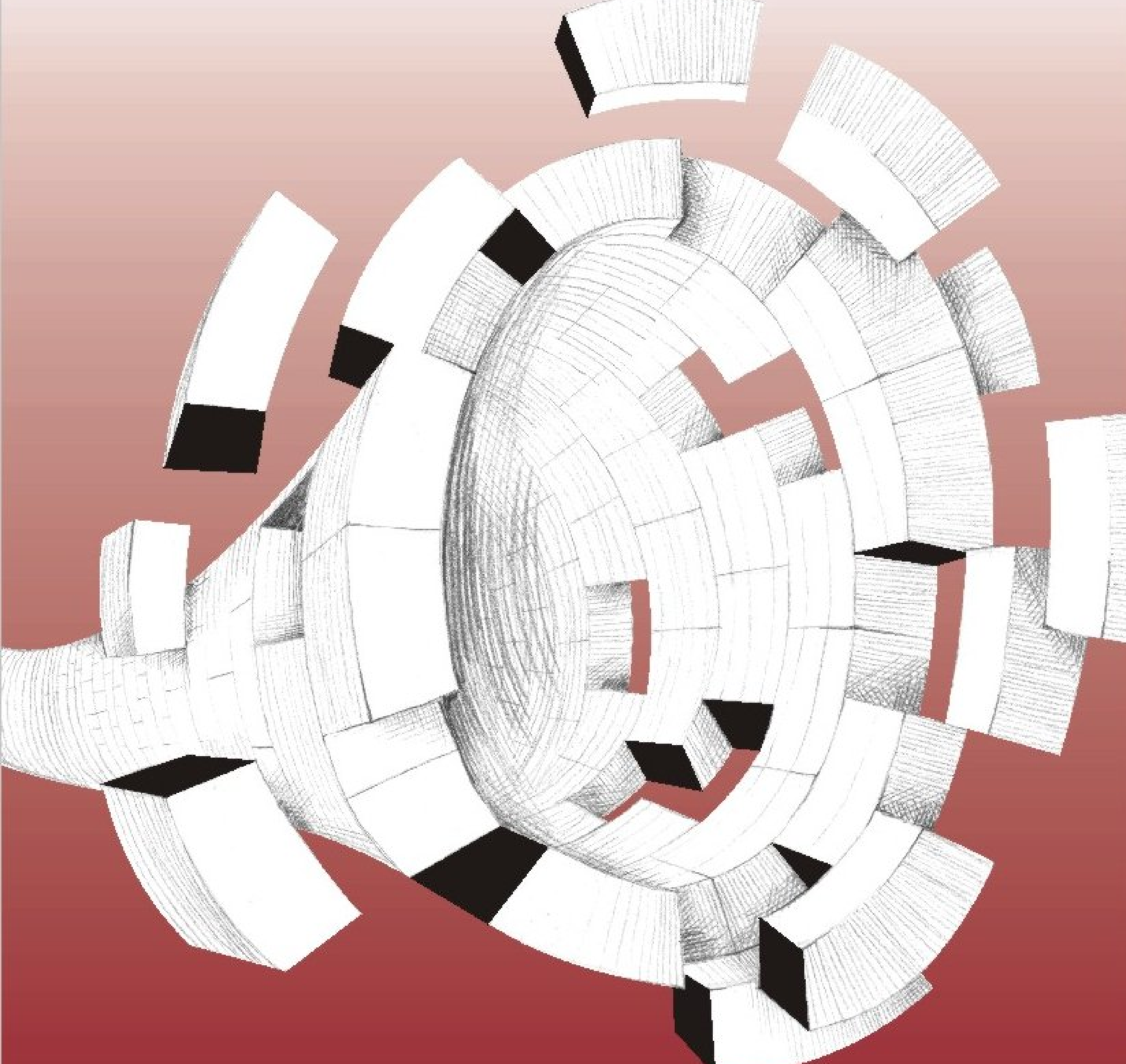
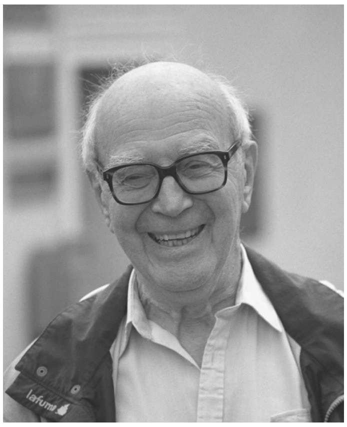
JAROSLAV LUKEŠ

ÚVOD DO FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZY



Obsah



Motto: Člověk se nenaučí dělat matematiku *posloucháním*
vybroušených výkladů při vyučovacích hodinách,
nýbrž *samostatnou prací* s matematickými pojmy.
GUSTAVE CHOQUET

Předmluva

Text vznikl na základě mých dlouholetých zkušeností z přednášky „Úvod do funkcionální analýzy". Existují i skripta „Zápisky z funkcionální analýzy"(nakladatelství Karolinum Praha, 1998, druhé vydání 2002, další pak v roce 2003), která jsou však mnohem rozsáhlejší. Jednak tím, že slouží jako text dalších přednášek z funkcionální analýzy pro specializovanější obory a zahrnují i jiné partie funkcionální analýzy, jednak tím, že obsahují i mnoho dalších námětů a nových výsledků použitelných pro vlastní vědeckou práci. Pravdou je, že některé pasáže ze Zápisků jsem upravil a použil je i pro tato skripta. Na druhé straně v tomto textu také někdy odkáži na příslušné partie ze Zápisků, a to víceméně jen v případě, kdy daná problematika či některý důkaz nepatří do přednášky z Úvodu do funkcionální analýzy.

V předloženém textu jsem se snažil vyjít vstříc i studentům méně teoretičtějších studijních programů, tedy být mnohem elementárnější a podrobnější. Navíc počínaje školním rokem 2003/04 dochází k úpravě studijních plánů v souvislosti s přechodem na bakalářské (a poté následně i magisterské) studium. Do skript jsem zařadil i kapitolu sloužící k počítání konkrétních příkladů. Vřele všem studentům doporučuji jejich podrobné a s pochopením provedené zpracování (viz Motto nahoře na této stránce).

Závěrem bych chtěl upřímně poděkovat doc. Karlu Najzarovi, se kterým jsem řadu let tvořil tandem při výuce funkcionální analýzy. V diskusích o problémech výuky jsme spolu strávili mnoho hodin. Jemu vděčím za mnohé cenné podněty při přípravě těchto skript a také za pečlivé přečtení jejich finální verze.

Praha, 2004 Jaroslav Lukeš

Pro druhé vydání jsem opravil pouze drobné chyby, jinak zůstal zachován původní text.

Praha, 2011 Jaroslav Lukeš

APERITIV

Algebraická Hahn-Banachova věta

Funkcionální analýza stojí na třech základních pilířích: Hahn-Banachově větě[1], principu stejnoměrné omezenosti a větě o otevřeném zobrazení (anebo, chcete-li, na jejím ekvivalentu větě o uzavřeném grafu, anebo též na ekvivalentní větě o inverzním zobrazení).

Začněme zkraje prvním pilířem, a to Hahn-Banachovou větou. Mnohá důležitá tvrzení a aplikace na ní podstatně závisejí. Je celá plejáda vět Hahn-Banachova typu - algebraické, analytické či geometrické. Jako základ uvedeme algebraickou verzi, jejíž důkaz je založen na Zornově lemmatu (pokud si o něm chcete osvěžit vědomosti, podívejte se na Dodatky, odstavec 13.6).

Nejdříve však některé základní definice.

A.1. Vektorové prostory. Uvažujme vektorový prostor W, ať již reálný nad tělesem reálných čísel $\mathbf{R}$ či komplexní nad $\mathbf{C}$. (Napíšeme-li symbol $\mathbf{F}$, rozumíme tím jedno z těles $\mathbf{R}$ či $\mathbf{C}$.) Aniž si pamatujeme přesné axiomy (viz Dodatky 13.1), které vektorové prostory musejí splňovat, připomeňme, že ve W umíme sčítat libovolné dva prvky a také je umíme násobit skaláry (tedy čísly z $\mathbf{R}$ či $\mathbf{C}$). A že ve W máme (jednoznačně určený) nulový prvek $\mathbf{0}$.

Podprostorem M vektorového prostoru W rozumíme takovou jeho podmnožinu, že součet dvou prvků z M a násobek prvku z M skalárem stále zůstává v M. Zápisem $M \subset\subset W$ značíme fakt, že M je podprostor W.

Symbol $W^{\#}$ značí vektorový prostor všech lineárních forem na W. Připomeňme - *lineární forma* na W je zobrazení $L : W \to \mathbf{F}$ zachovávající vektorové operace. Tedy

$$L(x+y) = Lx + Ly \quad \text{a} \quad L(\lambda x) = \lambda\, Lx$$

pro všechny prvky $x, y \in W$ a $\lambda \in \mathbf{F}$. Součet dvou lineárních forem a násobek lineární formy se definuje přirozeným způsobem, to jest bodově. Při takto definovaných operacích pak množina všech lineárních forem na W tvoří vektorový prostor $W^{\#}$. Nazýváme ho *algebraickým duálem* k prostoru W. Snad ještě poznamenejme, že jeho nulovým prvkem je *nulová lineární forma*, tedy zobrazení, které každému prvku z W přiřazuje 0 z tělesa $\mathbf{F}$.

A.2. Sublineární funkcionál, pseudonorma a norma. Reálnou funkci p na vektorovém prostoru W nazveme *sublineárním funkcionálem*, jestliže

(a) $p(\mathbf{0}) = 0$,
(b) $p(x+y) \le p(x) + p(y)$ pro všechna $x, y \in W$,
(c) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ pro $x \in W$ a $\lambda \ge 0$.

Pokud pro sublineární funkcionál $p : W \to \mathbf{R}$ platí dokonce, že

(c') $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ pro každé $x \in W$ a libovolný skalár λ,

říkáme funkci p *pseudonorma*. A pokud ještě navíc

(a') $p(x) = 0$ pouze v případě, kdy $x = \mathbf{0}$,

mluvíme o funkci p jako o *normě*. V tomto případě ji značíme raději symbolem $||.||$.

Libovolný lineární funkcionál je příkladem sublineárního funkcionálu, který (v netriviálním případě) není pseudonormou.

Uveďme ještě další příklad. Uvažujme vektorový prostor l^∞, který je tvořen všemi omezenými posloupnostmi reálných čísel, sčítání a násobení skalárem je samozřejmě definováno „po složkách". Položíme-li pro $x = (x_n) \in l^\infty$

$$p : x \mapsto \limsup x_n\,,$$

je p sublineární funkcionál na l^∞, není však pseudonormou.

---

[1] Gramaticky správněji bychom měli říkat Hahnova–Banachova věta. Je mi to však proti srsti.

Povšimněte si, že sublineární funkcionál může nabývat i záporných hodnot. A to se u pseudonormy stát nemůže. Stačí se podívat na následující řádek

$$0 = p(\mathbf{0}) = p(x - x) \leq p(x) + p(-x) = 2p(x)$$

(p je pseudonorma a $x \in W$).

Jestliže $\mathcal{C}([-1,1])$ označíme vektorový prostor všech spojitých funkcí na intervalu $[-1,1]$ (vektorové operace jsou opět definovány „bodově"), je funkce

$$p : f \mapsto |f(0)| \quad \text{pro} \quad f \in \mathcal{C}([-1,1])$$

pseudonormou. Není však na prostoru $\mathcal{C}([-1,1])$ normou.

A.3. Algebraická Hahn-Banachova věta. *Nechť f je lineární forma definovaná na podprostoru M reálného vektorového prostoru W, p je sublineární funkcionál na W a $f \leq p$ na M. Potom existuje lineární forma $F \in W^{\#}$ tak, že $f = F$ na M a $F \leq p$ na W.*

Důkaz. Myšlenka důkazu je vcelku jednoduchá. Označíme-li

$$\mathcal{Z} := \{(H, h) : M \subset\subset H \subset\subset W, h \in H^{\#}, h = f \text{ na } M, h \leq p \text{ na } H\},$$

ukážeme pomocí Zornova lemmatu, že $\mathcal{Z}$ má při vhodném uspořádání maximální prvek, řekněme (D_F, F). A pak už jen stačí dokázat, že $D_F = W$.

Takže definujeme nejdříve (docela přirozeným způsobem) uspořádání na $\mathcal{Z}$ pomocí inkluze:

$$(H_1, h_1) \prec (H_2, h_2) \text{ , jestliže } H_1 \subset\subset H_2 \text{ a } h_1 = h_2 \text{ na } H_1 \,.$$

Není těžké si uvědomit, že $\prec$ je skutečně uspořádání. Abychom mohli použít Zornovo lemma 13.6, musíme ještě ověřit, že libovolný řetězec v $\mathcal{Z}$ má horní závoru. Nechť tedy $\mathcal{C} \subset \mathcal{Z}$ je řetězec (jeho libovolné dva prvky lze porovnat). Položme

$$G := \bigcup \{H : (H, h) \in \mathcal{C}\}.$$

Promyslete, proč G je podprostor W (samozřejmě, že sjednocení, ani dvou, podprostorů není podprostor; nicméně jsou-li $(H_1, h_1), (H_2, h_2) \in \mathcal{C}$, je buďto $H_1 \subset H_2$ anebo $H_2 \subset H_1$, odkud plyne, že $x + y \in G$ a $\lambda x \in G$, pokud $x, y \in G$ a $\lambda \in \mathbf{R}$). Volíme-li $x \in G$, existuje dvojice $(H, h) \in \mathcal{C}$ tak, že $x \in H$. Položme $g(x) := h(x)$. Na tomto místě si ovšem musíme rozmyslet, proč je tato definice korektní. Může se totiž stát, že $x \in K$, kde $(K, k) \in \mathcal{C}$ je jiná dvojice. Protože však $\mathcal{C}$ tvoří řetězec, je buďto $K \subset H$ anebo $H \subset K$. V každém případě pak $h(x) = k(x)$ podle definice systému $\mathcal{Z}$. Ukážeme-li, že g je lineární forma na G, bude (G, g) horní závorou $\mathcal{C}$. Důkaz posledních tvrzení přenecháme píli čtenáře. Má tedy $\mathcal{Z}$ maximální prvek, označme ho (D_F, F).

Takže zbývá ukázat, že $D_F = W$. Předpokládejme, že tomu tak není. Existuje tedy $z \in W \setminus D_F$. Položme

$$Y := \{x + \lambda z : x \in D_F, \lambda \in \mathbf{R}\}.$$

Evidentně Y je podprostor W obsahující D_F. Přitom $D_F \neq Y$. Dále zvolme (nějaké) $c \in \mathbf{R}$ a definujme funkci h na Y předpisem

$$h(x + \lambda z) := F(x) + \lambda c \quad \text{pro} \quad x \in D_F \text{ a } \lambda \in \mathbf{R}.$$

Opět si musíme uvědomit, že definice je korektní (každý prvek z Y je vyjádřen uvedeným způsobem jednoznačně – je-li totiž $x_1 + \lambda_1 z = x_2 + \lambda_2 z$, je $x_1 - x_2 = (\lambda_2 - \lambda_1)z$, což je možné v případě $x_1, x_2 \in D_F$ pouze pokud $x_1 - x_2 = 0$, a tedy i $\lambda_1 = \lambda_2$).

Sami rozmyslete, že h je lineární forma na prostoru Y, že $h = f$ na M, a že $(D_F, F) \prec (Y, h)$. Protože víme, že D_F je vlastní podprostor Y, dojdeme ke sporu, pokud se nám podaří najít takové c, aby $h \leq p$ na Y. Hledejme tedy takové c. Pro každé $x \in D_F$ a $\lambda \in \mathbf{R}$ chceme, aby platilo

$$h(x + \lambda z) = F(x) + \lambda c \leq p(x + \lambda z).$$

Pokud je $\lambda = 0$, vyhovuje této nerovnosti jakékoliv c. Pokud je λ nenulové, vydělme uvedenou nerovnost $|\lambda|$. A protože D_F je lineární podprostor, stačí najít c tak, aby

$$F(y) + \frac{\lambda}{|\lambda|} c \le p\Big(y + \frac{\lambda}{|\lambda|} z\Big)$$

pro každé $y \in D_F$ a $\lambda \in \mathbf{R}$. Rozlišíme-li případy $\lambda > 0$ a $\lambda < 0$, vidíme, že hledáme takové c, aby nerovnost

$$F(t) - p(t - z) \le c \le -F(y) + p(y + z)$$

platila pro každou dvojici $t, y \in D_F$. Pokud ovšem pro všechna $t, y \in D_F$ bude splněna nerovnost

$$F(t) - p(t - z) \le -F(y) + p(y + z)\,,$$

zajisté takové c bude existovat (lze ho pak volit libovolně mezi $\sup\{F(t) - p(t - z) : t \in D_F\}$ a $\inf\{-F(y) + p(y + z) : y \in D_F\}$). Ale poslední nerovnost je samozřejmě splněna, máme totiž

$$F(t) + F(y) = F(t + y) \le p(t + y) \le p(t - z) + p(y + z)\,.$$

A tím jsme skutečně došli ke sporu. ■

A.4. Poznámky. (a) Pokud je p dokonce pseudonorma, potom nalezená lineární forma splňuje nerovnost $|F| \le p$ na W. Zajisté, pro libovolné $x \in W$ je v tomto případě

$$-p(x) = -p(-x) \le -F(-x) = F(x) \le p(x)\,.$$

(b) Existuje i komplexní verze Hahn-Banachovy věty nazývaná též někdy Bohnenblust-Sobczykovou větou. Její znění je následující.

Bohnenblust-Sobczykova věta. *Nechť f je lineární forma definovaná na podprostoru M komplexního vektorového prostoru W, p je pseudonorma na W a $|f| \le p$ na M. Potom existuje lineární forma $F \in W^{\#}$ tak, že $f = F$ na M a $|F| \le p$ na W.*

O tom, jakým způsobem se přechází od vět v reálných prostorech k tvrzením pro komplexní prostory, je naznačeno v [Záp], Poznámka 2.19.

(c) Hahn-Banachovu větu, přesněji její algebraickou verzi, jsme odvodili za pomoci Zornova lemmatu. A to je, jak známo, ekvivalentní axiomu výběru. Není však pravdou, že by také Hahn-Banachova věta byla axiomu výběru ekvivalentní.

Na závěr této kapitolky uveďme jeden důsledek Hahn–Banachovy věty, který bude užitečný v dalším.

A.5. Jednorozměrná HB–věta. *Nechť p je pseudonorma na vektorovém prostoru W a $z \in W$. Potom existuje lineární forma $F \in W^{\#}$ tak, že $|F| \le p$ na W a $f(z) = p(z)$.*

Důkaz. Není co řešit, pokud $z = \mathbf{0}$. V tom případě stačí vzít za F nulovou lineární formu.

Jestliže $z \ne \mathbf{0}$, definujme M jako podprostor W generovaný bodem z, tj. nechť

$$M := \{\lambda z : \lambda \in \mathbf{F}\}\ .$$

Na podprostoru M definujme dále funkcionál f předpisem

$$f : \lambda z \longmapsto \lambda p(z)\,.$$

Definice je korektní, pokud totiž $\lambda_1 z = \lambda_2 z$, je $\lambda_1 = \lambda_2$. A tudíž $f(\lambda_1 z) = f(\lambda_2 z)$. Není také pochyb o tom, že f je lineární funkcionál na M. Také je zřejmé, že $|f| \le p$ na M (dokonce $|f(\lambda z)| = |\lambda p(z)| = |\lambda| p(z) = p(\lambda z)$). Podle algebraické Hahn–Banachovy věty, respektive z jejího tvaru v Poznámce A.4.a, víme, že existuje lineární forma $F \in W^{\#}$ tak, že $F = f$ na M a $|F| \le p$ na W. Nyní si stačí jen uvědomit, že $z \in M$, a tedy $F(z) = f(z) = p(z)$. ■

ELEMENTY FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZY

1. Banachovy prostory

V dalším budeme vyšetřovat vektorové prostory, kde navíc každému vektoru přiřadíme jeho „velikost", přesněji řečeno jeho normu, což není vlastně nic jiného než jisté „ohodnocení" (v případě reálných či komplexních čísel je to jejich absolutní hodnota). Vyšetřování pouhé vektorové struktury je záležitost čistě algebraická, zavedením normy a následně i metriky máme možnost využívat pojmy jako je spojitost, otevřené či kompaktní množiny, úplnost atd. Ať již máme jakékoliv dvě struktury (kupříkladu vektorové prostory s uspořádáním, grupy s topologií nebo algebry s normou), vždy musíme určit „vnitřní" požadavky (axiomy) na dané struktury a navíc pravidla, která tyto struktury svazují navzájem. Konkrétně v našem případě máme dány axiomy pro vektorový prostor, dále musíme říci, že norma je zobrazení do nezáporných čísel a navíc musíme svázat vlastnosti normy s algebraickou strukturou vektorového prostoru (jak se chová norma vůči sčítání, násobení skalárem a vůči nulovému prvku). A to je právě obsahem následující definice.

1.1. Normované lineární prostory. Dvojici $(E, ||.||)$, kde E je vektorový prostor a $||.||$ je norma na něm, nazveme *normovaným lineárním prostorem*. Připomeňme, že *norma* $||.||$ je nezáporná reálná funkce na E splňující následující podmínky:

(a) $\|x\| = 0$, právě když $x = \mathbf{0}$,
(b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$,
(c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

pro každé $x, y \in E$ a $\lambda \in \mathbf{F}$.

Jako elementární cvičení na nerovnosti odvoďte s použitím trojúhelníkové nerovnosti (c) , že

$$\big| ||x|| - ||y|| \big| \leq ||x - y||$$

pro každou dvojici $x, y \in E$.

Jestliže pro $x, y \in E$ položíme $\varrho(x, y) := ||x - y||$, je ϱ metrika na E. Veškeré pojmy, jako například otevřené či uzavřené množiny, spojitá zobrazení, kompaktní či úplné množiny, budeme vztahovat k této metrice.

Pokud je normovaný lineární prostor úplný vzhledem k této metrice, nazýváme ho *Banachovým*.

1.2. Příklady Banachových prostorů. Zde uvedeme pouze přehled základních příkladů Banachových prostorů, se kterými se budeme v dalším setkávat. Jejich podrobnější popis je uveden v Dodatku.

Tak tedy, symboly $\mathbf{R}^n$ či $\mathbf{C}^n$ značíme *eukleidovský prostor* všech n–tic reálných či komplexních čísel opatřený *eukleidovskou normou*

$$||(x_1, \dots, x_n)|| := \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}\,.$$

Banachův prostor $\mathcal{C}(K)$, kde K je kompaktní množina, je tvořen všemi spojitými funkcemi na K, přičemž norma pro funkci $f \in \mathcal{C}(K)$ je definována předpisem

$$||f|| := \max\left\{|f(t)| : t \in K\right\} \,.$$

Banachův prostor c je množina všech konvergentních reálných (nebo též komplexních) posloupností, norma takové posloupnosti $\{x_n\}$ je definována

$$||\left\{x_n\right\}|| := \sup\left\{|x_n| : n \in \mathbf{N}\right\} \,.$$

Podprostor c_0 sestává pak ze všech posloupností konvergujícími k 0. Je to uzavřený podprostor c, tedy opět Banachův prostor.

Důležitou kategorií Banachových prostorů jsou prostory l^p, kde $1 \le p \le \infty$. Ty jsou tvořeny všemi posloupnostmi $\{x_n\}$ takovými, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\,, \quad \text{v případě kdy} \quad p \in [1, \infty)$$

a

$$\sup\{|x_n| : n \in \mathbf{N}\} < \infty\,, \quad \text{pokud} \quad p = \infty\,.$$

Normu takové posloupnosti pak definujeme zcela přirozeným způsobem jako

$$||\,\{x_n\}\,|| := \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \quad \text{pro} \quad p \in [1, \infty)$$

a

$$||\,\{x_n\}\,|| := \sup\{|x_n| : n \in \mathbf{N}\} \quad \text{pro} \quad p = \infty\,.$$

Prostory l^p jsou speciálními případy mnohem obecnějších (a velice důležitých v analýze) Banachových prostorů $L^p(X, \mathcal{S}, \mu)$. Stručně je popišme. Uvažujme tedy prostor s mírou $(X, \mathcal{S}, \mu)$. Pro připomenutí poznamenejme, že $\mathcal{S}$ je zde σ–algebra podmnožin dané množiny X a μ je (nezáporná) míra na $\mathcal{S}$. Buď nejprve $p \in [1, \infty)$. Řekneme, že funkce f leží v prostoru $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{S}, \mu)$ (povšimněte si, že píšeme kurzivní písmeno $\mathcal{L}$ místo L), jestliže je lebesgueovsky μ–integrovatelná na X. Potom můžeme definovat její normu předpisem

$$||f|| := \Big(\int_X |f|^p \, d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}\,.$$

Množina všech ekvivalentních tříd funkcí z $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{S}, \mu)$ s obvyklými operacemi tvoří vektorový prostor $L^p(X, \mathcal{S}, \mu)$, a ten je, s normou definovanou přirozeným způsobem, Banachův. Samozřejmě, náš stručný výklad by bylo zapotřebí doplnit podrobným vysvětlením, přinejmenším si musíme uvědomit, jak definovat součet tříd ekvivalentních funkcí, či si rozmyslet, že definice normy třídy nezávisí na volbě jejího reprezentanta. To vše je ale uděláno právě v Dodatku 13.19. Poznamenejme ještě, že mezi matematickou komunitou není běžné rozlišovat mezi prostory $\mathcal{L}^p$ a L^p.

Prostor $L^\infty(X, \mathcal{S}, \mu)$ je tvořen všemi (třídami ekvivalentních) funkcí na X, které jsou esenciálně omezené na X. Zde $\mathcal{S}$–měřitelná funkce f na X je *esenciálně omezená*, jestliže existuje konstanta M tak, že $|f(x)| \le M$ pro μ–skoro všechna $x \in X$. Normu z takovéto funkce pak definujeme jako nejmenší ze všech takových konstant M.

Důležitým příkladem Banachova prostoru je také prostor $\mathcal{M}(K)$ všech Radonových měr na kompaktu K. Jeho přesný popis je uveden v Dodatku.

V mnoha dalších partiích matematické analýzy, zejména pak v teorii parciálních diferenciálních rovnic, se budete často setkávat se *Sobolevovými prostory* $\mathcal{W}^{1,p}$, $1 \le p \le \infty$. I ony jsou popsány v Dodatku.

Speciálním případem Banachových prostorů jsou *Hilbertovy prostory*. Jsou to ty prostory, jejichž norma vznikne ze skalárního součinu. Anebo lze také říci, že jsou to ty Banachovy prostory, jejichž norma splňuje *rovnoběžníkové pravidlo*. Hilbertovým prostorům je věnována samostatná kapitola 10.

1.3. Příklady neúplných prostorů. Z předchozího by se mohlo zdát, že všechny normované lineární prostory jsou úplné. To zdaleka není pravda, uveďme proto několik příkladů neúplných prostorů.

Prostor c_{00} je tvořen všemi posloupnostmi, které jsou od určitého indexu rovny 0, přesněji, posloupnost $\{z_k\}$ náleží do prostoru c_{00}, existuje-li k_0 tak, že $z_k = 0$ pro všechna $k \ge k_0$. Zřejmě c_{00} je podprostor c_0, není v něm však uzavřený (a tedy nemůže být ani úplný – proč ?). To nahlédneme snadno, stačí uvažovat třeba posloupnost $\{x_n\}$. kde

$$x_n := (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots) \in c_{00}$$

a prvek $x := (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots,) \in c_0 \setminus c_{00}$. Protože

$$||x - x_n||_{c_0} = \frac{1}{n+1} \to 0\,,$$

konverguje posloupnost $\{x_n\}$ v prostoru c_0 k prvku x, ten však neleží v c_{00}.

Obdobně prostor l^1_{00} sestávající ze všech posloupností z l^1, které jsou od určitého indexu rovny 0, je neuzavřený (a hustý) podprostor l^1.

Jiným příkladem neúplného prostoru je prostor $\mathcal{C}([0,1])$ uvažovaný s integrální normou. Více detailů o tomto prostoru je uvedeno v odstavci 13.16.

Uvažujeme-li prostor

$$E := \{f \in \mathcal{C}([0,1] : \text{ existuje } \varepsilon_f > 0 \text{ tak, že } f = 0 \text{ na } [0, \varepsilon_f]\ \}$$

s normou zděděnou z prostoru $\mathcal{C}([0,1])$, je E opět neúplný normovaný lineární prostor. Zkuste si sami rozmyslet, proč E je neuzavřený (hustý) podprostor $\mathcal{C}([0,1])$.

Důležitá vlastnost normy je popsána v následujícím tvrzení.

1.4. Tvrzení. *V každém normovaném lineárním prostoru E je norma*

$$||.|| : x \longmapsto ||x||\,, \quad x \in E\,,$$

spojitou funkcí na E.

Důkaz. Poznamenejme, že zobrazení F mezi dvěma (třeba metrickými) prostory je spojité, splňu-je-li t.zv. *Heineho podmínku*: Kdykoliv $x_n \to x$, potom $F(x_n) \to F(x)$.

Volme tedy posloupnost $\{x_n\}$ z E, $x_n \to x$. Potom z nerovnosti

$$\big|||x_n|| - ||x||\big| \le ||x_n - x||$$

ihned plyne, že $||x_n|| \to ||x||$. ∎

2. Lineární zobrazení

Uvažujeme-li normovaný lineární prostor E a lineární formu f na něm, může tato, ale také nemusí, být spojitá. Kdy tomu tak je, vypovídá následující jednoduché lemátko.

2.1. Lemátko. *Nechť f je lineární forma na normovaném lineárním prostoru E. Potom f je spojitá (na E), právě když je omezená na jednotkové kouli*

$$B_E := \{x \in E : ||x|| \le 1\}\,,$$

tedy existuje-li $K > 0$ tak, že $|f(x)| \le K$ pro všechna $x \in B_E$.

Důkaz. Důkaz by měl být elementárním cvičením. Nicméně, je-li f spojitá lineární forma a volíme-li $\varepsilon = 3$ (třeba), existuje zajisté $\delta > 0$ tak, že $|f(t)| \le 3$, kdykoliv $||t|| \le \delta$ (využíváme vlastně jen spojitost f v bodě 0). Potom ovšem $|f(x)| \le \frac{3}{\delta}$ pro všechna $x \in B_E$.

Naopak, je-li $|f(t)| \le K$ pro všechna $t \in B_E$ a $\varepsilon > 0$ i $x_0 \in E$ jsou zvoleny libovolně, stačí položit $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$. Potom $|f(x) - f(x_0)| \le \varepsilon$, jestliže $||x - x_0|| < \delta$. To proto, že $\frac{x - x_0}{\delta} \in B_E$. ∎

2.2. Duální prostor. Nechť E je normovaný lineární prostor. Symbolem E^* značíme prostor všech spojitých lineárních forem na E. To je zřejmě vektorový podprostor (algebraického) duálu $E^\#$ a nazýváme ho (topologickým) *duálem* prostoru E.

Pro $f \in E^*$ položme

$$||f|| := \sup\{|f(x)| : ||x|| \le 1\}\,.$$

Podle předešlého Lemátka 2.1 je $||f||$ konečné (nezáporné) číslo. Nečiní žádnou potíž si rozmyslet, že zobrazení $f \mapsto ||f||$ je normou na prostoru E^*. Snad jen při ověření trojúhelníkové nerovnosti by se dalo zaváhat. Je-li však $x \in B_E$ a $f, g \in E^*$, je

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq ||f|| + ||g||\,,$$

odkud přechodem k supremu získáme potřebnou nerovnost.

Vždy tedy uvažujeme duální prostor E^* opatřený takto definovanou normou. Některé poznatky o duálu E^* shrňme do následujícího komentáře.

2.3. Vlastnosti E^*. (a) Duální prostor E^* je vždy úplný, tedy Banachův. Důkaz odsuňme do odstavce 2.5.

(b) Je-li $x \in E$ a $f \in E^*$, potom

$$|f(x)| \leq ||f||\,||x||\,.$$

To nahlédneme snadno. Pokud $x = 0$, není co řešit. Je-li $x \neq 0$, je $\frac{x}{||x||} \in B_E$ a samozřejmě

$$\Big|\, f\Big(\frac{x}{||x||}\Big)\Big| \leq ||f||\,.$$

Předběhněme trochu a podívejme se na situaci v Hilbertových prostorech. Je–li f spojitá lineární forma na Hilbertově prostoru H, existuje (podle Fréchet–Rieszovy věty 10.21) jednoznačně určený prvek $h \in H$ takový, že

$$f(x) = (x, h) \quad \text{pro každé} \quad x \in H\,,$$

přičemž také víme, že $||f|| = ||h||$ (Tvrzení 10.20). Podle Schwarzovy nerovnosti 10.2 pak dostáváme

$$|f(x)| = |(x, h)| \leq ||x||\,||h|| = ||x||\,||f||\,.$$

Vidíme, že nerovnost $|f(x)| \leq ||f||\,||x||$, kde nyní x je v normovaném lineárním prostoru E a f v jeho duálu E^*, lze chápat jako zobecnění Schwarzovy nerovnosti známé spíše z teorie Hilbertových prostorů. Říkejme proto uvedené nerovnosti, a to pouze v těchto skriptech, také *Schwarzova nerovnost*.

(c) Suprema v definici normy funkcionálu se nemusí nabývat. Uveďme jednoduchý příklad: Na Banachově prostoru

$$E := \{f \in \mathcal{C}([0,1] : f(0) = 0\}$$

(uvažovaný s max–normou) definujme funkcionál L předpisem

$$L : f \mapsto \int_0^1 f(t)\,dt\,, \quad f \in E\,.$$

Z nerovnosti

$$|Lf| = \left|\int_0^1 f\right| \leq \int_0^1 |f| \leq \max_{t\in[0,1]} |f(t)| \int_0^1 1\,dt = ||f||$$

plyne, že $||L|| \leq 1$. Zvolme pevně n a uvažujme funkci $g_n(t) = \sqrt[n]{t}$. Potom $g_n \in E$, $||g_n|| = 1$ a

$$|Lg_n| = \left|\int_0^1 \sqrt[n]{t}\,dt\right| = \frac{n}{n+1}\,,$$

odkud je vidět, že $||L|| \geq 1$. Dostáváme tedy rovnost $||L|| = 1$. Zbývá si rozmyslet, proč neexistuje funkce f z E, pro niž bychom měli $||f|| \leq 1$ a současně $|Lf| = 1$. Ale to již není těžké, stačí využít toho, že taková funkce f je spojitá a $f(0) = 0$. Tím pádem je menší než, řekněme, $\frac{1}{8}$ na jistém okolí 0, přesněji – existuje $\delta > 0$ tak, že $|f| \leq \frac{1}{8}$ na intervalu $[0, \delta]$. Potom ovšem

$$\left|\int_0^1 f\right| = \left|\int_0^\delta f + \int_\delta^1 f\right| \leq \int_0^\delta |f| + \int_\delta^1 |f| \leq \frac{\delta}{8} + (1-\delta) = 1 - \frac{7\delta}{8} < 1\,.$$

Uveďme ještě jiný příklad. Uvažujme třeba lineární funkcionál

$$L := f \mapsto \int_0^1 t\, f(t)\, dt$$

na prostoru $L^1((0,1))$. Z odhadu

$$|Lf| \leq \int_0^1 |t\, f(t)|\, dt \leq \int_0^1 |f(t)|\, dt = ||f||\,,$$

plyne, že $||L|| \leq 1$. Volme $n \in \mathbf{N}$ a definujme funkci g_n jako n–násobek charakteristické funkce intervalu $(1 - \frac{1}{n}, 1)$. Potom

$$||g_n|| = \int_0^1 |g_n(t)|\, dt = \int_{1-\frac{1}{n}}^1 n\, dt = 1$$

a

$$|Lg_n| = \left|\int_{1-\frac{1}{n}}^1 t\, n\, dt\right| = 1 - \frac{1}{2n}\,.$$

Vidíme tedy, že $||L|| = 1$. Zbývá ukázat, že funkcionál L nenabývá své normy. Zkuste to sami !

(V obou uvedených příkladech nebyl uvažovaný prostor reflexivní. Není to náhoda, v reflexivním prostoru podle Tvrzení 4.11 každý funkcionál nabývá své normy.)

(d) Platí, že

$$||f|| = \sup\{|f(x)| : ||x|| = 1\}\,.$$

I to je jasné. Je-li totiž $x \neq 0$ pro $x \in B_E$, je

$$\left|\left|\frac{x}{||x||}\right|\right| = 1 \quad \text{a} \quad \left|f\Big(\frac{x}{||x||}\Big)\right| = \big|f(x)\big|\,\frac{1}{||x||} \geq |f(x)|\,.$$

(e) Je-li E konečně dimenzionální normovaný lineární prostor, je na něm každá lineární forma spojitá (viz Dodatek 13.12), tedy algebraický a topologický duál splývají: $E^* = E^{\#}$. Naopak, na prostorech nekonečné dimenze vždy existují nespojité lineární formy (viz Dodatek 13.13).

2.4. Prostor $\mathcal{L}(E,Y)$. Než pokročíme dále, věnujme se chvíli lineárním zobrazením mezi normovanými lineárními prostory. Jsou-li E a Y normované lineární prostory a $L : E \to Y$ lineární zobrazení, zjistíme téměř okamžitě, že L je spojité, právě když existuje takové $K > 0$, že $||L(x)|| \leq K$ pro všechna x z uzavřené jednotkové koule B_E (zopakujte si důkaz z Lemátka 2.1). Můžeme tedy položit

$$||L|| := \sup\{||Lx|| : ||x|| \leq 1\}\,.$$

Zobrazení $L : E \to Y$ se nazývá *omezené*, zobrazuje-li omezené množiny v E na omezené množiny v Y. Přitom množina D je v E *omezená*, jestliže $\sup\{||x|| : x \in D\} < \infty$. Tedy podle předešlého triviální úvahou zjistíme, že lineární (!) zobrazení z E do Y je spojité, právě když je omezené.

Prostor všech spojitých lineárních zobrazení z E do Y budeme označovat symbolem $\mathcal{L}(E,Y)$; pokud $E = Y$, potom místo $\mathcal{L}(E,Y)$ jen krátce $\mathcal{L}(E)$. Základní vlastnosti prostoru $\mathcal{L}(E,Y)$ shrnuje následující tvrzení.

2.5. Vlastnosti $\mathcal{L}(E,Y)$. *Nechť E a Y jsou normované lineární prostory. Potom prostor $\mathcal{L}(E,Y)$ všech spojitých lineárních zobrazení z E do Y s obvyklými vektorovými operacemi a normou právě definovanou je normovaný lineární prostor. Je-li Y navíc Banachův, je i prostor $\mathcal{L}(E,Y)$ Banachův.*

Pro každé $L \in \mathcal{L}(E,Y)$ a $x \in E$ platí nerovnost

$$||Lx|| \leq ||L||\,||x||\,.$$

Jsou-li X, Y a Z tři lineární prostory a $L : X \to Y$ a $T : Y \to Z$ spojitá lineární zobrazení, je i $T \circ L \in \mathcal{L}(X,Z)$ a $||T \circ L|| \leq ||T||\,||L||$.

Důkaz. Snad nejdříve ke „Schwarzově" nerovnosti $||Lx|| \leq ||L||\,||x||$. Ta je zajisté splněna pro $x = 0$. Pokud $x \neq 0$, je $||\frac{x}{||x||}|| = 1$, a tudíž $||L(\frac{x}{||x||})|| \leq ||L||$. A odtud již ihned dostáváme kýženou nerovnost.

Dále není sporu o tom, že $\mathcal{L}(E, Y)$ tvoří lineární prostor (součet i násobek lineárních či spojitých zobrazení je opět lineární či spojité zobrazení). Také není těžké ověřit, že definovaná funkce $L \mapsto ||L||$ má na prostoru $\mathcal{L}(E, Y)$ všechny vlastnosti normy. Jsou-li kupříkladu $S, T \in \mathcal{L}(E, Y)$ a $||x|| \leq 1$, je

$$||Sx + Tx|| \leq ||Sx|| + ||Tx|| \leq ||S||\,||x|| + ||T||\,||x|| \leq ||S|| + |T||\,.$$

Tedy podle definice normy i $||S + T|| \leq ||S|| + ||T||$. Obdobně se ukáže, že norma složeného zobrazení $||T \circ L||$ je menší nebo rovna součinu norem $||T||\,||L||$ těchto zobrazení.

Zbývá ukázat, že prostor $\mathcal{L}(E, Y)$ je úplný, pokud je úplný prostor Y. Argument je následující. Je-li $\{L_n\}$ cauchyovská posloupnost v $\mathcal{L}(E, Y)$, plyne z nerovnosti

$$||L_n x - L_k x|| = ||(L_n - L_k)(x)|| \leq ||L_n - L_k||\,||x||$$

platné pro každé $x \in E$, že posloupnost $\{L_n x\}$ je cauchyovská v Y. Existuje tedy pro každé $x \in E$ její limita. Označíme-li

$$L : x \mapsto \lim L_n x \quad \text{pro} \quad x \in E\,,$$

je L určitě lineární operátor. Zbývá ukázat, že L je omezený a $||L_n - L|| \to 0$. Použitím elementární nerovnosti

$$\big|||L_n|| - ||L_k||\big| \leq ||L_n - L_k||$$

plyne, že posloupnost $\{||L_n||\}$ je cauchyovská, a tedy omezená. Existuje tedy $K > 0$ tak, že volíme-li $x \in B_E$, je

$$||L_n x|| \leq ||L_n||\,||x|| \leq K\,.$$

Ze spojitosti normy pak plyne, že i $||Lx|| \leq K$. Použijeme-li ještě jednou odhad

$$||L_n x - L_k x|| \leq ||L_n - L_k||\,||x||$$

a využijeme-li toho, že posloupnost $\{L_n\}$ je cauchyovská a že $L_k x \to Lx$, lehce zjistíme přímo z definice, že $||L_n - L|| \to 0$. ■

2.6. Poznámka. Je-li X Banachův prostor, můžeme na prostoru $\mathcal{L}(X)$ definovat „součin" operátorů jako jejich skládání. Algebraicky potom prostor $\mathcal{L}(X)$ tvoří *algebru* (v netriviálních příkladech vždy nekomutativní), a protože norma splňuje vůči takto definovanému součinu „trojúhelníkovou nerovnost" $||TL|| \leq ||T||\,||L||$, tvoří prostor $\mathcal{L}(X)$ tak zvanou *Banachovu algebru*.

2.7. Izomorfní a izometrická zobrazení. Nechť $T : E \to Y$ je lineární zobrazení mezi normovanými lineárními prostory E a Y. Řekneme, že T je *izomorfním zobrazením*, jestliže T je prosté zobrazení E na Y, je spojité a jeho inverzní zobrazení $T^{-1} : Y \to E$ je též spojité. Není těžké si rozmyslet, že lineární zobrazení $T : E \to Y$ je izomorfizmus, právě když $TE = Y$ a existují kladné konstanty α, β tak, že

$$\alpha\,||x|| \leq ||Tx|| \leq \beta\,||x|| \quad \text{pro každé} \quad x \in E\,.$$

Vskutku, protože se nezabýváme triviálním případem $E = \{\mathbf{0}\}$, jsou v případě, kdy T je izomorfizmus, T i T^{-1} lineární nenulová zobrazení, a tedy $||T|| > 0$ a taktéž $||T^{-1}|| > 0$. Z nerovností

$$||Tx|| \leq ||T||\,||x|| \quad \text{a} \quad ||x|| = ||T^{-1}(Tx)|| \leq ||T^{-1}||\,||Tx||$$

dostáváme ihned jednu implikaci. Pokud existují kladné konstanty α, β tak, že pro všechna $x \in E$ jsou splněny nerovnosti

$$\alpha\,||x|| \leq ||Tx|| \quad \text{a} \quad ||Tx|| \leq \beta\,||x||\,,$$

plyne z první nerovnosti, že T je prostý operátor. Druhá nerovnost pak říká, že T je omezený. Je-li nyní $y \in Y$, najděme $x \in E$ tak, aby $Tx = y$. Potom

$$||T^{-1}y|| = ||T^{-1}(Tx)|| = ||x|| \leq \alpha^{-1}\, ||Tx|| = \alpha^{-1}y$$

a vidíme, že i operátor T^{-1} je omezený.

Dále, lineární zobrazení T normovaného lineárního prostoru E na normovaný lineární prostor Y nazveme *izometrickým izomorfizmem*, jestliže $||Tx|| = ||x||$ pro každé $x \in E$. Použijeme–li předchozí charakteristiku izomorfních zobrazení, vidíme ihned, že každé izometricko–izomorfní zobrazení je izomorfní (rovnost $||Tx|| = ||x||$ si napište ve tvaru $||x|| \leq ||Tx|| \leq ||x||$!).

Normované lineární prostory E a Y nazveme *izomorfními*, existuje–li izomorfní zobrazení E na Y a *izometricko–izomorfními*, existuje-li izometrický izomorfizmus zobrazující prostor E na Y. Některé vlastnosti normovaných lineárních prostorů se zachovávají při izomorfních zobrazeních a některé dokonce při izometricko–izomorfních zobrazeních. Často pak hovoříme o izomorfní či izometrické teorii normovaných lineárních prostorů. Jako příklad ukažme, že úplnost je izomorfní pojem. Později zavedeme pojem reflexivity, i ten je izomorfním pojmem.

2.8. Tvrzení. *Je-li X Banachův prostor a Y normovaný lineární prostor izomorfní X, je i Y Banachův.*

Důkaz. Nechť T je izomorfní zobrazení X na Y a $\{y_n\}$ cauchyovská posloupnost v Y. Buďte $x_n \in X$ takové, že $Tx_n = y_n$. Víme, že existuje $\alpha > 0$ tak, že $\alpha\,||x|| \leq ||Tx||$ pro každé $x \in X$. Tudíž

$$||x_n - x_k|| \leq \alpha^{-1}\, ||T(x_n - x_k)|| = \alpha^{-1}\, ||Tx_n - Tx_k|| = \alpha^{-1}\, ||y_n - y_k||\,,$$

z čehož vidíme, že posloupnost $\{x_n\}$ je cauchyovská v X. Má tam tedy limitu, označme ji x. Ze spojitosti T pak plyne, že $Tx_n \to Tx$, čili že posloupnost $\{y_n\}$ je konvergentní. A to jsme potřebovali dokázat. ■

2.9. Cvičení. (a) Nechť A je libovolná (neprázdná) množina a X Banachův prostor. Označme symbolem $\mathcal{B}(A, X)$ množinu všech omezených zobrazení množiny A do X. Položíme–li

$$||F|| := \sup\{||F(x)|| : x \in A\}\,,$$

je $||.||$ norma na prostoru $\mathcal{B}(A, X)$ a ten je v této normě Banachův.

Návod. Pro důkaz úplnosti imitujte důkaz z odstavce 2.5. ♣

3. Slabé konvergence

V úvodu této kapitolky se pokusíme naznačit, proč je užitečné zavádět pojem slabé konvergence. Každý si jistě pamatuje větu, že spojitá funkce na kompaktní množině nabývá svého maxima i minima. Tato věta je užitečná mimo jiné i z toho důvodu, že máme-li zaručenu existenci maxima, můžeme již dalšími prostředky určit bod či body, v nichž ho daná funkce nabývá. V nekonečně rozměrné analýze Banachových prostorů je také důležité vyšetřovat extrémy (spojitých) funkcionálů na kompaktních množinách. Ovšem v těchto prostorech není „příliš mnoho" kompaktních množin. Později se dostaneme k Rieszově větě 9.3, podle níž jednotková koule nekonečně rozměrného Banachova prostoru není nikdy kompaktní (ačkoliv je uzavřená a omezená). Podívejme se, čím je to způsobeno. Abychom tedy dokázali o nějaké množině (řekněme v metrickém prostoru), že je kompaktní, musíme umět vybrat z libovolné posloupnosti jejích prvků konvergentní podposloupnost s limitou v této množině. Čím méně bude „konvergentních" posloupností v daném prostoru, tím hůře se nám budou takové posloupnosti vybírat a tím vlastně bude méně kompaktních množin. Naopak, čím více budeme mít „konvergentních" posloupností, tím více „kompaktních" množin bude daný prostor obsahovat. A to je náš cíl.

Potřebovali bychom tedy definovat nový pojem „konvergentních posloupností", a tedy samozřejmě i nový pojem „kompaktních množin". Musíme to ovšem zařídit tak, aby nová „konvergence" zahrnovala i původní konvergenci v normě. Nesmíme ovšem zajít příliš daleko. Minimálně budeme požadovat, aby spojité lineární funkcionály zůstaly „spojité" i vůči takto nově zavedené „konvergenci". Co tím rozumíme ? Připomeňme opět *Heineho podmínku* spojitosti: *Funkce f je spojitá, jestliže $f(x_n) \to f(x)$ pro každou posloupnost $x_n \to x$.*

Dáme-li si dohromady dva uvedené požadavky, vychází nám, že pokud posloupnost $\{x_n\}$ má konvergovat v prostoru E v novém smyslu k prvku x, musí nutně $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$ pro každý funkcionál $\varphi \in E^*$. A tady vlastně máme krok k definici „slabé konvergence".

3.1. Slabá konvergence. Posloupnost $\{x_n\}$ prvků normovaného lineárního prostoru E *konverguje slabě* k $x \in E$, symbolicky $x_n \xrightarrow{w} x$, jestliže $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$ pro každý funkcionál $\varphi \in E^*$.

3.2. Větička. *Jestliže $x_n \to x$ (v normě prostoru E), potom i $x_n \xrightarrow{w} x$.*

Důkaz. Stačí si jen opět vzpomenout na Heineho podmínku spojitosti: Jestliže tedy $x_n \to x$ v prostoru E a $\varphi \in E^*$, potom z uvedené Heineho podmínky plyne $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$. Což neříká nic jiného než že $x_n \xrightarrow{w} x$. ■

3.3. Splývání. Je otázkou, zda v některých prostorech slabá konvergence splývá s původní (normovou) konvergencí. Určitě tomu bude v případě konečně dimenzionálních prostorů. Uveďme třeba následující elementární důvod. Předpokládejme tedy, že množina $\mathcal{E} := \{e_1, \dots, e_k\}$ je bází k–dimenzionálního prostoru X a že $x_n \xrightarrow{w} x$. Pokud

$$x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k$$

a

$$x_n = \lambda_1^n e_1 + \cdots + \lambda_k^n e_k\,,$$

lehko zjistíme, že

$$\lim_n \lambda_j^n = \lambda_j \quad \text{pro každé } j = 1, \dots, k\,.$$

Zajisté, je-li totiž $\{f_1, \dots, f_k\}$ *duální bází* v X^* k $\mathcal{E}$, což znamená, že

$$f_j(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k) = \lambda_j \quad \text{pro každé } j = 1, \dots, k\,,$$

dostáváme, že $f_j(x_n) \to f_j(x)$, tedy $\lambda_j^n \to \lambda_j$ pro každé $j = 1, \dots, k$. Z odhadu

$$||x_n - x|| = \Big|\Big|\sum_{j=1}^k (\lambda_j^n - \lambda_j)e_j\Big|\Big| \le \sum_{j=1}^k |\lambda_j^n - \lambda_j|\,||e_j|| \to 0$$

pak již lehko vyplyne tvrzení.

Na druhé straně existují i nekonečně dimenzionální prostory, kde obě konvergence splývají. Kupříkladu *Schurova věta* říká, že *v prostoru l^1 každá slabě konvergentní posloupnost je již konvergentní* (chcete–li důkaz, podívejte se na [Záp], *3.2).

Existují ovšem posloupnosti, které konvergují slabě, nikoliv však v normě. Následující příklady jsou typické. Abychom ovšem o dané posloupnosti dokázali, že konverguje slabě k tomu či onomu prvku, musíme vědět, jak vypadají prvky duálního prostoru, respektive jejich popis. Bez toho se těžko obejdeme.

3.4. Příklad. Na Banachově prostoru c_0 uvažujme posloupnost

$$e_n := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)\,,$$

kde v uvedené posloupnosti se vyskytne 1 na n–tém místě, jinde jsou samé nuly. Protože

$$||e_n - e_k|| = 1 \quad \text{pro} \quad n \ne k\,,$$

nemůže posloupnost $\{e_n\}$ v prostoru c_0 konvergovat. Ona totiž není ani cauchyovská.

Na druhé straně ukážeme, že $e_n \xrightarrow{w} \mathbf{0}$ (kde $\mathbf{0}$ je nulový prvek prostoru c_0, tedy posloupnost sestávající ze samých nul). Abychom toto tvrzení dokázali, musíme zvolit libovolný spojitý lineární funkcionál $\varphi \in (c_0)^*$ a ukázat, že $\varphi(e_n) \to 0$. Mějme tedy takový funkcionál φ. Podle 13.28 existuje (právě jeden) prvek $\{a_n\}$ v prostoru l^1 tak, že

$$\varphi(x) = \sum_n a_n\, x_n \quad \text{pro každé} \quad x = \{x_n\} \in c_0\,.$$

Takže $\varphi(e_n) = a_n$ a jde jen o to si rozmyslet, proč $a_n \to 0$. Ale to je již snadné. Protože $\{a_n\} \in l^1$, konverguje řada $\sum_n |a_n|$. Musí tedy být (z nutné podmínky pro konvergenci řady) $|a_n| \to 0$, a tudíž i $a_n \to 0$.

Tím jsme ukázali, že $e_n \xrightarrow{w} 0$. Nikde ale není řečeno, že by posloupnost $\{e_n\}$ nemohla slabě konvergovat k nějakému jinému prvku prostoru c_0. Řekněme tedy, že

$$e_n \xrightarrow{w} z = \{z_n\} \in c_0\,,$$

přičemž předpokládejme, že ne všechny souřadnice z_n jsou nuly. Existuje tedy k tak, že $z_k \neq 0$. Definujme funkcionál ψ předpisem

$$\psi : \{x_n\} \mapsto x_k \quad \text{pro} \quad \{x_n\} \in c_0\,.$$

Zřejmě ψ je lineární funkcionál na c_0, a protože

$$|\psi(\{x_n\})| = |x_k| \leq ||\,\{x_n\}\,||\,,$$

ψ je omezený. Je tedy $\psi \in (c_0)^*$, a tudíž $\psi(e_n) \to \psi(z)$. Na jednu stranu víme, že (číselná) posloupnost $\{\psi(e_n)\}$ konverguje k 0, na druhé straně k $\psi(\{z_n\}) = z_k$. Protože číselná posloupnost nemůže mít dvě různé limity, musí být $z_k = 0$. A to je spor.

Na začátku jsme si řekli, že posloupnost $\{e_n\}$ nemůže v normě konvergovat. Zde je jiný argument - pokud by posloupnost $\{e_n\}$ konvergovala, řekněme k prvku $y \in c_0$, musela by k tomuto prvku podle Větičky 3.2 konvergovat slabě, tedy $e_n \xrightarrow{w} y$. Podle předešlého ovšem $e_n \xrightarrow{w} \mathbf{0}$, čili $y = \mathbf{0}$. Protože norma je spojitou funkcí, dostali bychom potom, že $||e_n|| \to ||\mathbf{0}|| = 0$. To je ale nemožné, neboť $||e_n|| = 1$ pro každé n.

Tento příklad jsme rozebrali detailně, protože pojem slabé konvergence je velice důležitý a je mu třeba s pochopením porozumět. Přidáme proto ještě některé příklady.

3.5. Příklad. Dalším příkladem je posloupnost daná (spočetnou) ortonormální bází $\{e_n\}$ Hilbertova prostoru H. Tato posloupnost nemůže konvergovat v normě, neboť

$$||e_n - e_k|| = \sqrt{2} \quad \text{pro} \quad n \neq k\,.$$

Konverguje však slabě k $\mathbf{0}$. Volíme-li totiž $\varphi \in H^*$, existuje podle Fréchet-Rieszovy věty 10.21 (právě jedno) $a \in H$ tak, že

$$\varphi(h) = (h, a) \quad \text{pro každé} \quad h \in H\,.$$

Z Parsevalovy rovnosti pak plyne, že

$$\sum_n |(e_n, a)|^2 = ||a||^2 < \infty\,.$$

Odtud dostáváme, že $\varphi(e_n) = (e_n, a) \to 0$.

Obdobně si můžete rozmyslet (při použití Besselovy nerovnosti), že každá spočetná ortonormální soustava v Hilbertově prostoru konverguje slabě k $\mathbf{0}$. Přičemž nekonverguje v normě.

3.6. Další příklady. (a) Uvažujme (reálný) Banachův prostor l^p pro $1 < p < \infty$ a posloupnost $\{e_n\}$ (kde $e_n := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ má pouze na n-tém místě cifru 1) jeho prvků. Protože

$$||e_n - e_k|| = 2^{\frac{1}{p}}\,,$$

nemůže posloupnost $\{e_n\}$ konvergovat.

Chtěli bychom ukázat, že opět $e_n \xrightarrow{w} \mathbf{0}$. K tomu ovšem musíme vědět, jak vypadají spojité lineární formy na l^p. Pokud to nevíte, podívejte se na 13.32. Každopádně, je-li $\varphi \in (l^p)^*$, existuje posloupnost $a = \{a_n\} \in l^q$, kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tak, že

$$\varphi(x) = \sum_n a_n x_n \quad \text{pro každé} \quad x = \{x_n\} \in l^p \,.$$

Speciálně $\varphi(e_n) = a_n$ a protože řada $\sum_n |a_n|^q$ konverguje, musí být $\varphi(e_n) = a_n \to 0 = \varphi(\mathbf{0})$.

(b) Uvažujme posloupnost $\{x_n\}$ v prostoru l^2, kde

$$x_n := (\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \ldots, 0, \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \ldots\,)\,,$$

přičemž souřadnice $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ je na prvním a n-tém místě. Rozmyslete si, že

$$||x_n|| = 1 \quad \text{pro každé } n \quad \text{a} \quad x_n \xrightarrow{w} x := (\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, 0, 0, \ldots\,)\,.$$

I zde ovšem musíte vědět, jak se dají popsat spojité lineární formy na prostoru l^2. Nejlepší je využít Fréchet-Rieszovu větu z 10.21. Na druhé straně posloupnost $\{x_n\}$ nemůže konvergovat. Pokud by totiž posloupnost $\{x_n\}$ konvergovala, musela by nutně konvergovat ke slabé limitě, tedy k prvku x. Potom bychom využitím spojitosti normy dostali , že $||x|| = \lim ||x_n|| = 1$. Ale to by bylo ve sporu, neboť $||x|| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3.7. Slabá konvergence v $\mathcal{C}([0,1])$. Uvažujme posloupnost $\{f_n\}$ spojitých funkcí na $[0,1]$ slabě konvergující třeba k nulové funkci $\mathbf{0}$: $f_n \xrightarrow{w} \mathbf{0}$. Lze nějakým způsobem tuto konvergenci charakterizovat ? Předběhneme-li poněkud, z Věty 5.3 vyplyne, že posloupnost $\{f_n\}$ musí být omezená. Existuje tedy $K > 0$ tak, že

$$|f_n(x)| \le K \quad \text{pro všechna} \quad x \in [0,1] \text{ a } n \in \mathbf{N}\,.$$

Volme pevně $x \in [0,1]$. Potom (Diracův) funkcionál

$$F_x : f \mapsto f(x)\,, \quad f \in \mathcal{C}([0,1])\,,$$

je určitě prvkem duálu $(\mathcal{C}([0,1]))^*$ (sami ověřte, že funkcionál F_x je lineární a že $||F_x|| = 1$). Protože $f_n \xrightarrow{w} \mathbf{0}$, musí být

$$f_n(x) = F_x(f_n) \to F_x(\mathbf{0}) = 0\,.$$

Vidíme tedy, že ze slabé konvergence $f_n \xrightarrow{w} \mathbf{0}$ plyne jednak omezenost posloupnosti $\{f_n\}$ a jednak bodová konvergence $f_n(x) \to 0$ pro každé $x \in [0,1]$. Ukážeme, že z těchto dvou podmínek již naopak vyplývá slabá konvergence $f_n \xrightarrow{w} \mathbf{0}$. Volme tedy libovolný funkcionál $F \in (\mathcal{C}([0,1]))^*$ a ověřujme, zda $F(f_n) \to 0$. Podle Rieszovy věty o reprezentaci (viz 13.61) existuje (právě jedna) znaménková Radonova míra μ na $[0,1]$ tak, že

$$F(f) = \int_{[0,1]} f \, d\mu \quad \text{pro každou funkci} \quad f \in \mathcal{C}([0,1])\,.$$

Předpokládejme (pro jednoduchost), že μ je navíc nezáporná míra. Potom z Lebesgueovy věty (o limitním přechodu) plyne, že

$$\int_{[0,1]} f_n \, d\mu \to 0\,.$$

Stačí si uvědomit, že $f_n \to \mathbf{0}$ bodově na $[0,1]$ a že k posloupnosti $\{f_n\}$ existuje konvergentní majoranta (za ni můžeme vzít třeba konstantní funkci). Pokud by míra μ byla znaménková, stačí ji rozložit na kladnou a zápornou část $\mu = \mu^+ - \mu^-$ a použít právě dokázané na míry μ^+ a μ^-.

Nikde nebylo podstatné, že se jednalo o interval $[0,1]$, a že posloupnost $\{f_n\}$ konvergovala k nulové funkci. Máme tedy tento závěr: *Buď K kompaktní prostor. Potom posloupnost funkcí $\{f_n\}$ z $\mathcal{C}(K)$ konverguje slabě k funkci $f \in \mathcal{C}(K)$, právě když posloupnost $\{f_n\}$ je omezená a $f_n(x) \to f(x)$ pro každé $x \in K$.*

Jak tedy můžeme sestrojit posloupnost funkcí $\{f_n\}$ z $\mathcal{C}([0,1])$, aby konvergovala slabě k nulové funkci, ale nekonvergovala k ní silně ? Uvědomíme-li si, že (silná) konvergence v prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ znamená stejnoměrnou konvergenci, jde vlastně o to sestrojit omezenou posloupnost $\{f_n\}$ na $[0,1]$, která by konvergovala bodově k $\mathbf{0}$, ale nekonvergovala by stejnoměrně. Každý by si měl ihned takovou posloupnost představit – stačí si třeba vzpomenout na příklady posloupností s „klouzajícím hrbem". Za ni můžeme vzít kupříkladu funkce f_n, které jsou spojité (a nezáporné) na $[0,1]$, jsou po částech lineární, přičemž

$$f_n(0) = f_n\Big(\frac{1}{n+2}\Big) = f_n\Big(\frac{1}{n}\Big) = f_n(1) = 0 \quad \text{a} \quad f_n\Big(\frac{1}{n+1}\Big) = 1\,.$$

Dobře rozmyslete !

Zatím není ovšem vůbec jasné, zda limita slabě konvergentní posloupnosti je určena jednoznačně. V některých konkrétních příkladech, jako tomu třeba bylo v 3.2, jednoznačnost umíme dokázat přímo. V obecném případě nám pak pomůže jeden z důsledků Hahn-Banachovy věty. A i když se této problematice budeme věnovat v pozdější samostatné kapitole, uveďme si tento důležitý výsledek již nyní.

3.8. Věta o oddělování bodů. *Nechť x a y jsou různé body normovaného lineárního prostoru E. Potom existuje $\varphi \in E^*$ tak, že $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.*

Důkaz. Podle jednorozměrné Hahn–Banachovy věty A.5 existuje lineární forma $\varphi \in E^\#$ tak, že

$$\varphi(x-y) = ||x-y|| \quad \text{a} \quad |\varphi(t)| \leq ||t|| \;\text{ pro }\; t \in E\,.$$

Z nerovnosti $|\varphi(t)| \leq ||t||$ ihned vidíme, že φ je omezený funkcionál, a protože $||x-y|| > 0$, je

$$\varphi(x) - \varphi(y) = \varphi(x-y) = ||x-y|| \neq 0\,.$$

■

3.9. Poznámka. Je-li $\mathcal{F}$ systém funkcí na nějaké množině K, říkáme, že $\mathcal{F}$ *odděluje body* K, jestliže ke každé dvojici $x, y \in K$ různých bodů existuje funkce $f \in \mathcal{F}$ tak, že $f(x) \neq f(y)$. Z poslední Věty 3.8 tedy vidíme, že duál E^* odděluje body prostoru E.

3.10. Větička. *Nechť pro posloupnost $\{x_n\}$ v normovaném lineárním prostoru E je $x_n \xrightarrow{w} x$ a současně $x_n \xrightarrow{w} y$. Potom $x = y$.*

Důkaz. Předpokládáme-li $x \neq y$, existuje podle předchozí Věty 3.8 $\varphi \in E^*$ tak, že $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Na druhé straně, protože $\{\varphi(x_n)\}$ je číselná posloupnost a současně

$$\varphi(x_n) \to \varphi(x) \quad \text{i} \quad \varphi(x_n) \to \varphi(y)\,,$$

musí být $\varphi(x) = \varphi(y)$. ■

3.11. Slabá* konvergence v E^*. Je-li $\{\varphi_n\}$ posloupnost funkcionálů z E^*, kde E je normovaný lineární prostor, řekneme, že $\{\varphi_n\}$ *slabě* konverguje* k funkcionálu $\varphi \in E^*$, symbolicky $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$, jestliže $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ pro každé $x \in E$. Někdy též mluvíme o *w^*–konvergenci* místo o slabé* konvergenci.

3.12. Tvrzení. *Nechť E je normovaný lineární prostor. Jestliže posloupnost funkcionálů $\{\varphi_n\}$ w^*–konverguje k $\varphi \in E^*$, potom w^*–limita φ je jednoznačně určena.*

Pokud $\varphi_n \to \varphi$ (v normě prostoru E^*), potom i $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$.

Důkaz. K otázce jednoznačnosti slabé* limity: Pokud $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$ a $x \in E$ je pevně zvoleno, potom $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ a číselná (!) posloupnost $\{\varphi_n(x)\}$ nemůže mít dvě různé limity.

Jestliže $\varphi_n \to \varphi$ a $x \in E$, potom z odhadu

$$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \le ||\varphi_n - \varphi||\,||x||$$

ihned plyne, že $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$, tudíž $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$ podle definice. ■

3.13. Důležité poznámky. (a) Na rozdíl od slabých konvergencí mluvíme o konvergencích v prostorech E či E^* jako o *silných* konvergencích či o konvergencích *v normě*.

(b) Povšimněte si rozdílů v argumentech důkazu Tvrzení 3.12 v porovnání s důkazy Větiček 3.2 a 3.10. Abychom ukázali jednoznačnost slabé limity posloupnosti v 3.10, potřebovali jsme (poměrně silnou) Hahn–Banachovu větu, respektive její důsledek o oddělování bodů. Na rozdíl pro důkaz jednoznačnosti slabé* limity nám stačila vpodstatě definice w^*–konvergence a jednoznačnost limity číselné posloupnosti. Čili nic převratně hlubokého. Rovněž tak si porovnejte důkazy tvrzení, podle kterých z konvergence v normě již plynula slabá konvergence. V jednom případě jsme vystačili s Heineho podmínkou spojitosti, v druhém případě jsme pak použili „Schwarzovu" nerovnost.

Je celá řada vět o slabých či slabých* konvergencích, jejich důkazy nemusí být v žádném případě „symetrické" a leckdy je nutno použít i jiných argumentů. A to jsme právě viděli. Dokonce některá tvrzení ani nemusí platit současně pro w či w^* konvergenci (třeba tvrzení týkající se omezenosti slabě či slabě* konvergentních posloupností).

(c) Na duálu E^* máme definován pojem w^*–konvergence. Protože však E^* je sám o sobě (vždy) Banachovým prostorem, je na něm také definována slabá w–konvergence: $\varphi_n \xrightarrow{w} \varphi$, jestliže $F(\varphi_n) \to F(\varphi)$ pro každé $F \in (E^*)^* =: E^{**}$. Že tyto konvergence obecně nesplývají, ukazuje následující příklad.

3.14. Příklad. Na Banachově prostoru l^1 uvažujme posloupnost „jednotkových" vektorů

$$e_n := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)\,, \quad n \in \mathbf{N}\,,$$

které mají na n–tém místě 1 a jinde samé nuly. Definujeme-li φ_n předpisem

$$\varphi_n : \{x_j\} \mapsto x_n \quad \text{pro} \quad \{x_j\} \in c_0\,,$$

je $\varphi_n \in (c_0)^*$. Funkcionál φ_n tedy „odpovídá" prvku e_n (viz 13.28).

Ukážeme, že $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \mathbf{0}$. Musíme tedy zvolit libovolné $x = \{x_j\} \in c_0$ a ukázat, že $\varphi_n(x) \to 0$. Protože však $\varphi(x) = x_n$ a $\lim x_n = 0$, jsme hotovi.

Nyní ukážeme, že posloupnost $\{\varphi_n\}$ nemůže v prostoru $(c_0)^*$ slabě konvergovat. Nechť tedy $b = \{b_n\}$ je libovolná posloupnost z l^∞ („ztotožňujeme" zde l^∞ s $(c_0)^{**}$) a definujme funkcionál F_b tak, aby

$$F_b : \{a_n\} \mapsto \sum_n a_n\, b_n \quad \text{pro} \quad \{a_n\} \in l^1\,.$$

Potom je zajisté $F_b \in (l^1)^*$ (ověřte !) a $F_b(\varphi_n) = F_b(e_n) = b_n$. Kdyby posloupnost $\{\varphi_n\}$ slabě konvergovala v $(c_0)^*$, řekněme k prvku φ, muselo by být $F_b(\varphi_n) \to F_b(\varphi)$ (což je jedno číslo !). Tudíž $b_n \to F_b(\varphi)$ pro každou omezenou posloupnost $\{b_n\}$. A to lze těžko splnit.

3.15. Cvičení. (a) Nechť X je Banachův prostor, $T \in \mathcal{L}(X)$, $x_n \xrightarrow{w} 0$. Ukažte, že $Tx_n \xrightarrow{w} 0$.

Návod. Volte $\varphi \in X^*$ a uvědomte si, že $\varphi \circ T \in X^*$. Proto $(\varphi \circ T)x_n \to 0$. A naším úkolem bylo ukázat, že $\varphi(Tx_n) \to 0$. ♣

PILÍŘE FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZY

4. Hahn-Banachova věta a její aplikace

4.1. Analytická Hahn-Banachova věta. *Nechť M je podprostor (ne nutně uzavřený) normovaného lineárního prostoru E a $f \in M^*$. Potom existuje $F \in E^*$ tak, že $F = f$ na M a $||F|| = ||f||$.*

Důkaz. Na začátek poznamenejme, že $||f||$ se uvažuje v podprostoru M, zatímco $||F||$ na celém prostoru E. Položme

$$p(x) := ||f||\,||x|| \quad \text{pro} \quad x \in E\,.$$

Evidentně p je pseudonorma na E a $|f| \leq p$ na M. Podle algebraické verze Hahn-Banachovy věty A.3 (viz též následující Poznámku A.4) existuje $F \in E^{\#}$ tak, že

$$F = f \ \text{ na } \ M \quad \text{a} \quad |F| \leq p \ \text{ na } \ E\,.$$

Protože pro $x \in E$ máme

$$|F(x)| \leq p(x) = ||f||\,||x||\,,$$

je dokonce $F \in E^*$ a $||F|| \leq ||f||$. Nerovnost $||F|| \geq ||f||$ je však samozřejmá, bere se totiž supremum z větší číselné množiny. ■

4.2. Poznámka. Pro důkaz analytické Hahn-Banachovy věty jsme použili její algebraickou verzi využívající Zornovo lemma anebo, chcete-li, jemu ekvivalentní axiom výběru. V případě, kdy náš normovaný lineární prostor E je separabilní, obejdeme se při důkazu kombinace algebraické a analytické verze Hahn-Banachovy věty bez něho. Stručnou myšlenku důkazu nyní naznačíme. Buď $\{x_n\}$ hustá spočetná podmnožina E, p sublineární funkcionál na E, M podprostor E a $f \in M^*$, $f \leq p$ na M. Označme M_1 podprostor E generovaný M a x_1 a rozšiřme f na f_1 tak, aby $f_1 \in M_1^*$ a aby $f_1 \leq p$ na M_1. Pak pokračujeme indukcí dále.

4.3. Věta o tečně. *Nechť E je normovaný lineární prostor a $x \in E$ jeho nenulový prvek. Potom existuje $f \in E^*$ s vlastnostmi $||f|| = 1$ a $f(x) = ||x||$.*

Důkaz. Označme M podprostor E generovaný prvkem x, tedy $M := \{\lambda x : \lambda \in \mathbf{F}\}$ a položme

$$g : \lambda x \mapsto \lambda ||x|| \quad \text{pro} \quad \lambda x \in M\,.$$

Zřejmě $g \in M^*$. Protože

$$0 < ||x|| = g(x) = |g(x)| \leq ||g||\,||x||\,,$$

je $||g|| \geq 1$. Na druhé straně je podle definice $||g|| \leq 1$, tudíž $||g|| = 1$. Analytická verze Hahn-Banachovy věty 4.1 nám zaručí existenci takové formy $f \in E^*$, pro niž $||f|| = ||g|| = 1$ a $f = g$ na M. Protože však $x \in M$, je $f(x) = g(x) = ||x||$. ■

4.4. Poznámky. (a) Věta o tečně nic nevypovídá o jednoznačnosti funkcionálu f. Již jednoduchý příklad v prostoru l_2^1 či l_2^∞ ukáže, že takových funkcionálů může být více. Pokud v každém nenulovém bodě daného prostoru existuje právě jeden takový funkcionál, mluvíme o *hladkém* prostoru.

(b) Proč nazýváme uvedené tvrzení větou o „tečně" ? Uvažujeme-li třeba jednotkovou uzavřenou kouli B_E reálného prostoru E a bod x leží na její hranici (tedy $||x|| = 1$), reprezentuje funkcionál f „tečnu" k této kouli v bodě x. Totiž $x \in D := \{t \in E : f(t) = 1\}$ a celá koule B_E leží v jednom z „poloprostorů" určených nadrovinou D. Přesněji, $B_E \subset \{t \in E : f(t) \leq 1\}$, neboť pro $t \in B_E$ máme $f(t) \leq |f(t)| \leq ||f||\,||t|| \leq 1$.

Následující poznatek o oddělování bodů byl již obsažen v tvrzení 3.8. Uveďme jej ještě jednou.

4.5. Důsledek. *Nechť E je normovaný lineární prostor a $x, y \in E$, $x \neq y$. Potom existuje $f \in E^*$ tak, že $f(x) \neq f(y)$.*

Důkaz. Protože $x - y \neq 0$, existuje podle předchozí Věty o tečně $f \in E^*$ tak, že $f(x - y) = x - y \neq 0$. A to je hledaný funkcionál. ■

4.6. Duální vyjádření normy. *Nechť E je normovaný lineární prostor a $z \in E$. Potom*

$$||z|| = \max\{|f(z)| : f \in E^*, ||f|| \leq 1\} .$$

Důkaz. Je-li $f \in E^*$ a $||f|| \leq 1$, je

$$|f(z)| \leq ||f||\,||z|| \leq ||z||\,.$$

Odtud ihned dostáváme nerovnost

$$||z|| \geq \sup\{|f(z)| : f \in E^*, ||f|| \leq 1\} .$$

Potřebujeme dokázat opačnou nerovnost. Ta je však zřejmá, pokud $z = 0$. Je-li však $z \neq 0$, existuje podle Věty 4.3 o tečně $g \in E^*$, $||g|| \leq 1$ tak, že $g(z) = ||z||$. Tudíž

$$||z|| = g(z) \leq \sup\{|f(z)| : f \in E^*, ||f|| \leq 1\} .$$

A to jsme potřebovali dokázat. ■

4.7. Poznámka. Porovnáme-li definici normy funkcionálu z 2.2 a právě dokázané vyjádření normy v původním prostoru, vidíme, že v prvním případě je norma funkcionálu supremem jakési množiny (přičemž tohoto suprema se nemusí nabývat), zatímco v duálním vyjádření normy se jedná dokonce o maximum. Jeho existenci nám zaručuje právě Věta o tečně.

4.8. Kanonické vnoření. Uvažujme normovaný lineární prostor E a jeho druhý duál E^{**}. Ten je samozřejmě definován jako duál k E^*, tedy $E^{**} := (E^*)^*$. Pro $x \in E$ definujme zobrazení ε_x na prostoru E^* předpisem

$$\varepsilon_x : \varphi \mapsto \varphi(x) \quad \text{pro} \quad \varphi \in E^* .$$

Především, ε_x je spojitou lineární formou na prostoru E^*, tedy $\varepsilon_x \in E^{**}$. Zkusme to ověřit. Volme tedy $\varphi, \psi \in E^*$. Potom

$$\varepsilon_x(\varphi + \psi) = (\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x) = \varepsilon_x(\varphi) + \varepsilon_x(\psi)$$

(využili jsme pouze definici součtu dvou zobrazení). Podobně $\varepsilon_x(\lambda\varphi) = \lambda\varepsilon_x(\varphi)$ pro $\lambda \in \mathbf{F}$ a $\varphi \in E^*$.

Jestliže $||\varphi|| \leq 1$, potom

$$|\varepsilon_x(\varphi)| = |\varphi(x)| \leq ||\varphi||\,||x|| \leq ||x||\,,$$

a tudíž ε_x je spojitá lineární forma na E^* a $||\varepsilon_x|| \leq ||x||$.

Dále definujme zobrazení $\varepsilon : E \to E^{**}$ zcela přirozeným způsobem jako

$$\varepsilon : x \mapsto \varepsilon_x \quad \text{pro} \quad x \in E\,.$$

Nazývejme ho *kanonickým vnořením* prostoru E do E^{**}. Jeho základní vlastnosti popisuje následující tvrzení.

4.9. Věta. *Zobrazení ε je izomorfním a izometrickým zobrazením prostoru E na $\varepsilon E \subset E^{**}$.*

Důkaz. Především poznamenejme, že εE je podprostorem E^{**} a že *izomorfizmem* zde rozumíme izomorfizmus mezi vektorovými prostory (tedy lineární prosté zobrazení E na εE; viz též 2.7). Dokazujme všechna tvrzení. Volme tedy $x, y \in E$ a $\varphi \in E^*$. Potom

$$\begin{aligned}\varepsilon(x+y)(\varphi) &= \varepsilon_{x+y}(\varphi) = \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) = \varepsilon_x(\varphi) + \varepsilon_y(\varphi)\\ &= \varepsilon(x)(\varphi) + \varepsilon(y)(\varphi)\end{aligned}$$

(využili jsme toho, že φ je lineární forma). Tedy $\varepsilon(x+y) = \varepsilon(x) + \varepsilon(y)$ a obdobně se ukáže, že $\varepsilon(\lambda x) = \lambda\varepsilon(x)$ pro $x \in E$ a $\lambda \in \mathbf{F}$. Vidíme, že zobrazení ε zachovává algebraické operace.

Víme již z 4.8, že vždy $||\varepsilon_x|| \leq ||x||$. Abychom ukázali, že ε je izometrickým zobrazením, potřebujeme ukázat opačnou nerovnost $||x|| \leq ||\varepsilon_x||$. Ta je zřejmá pokud $x = 0$. Je-li však $x \neq 0$, existuje podle Věty 4.3 o tečně $\varphi \in E^*$ tak, že $||\varphi|| = 1$ a $\varphi(x) = ||x||$. Odtud již plyne kýžená nerovnost, stačí si totiž uvědomit, že $||\varepsilon_x|| = \sup\{|f(x)| : ||f|| \leq 1\}$ a že se podle uvedené věty tohoto suprema nabývá v bodě $||x||$.

Zbývá si ještě rozmyslet, že kanonické vnoření ε je prosté. Ale to je jasné, neboť každá lineární izometrie je již prostým zobrazením. Jsou-li totiž $x, y \in E$, $x \neq y$, je

$$||\varepsilon(x) - \varepsilon(y)|| = ||\varepsilon(x-y)|| = ||x-y|| \neq 0\,,$$

a tedy i $\varepsilon(x) \neq \varepsilon(y)$. ■

4.10. Reflexivní prostory. Normovaný lineární prostor nazveme *reflexivním*, jestliže $\varepsilon E = E^{**}$. Jinak řečeno, jestliže ke každému $\Phi \in E^{**}$ existuje $x \in E$ tak, že $\Phi(f) = f(x)$ pro každé $f \in E^*$.

VAROVÁNÍ – častou chybou je představa o definici, podle které normovaný lineární prostor je reflexivní, jestliže je izometricky – izomorfní se svým druhým duálem. Je to školácká chyba – existují totiž nereflexivní prostory, které jsou izometricky – izomorfní se svým druhým duálem. V definici reflexivity je podstatné, že prostor je izometricky – izomorfní se svým druhým duálem, uvažujeme–li toto zobrazení jako kanonické vnoření !

Protože E^{**} je vždy úplný prostor (Poznámka 2.3.a) a ε je v případě reflexivního prostoru E izometrickým izomorfizmem E na E^{**}, lehko si rozmyslíme, že i původní prostor E v tomto případě musí být úplný. Tedy každý reflexivní prostor je již Banachův.

Říkali jsme, že suprema v definici normy funkcionálu se nemusí nabývat. Příklad na toto tvrzení musíme hledat mezi nereflexivními prostory. Stačí si přečíst následující poznatek.

4.11. Tvrzení. *Nechť X je reflexivní prostor a $f \in X^*$. Potom existuje $x \in X$ tak, že $|||x| = 1$ a $f(x) = ||f||$.*

Důkaz. Tvrzení je zřejmé, pokud f je nulová forma. Nechť tedy $f \neq 0$. Podle Věty o tečně existuje $\Phi \in X^{**}$ tak, že $||\Phi|| = 1$ a $\Phi(f) = ||f||$. Protože X je reflexivní, nalezneme $x \in X$ tak, aby $\Phi = \varepsilon_x$. Potom ovšem $f(x) = \varepsilon_x(f) = \Phi(f) = ||f||$ a $||x|| = ||\varepsilon_x|| = ||\Phi|| = 1$. ■

4.12. Poznámka. Platí i opačná implikace známá jako *Jamesova charakteristika* reflexivity: Pokud každý funkcionál z X^* nabývá své normy, je již prostor X reflexivní. Vyslovme toto hluboké tvrzení samostatně jako následující větu.

Jamesova věta. *Nechť X je Banachův prostor, v němž pro každé $f \in X^*$ platí, že $||f|| = \max\{|f(x)| : ||x|| \leq 1\}$. Potom X je reflexivní.*

Poznamenejme na tomto místě, že je známa celá řada charakteristik reflexivních prostorů. Není tedy vždy nutné ověřovat reflexivitu toho či onoho prostoru pomocí definice. Leckdy se může hodit právě některá z charakteristik reflexivity. Rovněž tak v důkazech vět, kde nějakou roli hraje reflexivita daného prostoru, lze mnohdy výhodně použít některou z charakteristik reflexivity. Jako ilustraci uveďme proto bez důkazu následující větu.

4.13. Charakteristiky reflexivity. *Následující podmínky pro Banachův prostor X jsou ekvivalentní:*

(i) *X je reflexivní,*
(ii) *libovolný funkcionál z X^* nabývá své normy (Jamesova charakteristika),*
(iii) *z libovolné omezené posloupnosti v X lze vybrat slabě konvergentní posloupnost (Eberlein–Šmuljanova charakteristika),*
(iv) *duál X^* je reflexivní (Pettisova charakteristika).*

Pokusme se nyní ilustrovat na příkladech použití uvedených charakteristik. V příkladě 2.3.c jsme sestrojili funkcionál L na prostoru $L^1((0,1))$, který nenabýval své normy. Podle Jamesovy charakteristiky (ale vlastně jen podle její elementárnější implikace – viz Tvrzení 4.11) tedy prostor $L^1((0,1))$ není reflexivní.

Jiný příklad. V Poznámce 3.3 jsme se zmínili o Schurově větě, podle které slabá a silná konvergence posloupností splývají v prostoru l^1. Kdyby se nám tedy podařilo sestrojit omezenou posloupnost v l^1, jejíž žádná vybraná posloupnost nekonverguje slabě, mohli bychom podle Eberlein – Šmuljanovy charakteristiky usoudit, že prostor l^1 není reflexivní (nehodila by se posloupnost $\{e_n\}$ z Příkladu 3.14 ?).

A využijeme-li nyní Pettisovu charakteristiku reflexivity, dostaneme ihned, že ani prostory c_0 či l^∞ nemohou být reflexivní (tady musíme samozřejmě vědět, jak vypadají jednotlivé duály spolu s tvrzením, že reflexivita se nezmění přechodem k izomorfním prostorům – viz [Záp], *2.13).

V dalším se nám bude hodit ještě jedna z mnoha dalších variant Hahn-Banachovy věty. Její důkaz lze získat modifikací postupu v důkazu Věty o tečně anebo třeba přímo její aplikací na příslušný faktorprostor.

4.14. Důsledek Hahn-Banachovy věty. *Nechť M je uzavřený podprostor normovaného lineárního prostoru E a $x \in E \setminus M$. Potom existuje $f \in E^*$ tak, že $||f|| = 1$, $f = 0$ na M a $f(x) > 0$.*

Důkaz. Nechť $d := \operatorname{dist}(x, M)$. Potom samozřejmě je $d > 0$. Uvažujme podprostor Z generovaný $M \cup \{x\}$, tedy

$$Z = \{m + \lambda x : m \in M \ , \ \lambda \in \mathbf{F}\} \ .$$

Definujeme-li

$$g(m + \lambda x) = \lambda d \quad \text{pro} \quad m + \lambda x \in Z \, ,$$

je g korektně definovaný (kdy může být $m_1 + \lambda_1 x = m_2 + \lambda_2 x$?) lineární funkcionál na Z. Vidíme též, že $g = 0$ na M a $g(x) = d$. Z odhadu

$$|g(m + \lambda x)| = |\lambda| \, d \leq |\lambda| \left|\left| \, x - (-\frac{m}{\lambda}) \right|\right| = ||m + \lambda x||$$

platného pro každé $m \in M$ a $\lambda \neq 0$ plyne, že $g \in Z^*$ a $||g|| \leq 1$. Na druhé straně pro každé $m \in M$ je

$$d = g(x) = g(x - m) \leq ||g|| \, ||x - m|| \, ,$$

a tudíž

$$d \leq ||g|| \, \inf \{||x - m|| : m \in M\} = ||g|| \, \operatorname{dist}(x, M) = d \, ||g|| \, .$$

Odtud plyne, že $||g|| \geq 1$ (nezapomeňte, že $d > 0$). K dokončení důkazu stačí tedy použít analytickou verzi Hahn-Banachovy věty 4.1.
Jiný důkaz. Nechť q je kanonické zobrazení E do příslušného faktorprostoru E/M (viz 13.24). Zřejmě $q = 0$ na M a $q(x) \neq 0$. Podle Věty o tečně 4.3 existuje $F \in (E/M)^*$ tak, že $||F|| = 1$ a $F(q(x)) = ||q(x)|| > 0$. Zkuste nyní uvažovat funkcionál $f := F \circ q \in E^*$. Ten zaručeně splňuje $f = 0$ na M a $f(x) > 0$. Pokud by nebylo $f = 1$, stačilo by funkcionál f přenormovat. ■

4.15. Rieszovo lemma o skoro kolmici. *Nechť M je vlastní uzavřený podprostor normovaného lineárního prostoru E. Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $x_\varepsilon \in E$ tak, že*

$$||x_\varepsilon|| = 1 \quad a \quad \operatorname{dist}(x_\varepsilon, M) \geq 1 - \varepsilon \, .$$

Důkaz. Zadejme si tedy $\varepsilon > 0$ a najděme podle předchozího důsledku Hahn-Banachovy věty $f \in E^*$ tak, aby $||f|| = 1$ a $f = 0$ na M. Potom podle 2.3.d zaručeně existuje $x_\varepsilon \in E$ tak, že $||x_\varepsilon|| = 1$ a $|f(x_\varepsilon)| > 1 - \varepsilon$. Je-li $m \in M$, máme

$$1 - \varepsilon < |f(x_\varepsilon)| = |f(x_\varepsilon) - f(m)| = |f(x_\varepsilon - m)| \leq ||f|| \, ||x_\varepsilon - m|| = ||x_\varepsilon - m|| \, ,$$

a tudíž $1 - \varepsilon \leq \operatorname{dist}(x_\varepsilon, M)$. ■

4.16. Dovětek. *Je-li prostor E reflexivní, existuje dokonce $x \in E$ tak, že*

$$||x|| = 1 \quad a \quad \operatorname{dist}(x, M) = 1 \, .$$

Důkaz. Opět najděme podle 4.14 funkcionál $f \in E^*$ tak, aby $||f|| = 1$ a $f = 0$ na M. Nyní využijeme Tvrzení 4.11 podle něhož existuje $x \in E$ s vlastnostmi $||x|| = 1$ a $f(x) = 1$. Závěr důkazu je stejný jako v předchozím tvrzení. Je-li $m \in M$, dostáváme

$$1 = f(x) = |f(x)| = |f(x) - f(m)| = |f(x - m)| \leq ||f|| \, ||x - m|| = ||x - m|| \, ,$$

a tudíž $1 \leq \operatorname{dist}(x, M)$. Bez pochyby je ale $\operatorname{dist}(x, M) \leq 1$ (stačí si uvědomit, že $\mathbf{0} \in M$ a $||x|| = 1$). ■

4.17. Poznámka. Při důkazu Rieszova lemmatu o skoro kolmici jsme využili Hahn-Banachovu větu, jejíž důkaz silně využíval axiomu výběru. Je to ovšem tak trochu jako chodit s kanónem na vrabce. Existuje totiž zcela elementární důkaz tohoto lemmatu a byl by hřích ho neuvést. Počkejme však až do 9. kapitoly.

Tedy Rieszovo lemma o skoro kolmici lze dokázat zcela elementárně a Hahn-Banachovu větu vůbec nepotřebujeme. Nicméně jako víceméně zajímavost jsme ji v důkazu Rieszova lemmatu použili.

Tuto kapitolu zakončíme partií o adjungovaných operátorech a anihilátorech. I v důkazech tvrzení o nich se setkáme s důsledky Hahn–Banachovy věty.

4.18. Adjungovaná zobrazení. Uvažujme normované lineární prostory E a Y a lineární zobrazení $T : E \to Y$ mezi nimi. Chceme definovat zobrazení $T' : Y^* \to E^*$, které by mělo úzký vztah k T. Volme tedy $\varphi \in Y^*$ a definujme formu $T'\varphi$ na E^*. Musíme tedy určit její hodnotu v bodě $x \in E$. Mnoho možností nemáme, zcela přirozená definice je následující

$$T'\varphi(x) := \varphi(Tx) \quad \text{pro} \quad x \in E\,.$$

Protože jak T tak φ jsou lineární, je $T'\varphi$ lineární. A ze spojitosti T i φ okamžitě dostáváme spojitost $T'\varphi$. Tím je tedy definováno zobrazení $T' : Y^* \to E^*$, říkejme mu *adjungované zobrazení* k T. Jeho základní vlastnosti udává následující věta.

4.19. Tvrzení. *Nechť E a Y jsou normované lineární prostory. Zobrazení*

$$\Psi : T \mapsto T' : \mathcal{L}(E, Y) \to \mathcal{L}(Y^*, E^*)$$

je lineární a izometrické.

Důkaz. Nemělo by činit žádnou obtíž dokázat, že $(\alpha T + \beta S)' = \alpha T' + \beta S'$ pro $S, T \in \mathcal{L}(E, Y)$ a $\alpha, \beta \in \mathbf{F}$.
Nechť $T \in \mathcal{L}(E, Y)$. Potom

$$\begin{aligned} ||T'|| &= \sup\{||T'\varphi|| : ||\varphi|| \leq 1\} = \sup\{|T'\varphi(x)| : ||\varphi|| \leq 1\,,\ ||x|| \leq 1\} \\ &= \sup\{|\varphi(Tx)| : ||\varphi|| \leq 1\,,\ ||x|| \leq 1\} = \sup\{||Tx|| : ||x|| \leq 1\} = ||T||\,. \end{aligned}$$

Zde jsme využili rovnost

$$||z|| = \sup\{|\varphi(z)| : ||\varphi|| \leq 1\}$$

(duální vyjádření normy), což byl jeden z důsledků Hahn-Banachovy věty 4.6. ■

4.20. Tvrzení. *Zobrazení $\Psi : T \mapsto T' : \mathcal{L}(E, Y) \to \mathcal{L}(Y^*, E^*)$ je na, právě když prostor Y je reflexivní (a E je netriviální).*

Důkaz. Pocvičme se v důkazu tohoto tvrzení. Předpokládejme tedy, že Y je reflexivní. Označme $\varepsilon_E : E \to E^{**}$ a $\varepsilon_Y : Y \to Y^{**}$ příslušná kanonická vnoření a volme $L \in \mathcal{L}(Y^*, E^*)$. Potřebujeme nalézt $T \in \mathcal{L}(E, Y)$ tak, aby $T = L$. Přirozeným kandidátem je zobrazení

$$T := \big((\varepsilon_Y)^{-1} \circ L' \circ \varepsilon_E\big)$$

(je dobré si nakreslit diagram, nezapomeňte přitom, že $L' \in \mathcal{L}(E^{**}, Y^{**})$. Chceme ukázat, že $T' = L$. Volme tedy $\varphi \in Y^*$ a $x \in E$. Potom

$$T'\varphi(x) = \varphi(Tx) = \varphi\big((\varepsilon_Y)^{-1} \circ L' \circ \varepsilon_E\big)(x)) = \Big(\big(L' \circ \varepsilon_E\big)(x)\Big)(\varphi) = \varepsilon_E(x)(L\varphi) = \big(L\varphi\big)(x)\,.$$

Tudíž $T' = L$. Jen na okraj, kde jsme vlastně využili předpoklad, že Y je reflexivní ?

Naopak teď předpokládejme, že zobrazení Ψ je na a snažme se dokázat, že Y je reflexivní. Volme tedy $F \in Y^{**}$. Nalezněme $x \in E$ a $f \in E^*$ tak, aby $f(x) = 1$ (předpokládali jsme, že $E \neq \{0\}$). Položíme-li $L : \varphi \mapsto F(\varphi)\, f$ pro $\varphi \in Y^*$, je $L \in \mathcal{L}(Y^*, E^*)$. Existuje tedy $T \in \mathcal{L}(E, Y)$ tak, že $L = T'$. Potom pro $\varphi \in Y^*$ dostáváme

$$\varepsilon_Y(Tx)(\varphi) = \varphi(Tx) = T'\varphi(x) = L\varphi(x) = F(\varphi)\, f(x) = F(\varphi)\,,$$

jinými slovy $F = \varepsilon_Y(Tx)$. ■

4.21. Poznámka. Uveďme konkrétní příklad, kdy zobrazení $T \to T'$ není na. Uvažujme třeba prostory $E = Y = c_0$ a definujme operátor $S \in \mathcal{L}(l^1)$ předpisem

$$S : \{x_n\} \mapsto \Big(\sum_n x_n, 0, 0, \dots\Big) \quad \text{pro} \quad \{x_n\} \in l^1$$

(ztotožňujeme duál k c_0 s l^1 – viz 13.28). Rozmyslete si, proč neexistuje $T \in \mathcal{L}(c_0)$ tak, aby $T' = S$.

4.22. Anihilátory. Je-li E normovaný lineární prostor a A jeho podmnožina, definujeme *anihilátor* A (v E^*) jako

$$A^{\perp} := \{\varphi \in E^* : \varphi(x) = 0 \text{ pro všechna } x \in A\} .$$

Obdobně definujeme *zpětný anihilátor* množiny $B \subset E^*$ (v původním prostoru E !) předpisem

$$^{\perp}B := \{x \in E : \varphi(x) = 0 \text{ pro všechna } \varphi \in B\} .$$

4.23. Tvrzení. *Nechť A je podmnožina normovaného lineárního prostoru E a $B \subset E^*$. Potom $A^{\perp}$ je uzavřený podprostor E^* a $^{\perp}B$ je uzavřený podprostor E. Dále*

$$E^{\perp} = \{\mathbf{0}\} \quad a \quad ^{\perp}E^* = \{\mathbf{0}\} .$$

Důkaz. Jsou-li $\varphi, \psi \in A^{\perp}$ a $x \in A$, je $(\varphi+\psi)(x) = \varphi(x)+\psi(x) = 0$, tudíž $\varphi+\psi \in A^{\perp}$. Obdobně se ukáže, že $A^{\perp}$ je uzavřeno na násobení skalárem, čímž je ověřeno, že $A^{\perp}$ je podprostor E^*. Předpokládejme tedy, že $\varphi_n \in A^{\perp}$ a $\varphi_n \to \varphi$ (v prostoru E^*). Volíme-li $x \in A$, plyne z nerovnosti

$$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| = |(\varphi_n - \varphi)(x)| \leq ||\varphi_n - \varphi|| \, ||x|| \to 0 ,$$

že $0 = \varphi_n(x) \to \varphi(x)$. Tudíž $\varphi(x) = 0$ a následně $\varphi \in A^{\perp}$.

Ani důkaz druhého tvrzení není obtížný. Volme $x, y \in {}^{\perp}B$ a $\varphi \in B$. Potom $\varphi(x+y) = \varphi(x)+\varphi(y) = 0$, odkud plyne $x+y \in {}^{\perp}B$. Obdobně $\lambda x \in {}^{\perp}B$, pokud $x \in {}^{\perp}B$ a $\lambda \in \mathbf{F}$. Jestliže $x_n \in {}^{\perp}B$ a $x_n \to x$, je $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$ pro každé $\varphi \in E^*$. Máme-li tedy $\varphi \in B$, je $\varphi(x_n) = 0$, a tedy i $\varphi(x) = 0$.

Je-li $\varphi \in E^{\perp}$, je $\varphi(x) = 0$ pro každé $x \in E$, což neříká nic jiného než že $\varphi = 0$. Pokud $x \in {}^{\perp}E^*$, je $\varphi(x) = 0$ pro každé $\varphi \in E^*$. Protože prvky E^* oddělují body prostoru E, což byl Důsledek 4.5 Hahn-Banachovy věty, musí být $x = \mathbf{0}$. ■

4.24. Poznámky. Všimněte si, že jsme dokázali vlastně silnější tvrzení. Podprostor $A^{\perp}$ je uzavřen dokonce na slabou* w^*–konvergenci a $^{\perp}B$ je uzavřený na slabou w–konvergenci.

Také si povšimněte, že důkazy tvrzení o tom, že $A^{\perp}$ a $^{\perp}B$ jsou podprostory probíhaly odlišně. Také důkaz tvrzení, že $E^{\perp} = \{0\}$ byl triviální, na druhé straně pro důkaz tvrzení, že $^{\perp}E^* = \{0\}$ jsme potřebovali Hahn-Banachovu větu.

4.25. Tvrzení. *Nechť $T \in \mathcal{L}(E, Y)$, kde E a Y jsou normované lineární prostory. Potom*

$$\ker T' = \mathcal{R}T^{\perp} \quad a \quad \ker T = {}^{\perp}\mathcal{R}T' .$$

Důkaz. Je-li $\varphi \in \ker T'$ a $x \in E$, máme $T'\varphi(x) = \varphi(Tx) = 0$, čili $\varphi \in \mathcal{R}T^{\perp}$. Naopak, pokud $\varphi \in \mathcal{R}T^{\perp}$ a $x \in E$, je $T'\varphi(x) = \varphi(Tx) = 0$, tudíž $\varphi \in \ker T'$.

Obdobně se dokáže druhá rovnost, procvičte se sami ! ■

4.26. Cvičení. (a) Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků normovaného lineárního prostoru E. Jestliže $x_n \to x$, potom $||x_n|| \to ||x||$. Pokud však pouze $x_n \xrightarrow{w} x$, pak $||x|| \leq \liminf ||x_n||$.

Návod. Pro důkaz prvního tvrzení jsme v Tvrzení 1.4 využili odhad $\big|||x_n|| - ||x||\big| \leq ||x_n - x||$.

Pokud jde o druhé tvrzení, je zřejmé v případě $x = \mathbf{0}$. Je-li $x \neq \mathbf{0}$, využijte Větu o tečně k nalezení $\varphi \in E^*$ tak, aby $||\varphi|| = 1$ a $\varphi(x) = ||x||$. Potom

$$||x|| = \varphi(x) = \lim \varphi(x_n) = \lim |\varphi(x_n)| \leq \liminf ||\varphi|| \, ||x_n|| = \liminf ||x_n|| .$$

♣

(b) Nechť M je uzavřený podprostor normovaného lineárního prostoru E a $\{x_n\}$ posloupnost v M. Jestliže $x_n \xrightarrow{w} x$, potom $x \in M$.

Návod. Předpokládejme, že $x \in E \setminus M$. Podle Hahn-Banachovy věty 4.14 existuje $f \in E^*$ tak, že $f = 0$ na M a $f(x) > 0$. Protože však $f(x_n) \to f(x)$, je $f(x) = 0$. A to je samozřejmě spor. ♣

(c) Je-li duál E^* normovaného lineárního prostoru E separabilní, je i původní prostor E separabilní. Ze separability E ovšem separabilita E^* neplyne.

Návod. Nechť $\{\varphi_n\}$ je hustá posloupnost v E^*. Existují $x_n \in E$ tak, že $||x_n|| = 1$ a $2|\varphi_n(x_n)| \geq ||\varphi_n||$. Je-li Y uzavřený lineární obal množiny $\{x_n\}$, stačí ukázat, že $Y = E$. Potom totiž množina

$$\{\sum_{j=1}^{n}(r_j + is_j)x_j : n \in \mathbf{N}, r_j, s_j \text{ racionální}\}$$

(v komplexním případě) je hustá v E. Pokud by $Y \neq E$, existovalo by podle Důsledku Hahn-Banachovy věty 4.14 $\varphi \in E^*$ tak, že $||\varphi|| = 1$ a $\varphi = 0$ na Y. A to již povede ke sporu, neboť existuje vybraná posloupnost $\{\varphi_j\}$ z $\{f_n\}$ s vlastností $\varphi_j \to \varphi$. Protože však

$$||\varphi_j - \varphi|| \geq |(\varphi_j - \varphi)(x_j)| = |\varphi_j(x_j)| \geq \frac{1}{2}||\varphi_j||\,,$$

muselo by být $||\varphi_j|| \to 0$. A tudíž i $||\varphi|| = 0$.

Na druhé straně, prostor l^1 je separabilní, zatímco jeho duál, který je izometricky-izomorfní s prostorem l^∞, není. ♣

(d) Nechť E a Y jsou normované lineární prostory, E netriviální ($E \neq \{\mathbf{0}\}$). Jestliže prostor $\mathcal{L}(E, Y)$ je Banachův, je Banachův i prostor Y.

Návod. Zvolme cauchyovskou posloupnost $\{y_n\}$ v Y a $z \in E$, $||z|| = 1$. Podle Věty o tečně 4.3 nalezněme $f \in E^*$ tak, aby $||f|| = 1$ a $f(z) = 1$. Definujme $T_n : x \mapsto f(x)y_n$ pro $x \in E$. Potom $\{T_n\}$ je cauchyovská posloupnost v $\mathcal{L}(E, Y)$. Existuje tedy $T \in \mathcal{L}(E, Y)$ tak, že $T_n \to T$. Protože

$$||y_n - Tz|| = ||T_n z - Tz|| \leq ||T_n - T||\,,$$

je $y_n \to Tz$. ♣

5. Princip stejnoměrné omezenosti

Dalším pilířem funkcionální analýzy je princip stejnoměrné omezenosti. Existují různé způsoby jeho důkazu, my využijeme Baireovu větu o kategoriích 13.41. Další možnosti nevyužívající (explicite) Baireovu větu skýtá kupříkladu technika „klouzajícího hrbu" (uvedeme ji v 13.42) či Zabrejkovo lemma (viz Větu 12.4), existují však i „elementární" přístupy (viz 13.43).

A ještě poznámka. Některé věty platí pro libovolné normované lineární prostory, v jiných je naopak předpoklad úplnosti podstatný. Je asi těžké si vždy pamatovat přesné předpoklady. Rozhodně nic nezkazíme, předpokládáme-li úplnost a teprve z důkazu může vysvitnout, jedná-li se o skutečně nezbytný předpoklad. V takovém případě by bylo ještě ideální uvést protipříklad, že znění té které věty bez předpokladu úplnosti nemusí platit.

5.1. Princip stejnoměrné omezenosti. *Nechť X je Banachův prostor, Y normovaný lineární prostor a $\mathfrak{G}$ podmnožina $\mathcal{L}(X, Y)$. Potom*

$$\sup\{||L|| : L \in \mathfrak{G}\} < \infty\,,$$

právě když

$$\sup\{||Lx|| : L \in \mathfrak{G}\} < \infty \textit{ pro každé } x \in X\,.$$

Důkaz. Z nerovnosti $||Lx|| \leq ||L||\,||x||$ plyne ihned jedna (snadná) implikace.

Pro důkaz druhé předpokládejme, že $\sup\{||Lx|| : L \in \mathfrak{G}\} < \infty$ pro každé $x \in X$. Položíme-li pro přirozená n

$$F_n := \{x \in X : ||Lx|| \leq n \text{ pro každé } L \in \mathfrak{G}\} = \bigcap_{L \in \mathfrak{G}} \{x \in X : ||Lx|| \leq n\}\,,$$

jsou F_n uzavřené podmnožiny X (norma i zobrazení z $\mathfrak{G}$ jsou spojitá zobrazení). Předpoklad nám zaručuje, že $X = \bigcup_n F_n$. Podle Baireovy věty o kategoriích (nezapomeňte, že X je úplný prostor) má jedna z množin F_n neprázdný vnitřek. Existuje tedy n, $z \in F_n$ a $\varepsilon > 0$ tak, že

$$\{x \in X : ||x - z|| < 2\varepsilon\} \subset F_n\,.$$

Zbývá odhadnout normu $||L||$ pro $L \in \mathfrak{G}$. Volme tedy takové L a $t \in X$, $||t|| \leq 1$. Protože $z + \varepsilon t \in F_n$, máme

$$||Lt|| = ||L(\frac{1}{\varepsilon}(z + \varepsilon t - z)|| \leq \frac{1}{\varepsilon}(||L(z + \varepsilon t)|| + ||Lz||) \leq \frac{2n}{\varepsilon}\,.$$

Vidíme, že $\sup\{||L|| : L \in \mathfrak{G}\} \leq \frac{2n}{\varepsilon}$. ■

5.2. Banach-Steinhausova věta. *Předpokládejme, že X je Banachův prostor, Y normovaný lineární prostor a $\{L_n\}$ je posloupnost spojitých lineárních zobrazení z $\mathcal{L}(X,Y)$. Jestliže pro každé $x \in X$ existuje $\lim L_n x$ a jestliže tuto limitu označíme Lx, je $L \in \mathcal{L}(X,Y)$.*

Důkaz. Není sporu o tom, že L je lineární zobrazení. Potřebujeme ukázat, že je omezené. Volme tedy $z \in B_X$. Protože pro každé $x \in X$ je posloupnost $\{L_n x\}$ konvergentní, je omezená. Podle předchozího principu stejnoměrné omezenosti je

$$\beta := \sup \{||L_n|| : n \in \mathbf{N}\} < \infty .$$

Potom

$$||Lz|| = \lim ||L_n z|| \leq \limsup ||L_n|| \, ||z|| \leq \beta \, ||z|| \leq \beta .$$

■

Na závěr uveďme ještě jednu důležitou větu týkající se (silné) omezenosti slabě konvergentních posloupností. Snad je zbytečné připomínat elementární tvrzení, podle kterého je každá konvergentní posloupnost omezená (v případě posloupností reálných čísel je to záležitost látky již v prvním semestru). Protože však slabě konvergentních posloupností je více než (silně) konvergentních, není vůbec jasné, proč by tyto měly být omezené. A jak uvidíme z důkazu, který využívá princip stejnoměrné omezenosti (což je poměrně hluboké tvrzení), není toto tvrzení nikterak samozřejmé.

5.3. Věta. *Nechť $\{x_n\}$ je slabě konvergentní posloupnost v normovaném lineárním prostoru X. Potom posloupnost $\{||x_n||\}$ je omezená.*

Důkaz. Nechť $x_n \stackrel{w}{\to} x$. Uvažujme posloupnost $\{\varepsilon_{x_n}\}$, kde ε_x značí obraz prvku x v X^{**} při kanonickém vnoření $\varepsilon : X \to X^{**}$. Volme $\varphi \in X^*$. Protože $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$ podle definice slabé konvergence, je (podle definice kanonického vnoření) $\varepsilon_{x_n}(\varphi) \to \varepsilon_x(\varphi)$. Vidíme, že (číselná) posloupnost $\{\varepsilon_{x_n}(\varphi)\}$ je omezená. Nyní stačí použít princip stejnoměrné omezenosti 5.1 (na úplný prostor X^*). Podle něj je posloupnost $\{||\varepsilon_{x_n}||\}$ omezená. A protože kanonické vnoření ε je izometrií, je $||x_n|| = ||\varepsilon_{x_n}||$ a jsme s důkazem hotovi. ■

6. Věty o otevřeném zobrazení a uzavřeném grafu

V této kapitole uvedeme vlastně tři další věty patřící k pilířům funkcionální analýzy. Jak je uvedeno v názvu této části, jde o větu o otevřeném zobrazení, větu o uzavřeném grafu, a my k nim přidáme ještě větu o inverzním zobrazení. Jakmile máme dokázánu jednu z těchto tří vět, ostatní dvě z ní již víceméně snadno vyplynou. A záleží na vkusu každého autora, do kterého důkazu se vrhne první a v jakém pořadí pak dokáže další dvě věty. V každém případě přímý důkaz jakékoliv z těchto tří vět je poněkud obtížnější a vyžaduje jisté úsilí.

Pro čtenáře, který se zajímá o důkaz kterékoliv této věty, je pak určena dvanáctá kapitola, kde na základě tak zvaného Zabrejkova lemmatu podáme důkazy uvedených vět.

V těchto skriptech uvedeme bez důkazu větu o uzavřeném grafu a z ní odvodíme větu o otevřeném zobrazení (její důkaz využívající metodu faktorizace je vcelku instruktivní). Navíc v 6.11 ukážeme, jak věta o uzavřeném grafu plyne z věty o otevřeném zobrazení. Pokud by někoho zajímal přímý důkaz věty o otevřeném zobrazení (bez pomoci věty o uzavřeneém grafu či Zabrejkova lematu), můžeme odkázat na [Záp].

6.1. Uzavřená zobrazení. Nechť E a Y jsou normované lineární prostory, (obecněji mohou být metrické či topologické). Zobrazení f z E do Y se nazve *uzavřené*, jestliže jeho graf, což je množina

$$\{(x, f(x)) : x \in E\} ,$$

je uzavřenou podmnožinou prostoru $E \times Y$.

Na kartézském součinu $E \times Y$ uvažujeme „součinovou" normu definovanou třeba jako $||(x,y)|| := ||x||_E + ||y||_Y$. Podstatné je, že množina G je otevřená v $E \times Y$, jestliže ke každému $(x,y) \in G$ existuje otevřená množina $G_E \subset E$ obsahující x a otevřená množina $G_Y \subset Y$ obsahující y tak, že $G_E \times G_Y \subset G$.

Zobrazení f je tedy uzavřené, jestliže platí následující: Kdykoliv

$$(x_n, f(x_n)) \to (x, y) \quad \text{v} \quad E \times Y\,,$$

potom $y = f(x)$. A protože konvergence v kartézském součinu je konvergencí po jednotlivých souřadnicích, lze říci, že f je uzavřené zobrazení, jestliže $y = f(x)$, pokud $x_n \to x$ a $f(x_n) \to y$.

Je-li T lineární zobrazení mezi normovanými lineárními prostory E a Y, a pouze tento případ budeme v dalším uvažovat, je T uzavřené, právě když

$$x_n \to 0 \quad \text{v} \quad E \quad \text{a} \quad Tx_n \to y \quad \text{v} \quad Y\,, \quad \text{potom} \quad y = 0\,.$$

Připomeňme ještě, že zobrazení T je spojité (v bodě 0), jestliže

$$x_n \to 0 \quad \text{v} \quad E\,, \quad \text{potom} \quad Tx_n \to 0\,.$$

Jaký je tedy rozdíl mezi uzavřeným a spojitým zobrazením ? Podstatný. Při důkazu spojitosti musíme ukázat dvě věci: jednak že limita $\lim Tx_n$ existuje, potom, že je rovna 0. Pokud chceme ověřit, že nějaké zobrazení je uzavřené, *předpokládáme*, že existuje limita $\lim Tx_n$ a pouze dokazujeme, že je rovna 0. Je tedy mnohem snažší dokázat, že dané zobrazení je uzavřené než ukázat, že je spojité.

Shrňme předchozí úvahy do následujícího jednoduchého tvrzení.

6.2. Lemátko. *Každé spojité zobrazení je uzavřené. Je-li f prosté uzavřené (lineární) zobrazení E na Y, je i inverzní zobrazení f^{-1} uzavřené.*

Důkaz. Ihned je vidět, že spojitá zobrazení jsou uzavřená.

I důkaz druhého tvrzení je zřejmý, neboť grafy f a f^{-1} jsou „skoro stejné". Přesnější argument je ten, že zobrazení $(x, y) \mapsto (y, x)$ z $E \times Y$ do $Y \times E$ je homeomorfizmus. Anebo, chcete-li se procvičit, argumentujte následovně: Nechť $y_n \in Y$, $y_n \to 0$ a $f^{-1}y_n \to z$. Označte $x_n := f^{-1}y_n$. Potom $x_n \to z$ a $f(x_n) = y_n \to 0$. Z uzavřenosti zobrazení f pak plyne, že $f(z) = 0$. Protože však f je prosté (a $f(0) = 0$), je $z = 0$. ■

Jak jsme konstatovali, spojitá zobrazení jsou uzavřená. Opak však obecně není pravdou. Uveďme dva příklady.

6.3. Nespojitá uzavřená zobrazení. (a) Uvažujeme-li prostory

$$E = \{g \in \mathcal{C}([0,1]) : g' \text{ existuje a } g' \in \mathcal{C}([0,1])\} \quad \text{a} \quad Y = \mathcal{C}([0,1])\,,$$

je (lineární) zobrazení $T : g \mapsto g'$ uzavřené zobrazení z E do Y, není však spojité. Jestliže totiž $g_n \to 0$ v prostoru E a $Tg_n = g_n' \to g$ v prostoru Y (obě konvergence jsou tedy stejnoměrné), plyne ze základních vět analýzy o derivování limitní funkce, že $g_n' \to 0$. Na druhé straně, pro posloupnost funkcí $\{x^n\}$ máme $||x^n|| = 1$, zatímco $||(x^n)'|| = ||nx^{n-1}|| = n$, tudíž zobrazení T není omezené.

(b) Nechť $Y = l^1$ s obvyklou l^1-normou a E je vektorový prostor l^1 opatřený normou z prostoru c_0 (množinově je samozřejmě $l^1 \subset\subset c_0$). Je-li $x = \{x_n\}$, máme

$$||x||_E = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|, \dots\} \le \sum_n |x_n| = ||x||_Y\,.$$

Odtud plyne, že prostor Y má více otevřených množin než E. A existuje dokonce otevřená množina $G \subset Y$, která není otevřená v E (umíte ji sestrojit ?). Tudíž identické zobrazení $\mathrm{id} : E \to Y$ je příkladem uzavřeného lineárního zobrazení, které není spojité. Nemůže být spojité, neboť $\mathrm{id}^{-1}(G)$ není otevřená podmnožina E. Ale id^{-1} je spojité zobrazení, tudíž je uzavřené. A tedy i jeho inverzní zobrazení, což je původní identita id je též uzavřené. To jsme si ujasnili právě v Lemátku 6.2.

Pokud však oba prostory E a Y jsou úplné (a to v našich protipříkladech nebylo), je již každé lineární uzavřené zobrazení spojité. Leckteré důkazy spojitosti lineárních zobrazení se tedy mohou zjednodušit. Znovu zdůrazněme, že při důkazu uzavřenosti zobrazení T předpokládáme, že posloupnost $\{Tx_n\}$ konverguje, zatímco při důkazu spojitosti toto musíme ověřit. Ještě jednou si dobře poslední úvahu, a tím i rozdíl definice uzavřenosti a spojitosti, rozmyslete.

6.4. Věta o uzavřeném grafu. *Jsou-li X a Y Banachovy prostory a T uzavřené lineární zobrazení mezi nimi, je T spojité.*

Důkaz. Důkaz vynecháme, je však uveden v 12.5, viz též 6.11. ■

6.5. Poznámka. Poznamenejme, že o uvažovaném zobrazení T se nepředpokládá, že by bylo na.

6.6. Věta o inverzním zobrazení. *Je-li $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ prosté spojité lineární zobrazení Banachova prostoru X na Banachův prostor Y, je inverzní zobrazení T^{-1} spojité*

Důkaz. Tvrzení je nabíledni. Protože zobrazení T je spojité, podle Lemátka 6.2 je T uzavřené a jeho inverzní zobrazení T^{-1}, které je samozřejmě lineární, má uzavřený graf. Takže stačí již jen použít předchozí Větu 6.4 o uzavřeném grafu. ■

6.7. Poznámka. Věta o inverzním zobrazení bývá také často nazývána *Banachovou větou o homeomorfizmu* a je samozřejmě též bezprostředním důsledkem následující věty o otevřeném zobrazení.

6.8. Otevřená zobrazení. Zobrazení f mezi metrickými (nebo i topologickými) prostory X a Y je *otevřené*, jestliže zobrazuje otevřené podmnožiny v X na otevřené množiny v Y. Někteří autoři definují také otevřená zobrazení jako ta, která zobrazují otevřené množiny na množiny otevřené nikoliv v celém prostoru, ale v oboru hodnot tohoto zobrazení. Protože následující věta se týká zobrazení, pro něž obor hodnot splývá s celým prostorem, je jedno, jakou definici vezmeme za základ.

Často se vyskytující chyba spočívá v omylu, že otevřené zobrazení též zobrazuje uzavřené množiny na uzavřené. Zdaleka tomu tak není. Což zkusit uvažovat ortogonální projekci $\mathbf{R}^2$ na x-ovou osu $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = 0\}$. To bude určitě lineární otevřené zobrazení, avšak obraz uzavřené množiny $\{(x, y) : x \in [0, \frac{\pi}{2}), y \geq \operatorname{tg} x\}$ není uzavřený.

Rovněž tak není obecně pravda, že by spojité zobrazení (u něhož *vzory* otevřených množin jsou otevřené !) bylo otevřené. Podívejte se třeba na Cvičení 6.18.a.

6.9. Věta o otevřeném zobrazení. *Nechť T je lineární spojité zobrazení Banachova prostoru X na Banachův prostor Y. Potom T je otevřené.*

Důkaz. Tvrzení plyne ihned z Věty o inverzním zobrazení, pokud předpokládáme ještě navíc, že T je prosté.

Pokud není, vytvoříme nejdříve faktorizaci X podle jádra T. Označme tedy

$$N := \ker T = \{x \in X : Tx = 0\} .$$

Z linearity zobrazení T dostáváme, že N je podprostor X a ze spojitosti T pak plyne, že N je uzavřená podmnožina X. Potom faktorprostor X/N (s příslušnou normou) je Banachův prostor a kanonické zobrazení $q : X \to X/N$ je spojité a otevřené. Stačí se podívat na Větu 13.25. Nyní definujme zobrazení $\widetilde{T} : X/N \to Y$ (korektně) předpisem $\widetilde{T} : [x] \to Tx$ (pokud $[x] = [y] \in X/N$, potom $x - y \in N$, a tudíž $Tx = Ty$). Zřejmě je $\widehat{T}$ lineární. Je také spojité. Je-li totiž $x \in X$, je pro každé $n \in \ker T$

$$||\widetilde{T}q(x)|| = ||\widetilde{T}[x]|| = ||Tx|| = ||Tx - Tn|| = ||T(x - n)|| \leq ||T||\, ||x - n|| ,$$

tudíž i $||\widetilde{T}q(x)|| \leq ||T||\, ||q(x)||$. Protože $TX = Y$, zobrazuje $\widetilde{T}$ prostor X/N na Y. Konečně zobrazení $\widetilde{T}$ je prosté, jak lehko sami zjistíte (pokud $\widetilde{T}[x] = \widetilde{T}[y]$, je $Tx = Ty$, čili $x - y \in N$, a tudíž $[x] = [y]$). Podle Věty o inverzním zobrazení 6.6 je zobrazení $(\widetilde{T})^{-1} : Y \to X/N$ spojité. Tudíž $\widetilde{T}$ je otevřené a $T = \widetilde{T} \circ q$, jakožto složení dvou otevřených zobrazení, je otevřené. ■

6.10. Poznámka. Při důkazu poslední věty jsme se opírali vlastně o *větu o faktorizaci*. Ta je sama o sobě zajímavá, vyslovme ji proto samostatně. Důkaz je zapotřebí dodělat.

Věta o faktorizaci. *Nechť X a Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Označme $N := \ker T$ a $q : X \to X/N$ kanonické zobrazení. Potom existuje právě jedno zobrazení $\widetilde{T}$ tak, že $T = \widetilde{T} \circ q$. Zobrazení $\widetilde{T}$ je prosté a $||\widetilde{T}|| = ||T||$.*

6.11. Důkaz věty o uzavřeném grafu. Věta o uzavřeném grafu 6.4 je také jednoduchým důsledkem Věty o otevřeném zobrazení (nebo, chcete-li přesněji, Věty o inverzním zobrazení). Uveďme ho.

Důkaz. Z definice uzavřenosti T totiž plyne, že graf T je uzavřený podprostor Banachova prostoru $X \times Y$. Tedy graf T je Banachův prostor. Uvažujeme-li „projekci"

$$P : (x, Tx) \mapsto x \quad \text{pro} \quad x \in X\,,$$

je P lineární zobrazení, přičemž

$$\|P(x, Tx)\| = \|x\| \le \|x\| + \|Tx\| = \|(x, Tx)\|\,.$$

Zobrazení P je tedy omezené, navíc je prosté a na. Podle Věty o inverzním zobrazení 6.6 je inverzní zobrazení P^{-1} omezené, a tudíž

$$\|Tx\| \le \|x\| + \|Tx\| = \|(x, Tx)\| = \|P^{-1}(x)\| \le \|P^{-1}\|\,\|x\|$$

pro každé $x \in X$. Což jsme potřebovali dokázat. ∎

Tuto kapitolu zakončíme partií o algebraických či topologických součtech. Dobře si povšimněte rozdílů mezi algebraickými a topologickými aspekty u těchto pojmů.

6.12. Algebraický součet. Uvažujme zprvu vektorový prostor W a jeho podprostory A, B. Jestliže $A \cap B = \{0\}$ a každý vektor $w \in W$ lze napsat ve tvaru $w = w_A + w_B$ (jednoznačně), kde $w_A \in A$ a $w_B \in B$, říkáme, že W je *algebraickým součtem* podprostorů A a B. Symbolicky zapisujeme $W = A \oplus B$.

Označme symbolem P_A zobrazení $W \to A$ definované předpisem $P_A(w) := w_A$. Potom zobrazení P_A, které je lineární a splňuje rovnost $P_A^2 = P_A$ (pro každé $w \in W$ je totiž $P_A(P_A w) = P_A w$), nazýváme *projekcí* W na A (podél B). Obdobně definujeme projekci P_B.

6.13. Topologický součet. Jsou-li nyní M, N podprostory normovaného lineárního prostoru E a $E = M \oplus N$, může (ale nemusí) se stát, že projekce P_M je spojitá. Není těžké si rozmyslet, že projekce P_M je spojitá, právě když projekce P_N je spojitá (nechť P_M je spojitá a $x_n \to x$; stačí si uvědomit, že $P_N(x_n) = x_n - P_M(x_n) \to x - P_M(x) = P_N(x)$), a že v tomto případě podprostory M a N jsou uzavřené, protože kupříkladu

$$M = \{x \in E : P_N(x) = 0\} = P_N^{-1}(0)\,.$$

Řekneme, že normovaný lineární prostor E je *topologickým součtem* podprostorů M a N, což zapisujeme $E = M \oplus_t N$, jestliže je jejich algebraickým součtem a projekce P_M (či P_N) je spojitá.

V následujícím tvrzení ukážeme, že Banachův prostor X je topologickým součtem svých podprostorů, je-li X jejich algebraickým součtem a oba podprostory jsou uzavřené. To bychom ostatně mohli pokládat v případě Banachových prostorů za definici.

6.14. Tvrzení. *Nechť M a N jsou uzavřené podprostory Banachova prostoru X. Je-li X jejich algebraickým součtem, je již jejich topologickým součtem.*

Důkaz. Nechť $X = M \oplus N$. Protože M je uzavřený podprostor X, je i M Banachův. Podle Věty 6.4 o uzavřeném grafu tedy stačí ukázat, že projekce P_M je uzavřené zobrazení. Nechť tedy

$$x_n \to x \quad \text{a} \quad P_M(x_n) \to y\,.$$

Podprostor M je uzavřený a $P_M(x_n) \in M$, odkud ihned dostáváme, že $y \in M$. Protože

$$x_n - P_M(x_n) \to x - y$$

a prvky $x_n - P_M(x_n)$ leží v uzavřeném podprostoru N, je $x - y \in N$. Z jednoznačnosti rozkladu prvku $x = y + (x - y)$, kde $y \in M$ a $x - y \in N$, dostáváme, že nutně $y = P_M(x)$. A tím jsme ověřili, že zobrazení P_M je uzavřené. ∎

6.15. Topologický doplněk. Nechť M je podprostor normovaného lineárního prostoru E. Existuje-li podprostor $N \subset\subset E$ tak, že $E = M \oplus_t N$, říkáme, že M má v prostoru E *topologický doplněk*.

Dva důležité postřehy. Předně, má-li podprostor M topologický doplněk v E, je již M uzavřený. To plyne ihned z předchozího. Dále, jestliže M má topologický doplněk, existuje samozřejmě více podprostorů N tak, aby $E = M \oplus_t N$. To je snad jasné, jednoduchý příklad v prostoru $\mathbf{R}^2$ to ihned osvětlí.

6.16. Existence algebraických a topologických doplňků. Uvažujme podprostor A vektorového prostoru W a ptejme se, zda k němu existuje jeho *algebraický doplněk*, čili takový podprostor B, aby $W = A \oplus B$. Eventuálně v kladném případě kolik takových podprostorů může existovat. Odpovědi jsou celkem jednoduché. Algebraický doplněk existuje vždy. Stačí totiž zvolit nějakou algebraickou bázi A a doplnit ji na bázi celého prostoru W. To lze vždy, o tom vypovídá *Steinitzova věta* 13.3, která by měla být známa z kurzu lineární algebry. Potom algebraický doplněk k A, tedy podprostor B, je generován právě doplněnými prvky k bázi podprostoru A. Takových doplňků je samozřejmě více. Stačí si třeba připomenout jednoduchý příklad opět v prostoru $\mathbf{R}^2$. Ovšem všechny algebraické doplňky k A jsou navzájem (algebraicky) izomorfní a každý z nich je izomorfní k faktorprostoru W/A. Poznamenejme ještě, že tedy všechny mají stejnou dimenzi (rovnou dimenzi W/A) a tuto dimenzi pak nazýváme *kodimenzí* podprostoru A ve W.

Je-li M uzavřený podprostor normovaného lineárního prostoru E, můžeme se dále ptát, existuje-li k němu topologický doplněk. Je tomu tak třeba v Hilbertových prostorech.Tam každý uzavřený podprostor má (dokonce speciální – ortogonální) doplněk. Obecně je však odpověď záporná. Lze kupříkladu ukázat (a není to zrovna úplně triviální), že c_0 chápaný jako podprostor l^∞ nemá v tomto prostoru topologický doplněk. Anebo kupříkladu prostor $\mathcal{K}(c_0)$ kompaktních operátorů na c_0 je uzavřeným podprostorem $\mathcal{L}(c_0)$ nemající tam topologický doplněk (viz třeba [Záp], *2.5.c). Pomocí Hahn-Banachovy věty však odvodíme alespoň následující větu.

6.17. Věta. *Každý konečně dimenzionální podprostor Banachova prostoru má topologický doplněk.*

Důkaz. Nechť M je konečně dimenzionální podprostor Banachova prostoru E a $\{x_1, \dots, x_n\}$ jeho báze. Pro $j = 1, \dots, n$, $x \in M$, $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$, položme $f_j(x) := \lambda_j$. Potom $f_j \in M^*$ a podle analytické verze Hahn-Banachovy věty 4.1 existují $F_j \in X^*$ tak, že $F_j = f_j$ na M. Položíme-li

$$N := \bigcap_{j=1}^{n} \ker F_j = \{x \in X : F_1(x) = \dots = F_n(x) = 0\} ,$$

je N uzavřený podprostor X a $X = M \oplus_t N$. Zajisté, je-li $x \in M \cap N$ a $j \in \{1, \dots, n\}$, je $0 = F_j(x) = f_j(x)$, tudíž $x = 0$ (nezapomeňte, že $x = f_1(x)x_1 + \dots + f_n(x)x_n$). Je-li dále $x \in X$, je $x = z + (x - z)$, kde

$$z := F_1(x)x_1 + \dots F_n(x)x_n \in M \quad \text{a} \quad x - z \in N ,$$

protože

$$F_j(x - z) = F_j(x) - F_j(z) = F_j(x) - f_j(z) = F_j(x) - F_j(x) = 0$$

pro každé $j = 1, \dots, n$. Protože i podprostor M je uzavřený (jakožto podprostor konečné dimenze podle Věty 13.11), stačí užít předchozí charakteristiku 6.14 topologického součtu. ■

6.18. Cvičení. (a) Lineární zobrazení $T : \{x_n\} \mapsto \{\frac{1}{n} x_n\} : c_0 \to c_0$ je spojité, ale ne otevřené. Obraz TU otevřené jednotkové koule $U := \{x \in c_0 : ||x|| \le 1\}$ není otevřené okolí $\mathbf{0}$.

(b) Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost kladných čísel a $\sum x_n < \infty$. Ukažte, že existuje posloupnost $\{\alpha_n\}$ tak, že $\alpha_n > 0$ pro každé n, $\alpha_n \to \infty$ a $\sum \alpha_n x_n < \infty$.

Návod. Zprvu se zamyslete nad elementárním důkazem. Jinak předpokládejte, že žádná taková posloupnost neexistuje. V tom případě je (prosté) zobrazení $T : \{\alpha_n\} \mapsto \{\alpha_n x_n\} : l^\infty \to l^1$ spojité a na. Nyní použijte Větu o inverzním zobrazení. ♣

SPEKTRÁLNÍ TEORIE

7. Spektrální teorie lineárních operátorů

7.1. Invertibilní operátory. Spojitý lineární operátor T na Banachově prostoru X nazveme *invertibilním*, jestliže existuje takový operátor $S \in \mathcal{L}(X)$, že

$$TS = ST = I$$

(zde I znamená identické zobrazení, $Ix = x$ pro každé $x \in X$). Pokud je T invertibilní, je operátor S v definici invertibilního operátoru jednoznačně určen (nechť $TS_1 = I = S_2T$, potom $S_2 = S_2(TS_1) = (S_2T)S_1 = S_1$). Budeme jej označovat symbolem T^{-1}. K nedorozumění v symbolice s množinovou inverzí k zobrazení T nemůže dojít, stačí se podívat na 7.2.

Ne každý operátor je invertibilní, následující větička charakterizuje jednoduchým způsobem právě ty operátory, které invertibilní jsou. Další tvrzení pak udává postačující podmínku invertibility.

7.2. Charakteristika invertibilních operátorů. *Operátor T na Banachově prostoru X je invertibilní, právě když T je prostý a na.*

Důkaz. Předpokládejme, že T je invertibilní. Existuje tedy $S \in \mathcal{L}(X)$ tak, že

$$T(Sx) = S(Tx) = x \quad \text{pro každé} \quad x \in X\,.$$

Pokud $Ty = Tz$, dostáváme z druhé rovnosti $y = S(Ty) = S(Tz) = z$ a vidíme, že T je prostý operátor. Je-li $x \in X$ a položíme-li $z := Sx$, první rovnost říká, že $Tz = x$, je tedy $\mathcal{R}T = X$.

Nechť naopak T je prostý operátor na X a $\mathcal{R}T = X$. Potom podle Věty 6.6 o inverzním zobrazení je $T^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. A samozřejmě $TT^{-1} = T^{-1}T = I$, tudíž T je podle definice invertibilní. ∎

7.3. Tvrzení. *Nechť X je Banachův prostor, $T \in \mathcal{L}(X)$ a $||T|| < 1$. Potom operátor $I - T$ je invertibilní a*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n\,.$$

Důkaz. Připomeňme, že T^0 definujeme jako identitu, tedy $T^0 := I$. Položme

$$S_n := I + T + T^2 + \cdots + T^n \quad \text{pro} \quad n \in \mathbf{N}\,.$$

Protože $||T^n|| \le ||T||^n$ a $||T|| < 1$, zjistíme snadno, že posloupnost $\{S_n\}$ je cauchyovská (v prostoru $\mathcal{L}(X)$). Položíme-li

$$S := \lim S_n = \sum_{n=0}^{\infty} T^n\,,$$

je $S \in \mathcal{L}(X)$. Protože pro každé n máme

$$S_nT = TS_n = S_{n+1} - I\,,$$

dostaneme limitním přechodem rovnost $S(I - T) = (I - T)S = I$. ∎

7.4. Poznámky. (a) Řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} T^n$ nazýváme *Neumannovou řadou* operátoru $(I - T)^{-1}$ (podotkněme, že se jedná o Carl Neumanna (1832 – 1925), na rozdíl od slavnějšího John von Neumanna (1903 – 1957)).

(b) Netřeba zdůrazňovat analogii s rozvojem (komplexního) čísla $\frac{1}{1-q}$ v (absolutně konvergentní) řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, pokud $|q| < 1$.

(c) Nechť opět T je operátor na Banachově prostoru X. Potom existuje $\lim \sqrt[n]{||T^n||}$ a $\lim \sqrt[n]{||T^n||} \le ||T||$. Jestliže $\lim \sqrt[n]{||T^n||} < 1$, potom $(I - T)^{-1}$ je invertibilní a Neumannova řada $\sum_n T^n$ konverguje opět k tomuto operátoru. Toto tvrzení nebudeme dokazovat. Poznamenejme pouze, že pro operátor T definovaný na prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ předpisem $T : f(x) \mapsto x \int_0^1 f$, $x \in [0,1]$, je $||T|| = 1$, zatímco $\lim \sqrt[n]{||T^n||} = \frac{1}{2}$.

Číslo $\lim \sqrt[n]{||T^n||}$ bychom mohli nazývat *spektrálním poloměrem* operátoru T. Tato definice, byť některými autory používaná, není však příliš názorná a my v 7.9.b podáme jinou definici spektrálního poloměru.

7.5. Důsledek. *Je-li X Banachův prostor, $T \in \mathcal{L}(X)$ a $||T|| < \lambda$, potom operátor $T - \lambda I$ je invertibilní a*

$$||(T - \lambda I)^{-1}|| \leq \frac{1}{|\lambda| - ||T||}\,.$$

Důkaz. Protože $||\frac{T}{\lambda}|| = \frac{1}{\lambda}||T|| < 1$ (zřejmě je $\lambda > 0$), má podle předešlého Tvrzení 7.3 operátor $I - \frac{T}{\lambda}$ inverzi. Odkud ihned plyne, že i $T - \lambda I$ je invertibilní. Dále

$$||(T - \lambda I)^{-1}|| = \frac{1}{|\lambda|}\left|\left|\left(\frac{T}{\lambda} - I\right)^{-1}\right|\right| = \frac{1}{|\lambda|}\left|\left|\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n\right|\right| \leq \frac{1}{|\lambda|}\sum_{n=0}^{\infty}\left|\left|\frac{T}{\lambda}\right|\right|^n = \frac{1}{|\lambda| - ||T||}\,.$$

■

7.6. Věta. *Množina všech invertibilních operátorů na Banachově prostoru X je otevřená v prostoru $\mathcal{L}(X)$. Přesněji, jestliže T a S jsou operátory na X, T invertibilní a $||S - T|| < \frac{1}{||T^{-1}||}$, potom i S je invertibilní.*

Důkaz. Nechť $T \in \mathcal{L}(X)$ je invertibilní. Potom samozřejmě $T \neq 0$. Volíme-li $S \in \mathcal{L}(X)$ tak, aby $||S - T|| < \frac{1}{||T^{-1}||}$, máme

$$||I - T^{-1}S|| = ||T^{-1}(T - S)|| \leq ||T^{-1}||\;||T - S|| < 1\,.$$

Podle Tvrzení 7.3 je operátor $D := I - (I - T^{-1}S) = T^{-1}S$ invertibilní. Potom ovšem operátor $S = TD$ je také invertibilní. Jeho inverzí je totiž operátor $D^{-1}T^{-1}$. ■

7.7. Vlastní čísla a spektrum. *Vlastním číslem* operátoru T na Banachově prostoru X rozumíme takové komplexní číslo λ, pro které existuje nenulové řešení rovnice $Tx = \lambda x$. Jinými slovy, λ je vlastní číslo T, jestliže operátor $T - \lambda I$ není prostý, tedy jestliže $\ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$. Nenulové prvky z $\ker(T - \lambda I)$ pak nazýváme *vlastními vektory* operátoru T příslušnými vlastnímu číslu λ. Množině všech vlastních čísel T říkáme *bodové spektrum* T a značíme ho $\sigma_p(T)$.

Víme již, že v prostorech konečné dimenze jsou lineární operátory prosté, právě když jsou na, a že v nekonečné dimenzi tomu tak zdaleka není. Proto *spektrem* $\sigma(T)$ operátoru T rozumíme množinu těch komplexních čísel λ, pro které operátor $T - \lambda I$ buďto není prostý anebo není na. Je tedy zřejmé, že každé vlastní číslo operátoru T leží ve spektru. Do něj však, jak uvidíme ihned na příkladech, mohou náležet i další čísla. Tedy $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$, přičemž rovnost nastat nemusí.

Vezmeme-li v potaz charakteristiku invertibilních operátorů z 7.2, vidíme, že operátor $T - \lambda I$ je invertibilní, právě když λ neleží ve spektru T. Ještě jinak, $\lambda \in \sigma(T)$, právě když operátor $T - \lambda I$ není invertibilní (buďto není prostý anebo není na).

7.8. Věta. *Nechť T je spojitý operátor na Banachově prostoru X. Potom jeho spektrum $\sigma(T)$ je kompaktní podmnožina komplexní roviny $\mathbf{C}$ a*

$$\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \leq ||T||\}\,.$$

Důkaz. Volme $\lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda| > ||T||$. Podle Důsledku 7.5 má operátor $T - \lambda I$ inverzi. Tudíž $\lambda \notin \sigma(T)$ a vidíme, že $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \leq ||T||\}$.

Nechť nyní $\lambda_0 \in \mathbf{C} \setminus \sigma(T)$, tedy nechť operátor $T - \lambda_0 I$ je invertibilní. Je-li λ voleno tak, aby $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{||(T - \lambda_0 I)^{-1}||}$, je

$$||(T - \lambda I) - (T - \lambda_0 I)|| = ||(\lambda - \lambda_0)I|| = |\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{||(T - \lambda_0 I)^{-1}||}$$

a podle Věty 7.6 je operátor $T - \lambda I$ invertibilní. Tím jsme ukázali, že množina $\mathbf{C} \setminus \sigma(T)$ je otevřená.

V podstatě jde o to, že zobrazení $F : \lambda \mapsto T - \lambda I$ z $\mathbf{C}$ do $\mathcal{L}(X)$ je spojité (to plyne právě z rovnosti

$$||(T - \lambda I) - (T - \lambda_0 I)|| = ||(\lambda - \lambda_0)I|| = |\lambda - \lambda_0|\,)$$

a že množina invertibilních operátorů je podle 7.6 otevřená. A samozřejmě z rovnosti

$$\mathbf{C} \setminus \sigma(T) = F^{-1}\{\lambda : T - \lambda I \text{ je invertibilní }\}\ .$$

Z první části důkazu vyplynulo, že spektrum $\sigma(T)$ je omezená množina, a protože je i uzavřená (v $\mathbf{C}$), je kompaktní. ■

7.9. Poznámka. (a) Lze ukázat, že spektrum je vždy neprázdná podmnožina $\mathbf{C}$. To ovšem již vyžaduje hlubší důkazové prostředky. Čtenáře odkažme na Gelfandovu větu 6.18 v [Záp].

(b) Číslu

$$r(T) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$$

říkáme *spektrální poloměr* operátoru T. Podle poslední věty je tedy $r(T) \leq ||T||$, přičemž rovnost nastat nemusí. O spektrálním poloměru jsme se již zmínili v Poznámce 7.4.c, lze totiž ukázat, že $r(T) = \lim \sqrt[n]{||T^n||}$. Poslední rovnost bývá někdy nazývána *Beurlingovým* či *Gelfand-Beurlingovým vzorečkem*.

7.10. Příklady. (a) Na prostoru l^∞ uvažujme operátor T daný předpisem

$$T : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots)\ , \quad \{x_n\} \in l^\infty\ .$$

Sami se přesvěčte, že $T \in \mathcal{L}(l^\infty)$ a $||T|| = 1$. S ohledem na Větu 7.8 víme, že $\sigma(T) \subset \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$. Je-li $|\lambda| \leq 1$, má rovnice $Tx = \lambda x$ netriviální řešení $x_\lambda := (1, \lambda, \lambda^2, \dots)$. Protože $x_\lambda \in l^\infty$, je každé λ, pro něž $|\lambda| \leq 1$, vlastním číslem operátoru T. Odtud plyne, že

$$\sigma_p(T) = \sigma(T) = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \leq 1\}\ .$$

(b) Uvažujme tentýž operátor, ale tentokráte na prostoru l^1. Opět zjistíme, že $T \in \mathcal{L}(l^1)$ a že $||T|| = 1$. Spektrum $\sigma(T)$ je tedy obsaženo v uzavřeném kruhu $\{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$. Rovnice $Tx = \lambda x$ má opět netriviální řešení $x_\lambda := (1, \lambda, \lambda^2, \dots)$, kterýžto prvek ale pro $|\lambda| = 1$ neleží v prostoru l^1. Jelikož však $x_\lambda \in l^1$ pro každé λ, pro něž $|\lambda| < 1$, dostáváme, že každé takové λ leží v bodovém spektru.

Není těžké se přesvědčit, že rovnice $Tx = \lambda x$ nemá žádné netriviální řešení v prostoru l^1 pro $|\lambda| = 1$. A protože spektrum $\sigma(T)$ je vždy uzavřená množina obsahující bodové spektrum $\sigma_p(T)$, musí nutně být

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| < 1\} \subset \sigma(T) = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \leq 1\}\ .$$

(c) Definujme nyní operátor S na prostoru l^2 předpisem

$$S : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, \dots)\ , \quad \{x_n\} \in l^2\ .$$

A opět zjistíme, že $S \in \mathcal{L}(l^2)$ a $||S|| = 1$. Rovnice $Sx = \lambda x$ nemá v tomto případě žádné netriviální řešení. Na to přijdeme vcelku hned. Tudíž $\sigma_p(S) = \emptyset$. Celé spektrum musí opět ležet v kruhu $\{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$. Ukážeme, že každý bod tohoto kruhu leží ve spektru. Je-li totiž $|\lambda| \leq 1$, nezobrazuje operátor $S - \lambda I$ prostor l^2 na sebe. Neexistuje kupříkladu žádné $x \in l^2$ tak, aby $(S - \lambda I)(x) = (1, 0, 0, \dots)$. To je určitě pravda pro $\lambda = 0$. Pokud je $\lambda \neq 0$, je řešením rovnice $Sx - \lambda x = (1, 0, 0, \dots)$ prvek $x = (\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda^3}, \dots)$. Ten však pro $|\lambda| \leq 1$ v prostoru l^2 neleží. Takže shrnuto máme

$$\emptyset = \sigma_p(S) \subset \sigma(S) = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \leq 1\}\ .$$

Vidíme, že v obecném případě může být popis bodového spektra či spektra vcelku dost libovolný. Mnohem více se dá o charakteru spektra říci v případě, kdy uvažovaný operátor je kompaktní. A tomuto případu se budeme v dalším věnovat.

8. Kompaktní operátory

V dalším se zaměříme na užší třídu lineárních operátorů. Na prostorech nekonečné dimenze totiž neplatí řada tvrzení známých z lineární algebry pro operátory na konečně dimenzionálních prostorech. A my bychom rádi vymezili jistou třídu operátorů, pro které by byla naděje odvodit jisté analogie vět z konečné dimenze . Nejdříve však udělejme malou odbočku do teorie metrických prostorů.

8.1. Kompaktnost v metrických prostorech. Množinu K v metrickém prostoru P nazveme *kompaktní*, jestliže z libovolného pokrytí množiny K otevřenými množinami lze vybrat konečné podpokrytí K. Chcete-li formálně – je-li $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ soustava otevřených množin v P a

$$K \subset \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha\,,$$

potom existuje konečně mnoho indexů $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in A$ tak, že

$$K \subset G_{\alpha_1} \cup \dots \cup G_{\alpha_n}\,.$$

Zdánlivě odlišným je pojem sekvenciální kompaktnosti. Množina K je *sekvenciálně kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti prvků v K lze vybrat konvergentní podposloupnost, jejíž limita leží v K. Lze ukázat, a není to zas tak úplně triviální (jak pro koho), že *podmnožina metrického prostoru je kompaktní, právě když je sekvenciálně kompaktní.*

Kompaktní podmnožiny metrického prostoru jsou omezené a uzavřené (pro důkaz omezenosti využijte třeba pokrývací definici kompaktnosti; abyste dokázali, že kompaktní množiny jsou uzavřené, použijte sekvenciální definici). Opačné tvrzení však zdaleka neplatí. Typickým příkladem je (nekonečný) *diskrétní* metrický prostor. V něm jsou všechny množiny otevřené, uzavřené i omezené. Zato kompaktní jsou pouze konečné podmnožiny. Anebo podle Rieszovy věty 9.3 je uzavřená jednotková koule nekonečně dimenzionálního Banachova prostoru omezená množina, nikoliv však kompaktní. Poznamenejme ještě, že v Banachových prostorech konečné dimenze kompaktní množiny splývají s omezenými uzavřenými množinami.

Uveďme ještě jeden důležitý pojem. Podmnožina B metrického prostoru P je *prekompaktní*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ lze nalézt konečně mnoho prvků $x_1,\dots,x_n$ v P, tak zvanou ε*–síť*, tak, že

$$B \subset U^\varepsilon(x_1) \cup \dots \cup U^\varepsilon(x_n)\,.$$

(Abyste nemuseli hledat – $U^\varepsilon(x)$ značí ε–okolí bodu x, tedy množinu těch bodů, které mají od x vzdálenost menší než ε.) Mnozí autoři někdy místo pojmu prekompaktní množina používají starší název *totálně omezená* množina. Dá chvilku práce rozmyslet si, že B *je prekompaktní, právě když z každé posloupnosti v* B *lze vybrat posloupnost cauchyovskou.* Je ihned vidět, že prekompaktní množiny jsou omezené. Není však pravda, že každá omezená množina je prekompaktní. Uměli byste uvést příklad ? Pokud tápete, zkuste se inspirovat následujícím odstavcem a třeba opět jednotkovou koulí v Banachově prostoru nekonečné dimenze.

Konečně množinu A nazveme *relativně kompaktní*, jestliže její uzávěr $\overline{A}$ je množina kompaktní. Zkuste si rozmyslet, že A je relativně kompaktní, právě když z libovolné posloupnosti jejích prvků lze vybrat konvergentní podposloupnost (jejíž limita ovšem nemusí již ležet v A). Každá relativně kompaktní množina je prekompaktní (to je vidět z výše uvedených charakteristik, jaké posloupnosti lze vybírat z posloupností jejich prvků). V úplných metrických prostorech je množina relativně kompaktní, právě když je prekompaktní.

V dalším se budeme zabývat operátory, které převádějí omezené množiny na množiny relativně kompaktní. Bylo by tedy velice užitečné umět poznat, jaké množiny v tom či onom Banachově prostoru jsou (relativně) kompaktní, To je leckdy nesnadná otázka a pamatovat si všemožná kritéria je značně obtížné. Proto pouze připomeňme, že kupříkladu v Banachově prostoru $\mathcal{C}(K)$ všech spojitých funkcí na kompaktu K takové kritérium máme. Podle Arzelà – Ascoliho věty 13.62 umíme totiž přesně určit, které jeho podmnožiny jsou (relativně) kompaktní. Důkaz této věty jakož i kritéria kompaktnosti v některých dalších Banachových prostorech lze nalézt v [Záp], *1.14.

8.2. Poznámka k důkazům. Protože při studiu kompaktních operátorů budeme často potřebovat ukázat o té či oné množině, že je relativně kompaktní (anebo ekvivaletně prekompaktní, neboť jiné než úplné prostory nebudeme uvažovat), máme k dispozici dvě ekvivaletní definice těchto množin. Buďto pomocí posloupností (sekvenciální definice) anebo pomocí pokrytí či ε–sítě (prekompaktnost). Proto v důkazech můžeme volit mezi těmito dvěma možnostmi. Někdy je příjemnější (pro někoho) důkaz přes posloupnosti, jindy přes prekompaktnost. Z důvodů procvičení uvedeme občas oba důkazy.

8.3. Kompaktní operátory. V dalším uvažujme lineární operátor $K : X \to Y$, kde X a Y jsou Banachovy prostory. Víme již, že K je spojitý, právě když zobrazuje omezené množiny v X na množiny omezené v Y. Řekneme, že K je *kompaktní* operátor, jestliže zobrazuje omezené množiny v X na množiny, které jsou relativně kompaktní v Y.

Okamžitě se naskýtá docela přirozená otázka. Proč v definici kompaktního operátoru požadujeme, aby obrazy byly relativně kompaktní. Proč ne pouze kompaktní ? Důvod je vcelku jednoduchý. Je-li totiž K kompaktní operátor mezi Banachovými prostory X a Y a jeho obor hodnot $\mathcal{R}K$ je v prostoru Y uzavřený, musí již být konečně dimenzionální – $\dim \mathcal{R}K < \infty$. Stručně se zmiňme, proč tomu tak je. Pokud by tedy obor hodnot $\mathcal{R}K$ byl uzavřený, byl by podle Věty o otevřeném zobrazení 6.9 obraz otevřené jednotkové koule prostoru X otevřeným okolím $\mathbf{0}$ v (Banachově) prostoru $\mathcal{R}K$. A protože by to byla současně množina relativně kompaktní, musela by být podle Rieszovy věty 9.3 dimenze $\mathcal{R}K$ konečná.

Symbolem $\mathcal{K}(X, Y)$ označme množinu všech kompaktních operátorů z X do Y a $\mathcal{K}(X)$ pak množinu $\mathcal{K}(X, X)$.

Protože jsme v předchozím odstavci uvedli některé charakteristiky relativně kompaktních množin, můžeme ihned vyslovit následující jednoduchou větičku. Kteroukoliv tam uvedenou charakteristiku bychom vlastně mohli použít za definici kompaktního operátoru.

8.4. Charakteristiky kompaktních operátorů. *Nechť X a Y jsou Banachovy prostory a $K : X \to Y$ lineární operátor. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) *K je kompaktní,*
(ii) *K zobrazuje omezené množiny v X na prekompaktní množiny v Y,*
(iii) *K zobrazuje uzavřenou jednotkovou kouli v X na množinu relativně kompaktní v Y,*
(iv) *z každé omezené posloupnosti $\{x_n\}$ v X lze vybrat podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ tak, že posloupnost $\{Kx_{n_k}\}$ konverguje.*

Důkaz. Jak jsme se zmínili, uvedené charakteristiky jsou jen parafrází tvrzení v 8.1 ohledně relativně kompaktních množin. ■

8.5. Poznámka. Nebyl by žádný problém definovat kompaktní operátory i pro případ normovaných lineárních prostorů. Museli bychom být však opatrní již při jejich charakterizaci obdobné té v 8.4. Bylo by vhodnější, a někteří autoři tak činí, raději rozlišovat mezi kompaktními a *prekompaktními* operátory (ty by byly definované podmínkou (ii) v 8.4).

8.6. Konečně dimenzionální operátory. Lineární omezený operátor F mezi Banachovými prostory X a Y je *konečně dimenzionální*, jestliže jeho obor hodnot $\mathcal{R}F$ je konečně dimenzionálním podprostorem Y. Symbolem $\mathcal{F}(X, Y)$ označme množinu všech omezených konečně dimenzionálních operátorů z X do Y; samozřejmě $\mathcal{F}(X) := \mathcal{F}(X, X)$.

8.7. Věta. *Nechť X a Y jsou Banachovy prostory. Konečně dimenzionální operátory z X do Y jsou kompaktní a každý kompaktní operátor je omezený.*

Je-li Z také Banachův prostor, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $L \in \mathcal{L}(Y, Z)$, je složený operátor $L \circ T : X \to Z$ kompaktní, pokud T či L je kompaktní.

Důkaz. Nechť $F \in \mathcal{F}(X, Y)$ a D je omezená množina v X. Potom $F(D)$ je omezená množina obsažená v konečně dimenzionálním prostoru $\mathcal{R}F$, tudíž musí být relativně kompaktní.

Že kompaktní operátory jsou omezené, je snad úplně jasné

Předpokládejmě nyní, že $K \in \mathcal{K}(X, Y)$, $L \in \mathcal{L}(Y, Z)$ a $\{x_n\}$ je omezená posloupnost v X. Protože K je kompaktní operátor, lze z posloupnosti $\{Kx_n\}$ vybrat konvergentní podposloupnost (v Y). A spojitý operátor L ji tedy musí převést na konvergentní posloupnost v Z.

Je-li naopak $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $K \in \mathcal{K}(Y, Z)$ a D omezená množina v X, je množina $L(D)$ omezená v Y (L je omezený operátor), kterou kompaktní operátor K převede na množinu relativně kompaktní. ■

8.8. Poznámka. Jako cvičení zkuste metody dvou posledních důkazů prohodit.

8.9. Věta. *Nechť X a Y jsou Banachovy prostory. Potom $\mathcal{F}(X, Y)$ je podprostor $\mathcal{K}(X, Y)$ a $\mathcal{K}(X, Y)$ je uzavřený podprostor $\mathcal{L}(X, Y)$.*

Důkaz. Evidentně $\mathcal{F}(X,Y)$ tvoří vektorový prostor.

Že součet dvou kompaktních operátorů je kompaktní se dokáže třeba pomocí charakteristiky (iv) z 8.4. Jsou-li totiž T a S kompaktní operátory z $\mathcal{K}(X,Y)$ a $\{x_n\}$ je omezená posloupnost v X, existuje její vybraná $\{x_{n_k}\}$ tak, že posloupnost $\{Tx_{n_k}\}$ konverguje. A z této podposloupnosti $\{x_{n_k}\}$ opět vybereme podposloupnost $\{z_j\}$ tak, aby její obrazy $\{Sz_j\}$ při zobrazení S konvergovaly. Potom zaručeně konverguje posloupnost $\{(T+S)(z_j)\}$.

Předpokládejme nyní, že $\{T_n\} \subset \mathcal{K}(X,Y)$ a že $T_n \to T$ v prostoru $\mathcal{L}(X,Y)$. Chceme ukázat, že T je kompaktní operátor. Úkolem je tedy ukázat, že množina $T(B_X)$, kde B_X je uzavřená jednotková koule v X, je prekompaktní v Y. Volme tedy $\varepsilon > 0$ a nalezněme n tak, aby $||T_n - T|| < \varepsilon$. Potom samozřejmě $||T_n x - Tx|| < \varepsilon$ pro každé $x \in B_X$. Protože množina $T_n(B_X)$ je prekompaktní, existuje konečná množina $F \subset B_X$ tak, že $\operatorname{dist}(y, T_n(F)) < \varepsilon$ pro každé $y \in T_n(B_X)$. Je-li nyní $z \in T(B_X)$, potom pomocí trojúhelníkové nerovnosti dostaneme, že $\operatorname{dist}(z, T(F)) < 3\varepsilon$. Tím jsme ukázali, že množina $T(B_X)$ je prekompaktní. A tedy také tvrzení, že $\mathcal{K}(X,Y)$ je uzavřená podmnožina $\mathcal{L}(X,Y)$. ■

8.10. Poznámka. Při důkazu uzavřenosti množiny $\mathcal{K}(X,Y)$ v prostoru $\mathcal{L}(X,Y)$ jsme použili „pokrývací" definici kompaktních operátorů. Důkaz můžeme vést také využitím „sekvenciální" definice pomocí klasické diagonální metody. Tady je myšlenka. Jestliže $K_n \in \mathcal{K}(X,Y)$, $K_n \to K$ a $\{x_n\}$ je omezená posloupnost v X, vybereme z této posloupnosti podposloupnost $\{x_n^1\}$ tak, aby posloupnost $\{K_1 x_n^1\}$ konvergovala. Poté vybereme z $\{x_n^1\}$ podposloupnost $\{x_n^2\}$ tak, aby posloupnost $\{K_2 x_n^2\}$ konvergovala. Tak pokračujeme dále. Uvažujeme-li diagonální posloupnost $\{z_n\}$, kde $z_n := x_n^n$ (a to je skutečně vybraná posloupnost z původní posloupnosti $\{x_n\}$), vidíme, že posloupnost $\{K_k z_n\}$ konverguje pro každé k. Tudíž i posloupnost $\{Kz_n\}$ konverguje, jak se lehko přesvědčíme. Skutečně, volme $\varepsilon > 0$. Protože $\|K_k - K\| \to 0$ a $\{z_n\}$ je omezená posloupnost, existuje k tak, že $\|K_k z_n - Kz_n\| < \varepsilon$ pro každé n. Protože posloupnost $\{K_k z_n\}_n$ je cauchyovská (je dokonce konvergentní), existuje n_0 tak, že $\|K_k(z_i) - K_k(z_j)\| < \varepsilon$ pro $i, j \geq n_0$. Pro tato i, j pak máme

$$\|Kz_i - Kz_j\| \leq \|Kz_i - K_k z_i\| + \|K_k z_i - K_k z_j\| + \|K_k z_j - Kz_j\| < 3\varepsilon\,.$$

8.11. Důsledek. *Prostor $\mathcal{K}(X)$ všech kompaktních operátorů na Banachově prostoru X tvoří uzavřený ideál v $\mathcal{L}(X)$.*

Důkaz. Ideálem $\mathcal{N}$ v $\mathcal{L}(X)$ se rozumí vektorový podprostor $\mathcal{L}(X)$ s vlastností, že $L \circ K \in \mathcal{N}$ a $K \circ L \in \mathcal{N}$, pokud $K \in \mathcal{N}$ a $L \in \mathcal{L}(X)$. Tudíž vše, co bychom měli dokázat, je obsaženo již v předchozích tvrzeních. ■

8.12. Poznámka. Banachův prostor $\mathcal{K}(X)$ všech kompaktních operátorů na Banachově prostoru X tvoří tak zvanou *Banachovu algebru*. Na prostoru $\mathcal{K}(X)$ máme totiž navíc definováno (nekomutativní) „násobení" dané skládáním operátorů a navíc norma splňuje i vůči tomuto násobení „trojúhelníkovou nerovnost":

$$||K_1 \circ K_2|| \leq ||K_1||\,||K_2|| \quad \text{kdykoliv} \quad K_1, K_2 \in \mathcal{K}(X)\,.$$

Tato Banachova algebra nemá v případě $\dim X = \infty$ žádnou jednotku, neexistuje totiž žádný kompaktní operátor I tak, aby $I \circ K = K \circ I = I$ pro každé $K \in \mathcal{K}(X)$.

Jak jsme dokázali, $\mathcal{K}(X)$ je uzavřeným podprostorem $\mathcal{L}(X)$. Můžeme se tedy ptát, zda $\mathcal{K}(X)$ má v prostoru $\mathcal{L}(X)$ topologický doplněk. I to je poměrně delikátní otázka, více se můžete dovědět v odstavci *2.5 z [Záp].

8.13. Schauderova věta. *Nechť $K \in \mathcal{L}(X)$ je operátor na Banachově prostoru X. Potom K je kompaktní, právě když jeho adjungovaný operátor $K' \in \mathcal{L}(X^*)$ je kompaktní.*

Důkaz. Nechť $B := B_X$ značí uzavřenou jednotkovou kouli v X a $\varepsilon > 0$ je zadáno. Protože KB je prekompaktní, existují $x_1, \ldots, x_n \in X$ tak, že $KB \subset \bigcup_{i=1}^{n} U^{\varepsilon}(Kx_i)$.

Definujme operátor $T : X^* \to \mathbf{F}^n$ předpisem

$$T : \varphi \mapsto \big\{\varphi(Kx_1), \ldots, \varphi(Kx_n)\big\}\,.$$

Evidentně T je kompaktní operátor. Je-li B^* uzavřená jednotková koule v X^*, existují opět $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in B^*$ tak, že $TB^* \subset \bigcup_{j=1}^{k} U^{\varepsilon}(T\varphi_j)$.

Ukážeme nyní, že $\{K'\varphi_1, \ldots, K'\varphi_k\}$ je 3ε-síť pro $K'B^*$. Volme tedy $\varphi \in B^*$ pevně. Existuje $j \in \{1, \ldots, k\}$ tak, že $\|T\varphi - T\varphi_j\| < \varepsilon$ a potřebujeme dokázat, že

$$\begin{aligned}\|K'\varphi - K'\varphi_j\| &= \|K'(\varphi - \varphi_j)\| = \sup\big\{|K'(\varphi - \varphi_j)(x)| : x \in B\big\}\\ &= \sup\big\{|\varphi(Kx) - \varphi_j(Kx)| : x \in B\big\} \leq 3\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Volme tedy ještě $x \in B$. Existuje $i \in \{1, \dots, n\}$ tak, že $\|Kx - Kx_i\| < \varepsilon$. Uvědomme si, že podle definice T potom $\big|\varphi(Kx_i) - \varphi_j(Kx_i)\big| \le \|T\varphi - T\varphi_j\| < \varepsilon$. Když dáme vše dohromady, získáme kýžený odhad

$$\begin{aligned}\big|\varphi(Kx) - \varphi_j(Kx)\big| &\le \big|\varphi(Kx) - \varphi(Kx_i)\big| + \big|\varphi(Kx_i) - \varphi_j(Kx_i)\big| + \big|\varphi_j(Kx_i) - \varphi_j(Kx)\big| \\ &\le \|\varphi\|\,\|Kx - Kx_i\| + \varepsilon + \|\varphi_j\|\,\|Kx_i - Kx\| \le 3\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Předpokládáme-li naopak, že $T' \in \mathcal{L}(X^*)$ je kompaktní, je podle první části důkazu i operátor $T'' \in \mathcal{L}(X^{**})$ kompaktní. Označíme-li ε_X kanonické vnoření X do X^{**}, je $\varepsilon_X^{-1} \in \mathcal{L}(\varepsilon_X(X), X)$ a $K = \varepsilon_X^{-1} K'' \varepsilon_X$ na X (je nutno si uvědomit, že ε_X je izometrie a $K''\varepsilon_X(X)$ je podmnožinou uzavřeného podprostoru $\varepsilon_X(X)$). Odtud podle 8.7 plyne, že K je kompaktní. ∎

Na závěr uveďme ještě jednu zajímavou a důležitou vlastnost kompaktních operátorů.

8.14. Věta. *Nechť K je kompaktní operátor na normovaném lineárním prostoru X a $\{x_n\}$ slabě konvergentní posloupnost v X, $x_n \xrightarrow{w} x$. Potom $Kx_n \to Kx$.*

Důkaz. Můžeme (pro jednoduchost) předpokládat, že $x = \mathbf{0}$. Podle Věty 5.3 je posloupnost $\{||x_n||\}$ omezená. Dále si rozmyslíme, že $Kx_n \xrightarrow{w} K\mathbf{0} = \mathbf{0}$ (není-li to jasné, podívejte se na Cvičení 3.15.a). Předpokládejme nyní, že posloupnost $\{Kx_n\}$ nekonverguje k $\mathbf{0}$. Můžeme tedy nalézt $\varepsilon > 0$ a z posloupnosti $\{x_n\}$ vybrat podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ tak, aby $||Kx_{n_k}|| > \varepsilon$ pro všechna n_k. Posloupnost $\{||x_{n_k}||\}$ je ovšem omezená a kompaktnost operátoru K nám zaručuje, že z posloupnosti $\{x_{n_k}\}$ lze vybrat další podposloupnost, označme ji $\{z_j\}$ tak, že posloupnost $\{Kz_j\}$ konverguje, řekněme k prvku $z \in X$. Protože však $Kz_j \xrightarrow{w} \mathbf{0}$, musí být $Kz = 0$. Nalezli jsme tedy posloupnost $\{z_j\}$ s vlastnostmi $Kz_j \to 0$ a $||Kz_j|| > \varepsilon$ pro každé j. A to je samozřejmě spor, neboť z předpokladu $Kz_j \to \mathbf{0}$ plyne, že $||Kz_j|| \to 0$. ∎

8.15. Úplně spojité operátory. Předchozí věta říká, že kompaktní operátory převádějí slabě konvergentní posloupnosti v silně konvergentní. A právě operátorům, které mají tuto vlastnost, se říká *úplně spojité*. Není však pravda, že každý úplně spojitý operátor je již kompaktní. Kupříkladu vezmeme-li za fakt tvrzení, že v prostoru l^1 je každá slabě konvergentní posloupnost i silně konvergentní (tomuto tvrzení se říká *Schurova věta*), je potom identický operátor na l^1 automaticky úplně spojitý. Není však kompaktní, neboť identické zobrazení na prostoru nekonečné dimenze nemůže být nikdy kompaktní (to je zřejmé ihned z definice kompaktnosti a Rieszovy věty 9.3).

Je však pravdou, že v reflexivních prostorech kompaktní a úplně spojité operátory splývají. Následující věta to ukazuje.

8.16. Tvrzení. *Nechť K je úplně spojitý operátor na reflexivním prostoru X. Potom K je kompaktní.*

Důkaz. Nechť $\{x_n\}$ je omezená posloupnost v X. Protože prostor X je reflexivní, lze podle Eberlein–Šmuljanovy charakteristiky v 4.13 z této posloupnosti vybrat podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ slabě konvergentní. (To je poměrně hlubší tvrzení, můžete se třeba podívat na [Záp], věta 4.9). No a operátor K podle definice převede tuto slabě konvergentní posloupnost $\{x_{n_k}\}$ na silně konvergentní. Což neříká nic jiného, než že K je kompaktní. ∎

9. Riesz–Schauderova teorie kompaktních operátorů

Tuto kapitolu uvedeme jednou z velice důležitých vět nekonečně rozměrné analýzy. Již jako jeden z důsledků Hahn–Banachovy věty jsme dokázali v 4.15 Rieszovo lemma o skoro kolmici. Vraťme se nyní k němu a doprovoďme ho jiným (elementárním) důkazem.

9.1. Rieszovo lemma o skoro kolmici. *Nechť M je vlastní uzavřený podprostor normovaného lineárního prostoru E. Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $x_\varepsilon \in E$ tak, že*

$$||x_\varepsilon|| = 1 \quad a \quad \operatorname{dist}(x_\varepsilon, M) \ge 1 - \varepsilon\,.$$

Důkaz. Je-li $x \in E \setminus M$ a $\varepsilon \in (0,1)$, existuje $m \in M$ tak, že $||x-m|| \le \frac{\operatorname{dist}(x,M)}{1-\varepsilon}$. Stačí pak položit $x_\varepsilon := \frac{x-m}{||x-m||}$, neboť pro libovolné $z \in M$ pak máme

$$\begin{aligned}||x_\varepsilon - z|| &= \Big|\Big|\frac{x-m}{||x-m||} - z\Big|\Big| = \frac{1}{||x-m||}\Big|\Big|x - (m + ||x-m||\, z)\Big|\Big| \\ &\ge \frac{1}{||x-m||}\operatorname{dist}(x,M) \ge 1-\varepsilon\,.\end{aligned}$$

■

9.2. Poznámky. (a) Obecně není pravda, že v prostorech nekonečné dimenze lze dokonce nalézt v předešlém Rieszově lemmatu 9.1 takový prvek x z jednotkové sféry S_E, aby $\operatorname{dist}(x,M) = 1$. Uveďme příklad. Uvažujme prostor

$$E := \{f \in \mathcal{C}([0,1]) : f(0) = 0\}$$

opatřený max–normou z prostoru $\mathcal{C}([0,1])$. Jestliže

$$M := \left\{f \in E : \int_0^1 f = 0\right\},$$

je M uzavřený podprostor E (jak to odůvodníte ?). Předpokládejte, že existuje $g \in E$ tak, že

$$||g|| = 1 \quad \text{a} \quad \operatorname{dist}(g,M) \ge 1\,.$$

Protože g je spojitá funkce, $||g|| = 1$ a $g(0) = 0$, musí být $|\int_0^1 g| < 1$. Na druhé straně pro funkci g musí být $|\int_0^1 g| \ge 1$. Proč ? Zvolme libovolně $n \in \mathbf{N}$. Lehko najdete funkci f_n v E tak, aby

$$||f_n|| = 1 \quad \text{a} \quad \int_0^1 f_n = \frac{n}{n+1}$$

(uvažujte třeba $f_n : x \mapsto \sqrt[n]{x}$). Potom funkce

$$g_n := g - \Big(\frac{n+1}{n}\int_0^1 g\Big)\, f_n$$

leží v M, odkud plyne

$$1 \le \operatorname{dist}(g,M) \le ||g - g_n|| = \frac{n+1}{n}\left|\int_0^1 g\right|\, ||f_n|| = \frac{n+1}{n}\left|\int_0^1 g\right|.$$

Tudíž $|\int_0^1 g| \ge \frac{n}{n+1}$. A protože n bylo libovolné, dostáváme $|\int_0^1 g| \ge 1$, což je kýžený spor.

(b) *Je–li prostor E konečně dimenzionální a M jeho vlastní podprostor, potom existuje $x \in E$ tak, že*

$$||x|| = 1 = \operatorname{dist}(x,M)\,.$$

Důkaz je vcelku jednoduchý. Zvolme libovolně $z \in E \setminus M$, označme $d := \operatorname{dist}(z,M)$ a najděme posloupnost $\{y_n\}$ v M tak, aby $||y_n - z|| \to d$. Samozřejmě $||y - z|| = d$. Protože $\dim E < \infty$, existuje vybraná posloupnost z $\{y_n\}$, která konverguje. Předpokládejme rovnou, že $y_n \to y$. Protože podprostor M je uzavřený (jakožto konečně dimenzionální, viz 13.11), je $y \in M$. Položíme–li $x := d^{-1}(z-y)$, je $||x|| = 1$. Volíme–li $m \in M$, dostáváme

$$||x - m|| = d^{-1}\, ||z - (y + d\,m)|| \ge 1\,,$$

neboť $y + d\,m \in M$. Odtud pak vyplyne ihned tvrzení.

(c) Připojme ještě jednu poznámku. *Je–li E reflexivní, potom již existuje $x \in E$ tak, aby* $||x|| = 1 = \operatorname{dist}(x,M)$. To jsme již dokázali v Dovětku 4.16, ovšem za použití Hahn–Banachovy věty. Využijeme–li jiných hlubších vět, můžeme argumentovat třeba následovně. Začněme důkaz stejně jako v předchozí poznámce (b). Konvergentní posloupnost $\{y_n\}$ je omezená. Protože prostor E předpokládáme reflexivní, existuje podle Eberlein–Šmuljanovy charakteristiky v 4.13 její vybraná podposloupnost, která slabě konverguje. Předpokládejme tedy opět, že $y_n \xrightarrow{w} y$. Podle Cvičení 4.26.b je $y \in M$ a podle 4.26.a máme

$$d \le ||y - z|| \le \liminf ||y_n - z|| = \lim ||y_n - z|| = d\,.$$

Poznamenejme ovšem, že obě citovaná cvičení využívala opět Hahn–Banachovu větu. Podařilo by se vám vymyslet „elementárnější” důkaz ?

9.3. Rieszova věta. *Nechť E je normovaný lineární prostor nekonečné dimenze. Potom jeho uzavřená jednotková koule B_E není kompaktní.*

Důkaz. Existuje posloupnost $X_1 \subset\subset X_2 \subset\subset X_3 \subset\subset \cdots \subset\subset X$ vlastních podprostorů X tak, že $\dim X_n = n$. Jakožto konečně dimenzionální, jsou podprostory X_n uzavřené podle Věty 13.11. Podle Rieszova lemmatu o skoro kolmici 9.1 nalezněme posloupnost $\{x_n\}$ tak, aby $x_n \in X_n$, $||x_n|| = 1$ a $\operatorname{dist}(x_{n+1}, X_n) \geq \frac{1}{2}$ pro každé n. Protože $||x_n - x_k|| \geq \frac{1}{2}$ pro $n \neq k$, nemůže posloupnost $\{x_n\}$ obsahovat žádnou vybranou konvergentní podposloupnost. ■

Jiný důkaz. Předpokládejme, že B_E je kompaktní. Existuje tedy konečná $\frac{1}{2}$–síť $F \subset B_E$, tj.

$$B_E \subset \bigcup_{x \in F} U^{\frac{1}{2}}(x)\,.$$

Nechť Y je lineární obal množiny F. Jelikož podprostor Y je konečně dimenzionální, je uzavřený a $Y \neq E$. Podle Rieszova lemmatu o skoro kolmici 9.1 existuje $x \in E$ tak, že

$$||x|| = 1 \quad \text{a} \quad \operatorname{dist}(x, Y) \geq \frac{7}{8}\,.$$

A to je spor, neboť x jakožto prvek B_E má vzdálenost od F menší než $\frac{1}{2}$ (a samozřejmě $\operatorname{dist}(x, F) \geq \operatorname{dist}(x, Y)$). ■

9.4. Důsledek. *Identický operátor I na normovaném lineárním prostoru E nekonečné dimenze není nikdy kompaktní.*

Důkaz. Je-li B_E uzavřená jednotková koule v E, potom $I(B_E) = B_E$. Pokud by identita I byla kompaktní operátor, byla by uzavřená množina B_E kompakt. A to podle předešlé Rieszovy věty 9.3 v případě $\dim E = \infty$ není možné. ■

9.5. Poznámky. (a) Na prostorech konečné dimenze je identita samozřejmě kompaktní operátor. Tedy, identita na normovaném lineárním prostoru E je kompaktní operátor, právě když $\dim E < \infty$.

(b) Nechť E je normovaný lineární prostor, $\dim E = \infty$. Zvolíme-li libovolné $0 < \beta < 1$, existuje taková posloupnost $\{x_n\}$ (dokonce lineárně nezávislých) prvků jednotkové sféry S_E, že $||x_n - x_k|| > \beta$ pro $n \neq k$. To vyplývá z prvního důkazu předchozí Rieszovy věty. Platí však podstatně silnější tvrzení, o tom se můžete dočíst v Dodatku v 13.58, 13.59 a 13.60.

9.6. Operátory prosté a na. Uvažujme spojitý lineární operátor T na normovaném lineárním prostoru E, $T \in \mathcal{L}(E)$. Připomeňme jen, že operátor T je *prostý*, jestliže $z = \mathbf{0}$ v případě, kdy $Tz = \mathbf{0}$. A operátor T je *na* (v matematické literatuře se používá také slovíčko *surjektivní*), jestliže ke každému $y \in E$ existuje $x \in E$ tak, že $Tx = y$. Jinými slovy, T je prostý, jestliže (homogenní) rovnice $Tz = \mathbf{0}$ má jedině triviální řešení $z = \mathbf{0}$ a T je na, jestliže rovnice $Tx = y$ má řešení pro každou pravou stranu $y \in E$.

V případě, kdy prostor E má konečnou dimenzi, je operátor $T \in \mathcal{L}(E)$ prostý, právě když je na. Jinými slovy, rovnice $Tx = y$ má řešení pro každou pravou stranu, právě když příslušná homogenní rovnice $Tz = \mathbf{0}$ má pouze triviální řešení. To lze vyslovit také ve formě slavné (algebraické) *Fredholmovy alternativy*: Buďto rovnice $Tx = y$ má řešení pro každou pravou stranu anebo homogenní rovnice $Tz = \mathbf{0}$ má netriviální řešení.

9.7. Poznámka. Mnohým čtenářům není bohužel jasný vztah mezi „ekvivalencí" a „alternativou". Pro ně tedy přidejme následující poznámku. Ekvivalenci dvou výroků A a B, což symbolicky zapisujeme „$A \iff B$" a slovně vyjadřujeme tak, že *výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B*, můžeme také vyjádřit ve formě alternativy: *Buďto platí výrok A anebo neplatí výrok B*, ve zkratce „$A \vee nonB$". (Pro ty, kteří stále ještě váhají, poznamenejme, že „buďto platí výrok A anebo neplatí výrok A". A protože A je totéž co B …, snad již není co dodávat.)

Uvedená ekvivalence (nebo alternativa) již zdaleka neplatí v prostorech nekonečné dimenze. Uvažujme třeba prostor l^2 a operátory

$$T : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots) \quad \text{a} \quad S : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots)$$

na něm. Není těžké ukázat, že $T, S \in \mathcal{L}(l^2)$, že operátor T není prostý, ačkoliv je na, a naopak že operátor S je prostý a není na.

V dalším ukážeme, že v případě, kdy operátor T má speciální tvar, jsou obě uvedené vlastnosti ekvivalentní. A k uvedené Fredholmově alternativě se v tomto případě vrátíme v následujícím.

9.8. Věta. *Nechť K je kompaktní operátor na Banachově prostoru X. Jestliže $\mathcal{R}(I-K)=X$, potom $I-K$ je prostý operátor.*

Důkaz. Označme $B := I - K$ a $N_n := \ker B^n$ pro každé přirozené n. Důkaz provedeme sporem, nechť $\mathcal{R}B = X$ a B není prostý. Předpokládejme na okamžik, že se nám podařilo dokázat, že $N_n \subset N_{n+1}$ a že $N_n \neq N_{n+1}$. Protože N_n jsou uzavřené podprostory X, existuje podle Rieszova lemmatu 9.1 o skoro-kolmici posloupnost $\{x_n\}$ tak, že

$$x_n \in N_{n+1}\ ,\ ||x_n|| = 1 \ \text{ a } \ \operatorname{dist}(x_n, N_n) \geq \frac{1}{2}$$

pro každé n. Jsou-li nyní $k, n \in \mathbf{N}$ a $k < n$, je $Bx_n + Kx_k \in N_n$. (To bychom měli trochu odůvodnit. Z toho, že $x_n \in N_{n+1}$ plyne, že $B^n(Bx_n) = B^{n+1}x_n = 0$. Takže $Bx_n \in N_n$ podle definice N_n. Jelikož i $x_k \in N_{k+1}$, máme obdobně $x_k - Kx_k = Bx_k \in N_k$. Protože $Kx_k = x_k - Bx_k$, dostáváme, že $Kx_k \in N_{k+1} \subset N_n$.) Tudíž

$$||Kx_n - Kx_k|| = ||x_n - (Bx_n + Kx_k)|| \geq \frac{1}{2}\,.$$

Takže z posloupnosti $\{Kx_n\}$ nelze vybrat žádnou konvergentní a operátor K není kompaktní.

Zbývá se tedy vrátit na začátek důkazu. Jestliže $B^n x = \mathbf{0}$, potom $B^{n+1}x = B(B^n x) = B(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, čímž je ověřeno, že $N_n \subset N_{n+1}$. Protože předpokládáme, že $\mathcal{R}B := B(X) = X$, ihned vidíme, že i $\mathcal{R}B^n := B^n(X) = X$. Protože operátor B není prostý, existuje $y \neq \mathbf{0}$ tak, že $By = \mathbf{0}$. A protože $B^n(X) = X$, existuje $z \in X$ tak, že $B^n z = y$. Potom ovšem

$$B^{n+1}z = B(B^n z) = By = \mathbf{0}$$

a $B^n z = y \neq \mathbf{0}$. Nalezli jsme tedy $z \in N_{n+1} \setminus N_n$. ■

Platí i opačná implikace, tedy pro kompaktní operátor K je operátor $I-K$ prostý, právě když je na. To bude obsahem slavné Fredholmovy alternativy v 9.14. K jejímu důkazu využijeme i následující tvrzení, které je zajímavé samo o sobě. Jeho pomoc pak využijeme při důkazu Věty 9.10.

9.9. Věta. *Nechť K je kompaktní operátor na Banachově prostoru X. Potom jádro operátoru $I-K$ je konečné dimenze a obor hodnot $\mathcal{R}(I-K)$ je uzavřený.*

Důkaz. Není co řešit, pokud $\dim X < \infty$. Stačí tedy provést důkaz v případě, kdy $\dim X = \infty$. Označíme-li $Z := \ker(I-K)$, je Z uzavřený podprostor X. Dále, není těžké si rozmyslet, že restrikce K na Z je opět kompaktní operátor. A protože $K = I$ na Z, je podle Důsledku 9.4 $\dim Z < \infty$.

Označme opět $B := I - K$. Protože $\dim\ker B < \infty$, existuje podle Věty 6.17 uzavřený podprostor $F \subset X$ tak, že $X = \ker B \oplus_t F$. Uvažujeme-li F jako prostor, je, jakožto uzavřená podmnožina úplného prostoru, Banachův. Operátor B (přesněji jeho restrikce na F) je na F prostý. Zajisté, je-li $z \in F$ a $Bz = \mathbf{0}$, je $z \in F \cap \ker B$. V posledním průniku však leží pouze nulový prvek, je tedy $z = \mathbf{0}$.

Protože $B(F) = B(X)$, stačí ukázat, že $B(F)$ je uzavřená množina v X. Tomu tak bude, pokud $\beta := \inf\{||Bz|| : z \in F, ||z|| = 1\} > 0$.

(Zajisté, je-li v tomto případě $y_n \in B(F)$ a $y_n \to y$ a jsou-li $x_n \in F$ taková, že $Bx_n = y_n$, potom $||x_n - x_k|| \leq \frac{1}{\beta}||y_n - y_k||$. Posloupnost $\{x_n\}$ je potom cauchyovská (v Banachově prostoru F), tudíž existuje $x \in F$ tak, že $x_n \to x$. Ze spojitosti operátoru B pak plyne, že $Bx_n \to Bx$. Ale $Bx_n = y_n \to y$, takže $Bx = y$ a $y \in B(F)$.)

Nechť tedy existuje posloupnost $\{z_n\} \subset F$ tak, že $||z_n|| = 1$ a $Bz_n \to \mathbf{0}$. Díky kompaktnosti K můžeme předpokládat, že posloupnost $\{Kz_n\}$ konverguje k prvku z. Protože $z_n = Bz_n + Kz_n \to z$, je $z \in F$ a $||z|| = 1$. Na druhé straně $Bz_n \to Bz$, tudíž $Bz = \mathbf{0}$. Protože operátor B je na F prostý, musí být $z = \mathbf{0}$. A to je samozřejmě spor. ■

9.10. Věta. *Nechť K je kompaktní operátor na Banachově prostoru X. Jestliže operátor $I-K$ je prostý, je již na.*

Důkaz. Opět položme $B := I - K$. Roznásobením lehko zjistíme, že pro $n = 0,1,2,\dots$ je $B^n = I - S$, kde $S \in \mathcal{K}(X)$. Podle předešlé Věty 9.9 je $M_n := \mathcal{R}B^n$ uzavřený podprostor X. Zřejmě

$$X = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_n \supset M_{n+1} \supset \dots .$$

Ukážeme, že $M_n = M_{n+1}$ pro jisté $n = 0,1,\dots$. Kdyby tomu tak nebylo, byl by M_{n+1} vlastní uzavřený podprostor M_n pro každé n a podle Rieszovy věty 9.1 o skoro-kolmici by existovala posloupnost $\{x_n\}$ s vlastnostmi $x_n \in M_n$, $\|x_n\| = 1$ a $\operatorname{dist}(x_n, M_{n+1}) \ge \frac{1}{2}$. Potom pro $m > n$ dostáváme

$$Kx_n - Kx_m = x_n - y\,,$$

kde $y = Bx_n - Bx_m + x_m \in M_{n+1}$ podle definice M_{n+1}. To nás vede ke sporu s kompaktností K, neboť

$$\|Kx_n - Kx_m\| = ||x_n - y|| \ge \frac{1}{2}\,.$$

Předpokládejme nyní, že B je prostý. Ukážeme, že $M_{n-1} = M_n$ za předpokladu, že $M_n = M_{n+1}$ pro nějaké $n > 0$. Odtud potom dostaneme, že $M_1 = M_0 = X$, což neříká nic jiného, než $\mathcal{R}B = X$. Volme tedy $t \in M_{n-1}$. Najděme $x \in X$ tak, aby $t = B^{n-1}x$. Potom ovšem

$$Bt = B^n x \in M_n = M_{n+1}\,.$$

Existuje tedy $z \in X$ tak, že $Bt = B^{n+1}z$ a odtud plyne konečně (využitím prostoty B), že $t = B^n z \in M_n$. ■

9.11. Poznámka. Důkaz věty 9.8 lze vést také jiným způsobem, ovšem za předpokladu, že již máme dokázanu Větu 9.10 a Schauderovu větu 8.13.

Naznačme tedy myšlenku, předpokládajíce, že operátor K je kompaktní a $I-K$ je na. Tedy za předpokladu $\mathcal{R}(I-K) = X$ dostáváme využitím jedné identity z Tvrzení 4.25

$$\ker(I-K)' = X^\perp = \{\mathbf{0}\}\,.$$

Ale $(I-K)' = I' - K'$, kde K' je kompaktní operátor podle Schauderovy věty 8.13 a I', což je adjungovaný operátor k I, je identita I_{X^*} na X^*. Ježto tedy $\ker(I'-K') = \{\mathbf{0}\}$, je $I'-K'$ prostý operátor a z dokázané Věty 9.10 plyne, že operátor $I'-K'$ je na, tudíž $\mathcal{R}(I'-K') = X^*$. Opět použijeme Tvrzení 4.25 a dostaneme, že

$$\ker(I-K) = {}^\perp\mathcal{R}(I'-K') = {}^\perp X^* = \{\mathbf{0}\}\,,$$

což přesně říká, že $I-K$ je prostý operátor.

Je zajímavé, že naopak použitím Věty 9.8 nelze jen tak jednoduše dokázat Větu 9.10. Než se podíváme na důvod, proč tomu tak je, poznamenejme, že důkaz Věty 9.8 nepředpokládal nic mimořádného. Na druhé straně pro důkaz Věty 9.10 jsme potřebovali vědět, že obor hodnot $\mathcal{R}(I-K)$ operátoru $I-K$ byl uzavřený. A nyní k onomu důvodu. Pokud bychom chtěli dokázat Větu 9.10 z Věty 9.8, hodily by se nám identity

$$\mathcal{R}T' = (\ker T)^\perp \quad \text{a} \quad \mathcal{R}T =^\perp (\ker T')\,,$$

jakési analogie k obdobným rovnostem z Tvrzení 4.25. Ovšem tyto identity obecně neplatí. Uvědomte si třeba, že anihilátor libovolné množiny je vždy uzavřená množina, zatímco obor hodnot operátoru zdaleka být nemusí. Nicméně uvedené identity platí ve speciálním případě, kdy operátor T má tvar $I-K$, kde K je kompaktní. O tom je následující tvrzení, která bývá též někdy nazýváno *druhou Fredholmovou větou.*

9.12. Tvrzení. *Nechť K je kompaktní operátor na Banachově prostoru X. Potom*

$$\mathcal{R}(I-K)' = (\ker(I-K))^\perp \quad a \quad \mathcal{R}(I-K) =^\perp (\ker(I-K)')\,.$$

Důkaz. Podívejme se třeba na první rovnost

$$\mathcal{R}(I-K)' = (\ker(I-K))^\perp\,.$$

Máme dokázat rovnost dvou množin. Volme tedy nejprve $\varphi \in \mathcal{R}(I-K)'$. Potřebujeme dokázat, že $\varphi \in (\ker(I-K))^\perp$. Podle definice anihilátoru v 4.22 musíme vzít libovolné $x \in \ker(I-K)$ a ukázat, že $\varphi(x) = 0$. Protože však $x \in \ker(I-K)$, je podle Tvrzení 4.25 $x \in^\perp \mathcal{R}(I-K)'$. Ale námi zvolené φ leží v $\mathcal{R}(I-K)'$, tudíž musí být $\varphi(x) = 0$.

Důkaz opačné inkluze $(\ker(I-K))^\perp \subset \mathcal{R}(I-K)'$ je obtížnější a využívá Hahn–Banachovu rozšiřovací větu. Zájemce odkažme na [Záp], 5.26. ■

Rozmysleme si nyní, co vlastně uvedené tvrzení říká při volné interpretaci. Podívejme se třeba na rovnost

$$\mathcal{R}B =^\perp (\ker B'),$$

kde, pro jednoduchost označíme operátor $I-K$ jako B. Co znamená, že prvek z leží v $\mathcal{R}B$? Nic jiného než že rovnice

$$Bx = z$$

má pro danou pravou stranu z řešení. Dále, kdy prvek z leží v $^\perp \ker B'$? No právě tehdy, když z je kolmý ke každému řešení příslušné „adjungované homogenní rovnice"

$$B'\,x = \mathbf{0}.$$

Rovnost

$$\mathcal{R}B =^\perp (\ker B'),$$

tedy říká, že rovnice

$$Bx = z$$

má řešení (pro jednu konkrétní (!)) pravou stranu z, právě když prvek z je „kolmý" na všechna řešení příslušné adjungované homogenní rovnice

$$B'\,x = \mathbf{0}.$$

Tato věta by měla být známa z lineární algebry, ovšem v protorech konečné dimenze. Tam totiž platí pro libovolné lineární operátory, zatímco v nekonečně rozměrných prostorech kupříkladu v případě, kdy operátor B má tvar $I-K$, kde K je kompaktní.

Vraťme se však nyní ke slavné Fredholmově alternativě. Dostaneme ji jako důsledek následujícího tvrzení.

9.13. Věta. *Nechť K je kompaktní operátor na Banachově prostoru X a $\lambda \neq 0$. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) *operátor $K - \lambda I$ je prostý,*
(ii) *operátor $K - \lambda I$ je na,*
(iii) *operátor $K - \lambda I$ je invertibilní.*

Důkaz. Ekvivalence (i) a (ii) (pro $\lambda = 1$) je obsažena ve Větách 9.8 a 9.10. Uvědomíme-li si, že operátor $K - \lambda I$ je invertibilní, právě když je prostý a na, ihned dostaneme, že i podmínka (iii) je ekvivalentní prvním dvěma. ■

9.14. Fredholmova alternativa. *Nechť X je Banachův prostor, $K \in \mathcal{K}(X)$ kompaktní operátor a $\lambda \neq 0$. Potom buďto rovnice $Kx - \lambda x = y$ má řešení pro každou pravou stranu $y \in X$ anebo rovnice $Kx - \lambda x = 0$ má netriviální řešení.*

Důkaz. Mělo by být jasné, že operátor $K - \lambda I$ je na, právě když pro každé $y \in X$ existuje $x \in X$ tak, že $Kx - \lambda x = y$. A také, že $K - \lambda I$ je prostý, právě když rovnice $Kx - \lambda x = 0$ má pouze triviální řešení $x = 0$. Tudíž ekvivalenci (i) a (ii) předešlé věty lze vyslovit také v následujícím tvaru: Buďto operátor $K - \lambda I$ je na anebo není prostý. A to je právě znění Fredholmovy alternativy. ■

Než přejdeme k popisu spektra kompaktního operátoru, odvoďme si jedno jednoduché tvrzení.

9.15. Lemma. *Nechť T je operátor na Banachově prostoru X, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jeho různá vlastní čísla a $x_1, \dots, x_n$ (nenulové) vlastní vektory příslušné těmto vlastním číslům. Potom vektory $x_1, \dots, x_n$ jsou lineárně nezávislé.*

Důkaz. Předpokládejme, že vektory $x_1, \dots, x_j$ jsou lineárně nezávislé pro jisté $j \in \{2, \dots, n\}$ a že $x_j = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{j-1} x_{j-1}$. Potom ovšem

$$\mathbf{0} = Tx_j - \lambda_j x_j = \alpha_1(\lambda_j - \lambda_1)x_1 + \dots + \alpha_{j-1}(\lambda_j - \lambda_{j-1})x_{j-1}.$$

Odtud podle předpokladu (čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou různá) dostáváme, že $\alpha_1 = \dots = \alpha_{j-1} = 0$, a tudíž $x_j = \mathbf{0}$. A to je samozřejmě spor. ■

9.16. Spektrum kompaktního operátoru. *Nechť K je kompaktní operátor na Banachově prostoru X nekonečné dimenze. Potom $0 \in \sigma(K)$, množina $\sigma(K) \cap \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \geq \varepsilon\}$ je pro libovolné $\varepsilon > 0$ pouze konečná a*

$$\sigma(K) = \{0\} \cup \sigma_p(K)\,.$$

Důkaz. Pokud by 0 neležela ve spektru $\sigma(K)$, byl by operátor K invertibilní. Protože prostor $\mathcal{K}(X)$ všech kompaktních operátorů na X tvoří podle 8.11 ideál a $I = K^{-1} \circ K$, byla by identita na X kompaktním operátorem. A to na prostoru nekonečné dimenze nemůže nastat.

Samozřejmě víme, že $\sigma_p(K) \subset \sigma(K)$. Předpokládejme, že $\lambda \in \sigma(K)$, $\lambda \neq 0$. Tudíž operátor $K - \lambda I$ buďto není prostý anebo není na. V prvním případě je pak $\lambda \in \sigma_p(K)$ podle definice vlastního čísla. Pokud operátor $K - \lambda I$ není na, není také prostý. To plyne ihned z Fredholmovy alternativy 9.14. Takže i v tomto případě dostáváme, že $\lambda \in \sigma_p(K)$.

Zbývá dokázat, že vně libovolného kruhu se středem v počátku leží pouze konečně mnoho bodů spektra operátoru K. Postupujme sporem, předpokládejme, že množina

$$E := \sigma(K) \cap \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \geq \varepsilon\}$$

je pro nějaké $\varepsilon > 0$ nekonečná. Podle právě dokázaného jsou všechny prvky množiny E vlastními čísly operátoru K. Vyberme tedy z množiny E posloupnost $\{\lambda_n\}$ různých vlastních čísel a ke každému λ_n nalezněme příslušný vlastní vektor x_n. Je tedy $\{x_n\}$ posloupnost nenulových prvků prostoru X taková, že $Kx_n = \lambda_n x_n$ pro každé n. Nechť M_n je podprostor X generovaný vektory $\{x_1, \dots, x_n\}$. Podle Lemmatu 9.15 víme, že vektory $\{x_1, \dots, x_n\}$ jsou lineárně nezávislé. Je tedy $\dim M_n = n$, podprostory M_n jsou uzavřené (jakožto konečně dimenzionální) a

$$M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \dots\,, \quad M_n \neq M_{n+1} \quad \text{pro každé} \quad n\,.$$

Podle Rieszova lemmatu o skoro kolmici 9.1 existuje posloupnost $\{z_n\}$ tak, že

$$z_n \in M_n\,,\ ||z_n|| = 1 \ \text{ a } \ \operatorname{dist}(z_n, M_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$$

pro každé $n \geq 2$. Volíme-li $k < j$, dostáváme

$$Kz_j - Kz_k == \lambda_j z_j - \Big(\lambda_k z_k + (Kz_k - \lambda_k z_k) - (Kz_j - \lambda_j z_j)\Big)\,.$$

Protože $\lambda_j z_j \in M_j$ a prvek v závorce leží v M_{j-1}, je

$$||Kz_j - Kz_k|| \geq \operatorname{dist}(\lambda_j z_j, M_{j-1}) = |\lambda_j| \operatorname{dist}(z_j, M_{j-1}) \geq \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Vidíme, že z posloupnosti $\{Kz_n\}$ nelze vybrat konvergentní.

Snad by zbývalo podrobněji odůvodnit, proč $\lambda_k z_k + (Kz_k - \lambda_k z_k) - (Kz_j - \lambda_j z_j) \in M_{j-1}$. Ale to již není obtížné. Protože $z_k = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k$, je

$$Kz_k = \alpha_1 Kx_1 + \dots + \alpha_k Kx_k = \alpha_1 \lambda_1 x_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k x_k \in M_k\,,$$

a tudíž $Kz_k - \lambda_k z_k \in M_k \subset M_{j-1}$. Obdobně máme $z_j = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_j x_j$, takže též

$$\begin{aligned} Kz_j - \lambda_j z_j &= (\beta_1 \lambda_1 x_1 + \dots + \beta_j \lambda_j x_j) - (\beta_1 \lambda_j x_1 + \dots + \beta_j \lambda_j x_j) \\ &= \beta_1(\lambda_1 - \lambda_j) x_1 + \dots + \beta_{j-1}(\lambda_{j-1} - \lambda_j) x_{j-1} \in M_{j-1}\,. \end{aligned}$$

■

9.17. Poznámka. V případě kompaktního operátoru je jeho spektrum vždy neprázdné. Leží v něm totiž číslo 0. To může, ale také nemusí být vlastním číslem.

Spektrum kompaktního operátoru má tedy velice jednoduchou strukturu. Je vždy uzavřenou množinou, jejímž jediným hromadným bodem může být 0. Každý nenulový bod spektra je již vlastním číslem a vně libovolného kruhu o středu v počátku leží pouze konečně mnoho bodů spektra.

E. MOUČNÍK

10. Hilbertovy prostory

10.1. Skalární součin. Hilbertovými prostory budeme rozumět ty Banachovy prostory, jejichž norma je odvozena ze skalárního součinu. Přitom *skalární součin* na vektorovém prostoru W (ten uvažujeme nad reálnými či komplexními čísly $\mathbf{F}$) je zobrazení $(.,.) : W \to \mathbf{F}$ splňující pro každé $x, y, z \in W$ a $\lambda \in \mathbf{F}$ následující požadavky:

(a) $(x,x) \geq 0$, přičemž $(x,x) = 0$, právě když $x = \mathbf{0}$,
(b) $(x,y) = \overline{(y,x)}$,
(c) $(\lambda x, y) = \lambda(x,y)$, $(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x,y)$,
(d) $(x+y, z) = (x,z) + (y,z)$, $(x, y+z) = (x,y) + (x,z)$.

Dvojici $(W, (.,.))$ se někdy říká *prostor se skalárním součinem*, někdo též používá názvu *pre-hilbertův prostor*.

Položíme-li pro $x \in W$

$$||x|| := \sqrt{(x,x)}\,,$$

lehko se přesvědčíme, že $||.||$ je norma na W. Ověření trojúhelníkové nerovnosti je ovšem založeno na následující *Schwarzově nerovnosti*.

10.2. Schwarzova nerovnost. *Pro libovolné prvky x, y prostoru se skalárním součinem je splněna následující Schwarzova nerovnost*

$$|(x,y)| \leq ||x||\,||y||\,.$$

Důkaz. Je-li $y = 0$, není co řešit. V opačném případě položme $\lambda := \frac{(x,y)}{||y||^2}$ a ověřme, že je splněna následující nerovnost

$$0 \leq ||x - \lambda y||^2 = ||x||^2 - \overline{\lambda}(x,y) - \lambda\Big((y,x) - \overline{\lambda}||y||^2\Big) = ||x||^2 - \frac{|(x,y)|^2}{||y||^2}\,.$$

Odtud je již jen krůček k dokončení důkazu Schwarzovy nerovnosti. ■

10.3. Hilbertův prostor. Je-li prostor se skalárním součinem v příslušné normě úplný, nazýváme ho *Hilbertovým*.

V dalším se omezíme na teorii v Hilbertových prostorech. Sami si můžete rozmyslet, která z uváděných tvrzení platí i v prostorech se skalárním součinem a v kterých je předpoklad úplnosti podstatný.

10.4. Lemátko. *Buďte x, y prvky Hilbertova prostoru H. Jestliže $(x,h) = (y,h)$ pro každé $h \in H$, je $x = y$.*

Důkaz. Jestliže $(z,h) = 0$ pro každé $h \in H$, je i $(z,z) = 0$. Odtud ovšem plyne, že $||z|| = 0$, a tudíž i $z = \mathbf{0}$. A to jsme vlastně chtěli ukázat, neboť stačí položit $z := x - y$. ■

10.5. Kolmost v Hilbertových prostorech. Tím, že v Hilbertových prostorech máme definován skalární součin, můžeme v nich zavést pojem kolmosti. Dva prvky x a y jsou v Hilbertově prostoru H na sebe *kolmé* či též *ortogonální*, symbolicky $x \perp y$, jestliže $(x,y) = 0$. Samozřejmě, pokud $x \perp y$, potom i $y \perp x$.

Jsou-li M a N podmnožiny H, řekneme, že A a B jsou kolmé, což opět zapisujeme $M \perp N$, jestliže $m \perp n$ pro libovolné $m \in M$ a $n \in N$. Pokud $A \subset H$, položme

$$A^\perp := \{h \in H : h \perp x \text{ pro každé } x \in A\}\ .$$

Množinu $A^\perp$ nazýváme *ortogonálním doplňkem* A v H. Pro libovolnou množinu A je vždy $A^\perp$ uzavřeným podprostorem H. To za chvíli vysvitne z dalšího, a to i spolu s vysvětlením, proč $A^\perp$ říkáme ortogonální doplněk. Předchozí jednoduché Lemátko 10.4 vlastně říká, že jediným prvkem kolmým na celý prostor H je nulový prvek $\mathbf{0}$. Tedy, že $H^\perp = \{\mathbf{0}\}$.

10.6. Poznámka. V Hilbertových prostorech máme pojem skalárního součinu, a proto můžeme zavést i pojem kolmosti. A ta, jak uvidíme z dalšího, má mnohé velmi příjemné vlastnosti. Je proto otázka, zda lze definovat kolmost i v obecných Banachových prostorech. Samozřejmě tak, aby tento pojem kolmosti splýval s kolmostí právě definovanou v případě Hilbertových prostorů a aby měl pokud možno co nejvíce dobrých vlastností. Obecně lze říci, že i v Banachových prostorech lze definovat kolmost, a to mnoha (navzájem mnohdy neekvivalentními) způsoby. Ovšem leckteré vlastnosti se přitom ztrácejí. Kupříkladu při jedné z definic z toho, že $x \perp y$ nemusí již vyplývat, že i $y \perp x$. Jak by bylo možno definovat kolmost v Banachových prostorech napovídá třeba odstavec 13.48.

Následující věta je jednou z nejznámějších vět matematiky. Samozřejmě pro případ, když se jedná o prostor $\mathbf{R}^2$.

10.7. Pythagorova věta. *Jsou-li x, y prvky Hilbertova prostoru a $x \perp y$, potom*

$$||x||^2 + ||y||^2 = ||x+y||^2, .$$

Důkaz. Jednoduchým výpočtem dostáváme

$$||x+y||^2 = (x+y, x+y) = ||x||^2 + (y,x) + (x,y) + ||y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 \,.$$

■

10.8. Spojitost normy a skalárního součinu. *Zobrazení*

$$h \mapsto ||h|| : H \to \mathbf{F} \quad a \quad \{x,y\} \mapsto (x,y) : H \times H \to H$$

jsou spojitá.

Důkaz. Triviální poznámka na úvod důkazu. Pokud posloupnost $\{x_n\}$ konverguje k prvku x, je omezená. Zajisté, kupříkladu k číslu $\varepsilon = 1$ existuje takové n_0, že $||x_n - x|| < \varepsilon$ pro všechna $n \geq n_0$. Tudíž $||x_n|| \leq 1 + ||x||$ pro tato n a vidíme, že posloupnost $\{||x_n||\}$ je omezená.

A nyní k vlastnímu důkazu. Nechť tedy $h_n \to h$ a $k_n \to k$. Protože

$$|(h_n, k_n) - (h,k)| \leq |(h_n, k_n - k) + (h_n - h, k)| \leq ||h_n||\,||k_n - k|| + ||h_n - h||\,||k||$$

podle Schwarzovy nerovnosti, a protože posloupnost $\{||h_n||\}$ je omezená, dostáváme druhou část tvrzení.

Pokud $h_n \to h$, je podle právě dokázaného $(h_n, h_n) \to (h,h)$, což neříká nic jiného než že $||h_n||^2 \to ||h||^2$. Odtud $||h_n|| \to ||h||$. ■

10.9. Rovnoběžníkové pravidlo. *Pro libovolné prvky x, y Hilbertova prostoru platí*

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2) \,.$$

Důkaz. Stačí použít definici normy ($||h||^2 = (h,h)$) a trochu počítat. ■

10.10. Poznámka. Uvedené rovnosti se obvykle říká *rovnoběžníkové pravidlo*. To nemusí již platit v obecných Banachových prostorech a otázkou je, v jakých prostorech platí. Lze ukázat, že pokud v Banachově prostoru X platí pro jeho libovolné prvky rovnoběžníkové pravidlo, lze v něm již zavést skalární součin. A to tak, aby norma z něho odvozená splývala s původní normou prostoru X. Stačí totiž položit

$$(x,y) := \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2) \,,$$

pokud X je reálný Banachův prostor a

$$(x,y) := \frac{1}{4}\big(||x+y||^2 - ||x-y||^2 + i||x+iy||^2 - i||x-iy||^2\big)$$

v případě komplexního prostoru.

10.11. Příklady Hilbertových prostorů. (a) Definujeme-li pro $x, y \in \mathbf{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$,

$$(x, y) := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \,,$$

tvoří $\mathbf{R}^n$ s takto definovaným „skalárním součinem" Hilbertův prostor. Schwarzova nerovnost, která se v tomto speciálním případě obvykle nazývá *Cauchyova nerovnost*, pak říká, že

$$|x_1 y_1 + \dots + x_n y_n| \le \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}\ \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}\,.$$

(b) Obdobně do prostoru $\mathbf{C}^n$ všech n–tic komplexních čísel lze zavést skalární součin předpisem

$$(x, y) := x_1 \overline{y_1} + \dots + x_n \overline{y_n}\,.$$

Opět $\mathbf{C}^n$ je Hilbertovým prostorem.

(c) Postor l^2 je množina všech posloupností (komplexních) čísel $\{x_n\}$, pro něž $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$. Skalární součin pro $x = (x_n), y = (y_n)$ je definován předpisem

$$(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \, \overline{y_n}\,.$$

Prostor l^2 tvoří s takto definovaným skalárním součinem Hilbertův prostor.

(d) Obecněji, prostory L^2 (zavedené dokonce pro libovolné $p \in [1, \infty]$ v 13.19) jsou Hilbertovy.

(e) Položíme-li pro $f, g \in \mathcal{C}([0, 1])$ (v reálném případě)

$$(f, g) := \int_0^1 f g\,,$$

je $\mathcal{C}([0, 1])$ s $(.,.)$ prostor se skalárním součinem. Není však Hilbertův, neboť v příslušné normě $||f|| = \int_0^1 |f|^2$ není úplný. To je osvětleno v 13.16.

(f) Uvažujme opět prostor komplexních čísel $\mathbf{C}$ opatřený tentokrát skalárním součinem

$$(x, y) := x\,\overline{y}\,.$$

Je to Hilbertův prostor ? Jaké prvky jsou v něm ortogonální ?

(g) Nechť $\mathcal{P}([0, 1])$ je vektorový prostor reálných polynomů na intervalu $[0, 1]$ stupně nejvýše 2 (společně s nulovým polynomem, který podle obvyklé definice nemá žádný stupeň). Tvoří $\mathcal{P}([0, 1])$ se skalárním součinem definovaným jako

$$(p, q) := \int_0^1 p\,q$$

Hilbertův prostor ?

10.12. Charakteristika nejbližšího prvku. *Nechť M je podprostor Hilbertova prostoru H, $m_0 \in M$ a $x \in H$. Potom $||x - m_0|| = \operatorname{dist}(x, M)$, právě když $x - m_0 \perp M$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $||x - m_0|| = \operatorname{dist}(x, M)$. Zvolme libovolné $m \in M$ a reálné ε. Protože $m_0 + \varepsilon m \in M$, máme

$$||x - m_0||^2 \le ||x - (m_0 + \varepsilon m)||^2 = ||x - m_0||^2 - 2\varepsilon(x - m_0, m) + \varepsilon^2 ||m||^2\,.$$

Uvedenou rovnost odvodíme pouhým roznásobením, ovšem pouze v případě, že H je reálný Hilbertův prostor. V případě komplexního prostoru musíme postupovat trochu opatrněji, viz [Záp], věta 1.18. Z naší nerovnosti tedy dostáváme odhad

$$2\varepsilon(x - m_0, m) \le \varepsilon^2\, ||m||^2\,.$$

Pokud je $\varepsilon > 0$, úpravou získáme nerovnost $2(x - m_0, m) \leq \varepsilon ||m||^2$. A protože tato nerovnost platí pro libovolné $\varepsilon > 0$, musí být $(x - m_0, m) \leq 0$. Uvažováním případu $\varepsilon < 0$ dostaneme opačnou nerovnost $(x - m_0, m) \geq 0$. Tudíž $(x - m_0, m) = 0$, čímž jsme ukázali, že $x - m_0 \perp m$. A tedy $x - m_0 \perp M$.

Jestliže naopak $x - m_0 \perp M$ a $m \in M$, je podle Pythagorovy věty 10.7

$$||x - m||^2 = ||(x - m_0) + (m_0 - m)||^2 = ||x - m_0||^2 + ||m_0 - m||^2 \geq ||x - m_0||^2 .$$

A tedy skutečně prvek m_0 je nejbližším prvkem k x ze všech prvků M. ∎

Uvedená věta říká, jak poznáme, že prvek m_0 je nejbližším prvkem k podprostoru M. Nic nevypovídá o tom, existuje-li takový prvek a kolik takových prvků může být. To je ovšem obsahem právě následující věty.

10.13. Existence nejbližšího prvku. *Nechť M je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H a $x \in H$. Potom existuje právě jeden prvek $m \in M$ tak, že*

$$||x - m|| = \operatorname{dist}(x, M) .$$

Důkaz. Není co řešit, je-li $x \in M$. Pak samozřejmě $x = m$ je jediným prvkem, co splňuje uvedenou rovnost. Předpokládejme tedy, že $x \notin M$. Posunutím (transformací $h \mapsto x - h$) můžeme předpokládat, že $x = \mathbf{0}$. Označíme-li $d := \operatorname{dist}(\mathbf{0}, M)$, je $d > 0$ (v případě $d = 0$ by totiž nulový prvek $\mathbf{0}$ ležel v uzávěru M, a tedy i v M) a hledáme vlastně v M prvek o nejmenší normě. Tedy prvek $m \in M$ s vlastností $||m|| = d$.

Takové prvky nemohou být dva různé. Splňují-li totiž m_1, m_2 uvedenou rovnost, vyplývá z toho, že $\frac{m_1+m_2}{2} \in M$, při použití rovnoběžníkového pravidla

$$||m_1 - m_2||^2 = 2(||m_1||^2 + ||m_2||^2) - 4\,||\,\frac{1}{2}(m_1 + m_2)||^2 \leq 2(d^2 + d^2) - 4d^2 \leq 0 .$$

Tedy nutně $m_1 = m_2$.

Ani důkaz existence prvku m není obtížný. Nalezneme posloupnost $\{m_n\}$ z M tak, aby $||m_n|| \to d$ (stačí si uvědomit, že $d = \inf\{||m|| : m \in M\}$). Ukážeme-li, že posloupnost $\{m_n\}$ je cauchyovská, bude mít limitu $m := \lim m_n$. A protože norma je spojitá funkce, musí nutně být $||m|| = \lim ||m_n|| = d$. Zbývá si jedině uvědomit, že $m \in M$. Ale to je samozřejmé, předpokládali jsme totiž, že M je uzavřená množina. Důkaz, že posloupnost $\{m_n\}$ je cauchyovská opět využije postřeh, že $\frac{1}{2}(m_n + m_k) \in M$ a rovnoběžníkové pravidlo. Máme totiž

$$||m_n - m_k||^2 = 2(||m_n||^2 + ||m_k||^2) - 4\,||\,\frac{1}{2}(m_n + m_k)||^2 \leq 2(||m_n||^2 + ||m_k||^2) - 4d^2 \to 0 ,$$

pokud $n, k \to \infty$. ∎

10.14. Poznámka. Pro důkaz existence i jednoznačnosti nejbližšího prvku k podprostoru M jsme využili pouze jeho uzavřenost a vlastnost, že $\frac{x+y}{2} \in M$, pokud $x, y \in M$. Uvědomte si též, že $\frac{x+y}{2}$ je vlastně střed úsečky spojující body x a y.

Množinám, které mají tu vlastnost, že s každými dvěma body obsahují i celou úsečku mezi x a y, říkáme konvexní. Formální definice je tedy tato: Podmnožina C vektorového prostoru W se nazývá *konvexní*, pokud

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in C ,$$

kdykoliv $x, y \in C$ a $\lambda \in (0, 1)$. Je jasné, že každý podprostor je konvexní množinou.

Věta 10.13 tedy platí i za předpokladu, že M je uzavřená konvexní množina.

10.15. Ortogonální projekce. Nechť M je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H. Definujme zobrazení $P_M : H \to M$ tak, že obrazem prvku x je takový prvek $P_M x \in M$, pro nějž $||x - Px|| = \operatorname{dist}(x, M)$. Jeho existence i jednoznačnost je zaručena předchozí Větou 10.13. Zobrazení P_M nazýváme *ortogonální projekcí* prostoru H na podprostor M.

Připomeňme, že *projekcí* rozumíme každý spojitý lineární operátor $P \in \mathcal{L}(H)$ s vlastností $P^2 = P$. Zde, samozřejmě, symbolem P^2 se rozumí složení $P \circ P$.

Zobrazením, která splňují $P^2 = P$ se říká *idempotentní*. A připomeňme ještě, že lineární zobrazení P je *neexpanzivní*, jestliže $||Px|| \leq ||x||$ pro každé $x \in H$.

Již jednoduché příklady v $\mathbf{R}^2$ ukazují, že na daný podprostor (v tomto speciálním případě přímku) exituje mnoho projekcí. Ale jen jedna je význačná, a sice ta, která je daná „kolmým promítáním". A tuto vlastnost má právě popsaná projekce P_M. Jak se dá charakterizovat mezi všemi projekcemi, je popsáno ve Cvičení 10.30.e.

10.16. Vlastnosti ortogonální projekce. *Pro uzavřený podprostor M Hilbertova prostoru H je zobrazení P_M projekcí a neexpanzivním zobrazením H na M. Přitom*

$$\mathcal{R}P_M = M \quad a \quad \ker P_M = M^\perp .$$

Důkaz. Na začátek poznamenejme, že pro každé $x \in H$ máme $x - P_M x \perp M$. To nám říkala charakteristika v 10.12.

Volme $x, y \in H$ a ukažme, že $P_M(x+y) = P_M x + P_M y$. Pro libovolné $m \in M$ tedy máme

$$(x + y - (P_M x + P_M y), m) = (x - P_M x, m) + (y - P_M y, m) = 0 .$$

Tudíž, opět podle charakteristiky v 10.12,

$$||x + y - (P_M x + P_M y)|| = \operatorname{dist}(x + y, M) .$$

Protože však nejbližší prvek v M k $x+y$ je určen jednoznačně a je jím průmět $P_M(x+y)$, musí nutně být $P_M(x+y) = P_M x + P_M y$. Obdobným trikem bychom dokázali, že $P_M(\lambda x) = \lambda P_M(x)$, kdykoliv $x \in H$ a $\lambda \in \mathbf{F}$.

Je-li $x \in M$, je $x = (x - P_M x) + P_M x$. A protože $x - P_M x \perp P_M x$, dostáváme pomocí Pythagorovy věty 10.7, že

$$||x||^2 = ||x - P_M x||^2 + ||P_M x||^2 \geq ||P_M x||^2 .$$

Tedy $||P_M x|| \leq ||x||$, odkud okamžitě plyne, že P_M je omezený operátor.

Protože P_M je identita na M, je $P_M^2 = P_M$. Rovněž tak je zřejmé tvrzení, že obor hodnot $\mathcal{R}P_M = M$.

Je-li $x \in \ker P_M$, tedy je-li $P_M x = \mathbf{0}$, je $x = x - P_M x \in M^\perp$. Je-li naopak $x \in M^\perp$, tedy $x - \mathbf{0} = x \perp M$, dostáváme z definice P_M a charakteristiky 10.12, že $P_M x = \mathbf{0}$. Tedy $\ker P_M = M^\perp$. ∎

10.17. Čebyševovy množiny. Podmnožinu C normovaného lineárního prostoru E nazveme *Čebyševovou*, jestliže ke každému $x \in E$ existuje právě jeden nejbližší prvek v C, přesněji, existuje–li právě jedno $c \in C$ tak, že $||x - c|| = \operatorname{dist}(x, C)$. V 10.13 jsme právě ukázali, že každá uzavřená konvexní podmnožina Hilbertova prostoru je Čebyševova. Jednoduché příklady ukazují, že otevřené množiny mohou být těžko Čebyševovými. Jak je to však s konvexitou ? Jak důležitou roli hraje při hledání „nejlepší aproximace" ? Částečnou odpověď dává následující věta dokázaná T.S. Motzkinem v roce 1935.

Motzkinova věta. *Nechť C je uzavřená Čebyševova podmnožina eukleidovského prostoru $\mathbf{R}^n$. Potom C je konvexní.*

Dodnes otevřeným zůstává problém, zda analogická věta platí i v Hilbertových prostorech nekonečné dimenze.

10.18. Ortogonální rozklad. *Je-li M uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H, potom*

$$H = M \oplus_t M^\perp .$$

Důkaz. Musíme ukázat, že $M \cap M^\perp = \{\mathbf{0}\}$, že libovolný prvek $x \in H$ lze napsat (jednoznačně) ve tvaru $x = x_M + x_{M^\perp}$, kde $x_M \in M$ a $x_{M^\perp} \in M^\perp$ a že projekce P_M je spojitá (anebo ekvivalentně, že podprostory M a $M^\perp$ jsou uzavřené). Je-li ovšem $x \in M \cap M^\perp$, je $(x, x) = 0$, a tedy $x = \mathbf{0}$. Protože $x = P_M x + (x - P_M x)$, přičemž $P_M x \in M$ a $x - P_M x \in M^\perp$, je dokázáno i druhé tvrzení. A v předešlé Větě 10.16 jsme ukázali, že projekce P_M je spojitá (a také víme, že podprostory M a $M^\perp$ jsou uzavřené). ∎

10.19. Důsledek. *Je-li M vlastní uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H, v ortogonálním doplňku $M^\perp$ existuje nenulový prvek.*

Důkaz. Protože $H = M \oplus M^\perp$ a $M \neq H$, musí být $M^\perp \neq \{\mathbf{0}\}$. ∎

10.20. Tvrzení. *Nechť H je Hilbertův prostor a $h \in H$. Potom zobrazení*

$$L_h : x \mapsto (x,h) \quad \textit{definované pro} \quad x \in H$$

je spojitá lineární forma na H. Zobrazení $h \mapsto L_h : H \to H^*$ je izometrické.

Důkaz. Evidentně je L_h lineární forma. Schwarzova nerovnost 10.2 dá odhad

$$|L_h(x)| = |(x,h)| \le ||x||\,||h||\,.$$

Odtud plyne, že L_h je omezená forma a $||L_h|| \le ||h||$. K dokončení důkazu musíme ještě ověřit opačnou nerovnost $||h|| \le ||L_h||$. Ta je však zřejmá v případě, kdy $h = \mathbf{0}$. Pokud je $h \ne \mathbf{0}$, je $\left\|\frac{h}{||h||}\right\| = 1$ a

$$L_h\Big(\frac{h}{||h||}\Big) = \Big(\frac{h}{||h||}, h\Big) = \frac{1}{||h||}(h,h) = ||h||\,.$$

A tedy $||h|| \le ||L_h||$. ■

Ukázali jsme, že každým prvkem $h \in H$ je určena příslušná spojitá lineární forma $L_h \in H^*$. Následující, mnohem netriviálnější tvrzení říká, že každá spojitá lineární forma z H^* je tohoto tvaru, tedy je určena pomocí skalárního součinu nějakým prvkem z H.

10.21. Fréchet–Rieszova věta. *Ke každé spojité lineární formě L na Hilbertově prostoru H existuje právě jeden prvek $h \in H$ tak, že $L = L_h$. Tedy takové $h \in H$, že $Lx = (x,h)$ pro každé $x \in H$.*

Důkaz. Pokud jde o existenční důkaz, v případě nulové formy L stačí položit $h = \mathbf{0}$. Předpokládejme tedy, že $L \ne 0$. V tom případě je $\ker L$ vlastní uzavřený podprostor H a podle Důsledku 10.19 existuje $b \in (\ker L)^\perp$, $b \ne \mathbf{0}$. Můžeme předpokládat, že $||b|| = 1$. Volme $x \in H$. Protože

$$L(bLx - xLb) = Lb\,Lx - Lx\,Lb = 0\,,$$

je $bLx - xLb \in \ker L$. Tudíž tento prvek musí být kolmý na b, odkud dostaneme

$$0 = (bLx - xLb, b) = (bLx, b) - (xLb, b) = Lx - (x, b\overline{Lb})\,.$$

Stačí tedy položit $h := b\overline{Lb}$.

Pokud jde o jednoznačnost, jde o elementární úvahu. Je-li totiž $(x,h_1) = (x,h_2)$ pro všechna $x \in H$, musí být $h_1 = h_2$ podle 10.4. ■

10.22. Poznámka. V případě separabilního Hilbertova prostoru lze uvést i alternativní důkaz Fréchet–Rieszovy věty. Buď tedy $L \in H^*$. Je–li $\{e_n\}$ ortonormální báze H, ukažte že řada $\sum_n \overline{Le_n}\, e_n$ konverguje a její součet je pak hledaný prvek h.

10.23. Duál k Hilbertovu prostoru. *Nechť H je Hilbertův prostor. Zobrazení $\Psi : L \mapsto h$ dané Fréchet-Rieszovou větou 10.21 je prosté izometrické zobrazení H^* na H, přičemž*

$$\Psi(L_1 + L_2) = \Psi(L_1) + \Psi(L_2) \quad a \quad \Psi(\lambda L) = \overline{\lambda}\Psi(L)$$

pro všechna $L_1, L_2 \in H^*$ a $\lambda \in \mathbf{F}$.

V případě reálného Hilbertova prostoru H je tedy Ψ izometricko-izomorfní zobrazení H^* na H.

Důkaz. V Tvrzení 10.20 jsme ukázali, že pro $L \in H^*$ je $||L|| = ||\Psi(L)||$. Tudíž Ψ je izometrie.

Jsou-li $L_1, L_2 \in H^*$, $h_1 = \Psi(L_1)$ a $h_2 = \Psi(L_2)$, je $L_1(x) = (x,h_1)$ a $L_2(x) = (x,h_2)$ pro každé $x \in H$. Tudíž pro $x \in H$ máme

$$(L_1 + L_2)(x) = (x,h_1) + (x,h_2) = (x, h_1 + h_2)\,.$$

Protože zobrazení Ψ je prosté, musí být

$$\Psi(L_1 + L_2) = h_1 + h_2 = \Psi(L_1) + \Psi(L_2)\,.$$

Obdobně lze ukázat, že $\Psi(\lambda L) = \overline{\lambda}\Psi(L)$.

Podle Tvrzení 10.20 je $\Psi(H^*) = H$. ■

10.24. Reflexivita Hilbertových prostorů. *Každý Hilbertův prostor je reflexivní.*

Důkaz. Volme $\Phi \in H^{**}$ (H je Hilbertův prostor). Úkolem je najít $x \in H$ tak, aby $\varepsilon_x = \Phi$ (zde ε značí kanonické vnoření H do H^{**}). Poslední rovnost ovšem znamená, že $\varepsilon_x(\varphi) = \Phi(\varphi)$ pro každé $\varphi \in H^*$.

Je-li $h \in H$, víme, že zobrazení

$$\varphi_h : x \mapsto (x, h) , \quad x \in H ,$$

je prvkem H^*, takže si bez velkých potíží rozmyslíme, že zobrazení

$$h \mapsto \overline{\Phi(\varphi_h)} , \quad h \in H ,$$

je spojitá lineární forma na H (proč jsme potřebovali uvažovat komplexně sdružené číslo ?). Podle Fréchet–Rieszovy věty 10.21 existuje $x \in H$ tak, že

$$\overline{\Phi(\varphi_h)} = (h, x) \quad \text{pro každé} \quad h \in H .$$

Volíme-li tedy $\varphi \in H^*$ a najdeme k němu $h \in H$ tak, aby $\varphi = \varphi_h$, máme

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi_h) = \overline{(h, x)} = (x, h) = \varphi_h(x) = \varphi(x) = \varepsilon_x(\varphi) .$$

Není to úplně nejsnadnější, že ? ∎

10.25. Slabá konvergence v Hilbertových prostorech. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}$ v Hilbertově prostoru H *slabě konverguje* k prvku x, symbolicky $x_n \xrightarrow{w} x$, jestliže $(x_n, h) \to (x, h)$ pro každé $h \in H$.

My jsme vlastně již pojem slabé konvergence zavedli v odstavci 3.1, a to dokonce v obecnějším kontextu Banachových prostorů. Přihlédneme-li však k Fréchet-Rieszově charakteristice spojitých lineárních forem na H v 10.21, vidíme, že nejsme ve sporu s dřívější definicí.

Nyní jde o to, že některé věty lze v Hilbertových prostorech dokazovat jednodušeji. Aniž se odvoláváme na obecnější věty platné v Banachových prostorech. A to může být leckdy poučné. Kupříkladu k důkazu věty, že slabá limita je jednoznačně určena (viz 3.10) jsme potřebovali Hahn–Banachovu větu (přesněji, její důsledek), zatímco v případě analogického tvrzení v Hilbertových prostorech (viz 10.26.a) vystačíme se zcela elementárním důkazem. Obdobně pro důkaz tvrzení, že slabě konvergentní posloupnosti jsou omezené (viz Věta 5.3) jsme využili princip stejnoměrné omezenosti, pro Hilbertovy prostory nepotřebujeme (alespoň zdánlivě) tak hlubokou větu.

Jako ukázku dokažme tedy následující tvrzení.

10.26. Vlastnosti slabé konvergence. *Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost v Hilbertově prostoru H.*

(a) *Jestliže $x_n \xrightarrow{w} x$ a současně $x_n \xrightarrow{w} y$, potom $x = y$.*
(b) *Jestliže $x_n \to x$, potom $x_n \xrightarrow{w} x$.*
(c) *Jestliže $x_n \xrightarrow{w} x$, potom $||x|| \le \liminf ||x_n||$.*
(d) *Jestliže $x_n \xrightarrow{w} x$, potom posloupnost $\{x_n\}$ je omezená.*
(e) *Je-li posloupnost $\{x_n\}$ omezená, lze z ní vybrat slabě konvergentní podposloupnost.*
(f) *Je-li M uzavřený podprostor H a $\{x_n\}$ posloupnost z M slabě konvergující k x, je i $x \in M$.*

Důkaz. (a) Volíme-li $h \in H$, máme $(x_n, h) \to (x, h)$ a také $(x_n, h) \to (y, h)$. Protože (číselná) posloupnost $\{(x_n, h)\}$ nemůže mít dvě různé limity, musí být $(x, h) = (y, h)$. Protože však poslední rovnost platí pro libovolný prvek $h \in H$, je $x = y$.

(b) Tvrzení je zřejmé. V 10.8 jsme ukázali, že skalární součin je spojitou funkcí a stačí se tedy podívat na definici slabé konvergence.

(c) Není co dokazovat v případě, kdy $x = 0$. Nechť tedy $x \neq 0$ a $x_n \xrightarrow{w} x$. Potom s použitím Schwarzovy nerovnosti ($|(x_n, x)| \le ||x_n||\,||x||$) je

$$||x||^2 = (x, x) = \lim (x_n, x) \le \lim |(x_n, x)| \le \liminf ||x_n||\,||x|| .$$

Dostáváme, že $||x|| \le \liminf ||x_n||$.

(d) Předpokládejme, že množina $A := \{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ není omezená. Ukážeme, že v tom případě existuje $h \in H$ tak, že (číselná) posloupnost $\{(x_n, h)\}$ není omezená, a nemůže tudíž konvergovat k prvku (x, h).

Pro $h \in H$ označme

$$p(h) := \sup\{|(x_n, h)| : n \in \mathbf{N}\}\ .$$

Protože množina A není omezená, existuje $y_1 \in A$ tak, že $||y_1|| \geq 1$. Položíme-li $e_1 := \frac{y_1}{||y_1||}$, máme

$$||e_1|| = 1 \quad \text{a} \quad |(e_1, y_1)| = ||y_1|| \geq 1\,.$$

Nechť dále Q je podprostor H generovaný vektorem y_1. Protože $H = Q \oplus Q^\perp$, lze každý prvek $a \in A$ psát ve tvaru

$$a = a^Q + a^{Q^\perp}\,, \quad \text{kde} \quad a^Q \in Q \quad \text{a} \quad a^{Q^\perp} \in Q^\perp\,.$$

Protože posloupnost $\{x_n\}$ je slabě konvergentní, konverguje posloupnost $\{(x_n, e_1)\}$, je tedy omezená, a tím pádem nemůže být posloupnost $\left\{||x_n^{Q^\perp}||\right\}$ omezená. Existuje tedy $y_2 \in A$ a $e_2 \in Q^\perp$ tak, že

$$||e_2|| = 1 \quad \text{a} \quad |(e_2, y_2)| \geq 2(p(e_1) + 2)\,.$$

Indukcí pak nalezneme posloupnost $\{y_n\}$ vybranou z A a posloupnost jednotkových vektorů $\{e_n\}$ tak, aby

$$e_{n+1} \in \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}^\perp \quad \text{a} \quad |(y_{n+1}, e_{n+1})| \geq (n+1)\Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\, p(e_j) + n + 1\Big)\,.$$

Z konstrukce plyne, že $(e_j, y_{n+1}) = 0$ pro $j > n+1$. Nyní stačit položit

$$h := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, e_n$$

(uvedená řada je v prostoru H konvergentní, neboť $\{e_n\}$ je ortonormální posloupnost a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje). Odhadem zjistíme, že

$$\begin{aligned}
|(h, y_{n+1})| &= \Big|\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}(e_j, y_{n+1}) + \frac{1}{n+1}(e_{n+1}, y_{n+1})\Big| \\
&\geq \Big|\frac{1}{n+1}(e_{n+1}, y_{n+1})\Big| - \Big|\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}(e_j, y_{n+1})\Big| \\
&\geq \frac{1}{n+1}(n+1)\Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\, p(e_j) + n + 1\Big) - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} p(e_j) \\
&\geq n + 1\,,
\end{aligned}$$

odkud plyne, že posloupnost $\{(x_n, h)\}$ nemůže být omezená.

(e) Nechť $\{x_n\}$ je omezená množina v H, $\beta := \sup\{||x_n|| : n \in \mathbf{N}\}$. Předpokládejme zprvu, že H je separabilní, máme v něm tedy hustou spočetnou podmnožinu $Z := \{z_n\} \subset H$. Nejdříve si rozmyslíme, že posloupnost $\{(x_n, h)\}$ konverguje pro každé $h \in H$, pokud konverguje posloupnost $\{(x_n, z)\}$ pro každé $z \in Z$. Vskutku, volme $h \in H$ a $\varepsilon > 0$. Najděme $z \in Z$ tak, aby $||h - z|| \leq \varepsilon$. Potom

$$\begin{aligned}
|(x_n, h) - (x_m, h)| &\leq |(x_n, h) - (x_n, z)| + |(x_n, z) - (x_m, z)| + |(x_m, z) - (x_m, h)| \\
&\leq 2\beta\varepsilon + |(x_n, z) - (x_m, z)|\,,
\end{aligned}$$

odkud již tvrzení snadno plyne. V další části důkazu použijeme známou diagonální metodu. Protože $|(x_n, z_1)| \leq \beta \, ||z_1||$, je (číselná) posloupnost $\{(x_n, z_1)\}$ omezená. Lze z ní tedy vybrat konvergentní podposloupnost $\{(x_n^1, z_1)\}$. A pokračujeme dále, z posloupnosti $\left\{(x_n^1, z_2)\right\}$ lze vybrat konvergentní podposloupnost $\left\{(x_n^2, z_2)\right\}$. Potom diagonální posloupnost $\{(x_n^n, z_k)\}$ konverguje pro každé k a podle toho, co jsme uvedli na začátku důkazu, konverguje i posloupnost $\{(x_n^n, h)\}$ pro každé $h \in H$. Je tedy posloupnost $\{x_n^n\}$ slabě konvergentní.

Pokud prostor H není separabilní, uvažujme uzavřený lineární obal posloupnosti $\{x_n\}$ v H. To je již separabilní Hilbertův prostor a na něj můžeme aplikovat již dokázané tvrzení.

(f) Volme $h \in M^\perp$. Protože $(x_n, h) = 0$ a $(x_n, h) \to (x, h)$, dostáváme, že $(x, h) = 0$. Tudíž $x \in M^{\perp\perp}$. Nyní si stačí uvědomit, že $M^{\perp\perp} \subset M$. ■

Uveďme ještě jednu zajímavou vlastnost Hilbertových prostorů. Někdy se jí říká *Radon–Rieszova vlastnost* a kromě Hilbertových prostorů tuto vlastnost mají i některé další typy Banachových prostorů (kupříkladu prostory l^1, L^p prostory pro $p \in (1, \infty)$ či obecněji všechny uniformně konvexní prostory).

10.27. Radon–Rieszova vlastnost. *Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků Hilbertova prostoru. Jestliže $x_n \xrightarrow{w} x$ a $||x_n|| \to ||x||$, potom $x_n \to x$.*

Důkaz. Sledujte rovnost

$$||x_n - x||^2 = ||x_n||^2 - (x_n, x) - \overline{(x_n, x)} + ||x||^2 \,,$$

ze které tvrzení ihned plyne. ■

10.28. Hermiteovské operátory. Operátor T na Hilbertově prostoru H je *hermiteovský*, jestliže $(Tx, y) = (x, Ty)$ pro každé $x, y \in H$. Tyto operátory hrají důležitou roli v mnoha oblastech matematiky i fyziky, zejména pak v souvislosti s větami o spektrálním rozkladu. Tato partie již ale nepatří do přednášky z Úvodu do funkcionální analýzy a je jí věnována pozornost v jiných pžednáškách. Pokud by si čtenář chtěl rozšířit obzor i o tuto problematiku, může nahlédnout do [Záp]. Všimněme si pouze v dalším vztahu k hilbertovsky adjungovaným operátorům.

10.29. Hilbertovsky adjungované zobrazení. Nechť H_1,H_2 jsou Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Volíme-li $y \in H_2$ pevně a položíme-li

$$F_y : x \mapsto (y, Tx) \quad \text{pro} \quad x \in H_1 \,,$$

zjistíme, že $F_y \in H_1^*$. Podle Fréchet-Rieszovy reprezentační věty 10.21 existuje právě jedno $a_y \in H_1$ tak, že

$$F_y(x) = (x, a_y) \quad \text{pro každé} \quad x \in H_1 .$$

Můžeme tedy definovat

$$T^* : y \mapsto a_y : H_2 \to H_1 \,.$$

Není příliš obtížné zjistit, že $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ a že $||T|| = ||T^*||$. Zobrazení T^* se nazývá *hilbertovsky adjungované* k T a je tedy určeno rovností $(Tx, y) = (x, T^*y)$ platnou pro všechna $x \in H_1$ a $y \in H_2$.

Uvažujme opět Hilbertovy prostory H_1 a H_2 a operátor $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Výslovně upozorněme, že hilbertovsky adjungovaný operátor T^* je zobrazení z původního prostoru H_2 do H_1. To proto, že kromě T^* máme definován i (banachovsky) adjungovaný operátor T' z odstavce 4.18, ten ovšem operuje z duálu H_2^* do H_1^*. Jaký je tedy vztah mezi T^* a T' ? Vraťme se k odstavci 10.23. Tam jsme definovali „rieszovské zobrazení" $\Psi_H : H^* \to H$, které v jistém smyslu ztotožňuje duál H^* s původním Hilbertovým prostorem H. Zkuste si sami rozmyslet, že

$$T^* = \Psi_{H_1} \circ T' \circ \Psi_{H_2}^{-1} \,.$$

Na závěr ještě poznamenejme, že operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ je hermiteovský, právě když $T = T^*$.

10.30. Elementární cvičení. (a) Ukažte, že ve Schwarzově nerovnosti 10.2 platí znamení rovnosti, právě když prvky x a y jsou lineárně závislé.

(b) Nechť pro prvky x, y reálného Hilbertova prostoru platí Pythagorova věta: $||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$. Ukažte, že $x \perp y$. Na příkladě si rozmyslete, že toto tvrzení nemusí již platit pro komplexní Hilbertovy prostory.

(c) Ukažte, že pro libovolné prvky x, y, z Hilbertova prostoru platí následující *Apolloniova identita*

$$2||x - z||^2 + 2||y - z||^2 = ||x - y||^2 + 4 \left\| z - \frac{x + y}{2} \right\|^2 .$$

Co říká tato rovnost geometricky ?

Návod. Buďto spočtěte přímo anebo použijte rovnoběžníkové pravidlo. ♣

(d) Nechť x, y jsou prvky Hilbertova prostoru. Ukažte, že následující výroky jsou ekvivalentní:

(i) $x \perp y$,
(ii) $||x + \lambda y|| = ||x - \lambda y||$ pro všechny skaláry λ,
(iii) $||x|| \leq ||x + \lambda y||$ pro všechny skaláry λ.

Rozmyslete, co tyto podmínky říkají geometricky.

(e) Nechť P je netriviální projekce na Hilbertově prostoru H (tedy $P \in \mathcal{L}(H)$, $P^2 = P$ a existuje $x \in H$ tak, že $Px \neq \mathbf{0}$). Následující výroky jsou ekvivalentní:

(i) existuje (netriviální) uzavřený podprostor $M \subset H$ tak, že $P(H) = M$ a $||x - Px|| = \operatorname{dist}(x, M)$ pro každé $x \in H$,
(ii) $\mathcal{R}P \perp \ker P$,
(iii) $||P|| = 1$,
(iv) P je hermiteovský (tj. $P = P^*$).

Je-li tedy jedna z těchto ekvivalentních podmínek splněna, je P ortogonální projekcí P_M ve smyslu definice v 10.15.

E. KÁVA A LIKÉR

11. Slabé topologie pro pokročilé

Na začátek se věnujme pojmu topologického prostoru. Podáme ovšem pouze nejelementárnější definice.

11.1. Topologické prostory. *Topologickým prostorem* rozumíme množinu T, v níž je vydělen jistý systém τ jejích podmnožin, které nazýváme *otevřenými* množinami, mající následující vlastnosti:

(a) $\emptyset, T \in \tau$,
(b) sjednocení libovolného systému množin z τ leží opět v τ,
(c) průnik konečného počtu množin ze systému τ je opět v τ.

Kolekci τ nazývejme krátce *topologií* na množině T. Jako příklad topologie poslouží soustava všech otevřených podmnožin nějakého metrického prostoru anebo též třeba soustava všech podmnožin dané množiny T (tu pak nazýváme *diskrétní* topologií).

Doplňkům množin z τ říkáme *uzavřené množiny*. Protože průnik libovolné kolekce uzavřených množin je uzavřená množina, což plyne ihned z de Morganových pravidel, a protože celý prostor T je též uzavřená množina, existuje ke každé množině $A \subset T$ nejmenší uzavřená množina obsahující A. Označme ji $\overline{A}$ a nazvěme *uzávěrem* množiny A. Je tedy

$$\overline{A} = \bigcap \{F : F \supset A \,, F \text{ uzavřená}\} \;.$$

Nečiní žádný problém definovat konvergenci v topologickém prostoru (T, τ). K tomu zaveďme nejprve ještě dva další pojmy. Je-li A podmnožina T, označme

$$\operatorname{Int} A := \bigcup \{G \in \tau : G \subset A\} \;.$$

Vzhledem k (b) je $\operatorname{Int} A$ otevřená množina (čili leží v τ), obvykle se jí říká *vnitřek* množiny A. *Okolím* bodu $t \in T$ rozumíme každou množinu A obsahující t ve svém vnitřku. Tedy soustava $\mathfrak{U}(t)$ všech okolí bodu t je systém $\{A \subset T : t \in \operatorname{Int} A\}$.

Řekneme tedy, že posloupnost $\{t_n\}$ bodů topologického prostoru T *konverguje* k bodu t, což zapisujeme $t_n \to t$, jestliže ke každému okolí $U \in \mathfrak{U}(t)$ existuje n_0 tak, že $t_n \in U$ pro každé $n \geq n_0$. Bohužel zcela obecně by se mohlo stát, že jedna posloupnost by mohla konvergovat ke dvěma různým bodům. To ovšem nenastane, splňuje-li topologický prostor následující podmínku:

(*) jsou-li x, y různé body T, existují okolí $U_x \in \mathfrak{U}(x)$ a $U_y \in \mathfrak{U}(y)$ tak, že $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Topologiím, které splňují (*) říkáme *Hausdorffovy*.

Máme-li pojem otevřených množin, můžeme bez problémů definovat spojitá zobrazení. Jsou-li (T_1, τ_1) a (T_2, τ_2) dva topologické prostory a $f : T_1 \to T_2$ zobrazení mezi nimi, řekneme, že f je *spojité* zobrazení, jestliže $f^{-1}(G) \in \tau_1$ pro každou množinu $G \in \tau_2$ (vzory „otevřených" množin z T_2 jsou množiny „otevřené" v T_1).

11.2. Slabá topologie na X. Nechť X je (reálný) normovaný lineární prostor. Množina $G \subset X$ je *slabě otevřená* či *w-otevřená*, jestliže ke každému $x \in G$ lze nalézt funkcionály $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in X^*$ tak, že

$$V_x(\varphi_1, \dots, \varphi_n) := \{t \in X : |\varphi_1(x-t)| < 1, \dots, |\varphi_n(x-t)| < 1\} \subset G \,.$$

Ujasněme si hned následující fakt.

11.3. Fakt. *Je-li $x \in X$, $\varphi \in X^*$ a $d > 0$, je množina*

$$D := \{t \in X : |\varphi(x-t)| < d\}$$

jak otevřená, tak i w-otevřená.

Důkaz. Otevřenost plyne ze spojitosti zobrazení $t \mapsto |\varphi(x-t)|$. Pokud jde o w-otevřenost množiny D, volme $t_0 \in D$. Naším úkolem je najít $\psi \in X^*$ tak, aby $\{t \in X : |\psi(t_0 - t)| < 1\} \subset D$. K tomu stačí položit $\psi := \frac{1}{d-|\varphi(x-t_0)|}\,\varphi$. Je-li totiž $t \in X$ takové, že $|\psi(t_0 - t)| < 1$, dostáváme

$$\begin{aligned} |\varphi(x-t)| &= |\varphi(x-t_0) + \varphi(t_0 - t)| \le |\varphi(x-t_0)| + |\varphi(t_0-t)| \\ &< |\varphi(x-t_0)| + (d - |\varphi(x-t_0)|)\,|\psi(t_0-t)| < d\,, \end{aligned}$$

tudíž $t \in D$. ∎

Označme symbolem w soustavu všech slabě otevřených podmnožin X. V dalším tvrzení hned ukážeme, že w tvoří topologii, samozřejmě ji nazýváme *slabou topologií*.

11.4. Věta. *Systém množin w na normovaném lineárním prostoru X tvoří Hausdorffovu topologii. Slabě otevřené množiny jsou otevřené (v normě).*

Důkaz. Je jasné, že $\emptyset$ i celý prostor X jsou w-otevřené množiny a že soustava w je uzavřená na tvoření libovolných sjednocení.

Nechť tedy $x \in G_1 \cap \dots \cap G_k$, kde $G_1, \dots, G_k$ jsou w-otevřené množiny. Volíme-li $j \in \{1, \dots, k\}$, existují funkcionály $\varphi_1^j, \dots, \varphi_{n_j}^j \in X^*$ tak, že $V_x(\varphi_1^j, \dots, \varphi_{n_j}^j) \subset G_j$. Potom ovšem

$$V_x(\varphi_1^1, \dots, \varphi_{n_1}^1, \dots, \varphi_1^k, \dots, \varphi_{n_k}^k) \subset G_1 \cap \dots \cap G_k$$

a vidíme, že $G_1 \cap \dots \cap G_k \in w$.

Volme nyní $x, y \in X$, $x \neq y$. Podle Věty 4.3 o tečně existuje $\varphi \in X^*$ tak, že

$$\varphi(x-y) = ||x-y|| > 0\,.$$

Položíme-li

$$U_x := \{t \in X : |\varphi(t-x)| < \frac{1}{3}||x-y||\} \quad \text{a} \quad U_y := \{t \in X : |\varphi(t-y)| < \frac{1}{3}||x-y||\}\,,$$

jsou podle předchozí úvahy v 11.3 U_x a U_y w-otevřené množiny. Jsou samozřejmě disjunktní, kdyby totiž $t \in U_x \cap U_y$, měli bychom

$$||x-y|| = \varphi(x-y) \le |\varphi(x-t)| + |\varphi(t-y)| < \frac{2}{3}||x-y||\,.$$

Samozřejmě U_x obsahuje x a $y \in U_y$. Je tedy slabá topologie w Hausdorffova.

Zbývá ukázat, že každá w-otevřená množina je otevřená. Je-li však G w-otevřená a $x \in G$, existují $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in X^*$ tak, že $V_x(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \subset G$. Protože

$$V_x(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \{t \in X : |\varphi_1(x-t)| < 1\} \cap \dots \cap \{t \in X : |\varphi_n(x-t)| < 1\}\,,$$

je opět pomocí 11.3 $V_x(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ množina otevřená. Tím jsme ukázali, že i G je otevřená. ∎

Konvergence posloupností ve slabé topologii w není ničím jiným než slabou konvergencí, kterou jsme zavedli v 3.1. To ukazuje následující postřeh.

11.5. Tvrzení. *Posloupnost $\{x_n\}$ prvků normovaného lineárního prostoru X konverguje ve slabé topologii k x, právě když $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$ pro každé $\varphi \in X^*$, čili když $x_n \xrightarrow{w} x$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $x_n \to x$ ve slabé topologii. Volíme-li $\varphi \in X^*$ a $\varepsilon > 0$, je množina $U := \{t \in X : |\varphi(t-x)| < \varepsilon\}$ w-otevřené okolí x. Existuje tedy n_0 tak, že $x_n \in U$ pro všechna $n \ge n_0$. Pro tato n pak tedy máme $|\varphi(x_n) - \varphi(x)| = |\varphi(x_n - x)| < \varepsilon$.

Obráceně, nechť pro každé $\varphi \in X^*$ je $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$ a nechť U je w-okolí x. Podle definice existují $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in X^*$ tak, že $V_x(\varphi_1, \dots, \varphi_k) \subset U$. Podle předpokladu existuje n_0 tak, že

$$|\varphi_1(x_n - x)| = |\varphi_1(x_n) - \varphi_1(x)| < 1\,, \dots\,, \; |\varphi_k(x_n - x)| = |\varphi_k(x - n) - \varphi(x)| < 1$$

pro $n \geq n_0$. Tudíž pro tato n je $x_n - x \in U$. ■

Slabá topologie má, alespoň pro začátečníka, některé na první pohled překvapivé vlastnosti. Kupříkladu okolí bodu si v konečné dimenzi a konec konců i v metrických prostorech představujeme jako „kuličku" okolo tohoto bodu. Přinejmenším tedy jako množinu omezenou. Tato představa je však falešná v prostorech nekonečné dimenze, tam vlastně libovolné okolí bodu je množina neomezená a raději si je představujme jako nějaký „tubus" či „rouru". Následující odstaveček snad trochu osvětlí tento problém. Budeme v něm však potřebovat jedno *algebraické lemma*. To je uvedeno v 13.56. Vypovídá následující: *Jsou-li* $\varphi, f_1, \ldots, f_n$ *lineární formy na vektorovém prostoru* W *a* $f_1(x) = \cdots = f_n(x) = 0$ *kdykoliv* $\varphi(x) = 0$, *potom je forma* φ *lineární kombinací forem* $f_1, \ldots, f_n$.

11.6. Slabá okolí. *Nechť* X *je normovaný lineární prostor nekonečné dimenze a* U *je slabé okolí (tedy okolí ve slabé topologii) prvku* $\mathbf{0}$. *Potom* U *je neomezená množina v prostoru* X.

Důkaz. Podle definice w–okolí víme, že existují $f_1, \ldots, f_n \in X^*$ tak že

$$\{x \in X : |f_1(x)| < 1, \ldots, |f_n(x)| < 1\} \subset U .$$

Podle Důsledku 13.57 je $\bigcap_{j=1}^{n} \ker f_j \neq \{\mathbf{0}\}$. Označíme-li $M := \bigcap_{j=1}^{n} \ker f_j$, je tedy M netriviální (uzavřený) podprostor X. Samozřejmě, M je neomezený. (Je-li totiž $x \in M$ nenulový prvek, je $\lambda x \in M$, přičemž $||\lambda x|| = |\lambda|\; ||x||$.) K závěru důkazu si stačí uvědomit, že $M \subset U$ (a že nadmnožina neomezené množiny je sama neomezená). ■

11.7. Slabé uzávěry. *Nechť* $S_X := \{x \in X : ||x|| = 1\}$ *je jednotková sféra normovaného lineárního prostoru* X *nekonečné dimenze. Potom* $\mathbf{0}$ *leží ve slabém uzávěru* S_X.

Důkaz. Musíme ukázat, že libovolné w-okolí $\mathbf{0}$ protne sféru S_X. Buď tedy U takové okolí. Stejně jako v důkazu předchozí Věty 11.6 ukážeme, že existuje netriviální lineární podprostor $M \subset U$. Ten určitě sféru S_X protne, tedy i $U \cap S_X \neq \emptyset$. ■

11.8. Poznámka. Obdobně se ukáže, že slabým uzávěrem S_X je celá uzavřená jednotková koule B_X. Někdy se může stát, že dokonce existuje posloupnost prvků ze sféry S_X, která slabě konverguje k 0. To jsme viděli třeba na příkladech v 3.1 a 3.6. Obecně tomu tak být nemusí. Kupříkladu *Schurova věta* říká, že v prostoru l^1 slabá a silná konvergence posloupností splývají. Takže i když se 0 dostane v prostoru l^1 do slabého uzávěru sféry, neexistuje posloupnost z této sféry, která by k $\mathbf{0}$ slabě konvergovala. To souvisí s tím, že v obecných topologických prostorech se uzávěry množin nedají získat pomocí posloupností. Na rozdíl od metrických prostorů, kde tomu tak je.

Odtud též vyplývá, že slabá topologie na prostoru l^1 není *metrizovatelná* (na l^1 neexistuje metrika, v níž by otevřené množiny splývaly se slabě otevřenými množinami). Prostor l^1 však není výjimečným. Poslední tvrzení totiž platí v libovolném prostoru nekonečné dimenze.

11.9. Věta. *Nechť* X *je normovaný lineární prostor nekonečné dimenze. Potom slabá topologie* w *na* X *není metrizovatelná.*

Důkaz. Předpokládáme-li, že w je metrizovatelná metrikou ϱ, existuje spočetná báze okolí $\mathbf{0}$, kupříkladu lze vzít

$$U_n := \left\{x \in X : \varrho(x, \mathbf{0}) < \frac{1}{n}\right\} .$$

Volme $\varphi \in X^*$. Protože množina $\{x \in X : |\varphi(x)| < 1\}$ je w-okolím nuly, existuje n a funkcionály $f_1^n, \ldots, f_{k_n}^n \in X^*$ tak, že

$$V_{\mathbf{0}}(f_1^n, \ldots, f_{k_n}^n) \subset U_n \subset \{x \in X : |\varphi(x)| < 1\} .$$

Lehce odvodíme, že $\ker f_1^n \cap \cdots \cap \ker f_{k_n}^n \subset \ker \varphi$, a protože opět máme k dispozici algebraické lemma 13.56, je φ lineární kombinací $f_1^n, \ldots, f_{k_n}^n$. Odtud vyplývá, že prostor X^* má spočetnou algebraickou bázi. A to není v úplných prostorech (a duál X^* je vždy úplný) podle Baireovy věty o kategoriích 13.41 možné. Normovaný lineární prostor se spočetnou algebraickou bází je totiž, jak si snadno rozmyslíme, vždy první kategorie. Pokud byste váhali, zde je důvod. Vezměme nějakou (spočetnou) algebraickou bázi $\{x_n\}$ normovaného lineárního prostoru E a označme X_n podprostor E generovaný vektory $x_1,\dots,x_n$. Jakožto konečně dimenzionální, jsou podle Věty 13.11 všechny prostory X_n uzavřené a řídké. Protože $E=\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, je prostor E 1. kategorie. ■

Další otázkou, kterou budeme zkoumat, je charakteristika spojitých lineárních forem na prostoru X, uvažujeme-li na něm však slabou topologii. Protože w-otevřených množin je méně než otevřených, musí být každá slabě spojitá lineární forma na X i spojitá, jinými slovy $(X,w)^*\subset X^*$ (samozřejmě že symbol $(X,\tau)^*$ značí prostor všech lineárních forem na X, které jsou spojité v topologii τ). Následující věta nám objasní, proč platí dokonce rovnost.

11.10. Věta. *Nechť w je slabá topologie na normovaném lineárním prostoru X. Potom*

$$(X,w)^*=X^*\,.$$

Důkaz. Volme $f\in X^*$. Ideální by byl následující argument: Jestliže $x_n\xrightarrow{w}x$, potom podle definice slabé konvergence je $f(x_n)\to f(x)$, a f je spojitá. Víme však, že při studiu obecných topologií nevystačíme pouze s posloupnostmi (my jsme vlastně dokázali, že f je jenom slabě „sekvenciálně" spojitá).

Tedy jinak. Volme $x\in X$ a $\varepsilon>0$. Množina $D:=\{t\in X:|f(x-t)|<\varepsilon\}$ je w-otevřená podle 11.3. A jsme hotovi, neboť D je w-okolí bodu x a pro $t\in D$ je $|f(t)-f(x)|<\varepsilon$. ■

11.11. Slabá* topologie na X^*. Uvažujme opět normovaný lineární prostor X a vrhněme se nyní na slabé topologie na jeho duálu X^*. Proč používáme množné číslo, vysvitne z dalšího.

Množinu $G\subset X^*$ prohlásíme za *w^*-otevřenou*, jestliže ke každému $f\in G$ lze nalézt body $x_1,\dots,x_n\in X$ tak, že

$$V_f(x_1,\dots,x_n):=\{\varphi\in X^*:|\varphi-f|(x_1)<1,\dots,|\varphi-f|(x_n)<1\}\subset G\,.$$

Soustava w^*-otevřených množin tvoří na X^* topologii. To zjistíme obdobně jako v případě w-topologie. Rovněž tak důkazy dalších tvrzení lze vést analogicky. Shrňme proto vlastnosti w^*-topologie, kterou též někdy nazýváme *slabou* topologií*, do následující věty.

11.12. Věta. *Buď X normovaný lineární prostor. Systém w^*-otevřených množin tvoří na X^* Hausdorffovu topologii. Každá w^*-otevřená podmnožina X^* je otevřená i v normě prostoru X^*. Je-li $\dim X=\infty$ a X je Banachův, není w^*-topologie metrizovatelná.*

Posloupnost funkcionálů $\{\varphi_n\}$ konverguje ve w^*-topologii k $\varphi\in X^*$, právě když $\varphi_n(x)\to\varphi(x)$ pro každé $x\in X$.

11.13. Varování. Protože i sám duál X^* libovolného normovaného lineárního prostoru X je normovaný lineární prostor (dokonce Banachův), máme na něm definovánu také slabou w-topologii. Zopakujme definici: Množina $G\subset X^*$ je w-otevřená, jestliže ke každému $f\in G$ existují funkcionály $F_1,\dots,F_n\in X^{**}$ tak, že

$$V_f(F_1,\dots,F_n):=\{\varphi\in X^*:|F_1(f-\varphi)|<1,\dots,|F_n(f-\varphi)|<1\}\subset G\,.$$

Na rozdíl od této definice je množina $G\subset X^*$ w^*-otevřená, jestliže ke každému $f\in G$ lze nalézt body $x_1,\dots,x_n\in X$ tak, že

$$V_f(x_1,\dots,x_n):=\{\varphi\in X^*:|\varphi-f|\,(x_1)<1,\dots,|\varphi-f|\,(x_n)<1\}\subset G\,.$$

Víme však, že $|\varphi-f|\,(x)=|\varphi(x)-f(x)|=|\varepsilon_x(\varphi)-\varepsilon_x(f)|=|\varepsilon_x(\varphi-f)|)$. Takže

$$V_f(x_1,\dots,x_n)=\{\varphi\in X^*:|\varepsilon_{x_1}(\varphi-f)|<1,\dots,|\varepsilon_{x_n}(\varphi-f)|<1\}=V_f(\varepsilon_{x_1},\dots,\varepsilon_{x_n})\,.$$

Vidíme tedy, že každá w^*-otevřená podmnožina X^* je i w-otevřená, avšak tyto dvě topologie nemusejí zdaleka splývat.

Ještě jedno varování. Na prostoru X máme definovánu pouze slabou w-topologii, na jakémkoliv duálu máme definovány pak obě topologie, slabou topologii w i slabou* topologii w^*.

Též by se mohlo zdát, že mnohá tvrzení platná pro w-topologii budou mít své analogie i pro w^*-topologii. Ani tomu tak není. Rovněž tak důkazy, které můžeme provést pro w-topologii se nemusí hodit pro důkazy tvrzení o w^*-topologii.

Než shrneme hlubší vlastnosti těchto topologií do následující věty, připomeňme znovu ještě dvě definice.

11.14. Kompaktní a sekvenciálně kompaktní množiny. Podmnožina K topologického prostoru T je *kompaktní*, jestliže z každého pokrytí množiny K lze vybrat jeho konečné podpokrytí. Dále, K je *sekvenciálně kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti v K lze vybrat konvergentní podposloupnost s limitou v K. Zatímco v metrických prostorech tyto pojmy splývají, v obecných topologických prostorech tomu tak není.

11.15. Věta. *Nechť X je normovaný lineární prostor, B_X a B_{X^*} uzavřené jednotkové koule v X a X^*. Pro w a w^*-topologii platí následující tvrzení.*

(a) *Uzavřená jednotková koule B_{X^*} je w^*-kompaktní podmnožina X^*.*
(b) *Uzavřená jednotková koule B_X je w-kompaktní, právě X je reflexivní.*
(c) *Topologie w a w^* splývají na X^*, právě když X je reflexivní.*
(d) *Podmnožina K Banachova prostoru X je w-kompaktní, právě když K je v topologii w sekvenciálně kompaktní.*

Tvrzení (a) bývá označováno jako *Alaogluova věta* nebo též *Banach–Alaogluova věta*, charakteristice reflexivity pomocí slabé kompaktnosti jednotkové koule se říká *Banach-Bourbakiho charakteristika reflexivity*, zatímco charakteristika uvedená v (d) se obvykle nazývá *Eberlein-Šmuljanova*.

11.16. Cvičení. (a) Ukažte, že jednotková koule $B_X := \{x \in X : ||x|| \le 1\}$ normovaného lineárního prostoru X nekonečné dimenze nemá ve slabé topologii žádný vnitřní bod.

Návod. Nechť třeba $\mathbf{0}$ je slabě vnitřním bodem B_X. Existují tedy $f_1, \dots, f_n \in X^*$ tak, že $V_{\mathbf{0}}(f_1, \dots, f_n) \subset B_X$. A to, v nekonečné dimenzi, není možné. Proč ? Důvod je stejný jako v důkazu 11.6. ♣

12. Zabrejkovo lemma

V této kapitole uvedeme důkazy principu stejnoměrné omezenosti a vět o otevřeném zobrazení či o uzavřeném grafu. Naše strategie je založena na jednom obecném lemmatu, nazývejme ho Zabrejkovým lemmatem, z něhož pak odvodíme všechny věty. Začněme tedy s jeho důkazem. K jeho formulaci potřebujeme následující pojem.

12.1. σ–sublineární pseudonorma. Řekneme, že pseudonorma p na normovaném lineárním prostoru E je *σ–sublineární*, jestliže

$$p\Big(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\Big) \le \sum_{n=1}^{\infty} p(x_n)$$

pro každou konvergentní řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ v E.

Každá spojitá pseudorma na normovaném lineárním prostoru je samozřejmě σ–sublineární. Platí však i opačné tvrzení, které uvedeme právě jako *Zabrejkovo lemma*. Nejdříve však uveďme ještě jedno jednoduché tvrzeníčko, jeho důkaz můžete porovnat s důkazem Lemátka 2.1.

12.2. Tvrzení. *Nechť pseudonorma p na normovaném lineárním prostoru E je omezená na jistém okolí* 0. *Potom je p na E spojitá.*

Důkaz. Předpokládejme, že $p(t) \le K$ pro $||t|| \le \Delta$. Volme $x, y \in E$. Potom

$$p\Big(\Delta\,\Big(\frac{x-y}{||x-y||}\Big)\Big) \le K$$

a z nerovnosti

$$|p(x) - p(y)| \le p(x-y) \le \frac{K}{\Delta}\,||x-y||$$

lehce odvodíme, že p je spojitá (dokonce stejnoměrně) na E. ■

12.3. Zabrejkovo lemma. *Buď p σ–sublineární pseudonorma na Banachově prostoru X. Potom p je omezená, a tedy spojitá.*

Důkaz. Položme
$$G := \Big\{x \in X : p(x) < 1\Big\}\,.$$

Množina G, která je vlastně „otevřenou jednotkovou koulí” pro pseudonormu p, je *pohlcující*. To znamená, že ke každému $x \in X$, $x \neq \mathbf{0}$, lze nalézt takové $t_x > 0$, že $x \in t_x G$. Je-li totiž $x \in X$ a $t_x > p(x)$, je $x \in t_x G$. Množina G je také *absolutně konvexní*: Je-li $|\alpha| + |\beta| \leq 1$ a $x, y \in G$, potom
$$p(\alpha x + \beta y) \leq |\alpha| p(x) + |\beta| p(y) < |\alpha| + |\beta| \leq 1\,,$$
tedy $\alpha x + \beta y \in G$. Z těchto vlastností množiny G dostáváme, že
$$X = \bigcup_{t \geq 0} tG = \bigcup_{n=1}^{\infty} nG = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{nG}\,.$$

Z Baireovy věty o kategoriích 13.41 plyne, že alespoň jedna z množin $\overline{nG}$ má neprázdný vnitřek. Existuje tedy $n \in \mathbf{N}$, $z \in \overline{nG}$ a $\varepsilon > 0$ tak, že
$$z + U^{\varepsilon}(\mathbf{0}) \subset \overline{nG} = n\overline{G}\,.$$

Potom ovšem
$$\frac{1}{n} z + U^{\frac{1}{n}\varepsilon}(\mathbf{0}) \subset \overline{G}\,.$$

Označíme-li nyní $u := \frac{1}{n} z$ a $\Delta := \frac{1}{2n}\varepsilon$, je $u \in \overline{G}$ (nezapomeňte, že $\mathbf{0} \in U^{\frac{1}{n}\varepsilon}(\mathbf{0})$) a můžeme psát
$$u + U^{2\Delta}(\mathbf{0}) \subset \overline{G}\,.$$

Nyní si musíme uvědomit, že i množina $\overline{G}$ je pohlcující a absolutně konvexní. To není příliš těžké. Dostáváme, že i
$$-u + U^{2\Delta}(\mathbf{0}) = -u - U^{2\Delta}(\mathbf{0}) \subset \overline{G}\,.$$

Množina $\overline{G}$ totiž obsahuje s každým prvkem y i prvek $-y$ (v definici absolutní konvexity volte $\alpha = -1$ a $\beta = 0$). Potřebujeme nyní ukázat, že
$$U^{\Delta}(\mathbf{0}) \subset \overline{G}\,.$$

Je-li tedy $||x|| < \Delta$, je
$$-u + 2x \in -u + U^{2\Delta}(\mathbf{0}) \subset \overline{G}\,.$$

Takže konečně
$$x = \frac{1}{2} u + \frac{1}{2}(-u + 2x) \in \frac{1}{2}\overline{G} + \frac{1}{2}\overline{G} \subset \overline{G}\,.$$

Nyní ukážeme, že pokud $x \in U^{\Delta}(\mathbf{0})$, potom $p(x) < 2$. Odtud podle Tvrzení 12.2 dostaneme, že pseudonorma p je spojitá.

Fixujme tedy $x \in U^{\Delta}(\mathbf{0})$. Protože $x \in \overline{G}$, existuje $x_1 \in G$ tak, že
$$p(x_1) < 1 \quad \text{a} \quad ||x - x_1|| < \frac{1}{2}\Delta\,.$$

Protože
$$x - x_1 \in U^{\frac{1}{2}\Delta}(\mathbf{0}) = \frac{1}{2} U^{\Delta}(\mathbf{0}) \subset \frac{1}{2}\overline{G} = \overline{\frac{1}{2} G}\,,$$

existuje $x_2 \in \frac{1}{2} G$ tak, že
$$p(x_2) < \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad ||x - x_1 - x_2|| < \frac{1}{4}\Delta\,.$$

Potom ovšem

$$x - x_1 - x_2 \in U^{\frac{1}{4}\Delta}(\mathbf{0}) = \frac{1}{4}U^{\Delta} \subset \frac{1}{4}\overline{G} = \overline{\frac{1}{4}G}$$

a můžeme pokračovat dále. Indukcí pak získáme posloupnost $\{x_n\}$ s vlastnostmi

$$p(x_n) < \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{a} \quad ||x - \sum_{j=1}^{n} x_j|| < \frac{1}{2^n}\Delta\,.$$

Odtud plyne, že

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad \text{a} \quad p(x) = p\Big(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\Big) \le \sum_{n=1}^{\infty} p(x_n) \le 2\,,$$

kde jsme konečně využili σ–sublinearity pseudonormy p. ■

A nyní již slíbené důkazy.

12.4. Princip stejnoměrné omezenosti. *Nechť X je Banachův prostor, Y normovaný lineární prostor a $\mathfrak{G}$ podmnožina $\mathcal{L}(X,Y)$. Potom*

$$\sup\{||L|| : L \in \mathfrak{G}\} < \infty\,,$$

právě když

$$\sup\{||Lx|| : L \in \mathfrak{G}\} < \infty \ \textit{pro každé}\ x \in X\,.$$

Důkaz. Z nerovnosti $||Lx|| \le ||L||\,||x||$ plyne ihned jedna (snadná) implikace.
Pro důkaz druhé předpokládejme, že $\sup\{||Lx|| : L \in \mathfrak{G}\} < \infty$ pro každé $x \in X$. Položme

$$p(x) := \sup\{||Lx|| : L \in \mathfrak{G}\} \quad \text{pro} \quad x \in X\,.$$

Z předpokladu plyne, že p je reálná funkce na X. Evidentně $p(\mathbf{0}) = 0$ a $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ pro každé $x \in X$ a každý skalár λ.

Předpokládejme, že řada $\sum_n x_n$ konverguje v X a $L \in \mathfrak{G}$. Potom

$$\Big|\Big|\, L\Big(\sum_n x_n\Big)\Big|\Big| = \Big|\Big|\sum_n Lx_n\Big|\Big| \le \sum_n ||Lx_n|| \le \sum_n p(x_n)\,,$$

tudíž

$$p\Big(\sum_n x_n\Big) = \sup\left\{\Big|\Big|L\Big(\sum_n x_n\Big)\Big|\Big| : L \in \mathfrak{G}\right\} \le \sum_n p(x_n)\,.$$

Speciální volba $x_1, x_2, x_3 = x_4 = \cdots = \mathbf{0}$ dává $p(x_1 + x_2) \le p(x_1) + p(x_2)$. Vidíme, že p je pseudonorma. A nejen to, p je dokonce σ–sublineární. Podle Zabrejkova lematu 12.3 je p spojitá. Existuje tedy takové $\Delta > 0$, že $p(x) \le 1$ pro každé $x \in X$, $||x|| < \Delta$.

Je-li $z \in X$, $||z|| \le 1$ a $L \in \mathfrak{G}$, je $p(z) \le \frac{1}{\Delta}$, a tedy

$$||Lz|| \le p(z) \le \frac{1}{\Delta}\,.$$

Tím jsme ukázali, že $||L|| \le \frac{1}{\Delta}$. Protože Δ nikterak nezáviselo na L, je i

$$\sup\{||L|| : L \in \mathfrak{G}\} \le \frac{1}{\Delta} < \infty\,.$$

■

12.5. Věta o uzavřeném grafu. *Jsou-li X a Y Banachovy prostory a T uzavřené lineární zobrazení mezi nimi, je T spojité.*

Důkaz. Položme
$$p(x) := ||Tx|| \quad \text{pro} \quad x \in X\,.$$
Potom p je pseudonorma na X (indukovaná zobrazením T). Stačí ukázat, že p je spojitá. Potom bude určitě existovat okolí U nuly, na němž je p omezená. A tím pádem bude i množina $T(U)$ omezená.

Volme tedy posloupnost $\{x_n\}$ v X, pro niž řada $\sum_n x_n$ konverguje. Chceme ukázat, že p je σ–sublineární, tedy že
$$p\Big(\sum_n x_n\Big) \le \sum_n p(x_n)\,.$$
Přepsáním tedy potřebujeme, aby
$$\Big|\Big|\,T\Big(\sum_n x_n\Big)\Big|\Big| \le \sum_n ||Tx_n||\,.$$
Můžeme tedy předpokládat, že $\sum_n ||Tx_n|| < \infty$. Protože prostor Y je úplný, konverguje řada $\sum_n Tx_n$. Položme $z_n := \sum\limits_{j=1}^{n} x_j$. Potom
$$z_n \to \sum_n x_n \quad \text{a} \quad T(z_n) = \sum_{j=1}^{n} Tx_j \to \sum_n Tx_n\,.$$
Protože T je uzavřené zobrazení, musí být
$$T\Big(\sum_n x_n\Big) = \sum_n Tx_n\,.$$
Tudíž
$$\Big|\Big|\,T\Big(\sum_n x_n\Big)\Big|\Big| = \Big|\Big|\sum_n Tx_n\Big|\Big| \le \sum_n ||Tx_n||\,,$$
což jsme chtěli ukázat. ■

12.6. Věta o otevřeném zobrazení. *Nechť T je spojité lineární zobrazení Banachova prostoru X na Banachův prostor Y. Potom T je otevřené.*

Důkaz. Stačí ukázat, že obraz $T(U)$ otevřené jednotkové koule $U := \{x \in X : ||x|| < 1\}$ je otevřená podmnožina Y. Je-li totiž $G \subset X$ otevřená množina a $x \in G$, existuje $r > 0$ tak, že $x + rU \subset G$, a tedy $Tx + rT(U) \subset T(G)$.

Položme
$$p(y) := \inf\{||x|| : x \in X\,,\, Tx = y\} \quad \text{pro} \quad y \in Y\,.$$
Zřejmě $p(\mathbf{0}) = 0$ a $p(\lambda y) = |\lambda| p(y)$ pro každé $y \in Y$ a každý skalár λ. Předpokládejme, že řada $\sum_n y_n$ konverguje v Y. Chceme ukázat, že
$$p\Big(\sum_n y_n\Big) \le \sum_n p(y_n)\,.$$
Stačí se omezit na případ. kdy $\sum_n p(y_n) < \infty$. Volme $\varepsilon > 0$. Existují tedy $x_n \in X$, $n \in \mathbf{N}$, tak, že
$$Tx_n = y_n \quad \text{a} \quad ||x_n|| < p(y_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\,.$$
Protože
$$\sum_n ||x_n|| < \sum_n p(y_n) + \varepsilon < \infty$$

a protože prostor Y je úplný, konverguje i řada $\sum_n x_n$. Dostáváme tedy, že

$$T\Big(\sum_n x_n\Big) = \sum_n Tx_n = \sum_n y_n \,.$$

Podle definice p pak máme

$$p\Big(\sum_n y_n\Big) \leq \Big|\Big|\sum_n x_n\Big|\Big| \leq \sum_n ||x_n|| < \sum_n p(y_n) + \varepsilon \,.$$

Odtud jednak plyne, že p je pseudonorma (stejným trikem jako v důkazu Věty 12.4 zjistíme, že $p(y_1 + y_2) \leq p(y_1) + p(y_2)$) a že p je σ–sublineární. Zabrejkovo lemma 12.3 tvrdí, že p je spojitá. Protože

$$T(U) = \{y \in Y : \text{existuje } x \in U \text{ tak, že } Tx = y\} = \{y \in Y : p(y) < 1\}$$

a protože množina $\{y \in Y : p(y) < 1\}$ je otevřená, jsme s důkazem hotovi. ■

12.7. Cvičení. (a) Dokažte Větu 6.6 o inverzním zobrazení pomocí Zabrejkova lemmatu.

Návod. Zkuste položit $p(x) := ||T^{-1}(x)||$. ♣

G. DODATKY

13. Doplňky a poznámky k textu

Vektorové prostory

13.1. Axiomy vektorového prostoru. *Vektorovým prostorem* W nad tělesem reálných čísel $\mathbf{R}$ či nad tělesem komplexních čísel $\mathbf{C}$ (nechť $\mathbf{F}$ značí v dalším tedy buď těleso $\mathbf{R}$ či $\mathbf{C}$ – a jiná tělesa nebudeme vůbec uvažovat) rozumíme (neprázdnou) množinu W, kde mezi jejími prvky jsou definovány operace sčítání a násobení skaláry

$$+ : W \times W \to W \quad \text{a} \quad . : \mathbf{F} \times W \to W$$

a v níž existuje nulový prvek $\mathbf{0}$, přičemž jsou splněny následující axiomy:

(a) sčítání je komutativní a asociativní,
(b) platí násedující distributivní rovnosti

$$\lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y\,,$$
$$(\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.x\,,$$
$$\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x\,,$$

(c) $x + \mathbf{0} = x$,
(d) $x + (-x) = \mathbf{0}$,
(e) $1.x = x$.

Uvedené rovnosti mají samozřejmě platit pro libovolné vektory $x, y \in W$ a libovolné skaláry $\lambda, \mu \in \mathbf{F}$; přitom $(-x)$ je definováno jako $(-1).x$, místo $x + (-y)$ budeme psát zkráceně $x - y$. A vůbec – znak "." pro násobení budeme vynechávat. Takže $\lambda.x$ píšeme zkráceně λx.

Podstatné tedy je, že W vzhledem ke sčítání tvoří komutativní grupu s nulovým prvkem $\mathbf{0}$ a že ve W platí distributivní zákony. Vektorový prostor skládající se z jediného prvku $\{\mathbf{0}\}$ nazveme *triviálním* a nebudeme se jím vůbec zabývat.

Někdy též mluvíme o *reálném* či *komplexním* vektorovém prostoru, podle toho, nad jakým tělesem ho chápeme.

Podprostorem Z vektorového prostoru W rozumíme jeho podmnožinu splňující

$$\lambda x + \mu y \in Z \quad \text{pokud } \lambda, \mu \in \mathbf{F} \text{ a } x, y \in Z\,.$$

Symbolicky to zapisujeme jako $Z \subset\subset W$.

13.2. Báze. *Algebraickou bází* (někdy též nazývanou *Hamelovou bází*), krátce však pouze *bází* vektorového prostoru, rozumíme takovou jeho podmnožinu $\mathcal{B}$, pro niž

(a) každá konečná podmnožina prvků $\mathcal{B}$ je lineárně nezávislá,
(b) každý prvek z W lze napsat (jednoznačně) jako konečnou lineární kombinaci nějakých prvků z $\mathcal{B}$.

Důležitá je následující věta, jejíž důkaz je jednoduchou aplikací Zornova lemmatu.

13.3. Steinitzova věta. *Buď $\mathcal{B}_0$ lineárně nezávislá podmnožina (netriviálního) vektorového prostoru W. Potom existuje báze prostoru W obsahující $\mathcal{B}$. Speciálně každý vektorový prostor má bázi.*

13.4. Dimenze. Existuje-li báze prostoru W mající pouze konečně mnoho prvků, má libovolná báze W stejný počet prvků. Tento počet pak nazveme *dimenzí* vektorového prostoru W. Nekonečně dimenzionální prostory jsou pak ty, které mají báze o nekonečně mnoha prvcích. Tedy v prostoru, kde $\dim W = \infty$, existuje nekonečná lineárně nezávislá množina (zopakujme, že nekonečná podmnožina vektorového prostoru je *lineárně nezávislá*, jestliže každá její konečná podmnožina sestává z lineárně nezávislých prvků). Snad pouze pro přesnost, triviální vektorové prostory budou mít dimenzi 0.

Zornovo lemma

13.5. Uspořádání. Na (neprázdné) množině M uvažujme (binární) relaci $\prec$ splňující následující podmínky:

(a) $m \prec m$ pro každé $m \in M$,
(b) jestliže $m \prec n$ a $n \prec p$, potom i $m \prec p$,
(c) je-li $m \prec n$ a současně $n \prec m$, potom $m = n$.

Dvojici $(M, \prec)$ pak nazýváme *částečně uspořádanou* (někdo též užívá názvu *uspořádanou*) množinou.

Řetězcem v částečně uspořádané množině pak rozumíme takovou její podmnožinu $\mathcal{R}$, že pro libovolné její prvky $a, b \in \mathcal{R}$ je vždy buď $a \prec b$ anebo $b \prec a$. Je-li P podmnožina M, nazveme její *horní závorou* každý takový prvek $s \in M$, pro nějž $p \prec s$ pro každé $p \in P$.

Maximálním prvkem částečně uspořádané množiny M je každý prvek $m_0 \in M$, pro který $m = m_0$, kdykoliv $m \in M$ a $m_0 \prec m$.

13.6. Zornovo lemma. *Každá částečně uspořádaná množina, v níž libovolný řetězec má horní závoru, má alespoň jeden maximální prvek.*

13.7. Poznámky. (a) V teorii množin je Zornovo lemma ekvivalentní *axiomu výběru*. Poměrně nový důkaz lze nalézt v článku J. Lewin [1991]. Existují i další tvrzení ekvivalentní s axiomem výběru, anebo chcete–li s Zornovým lemmatem (korektně řečeno, měli bychom asi uvést, co tím přesně rozumíme či o jakou „teorii množin" se jedná; to však ponechme stranou). Jedním z nich je i *Hausdorffova věta o maximalitě* (čtenáře můžeme odkázat třeba na odstavec 4.21 v učebnici W. Rudina [Rud]) nebo *Zermelova věta o dobrém uspořádání* (každou množinu lze „dobře uspořádat").

(b) Zornovo lemma bývá velice často vyslovováno i v případě, kdy množina M je pouze tak zvaně *pre–uspořádaná*, což znamená, že splňuje pouze požadavky (a) a (b) pro částečně uspořádané množiny, relace $\prec$ však nemusí být antisymetrická – může tedy být $m \prec n$ a $n \prec m$, aniž by prvky m a n byly totožné (umělí byste uvést příklad nějaké pouze pre–uspořádané množiny ?).

V tom případě ovšem musíme trochu uzpůsobit definici maximálního prvku. Tedy, *maximálním prvkem* pre–uspořádané množiny M je každý prvek $m_0 \in M$, který má tu vlastnost, že $m \prec m_0$, kdykoliv $m \in M$ splňuje $m_0 \prec m$.

Nejedná se ovšem o žádné zvláštní zobecnění. Máme-li totiž pre–uspořádanou množinu $(M, \prec)$ a definujeme-li relaci ekvivalence $a \sim b$, jestliže $a \prec b$ a současně $b \prec a$ (je to skutečně relace ekvivalence) a na faktormnožině $M/\sim$ (což je množina všech tříd navzájem ekvivalentních prvků) definujeme přirozeným způsobem (korektně) uspořádání, dostaneme částečně uspořádanou množinu. Jako cvičení si pak můžete dokázat Zornovo lemma i v této zobecněné podobě.

(d) Z příkladů na použití Zornova lemmatu, s kterými jsme se setkali v těchto skriptech či která znáte z jiných přednášek, uveďme třeba: Hahn–Banachovu větu, Steinitzovu větu o existenci Hamelovy báze či větu o existence ortonormální báze v Hilbertových prostorech.

Konečně dimenzionální prostory

13.8. Ekvivalentní normy. Říkáme, že normy $||.||_1$ a $||.||_2$ na vektorovém prostoru W jsou *ekvivalentní*, jestliže systémy otevřených množin, které tyto normy určují, jsou stejné (jinak řečeno, jestliže generují na W stejné topologie). Odtud ihned vyplývá, že i všechny pojmy, které se dají definovat pouze pomocí otevřených množin, jsou stejné. Tedy kupříkladu ekvivalentní normy určují i stejné systémy uzavřených množin či dávají stejné spojité funkce (a tudíž i duály k $(W, ||.||_1)$ a $(W, ||.||_2)$ jsou totožné). Také systémy kompaktních množin jsou stejné. Ekvivalentní normy určují i stejnou konvergenci posloupností. Též je pravda, že prostor W je v ekvivalentních normách buďto současně úplný či neúplný, a také že $(W, ||.||_1)$ a $(W, ||.||_2)$ jsou izomorfní, pokud $||.||_1$ a $||.||_2$ jsou ekvivalentní (viz třeba [Záp], *1.6).

Jako instruktivní cvičení si zkuste dokázat, že *normy* $||.||_1$ *a* $||.||_2$ *jsou na* W *ekvivalentní, právě když existují kladné konstanty* α, β *tak, že*

$$\alpha||x||_1 \leq ||x||_2 \leq \beta||x||_1 \quad \textit{pro každé} \quad x \in W\,.$$

Ostatně tato charakteristika bývá často brána právě za definici ekvivalentních norem (viz [Záp], Věta 1.5).

Následující věty jsou přebrány ze [Záp].

13.9. Věta. *Nechť* $||.||_1$ *a* $||.||_2$ *jsou dvě (libovolné !) normy na konečně dimenzionálním vektorovém prostoru* W*. Potom* $||.||_1$ *a* $||.||_2$ *jsou ekvivalentní.*

Důkaz. Nechť $\{e_1, \dots, e_n\}$ je nějaká báze W a $\|.\|$ je norma na W. Pokud $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$, položme $\|x\|_\infty := \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$. Především je třeba ukázat, že $\|.\|_\infty$ je skutečně normou na W. To je vcelku rutinní záležitost. K dokončení důkazu si pak stačí rozmyslet, že normy $\|.\|_\infty$ a $\|.\|$ jsou ekvivalentní. Odtud pak vyplyne, že i každá z našich norem $||.||_1$ a $||.||_2$ je ekvivalentní normě $||.||_\infty$ a z tranzitivity ekvivalence norem pak dostáváme tvrzení. Označíme–li $\beta := \sum_i ||e_i||$, máme na jedné straně

$$\|x\| = \|\sum_i \lambda_i e_i\| \leq \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\} \sum_i \|e_i\| = \beta\, \|x\|_\infty\,.$$

Označíme-li nyní $S_W := \{x \in W : \|x\|_\infty = 1\}$, je S_W kompaktní podmnožina $(W, \|.\|_\infty)$ podle známé věty z analýzy.

(Osvěžme si myšlenku důkazu. Volíme-li $x_k = \lambda_1^k e_1 + \cdots + \lambda_n^k e_n \in S_W$, zjistíme, že číselné posloupnosti $\{\lambda_j^k\}_k$ jsou omezené pro každé $j = 1, \dots, n$. Podle Bolzano-Weierstrassovy věty z nich lze vybrat konvergentní posloupnosti. Musíme je ovšem vybrat šikovně — postupně. Bude potom existovat posloupnost indexů $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ a $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tak, že $\lim_{i \to \infty} \lambda_j^{k_i} = \lambda_j$ pro každé $j = 1, \dots, n$. Položíme-li $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$, zbývá ukázat, že $x \in S_W$ a $x_{k_i} \to x$.)

Potom ovšem S_W je kompaktní i v prostoru $(W, \|.\|)$. To plyne kupříkladu ze sekvenciální definice kompaktnosti a z toho, že každá konvergentní posloupnost v normě $\|.\|_\infty$ je konvergentní i v $\|.\|$ (nezapomeňte na odhad $||x|| \leq \beta\, ||x||_\infty$). Protože norma je podle Tvrzení 1.4 vždy spojitá funkce, nabývá $\|.\|$ svého minima na kompaktní množině S_W. Existuje tedy $\delta > 0$ tak, že $\|z\| \geq \delta$ pro každé $z \in S_W$. Ovšemže $\delta > 0$, neboť $\mathbf{0} \notin S_W$. Je-li nyní $x \in W$ libovolné (nenulové), je $y := \frac{x}{\|x\|_\infty} \in S_W$. Tudíž $\|y\| \geq \delta$. Tím dostáváme i druhou nerovnost

$$\|x\|_\infty \leq \frac{1}{\delta}\|x\|\,.$$

Tato nerovnost samozřejmě platí i pro $x = \mathbf{0}$. ■

13.10. Důsledek. *Každý konečně rozměrný normovaný lineární prostor je Banachův.*

Důkaz. Nechť $\{e_1, \dots, e_n\}$ je báze našeho prostoru, označme ho E. Položíme-li, obdobně jako v předchozím důkazu, $\|x\|_\infty := \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$, pokud $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$, je E v této normě úplný. Důkaz by probíhal podobně jako v předchozí větě, kde jsme dokazovali kompaktnost jednotkové koule. Podstatné je, že posloupnosti „koeficientů“ cauchyovské posloupnosti v $(E, \|.\|_\infty)$ jsou číselné cauchyovské posloupnosti, a jsou tudíž konvergentní. Protože původní norma na E je podle předchozí Věty 13.9 ekvivalentní úplné normě $\|.\|_\infty$, je i E v ní úplný. To je snadné si z definic odvodit. ■

13.11. Věta. *Každý konečně rozměrný podprostor normovaného lineárního prostoru* E *je uzavřený. Pokud je i vlastní, je řídký.*

Důkaz. Pro důkaz uzavřenosti stačí použít předchozí Důsledek 13.10. Je-li totiž M konečně dimenzionální podprostor normovaného lineárního prostoru a $\{x_n\}$ posloupnost prvků z M konvergující k x, je posloupnost $\{x_n\}$ cauchyovská. Podle 13.10 má tedy limitu v M a tou limitou musí být samozřejmě bod x.

Předpokládejme nyní, že x je vnitřním bodem (uzavřeného) podprostoru M. Snadnou úvahou zjistíte, že i $\mathbf{0}$ musí být vnitřním bodem M. A v tom případě není těžké si rozmyslet, že $M = E$. ∎

Spojité a nespojité lineární formy

13.12. Věta. *Nechť f je lineární forma na Banachově prostoru konečné dimenze. Potom f je spojitá.*

Důkaz. Postupujeme obdobně jako v důkazu Věty 13.9. Nechť tedy $\{e_1, \dots, e_n\}$ je nějaká báze našeho prostoru. Položíme–li pro $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$

$$\|x\|_\infty := \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\},$$

je, jak již víme, $\|.\|_\infty$ norma ekvivalentní původní normě. A protože pojem spojitosti se nezmění přechodem k ekvivalentní normě, stačí ukázat, že f je spojitá (anebo omezená, to je totéž podle Lemátka 2.1) v normě $\|.\|_\infty$. Ale to je snadné, máme

$$|f(x)| = |\lambda_1 f(e_1) + \cdots + \lambda_n f(e_n)| \le \max(|f(e_1)|, \dots, |f(e_n)|)\, \|x\|_\infty .$$

∎

13.13. Věta. *Na každém normovaném lineárním prostoru nekonečné dimenze existuje nespojitá lineární forma.*

Důkaz. Nechť E je normovaný lineární prostor, $\dim E = \infty$, a nechť $\mathcal{B}$ je jeho algebraická báze. Především si musíme uvědomit, že každá lineární forma f na E je určena svými hodnotami na prvcích báze $\mathcal{B}$. Zajisté, je–li $x \in E$, má x jednoznačné vyjádření

$$x = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n \,, \quad \text{kde} \quad b_1, \dots, b_n \in \mathcal{B} .$$

Potom ovšem

$$f(x) = \lambda_1 f(b_1) + \cdots + \lambda_n f(b_n)\,,$$

odkud je vidět tvrzení.

Zvolme nějakou spočetnou (nekonečnou) podmnožinu $\mathcal{B}^* = \{b_1, b_2, \dots\}$ báze $\mathcal{B}$. Můžeme předpokládat, že $||b|| = 1$ pro každé $b \in \mathcal{B}^*$ (proč ?). Na $\mathcal{B}$ definujme funkci f následovně:

$$f(x) = \begin{cases} n & \text{pro } x = b_n, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}^* . \end{cases}$$

Tímto předpisem je určena (jednoznačně) lineární forma f na celém prostoru E. Okamžitě je vidět, že f je neomezená. ∎

13.14. Důsledek. *Nechť E je normovaný lineární prostor. Potom* $\dim E < \infty$, *právě když $E^* = E^{\#}$.*

Příklady normovaných lineárních prostorů

13.15. Prostory $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^n$, l_n^1 a l_n^∞. Prostory $\mathbf{R}^n$ či $\mathbf{C}^n$ jsou tvořeny všemi n-ticemi reálných či komplexních čísel. Normu takové n-tice bychom mohli definovat různým způsobem. My položíme

$$\|x\| := \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}\,,$$

pokud $x = (x_1, \dots, x_n)$ a této normě budeme říkat *eukleidovská*. Protože všechny konečně dimenzionální prostory jsou podle Důsledku 13.10 úplné, jsou prostory $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{C}^n$ opatřeny touto normou Banachovy.

Do prostoru všech n-tic lze zavést i další normy. Abychom vyjádřili závislost prostoru na normě, budeme značit symbolem l_n^1 prostor všech n-tic (reálných anebo komplexních) čísel opatřený normou

$$\|x\|_1 = \|(x_1, \dots, x_n)\|_1 := |x_1| + \dots + |x_n|$$

a symbolem l_n^∞ prostor všech n-tic s normou

$$\|x\|_\infty = \|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty := \max(|x_1|, \dots, |x_n|)\,.$$

Prostory l_n^1 a l_n^∞ jsou opět úplné.

Samozřejmě, pro libovolné $p \in [1, \infty)$ bychom mohli uvažovat prostor l_n^p s normou

$$\|x\|_p := (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}\,.$$

Všechny tyto prostory jsou speciálními případy Banachových prostorů $L^p(X, \mathcal{S}, \mu)$, kde za X volíme množinu $\{1, 2, \dots, n\}$, za $\mathcal{S}$ systém všech podmnožin X a za μ aritmetickou míru. Prostor l_n^∞ můžeme také chápat jako prostor všech spojitých funkcí $\mathcal{C}(K)$ na množině $K = \{1, 2, \dots, n\}$ opatřené diskrétní topologií.

Poznamenejme, že topologie generované všemi těmito normami jsou stejné. To není nikterak překvapující, všechny normy na daném vektorovém prostoru konečné dimenze jsou totiž navzájem ekvivalentní, viz 13.9.

13.16. Prostory $\mathcal{C}([0,1])$ a $\mathcal{C}(K)$. Vektorový prostor všech (reálných či komplexních) funkcí na intervalu $[0,1]$ budeme uvažovat vždy s normou

$$\|f\| = \max\{|f(t)| : t \in [0,1]\} \quad \text{pro} \quad f \in \mathcal{C}([0,1])\,.$$

Je lehkým cvičením ověřit, že se jedná skutečně o normu. Ze základních vět analýzy také vyplývá, že konvergence posloupnosti funkcí v této normě je vlastně stejnoměrnou konvergencí. Navíc $\mathcal{C}([0,1])$ je v této normě úplný. To plyne z toho, že cauchyovské posloupnosti v prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ jsou „stejnoměrně cauchyovské posloupnosti“, které jsou, jak známo, stejnoměrně konvergentní.

Do prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ lze zavést i jiné normy. Uvažujeme-li integrální normu

$$\|f\|_i = \int_0^1 |f(t)|\,dt \quad \text{pro} \quad f \in \mathcal{C}([0,1])\,,$$

tvoří opět $(\mathcal{C}([0,1]), \|.\|_i)$ normovaný lineární prostor. Ten však již není úplný. Třeba posloupnost funkcí $\{f_n\}$, kde f_n jsou spojité na $[0,1]$, rovny 0 na intervalu $[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n},]$, rovny 1 na $[\frac{1}{2}, 1]$ a lineární na $[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}]$, je v něm cauchyovská (to není těžké nahlédnout, stačí si namalovat obrázek a ujasnit geometrický význam normy $\|f\|_i$), nikoliv však konvergentní. To odůvodníme takto. Kdyby posloupnost $\{f_n\}$ konvergovala v integrální normě, limitní funkce, která by byla spojitá, by musela být rovna 0 na intervalu $[0, \frac{1}{2})$ a rovna 1 na $(\frac{1}{2}, 1]$. To proto, že konvergence v integrální normě je vlastně konvergencí v prostoru L^1, a tam víme, že z posloupnosti $\{f_n\}$ lze vybrat podposloupnost, která konverguje skoro všude (viz třeba [LM], věta 12.4).

Můžeme také argumentovat elementárněji. Je-li f libovolná spojitá funkce na $[0,1]$, máme pro každé n

$$\|f_n - f\|_i = \int_0^{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}} |f| + \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} |f_n - f| + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f - 1|\,.$$

Pokud tedy $\|f_n - f\|_i \to 0$, musí být vzhledem ke spojitosti f nutně $f = 0$ na $[0, \frac{1}{2})$ a $f = 1$ na $(\frac{1}{2}, 1]$.

Navíc normy $\|.\|$ a $\|.\|_i$ již nejsou na prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ ekvivalentní. Není těžké si představit posloupnost $\{f_n\}$ nezáporných spojitých funkcí na $[0,1]$, která nekonverguje stejnoměrně k nule, ale pro niž přesto integrály $\int_0^1 f_n$ konvergují k nule.

Jsou ale i jiné argumenty ukazující proč prostor $\mathcal{C}([0,1])$ není úplný v integrální normě. Pomůže třeba (hlubší) Věta 6.9 o otevřeném zobrazení. Uvažujeme–li totiž identické zobrazení

$$\kappa : \big(\mathcal{C}([0,1]), ||.||\big) \to \big(\mathcal{C}([0,1]), ||.||_i\big)\,,$$

je κ prosté spojité lineární zobrazení (které je očividně na). Není však otevřené (proč ?). Tudíž prostor $\mathcal{C}([0,1])$ nemůže být úplný právě s přihlédnutím k větě o otevřeném zobrazení.

Nahradíme-li interval $[0,1]$ libovolným kompaktním metrickým (či topologickým) prostorem K, budeme vždy Banachův prostor spojitých funkcí na K uvažovat s „max-normou“

$$\|f\| := \max\{|f(t)| : t \in K\}\,.$$

13.17. Prostory c a c_0. Vektorový prostor c tvoří množina všech konvergentních posloupností, ať již reálných nebo komplexních čísel, opatřený normou

$$\|\{x_n\}\| := \sup\,\{|x_n| : n \in \mathbf{N}\}\,.$$

Posloupnost prvků $\{z_n\}$ konverguje v prostoru c k prvku z, jestliže k němu konverguje stejnoměrně na $\mathbf{N}$ (nezapomeňte, že každé z_n je posloupnost na $\mathbf{N}$). Prostor c je úplný. Jeho podprostor tvořený všemi posloupnostmi konvergujícími k 0 budeme značit symbolem c_0. Protože c_0 je dokonce uzavřený podprostor c (důkaz připomíná Osgoodovo lemma o záměně limit známé z analýzy), tvoří c_0 Banachův prostor.

Poznámka. Uzavřenost prostoru c_0 v prostoru c lze třeba ukázat i následovně: Především si uvědomíme, že zobrazení

$$P : \{x_n\} \mapsto \lim x_n$$

je omezený lineární funkcionál na c. Protože

$$c_0 = \{x \in c : Px = 0\}$$

je jeho jádro, musí být c_0 uzavřenou podmnožinou c.

13.18. Prostor l^∞. Prostor l^∞ je tvořen všemi omezenými posloupnostmi. Pro $x = \{x_n\} \in l^\infty$ položme

$$\|x\| = \sup\,\{|x_n| : n \in \mathbf{N}\}\,.$$

Zřejmě l^∞ obsahuje c jako svůj vlastní (uzavřený) podprostor. Také prostor l^∞ je úplný, je totiž speciálním případem mnohem obecnějších Banachových prostorů, které nyní popíšeme. Důkazy a další jejich vlastnosti jsou uvedeny v [LM].

13.19. Prostory L^p a L^∞. Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou. Symbolem $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{S}, \mu)$ značíme množinu všech μ-měřitelných funkcí na X, pro něž existuje konstanta M tak, že

$$|f(x)| \le M \qquad \text{pro } \mu\text{-skoro všechna } x \in X.$$

Nejmenší konstanta M s takovou vlastností se nazývá L^∞-*normou* funkce f a značí se $\|f\|_\infty$. Rozdíl mezi $\|f\|_\infty$ a $\sup_X |f|$ spočívá, zhruba řečeno, v tom, že funkce $f \to \|f\|_\infty$ zanedbává hodnoty f na množinách míry nula.

Nechť $p \in [1, \infty)$. Symbolem $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(X, \mathcal{S}, \mu)$ značíme množinu všech μ-měřitelných funkcí na X, pro něž $\int_X |f|^p\, d\mu < \infty$. Číslo

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p\, d\mu\right)^{1/p}$$

se nazývá L^p-*norma* funkce z $\mathcal{L}^p$. Funkce $\|.\|_\infty$ a $\|.\|_p$ mají všechny důležité vlastnosti normy až na jednu „maličkost“. Mohou existovat nenulové funkce mající nulovou normu. Abychom mohli pracovat v teorii normovaných lineárních prostorů, přiřaďme každé funkci $f \in \mathcal{L}^p$ (nechť nyní $1 \le p \le \infty$) třídu funkcí

$$[f] = \{g \in \mathcal{L}^p = f \ \mu\text{-skoro všude na } X\}$$

a definujme $L^p = L^p(X, \mathcal{S}, \mu) = \{[f] : f \in \mathcal{L}^p\}$. Potom L^p je lineární prostor, vybavený operacemi

$$[f] + [g] := [f + g]\,, \quad \alpha[f] := [\alpha f]$$

($\alpha \in \mathbf{R}$) a normou

$$\|\,[f]\,\|_p := \|f\|_p\,.$$

Snadno nahlédneme, že uvedené definice jsou korektní (tj. nezávislé na výběru reprezentantů).

V matematické literatuře je běžné nerozlišovat funkce a třídy funkcí, leckdy ani $\mathcal{L}^p$ a L^p. Říkáme například, že $\{f_j\}$ je cauchyovská posloupnost v L^p, a myslíme tím, že f_j jsou funkce a $\{[f_j]\}$ je cauchyovská posloupnost v L^p.

Prostory L^p jsou úplné. Je-li totiž $\{f_j\}$ cauchyovská posloupnost v L^p, potom $\{f_j\}$ je konvergentní v L^p, tj. existuje $f \in \mathcal{L}^p$ tak, že

$$\int_X |f - f_j|^p \, d\mu \to 0 \quad \text{pro} \quad p \in [1, \infty)$$

či

$$\|f - f_j\|_\infty \to 0 \quad \text{v případě} \quad p = \infty \,.$$

13.20. Prostory l^p a l^∞. V případě, že μ je *aritmetická míra* na množině X (někdo též užívá názvu *sčítací míra*, je to prostě míra, která množinám přiřazuje počet jejich prvků), značíme

$$l^p(X) = L^p(X, \mathcal{P}(X), \mu) \,.$$

Tak dostaneme pro $X = \mathbf{N}$ prostory posloupností:

– prostor l^p, $1 \le p < \infty$, všech posloupností $x = \{x_n\}$, pro něž

$$\|x\|_p := \Big(\sum_n |x_n|^p\Big)^{1/p} < \infty \,,$$

– prostor l^∞ všech omezených posloupností $x = \{x_n\}$ zavedený výše s normou

$$\|x\|_\infty := \sup_n |x_n| \,.$$

13.21. Sobolevovy prostory. Sobolevovy prostory hrají důležitou roli zejména v teorii parciálních diferenciálních rovnic. Lze je definovat více způsoby. Ukažme jeden z nich.

Pro ty, kteří ovšem neznají teorii distribucí, zadefinujeme nejdříve zobecněné derivace. Předpokládejme tedy, že Ω je otevřená podmnožina $\mathbf{R}^n$ a $i = 1, \dots, n$ je index. Symbolem $\mathcal{D}(\Omega)$ značme vektorový prostor všech nekonečně diferencovatelných funkcí majících kompaktní nosič v Ω a $\mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ pak prostor všech lokálně integrovatelných funkcí na Ω (veškerou integraci vztahujeme vždy k Lebesgueově míře v $\mathbf{R}^n$). Řekneme, že funkce $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ má *slabou derivaci* podle i-té proměnné, existuje-li funkce $g^i \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ tak, že

$$\text{(PP)} \qquad \int_\Omega g^i \, \varphi = - \int_\Omega f \, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

pro každou „testovací“ funkci $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ (s existencí integrálů nejsou problémy, uvědomte si, že φ má kompaktní nosič a spojité derivace).

Pokud funkce f má slabou derivaci podle i-té proměnné, funkce g^i splňující uvedenou rovnost (PP) je určena jednoznačně jakožto prvek prostoru $L^1_{loc}(\Omega)$. V tom případě značíme g^i také jako $D^i f$.

(Jestliže totiž funkce h z prostoru $\mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ splňuje rovnost $\int_\Omega h\varphi = 0$ pro všechny funkce $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, je nutně $h = 0$ skoro všude. Viz třeba Větu D.7 v [Záp].)

Má-li f slabé derivace podle všech proměnných, řekneme, že f je na Ω *slabě diferencovatelná* mající na Ω *slabou derivaci* $\nabla f := (D^1 f, \dots, D^n f)$.

Má-li funkce f spojité parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ na Ω, je rovnost (PP) splněna pro funkce $g^i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ a ∇f je „klasickým“ gradientem $\operatorname{grad} f := (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$ funkce f.

Rovnost (PP) zapisujeme stručně ve tvaru $\int_\Omega \nabla f \, \varphi = - \int_\Omega f \operatorname{grad} \varphi$.

Pro ty, kteří se seznámili s distribucemi, pouze uveďme, že slabé derivace nejsou nic jiného než distributivní derivace. Má-li funkce f slabou derivaci, je tato i její distributivní derivací.

Buď Ω otevřená podmnožina $\mathbf{R}^n$ a $p \in [1, \infty]$. Řekneme, že funkce $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ leží v *Sobolevově prostoru* $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$, jestliže pro každé $i = 1, \dots, n$ existuje slabá derivace $D^i f$ a $D^i f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$.

V jazyce teorií distribucí je $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ prostor těch funkcí z $\mathcal{L}^p(\Omega)$, jejichž všechny distributivní parciální derivace 1-řádu leží v $\mathcal{L}^p(\Omega)$.

Není třeba zvláště zdůrazňovat, že bychom měli opět spíše mluvit o Sobolevově prostoru $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$, jehož prvky jsou třídy navzájem ekvivalentních funkcí z prostoru $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$.

Pokud $1 \le p < \infty$, definujeme „normu“ funkce $f \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ jakožto

$$\|f\|_{1,p} = \left(\int_\Omega (|f|^p + |\nabla f|^p)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dále položíme

$$\|f\|_{1,\infty} = \max\left(\|f\|_\infty, \|\nabla f\|_\infty\right)$$

pro $f \in \mathcal{W}^{1,\infty}(\Omega)$.

Sobolevovy prostory $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ jsou Banachovými prostory. Není obtížné ověřit, že $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ tvoří vektorový prostor a $\|.\|_{1,p}$ je norma na něm. Důkazu úplnosti již není tak přímočarý, můžete nahlédnout do [Záp].

Protože funkce f leží v Sobolevově prostoru $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ (uvažujme $1 \le p < \infty$), právě když existuje posloupnost hladkých funkcí z $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, která konverguje v L^p–normě k f a pro niž posloupnosti jejích parciálních derivací jsou cauchyovská v L^p, lze definovat Sobolevovy prostory ekvivalentně jako zúplnění prostoru $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ s „vhodně” definovanou normou.

Obecněji lze pak definovat i Sobolevovy prostory $\mathcal{W}^{\alpha,p}(\Omega)$.

13.22. Prostor Radonových měr. Pro osvěžení proveďme krátkou úvodní exkurzi do problematiky Radonových měr. Pokud čtenáře zajímají detaily, lze je nalézt například v [LM].

Nechť K je kompaktní prostor. *Radonovou mírou* na K rozumíme každou konečnou nezápornou σ-aditivní množinovou funkci μ, která je definovaná na systému všech borelovských podmnožin[2] prostoru K a má následující vlastnosti:

(a) $\mu B = \inf\{\mu G : G \supset B, G \text{ otevřená}\}$ pro každou borelovskou množinu $B \subset K$,
(b) $\mu G = \sup\{\mu T : T \subset G, T \text{ kompaktní}\}$ pro každou otevřenou množinu $G \subset K$.

Znaménkovou mírou na K rozumíme reálnou σ-aditivní množinovou funkci definovanou na σ-algebře všech borelovských podmnožin K, pro niž $\mu\emptyset = 0$. Každou znaménkovou míru μ lze pak psát jako rozdíl dvou nezáporných měr $\mu = \mu^+ - \mu^-$, kde

$$\mu^+(S) := \sup\{\mu B : B \subset S, B \text{ borelovská }\}$$

a

$$\mu^-(S) := \sup\{-\mu B : B \subset S, B \text{ borelovská }\}$$

pro každou borelovskou množinu $S \subset K$. Položíme-li ještě $|\mu| := \mu^+ + \mu^-$, je $|\mu|$ nezáporná míra nazývaná též *totální variací* míry μ.

Lze ukázat, že

$$|\mu|(S) = \sup\Big\{\sum_{k=1}^n |\mu B_k| : B_k \text{ borelovská, } \bigcup_{k=1}^n B_k = B, B_i \cap B_j = \emptyset \text{ pro } i \neq j\Big\}$$

pro každou $S \subset K$ borelovskou.

Je-li konečně μ *komplexní míra*, tedy komplexní σ-aditivní míra definovaná na borelovských podmnožinách K anulující se na prázdné množině, můžeme definovat i její totální variaci pomocí právě uvedené rovnosti.

Řekneme pak, že znaménková míra μ je *Radonova*, pokud (nezáporné) míry μ^+ i μ^- jsou Radonovy. *Komplexní Radonovou mírou* pak rozumíme takovou míru, jejíž reálnou a imaginární částí jsou Radonovy míry.

Komplexní (či konečná znaménková) míra μ definována na σ-algebře všech borelovských podmnožin K je Radonova, právě když její totální variace $|\mu|$ je Radonova, a to je právě když

$$|\mu|(B) = \sup\{|\mu|K : K \text{ je kompaktní podmnožina } B\}$$

pro každou borelovskou množinu $B \subset K$.

Prostor $\mathcal{M}(K)$ všech (ať již reálných či komplexních) Radonových měr na K s přirozeně definovaným sčítáním a násobením skalárem a opatřený normou $\|\mu\| := |\mu|(K)$ tvoří Banachův prostor.

[2] systém *borelovských množin* je definován jako nejmenší σ–algebra obsahující všechny otevřené množiny

13.23. Hilbertovy prostory. Hilbertovy prostory se vyznačují tím, že jejich norma je dána skalárním součinem. Jejich studiu je věnována speciální Kapitola 10.

Faktorprostor

Důležitým nástrojem je tvoření nového prostoru pomocí faktorizace. Věnujme mu speciální pozornost.

13.24. Faktorprostor. Nechť M je podprostor normovaného lineárního prostoru E. Pro $x \in E$ označme $[x] = x + M$ a definujme *kanonické zobrazení* q z E do vektorového prostoru E/M předpisem $q(x) = [x]$. Pokud $[x] = [y]$ pro nějaké $x, y \in E$, je $\operatorname{dist}(x, M) = \operatorname{dist}(y, M)$ a můžeme tedy definovat

$$\|[x]\| := \operatorname{dist}(x, M) = \inf\{\|x + m\|_E : m \in M\}$$

nezávisle na výběru prvku x ve třídě $[x]$. Základní vlastnosti shrnuje následující věta.

13.25. Věta. *Funkce $\|.\|$ je pseudonorma na E/M, přičemž je normou, právě když M je uzavřený podprostor.*

Zobrazení q je spojité a otevřené. Je-li E Banachův a M uzavřený, je i prostor E/M Banachův.

Návod. Nejdříve musíme ukázat základní vlastnosti normy. Žádný problém nečiní ověřit, že $\|\lambda[x]\| = |\lambda|\,\|[x]\|$. Ani trojúhelníková nerovnost není obtížná, máme totiž

$$\begin{aligned}
\|[x + y]\| &= \inf\{\|x + y + m\|_E : m \in M\} = \inf\{\|x + y + m_1 + m_2\|_E : m_1, m_2 \in M\} \\
&\le \inf\{\|x + m_1\| + \|y + m_2\| : m_1, m_2 \in M\} \\
&= \inf\{\|x + m_1\|_E : m_1 \in M\} + \inf\{\|y + m_2\|_E : m_2 \in M\} \\
&= \|[x]\| + \|[y]\| .
\end{aligned}$$

Protože $\|[x]\| = 0$, právě když $x \in \overline{M}$, je $\|.\|$ norma, právě když $M = \overline{M}$.

Zřejmě $\|[x]\| \le \|x\|_E$, odtud plyne spojitost zobrazení q. Z téže nerovnosti plyne, že q zobrazuje kouli $U := \{x \in E : \|x\|_E < 1\}$ do koule $[U] := \{[x] \in E/M : [x] < 1\}$. Je-li však $[x] < 1$, existuje $m \in M$ tak, že $\|x + m\| < 1$ a $[x] = [x + m]$. Vidíme, že $q(U) = [U]$, což již stačí k důkazu otevřenosti q.

Zbývá ověřit, že prostor E/M je úplný, pokud E je úplný a M uzavřený. Nechť tedy $\{X_n\}$ je cauchyovská posloupnost v E/M. Především najdeme její vybranou podposloupnost $\{X_{n_k}\}$ tak, aby $\|X_{n_k} - X_{n_{k+1}}\| < \frac{1}{2^k}$. Dále indukcí lehko sestrojíme posloupnost $\{x_{n_k}\}$ s vlastnostmi $x_{n_k} \in X_{n_k}$ a $\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\| < \frac{1}{2^k}$. Protože poslední posloupnost je cauchyovská v E, existuje její limita, označme ji x. Z nerovnosti $\|X_{n_k} - [x]\| \le \|x_{n_k} - x\|$ plyne, že $X_{n_k} \to [x]$ (v normě prostoru E/M). Protože každá cauchyovská posloupnost, jejíž jistá podposloupnost konverguje, je konvergentní, jsme s důkazem hotovi. ♣

Kartézský součin aneb direktní součet

13.26. Kartézský součin. Uvažujme dva vektorové prostory W_1 a W_2 nad stejným tělesem. Jejich *kartézským součinem* (někdy též nazývaným *vektorovým součtem*) rozumíme množinu všech dvojic (w_1, w_2) z kartézského součinu $W_1 \times W_2$ (kde tedy $w_1 \in W_1$ a $w_2 \in W_2$) opatřenou vektorovými operacemi

$$(v_1, v_2) + (w_1, w_2) := (v_1 + w_1, v_2 + w_2)\,,$$

$$\lambda\,(w_1, w_2) := (\lambda\, w_1, \lambda\, w_2)\,.$$

Jsou-li nyní X a Y normované lineární prostory, chceme definovat na jejich kartézském součinu $X \times Y$ normu. Inspirací nám může být zavedení eukleidovské normy v prostoru $\mathbf{R}^2$, můžeme tedy definovat

$$||(x, y)||_{X\times Y} := \sqrt{||x||_X^2 + ||y||_Y^2}\,.$$

Indexy X a Y u jednotlivých norem jsme napsali pouze z důvodu upřesnění, přičemž obvykle se vynechávají. Jako dobré (ale elementární) cvičení zkuste ověřit, že se skutečně jedná o normu.

Někdy se definuje norma na součinu $X \times Y$ i jiným způsobem, kupříkladu jako

$$||(x,y)|| := ||x|| + ||y||$$

či

$$||(x,y)|| := \max(||x||\,,\,||y||)\,.$$

Naštěstí jsou všechny tyto normy navzájem ekvivalentní a ve většině úvah bývá jedno, jakou z nich uvažujeme.

Takto normovaný lineární prostor nazýváme *direktním součtem* (někdy též *součinem*) prostorů X a Y a značíme $X \oplus Y$. Pokud bychom přeci jen chtěli vyjádřit závislost na normě, značíme leckdy tyto prostory jako

$$X \oplus_{l^2} Y\,, \quad X \oplus_{l^1} Y\,, \quad X \oplus_{l^\infty} Y$$

anebo též zkráceně

$$X \oplus_2 Y\,, \quad X \oplus_1 Y\,, \quad X \oplus_\infty Y\,,$$

podle toho, kterou ze tří norem výše definovaných na těchto prostorech uvažujeme.

Následující tvrzení si můžete opět dokázat sami, je to dobré pocvičení.

13.27. Tvrzení. *Nechť X a Y jsou normované lineární prostory.*

(a) Potom $X \oplus Y$ je Banachův, právě když oba prostory X a Y jsou Banachovy.

(b) Posloupnost $\{(x_n, y_n)\}$ konverguje v prostoru $X \oplus Y$ k prvku (x,y), právě když $x_n \to x$ a $y_n \to y$.

Jaká je situace, uvažujeme–li nyní Hilbertovy prostory H_1 a H_2 ? Opět na součinu $H_1 \times H_2$ máme definovány normy jako výše. Při které z nich však bude $H_1 \times H_2$ Hilbertův prostor ? Víme, že nutnou podmínkou je, aby v tomto prostoru platilo rovnoběžníkové pravidlo. Která z uvedených norem je však splňuje ? A jak je pak vlastně definován skalární součin v $H_1 \times H_2$?

Lze ukázat, že ze tří norem, které jsme definivali na součinu $H_1 \times H_2$, norma $\sqrt{||h_1||^2 + ||h_2||^2}$ ($h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$) splňuje rovnoběžníkové pravidlo. Lze tedy na $H_1 \times H_2$ zavést skalární součin dávající tuto normu. Uměli byste napsat vzoreček pro skalární součin ?

Duály k různým prostorům

Nejdříve si řekněme, co vlastně rozumíme výrokem, že „duál k jistému prostoru X je prostor Y". Uvědomme si totiž, že duál X^* je Banachův prostor, jehož prvky jsou všechny spojité lineární formy na X a že prostor Y může mít úplně jinou strukturu. Takže, řekneme–li, že duálem k X je prostor Y, myslíme tím, že duál X^* je izometricky–izomorfní s uvažovaným Banachovým prostorem Y. Jinými slovy, že existuje izomorfní a izometrické zobrazení Φ prostoru X^* na prostor Y. Je nutné si uvědomit, že v této situaci nemusí být prostor Y jednoznačně určen, může existovat více (konkrétních) prostorů, s kterými je X^* izometricky–izomorfní (viz třeba 13.36).

A ještě velice důležitá poznámka – je dobré si pamatovat, že duál X^* je izometricky–izomorfní nějakému prostoru Y, ale podstatné je, a je to snad i důležitější, také umět dané zobrazení Φ popsat.

Věnujme se tedy popisu duálů některých základních prostorů.

13.28. Duál k c_0. Je–li $\alpha = \{\alpha_n\} \in l^1$, definujme funkcionál L_α na prostoru c_0 předpisem

$$L_\alpha : \{x_n\} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \quad \text{pro} \quad x := \{x_n\} \in c_0\,.$$

(Povšimněte si, že $L_\alpha x$ je dáno vlastně obdobou „skalárního součinu" prvků α a x.) Potom $L_\alpha \in c_0^*$. Zajisté, L je určitě lineární a z odhadu

$$|L_\alpha x| = \Big|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n\Big| \le \|x\|_{c_0} \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| = \|x\|_{c_0}\, \|\alpha\|_{l^1}$$

předně plyne, že řada $\sum \alpha_n x_n$ konverguje (dokonce absolutně), tedy funkcionál L_α je korektně definován, a jednak že L_α je omezený funkcionál. Také vidíme, že $\|L_\alpha\| \le \|\alpha\|$. Položíme-li však

$$x = (\operatorname{sign}\alpha_1, \dots, \operatorname{sign}\alpha_k, 0, 0, \dots),$$

je $x \in c_0$, $\|x\| \le 1$ a $L_\alpha x = |\alpha_1| + \dots + |\alpha_k|$. Tudíž dostáváme, že $\|L_\alpha\| = \|\alpha\|$.

Ukážeme nyní, že každá spojitá lineární forma na c_0 má tvar L_α pro vhodné $\alpha \in l^1$. Buď tedy $L \in c_0^*$. Položme $\alpha_n = Le_n$, kde $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ je prvek c_0 mající cifru 1 na n-tém místě, jinde samé 0. Pro každé k je

$$u_k := (\operatorname{sign}\alpha_1, \dots, \operatorname{sign}\alpha_k, 0, 0, \dots)$$

prvek c_0, $\|u_k\| \le 1$. Tudíž $Lu_k = \sum\limits_{i=1}^{k} |\alpha_i| \le \|L\|$, a vidíme, že $\alpha := \{\alpha_n\} \in l^1$. Je-li $x = \{x_n\} \in c_0$, je $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n e_n$, jak se lehko přesvědčíme. Potom ovšem

$$Lx = \sum_{n=1}^{\infty} x_n L e_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \alpha_n = L_\alpha x\,.$$

Závěr – zobrazení $\alpha \mapsto L_\alpha$ je izometrické a izomorfní zobrazení l^1 na c_0^*. Prostory c_0^* a l^1 jsou tedy izometricky-izomorfní.

V dalším již jenom ukážeme, jak některé duály vypadají, dokazovat nic nebudeme. Jako užitečné cvičení si můžete některá tvrzení sami rozmyslet.

13.29. Duál k c. Buď opět $\alpha = \{\alpha_n\} \in l^1$ a

$$L_\alpha : \{x_n\} \mapsto \alpha_1 \lim x_n + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \dots \quad \text{pro} \quad \{x_n\} \in c\,.$$

Potom $L_\alpha \in c^*$. Zobrazení

$$\Phi : \alpha \mapsto L_\alpha$$

je izometricko–izomorfním zobrazením l^1 na c^*.

13.30. Poznámka. Předešlé dva příklady 13.28 a 13.29 ukazují, že duály k prostorům c_0 a c jsou izometricky–izomorfní ačkoliv samotné prostory c_0 a c izometricky–izomorfní nejsou (našli byste nějaký důvod ?). Ty jsou pouze izomorfní.

13.31. Duál k l^1. Duál k prostoru l^1 je izometricky–izomorfní prostoru l^∞. Je-li L libovolná spojitá lineární forma na l^1, existuje posloupnost $\{\alpha_n\} \in l^\infty$ tak, že

$$L(\{x_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \quad \text{pro} \quad \{x_n\} \in l^1\,.$$

Navíc

$$|L\| = \|\{\alpha_n\}\| = \sup_n |\alpha_n|\,.$$

13.32. Duál k l^p. Buď $p \in (1, \infty)$ a $q = \frac{p}{p-1}$. Duál k prostoru l^p je izometricko–izomorfní prostoru l^q; korespondence mezi $\alpha = \{\alpha_n\} \in l^q$ a odpovídajícím funkcionálem $L_\alpha \in (l^p)^*$ je dána vztahem

$$L_\alpha : \{x_n\} \mapsto \sum \alpha_n x_n\,.$$

Opět $||L|| = ||\alpha||$.

13.33. Duál k l^∞. Při popisu duálu k prostoru l^∞ je situace poněkud dramatičtější a uvádíme ji pouze z důvodu úplnosti. Stručně řečeno, duál k l^∞ je izometricko–izomorfní prostoru všech konečně aditivních měr na $\mathbf{N}$. (Viz též konec následujícího odstavce 13.34.)

13.34. Duál k L^p. Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou, $p \in [1, \infty]$ a $q = \frac{p}{p-1}$, pokud $1 < p < \infty$, $q = \infty$ pro $p = 1$ a $q = 1$ v případě $p = \infty$. Pišme zkráceně L^p místo $L^p(X, \mathcal{S}, \mu)$. Je-li $1 < p < \infty$, jsou prostory L^q a $(L^p)^*$ izometricky-izomorfní. Totiž, je-li $g \in \mathcal{L}^q$ a

$$T_g : f \mapsto \int_X f\,\overline{g}\,d\mu \quad \text{pro} \quad f \in \mathcal{L}^p\,,$$

je $T_g \in (L^p)^*$ a $\|T_g\| = \|g\|$. Naopak, každá spojitá lineární forma na L^p má tvar T_g pro vhodnou funkci $g \in \mathcal{L}^q$. Jednoduchý návod k důkazu tohoto tvrzení v případě σ-konečné míry μ využívající Radon-Nikodýmovu větu lze nalézt v odstavci 13.17 z [LM], jinak lze konsultovat třeba podrobný rozbor v E. Hewitt and K. Stromberg [1965].

Jaká je situace pro $p = 1$? Je-li $g \in \mathcal{L}^\infty$ a

$$T_g f = \int_X f\,\overline{g}\,d\mu\,,$$

je opět $T_g \in (L^1)^*$ a $\|T_g\| = \|g\|$. V případě, kdy míra μ je příliš „divoká“, nemusí být již každá spojitá lineární forma tvaru T_g pro vhodnou funkci $g \in \mathcal{L}^\infty$. Je tomu však v případě, kdy míra μ je σ-konečná. Jestliže tedy μ je σ-konečná míra, jsou prostory L^∞ a $(L^1)^*$ izometricky-izomorfní. Je znám i jiný popis prostoru $(L^1)^*$, dokonce v případě obecných měr, lze jej nalézt v J. Schwartz [1951].

Konečně zbývá vyšetřit duál k L^∞. Zde je situace mnohem komplikovanější, prostor $(L^\infty)^*$ je izometricky-izomorfní prostoru omezených konečně aditivních měr na $\mathcal{S}$, zprostředkující zobrazení je dáno jako integrál vzhledem k těmto mírám. Je tedy třeba nejdříve definovat integrál pro konečně aditivní míry a odvodit větu analogickou k Rieszově větě o reprezentaci. Čtenář opět může nahlédnout do monografie E. Hewitt and K. Stromberg [1965].

13.35. Duál k $\mathcal{C}(K)$. Nechť K je kompaktní topologický prostor. Je-li $\mu \in \mathcal{M}(K)$ (komplexní) Radonova míra, je zobrazení

$$L_\mu : f \mapsto \int_K f\,d\,\mu\,, \quad f \in \mathcal{C}(K)\,,$$

spojitá lineární forma na $\mathcal{C}(K)$ a $\|L_\mu\| = \|\mu\|$. Rieszova věta o reprezentaci v 13.61 pak říká, že ke každému $L \in (\mathcal{C}(K))^*$ existuje právě jedna Radonova míra $\mu \in \mathcal{M}(K)$ tak, že $L = L_\mu$.

13.36. Jiný duál k $\mathcal{C}([0,1])$. Podle předchozího víme, že duál k prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ lze ztotožnit s prostorem Radonových měr na $[0,1]$. Ukážeme ještě jiný popis duálu $\mathcal{C}([0,1])^*$.

K tomu účelu zavedeme Banachův prostor $NBV([0,1])$ všech normalizovaných funkcí konečné variace na $[0,1]$. Prostor $NBV([0,1])$ je tvořen všemi zprava spojitými funkcemi konečné variace na intervalu $[0,1]$, které se anulují v bodě 0. Norma $\|f\|$ takové funkce je definována jako variace f na $[0,1]$, tedy

$$\|f\| = \sup\{\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1\}\,.$$

$NBV([0,1])$ tvoří Banachův prostor. Je-li $\varphi \in NBV([0,1])$ a

$$L_\varphi : f \mapsto \int_0^1 f\,d\varphi \quad \text{pro} \quad f \in \mathcal{C}([0,1])$$

(jedná se o Riemann-Stieltjesův integrál), je $L_\varphi \in \mathcal{C}([0,1])^*$ a $\|L_\varphi\| = \|\varphi\|$. Jedna z mnoha Rieszových vět říká, že ke každé spojité lineární formě L na $\mathcal{C}([0,1])$ existuje právě jedna funkce $\varphi \in NBV([0,1])$ tak, že $L = L_\varphi$. Jsou tedy prostory $\mathcal{C}([0,1])^*$ a $NBV([0,1])$ izometricky-izomorfní.

Není těžké si rozmyslet, jaký je vztah mezi funkcí φ, která reprezentuje spojitou lineární formu L na $\mathcal{C}([0,1])$ a Radonovou mírou μ, která reprezentuje podle 13.35 tentýž funkcionál L.

13.37. Duál k Hilbertovu prostoru. Duálu k Hilbertovu prostoru je popsán v 10.23. Povšimněte si ovšem rozdílu mezi popisem duálu v komplexním či reálném případě.

Baireova věta o kategoriích

13.38. Husté a řídké množiny. Uvažujme metrický prostor P (obecněji bychom se mohli pohybovat i v topologických prostorech). Řekneme, že množina B je *hustá* v P, jestliže $\overline{B} = P$. Ekvivalentně, B je hustá, jestliže $G \cap B \neq \emptyset$, kdykoliv G je neprázdná otevřená podmnožina P (takovým množinám říkejme *díry*).

Množinu N nazveme *řídkou*, jestliže její uzávěr $\overline{N}$ má prázdný vnitřek, tedy jestliže $\mathrm{Int}(\overline{N}) = \emptyset$.

13.39. Množiny první a druhé kategorie. Řekneme, že metrický prostor P je *1. kategorie*, jestliže ho lze vyjádřit jako spočetné sjednocení řídkých množin. Není–li P 1. kategorie, nazveme ho prostorem *2. kategorie*. Není těžké si rozmyslet (přechodem k doplňkům a užitím de Morganových pravidel), že *P je 2. kategorie, právě když $\bigcap_n G_n \neq \emptyset$, kdykoliv $\{G_n\}$ je posloupnost otevřených hustých podmnožin P.*

13.40. Baireovy prostory. Prostory P, které mají tu vlastnost, že množina $\bigcap_n G_n$ je dokonce hustá pro libovolnou posloupnost $\{G_n\}$ otevřených hustých podmnožin P se nazývají *Baireovy prostory*. Ty se také dají charakterizovat jako ty prostory, jejichž každá neprázdná otevřená podmnožina je 2. kategorie (v sobě). Zkuste si poslední tvrzení sami dokázat a současně se zamyslete nad příkladem prostoru 2. kategorie, který by nebyl Baireovým.

13.41. Baireova věta o kategoriích. *Každý úplný metrický prostor je Baireův.*

Důkaz. Nechť $\{G_n\}$ je posloupnost hustých otevřených množin v úplném prostoru P. Chceme dokázat, že $\bigcap_n G_n$ je hustá množina. Volme tedy „díru” G (= neprázdnou otevřenou množinu) v P. Naším cílem je ukázat, že

$$G \cap \bigcap_n G_n \neq \emptyset\,.$$

Protože G_1 je hustá v P, je průnik $G_1 \cap G$ neprázdný. Existuje tedy otevřená koule $U^{\varepsilon_1}(x_1)$ tak, že $\overline{U^{\varepsilon_1}(x_1)} \subset G_1 \cap G$. Protože G_2 je hustá, musí protnout $U^{\varepsilon_1}(x_1)$. Existuje tedy otevřená koule $U^{\varepsilon_2}(x_2)$ tak, že $\overline{U^{\varepsilon_2}(x_2)} \subset G_2 \cap U^{\varepsilon_1}(x_1) \subset G_2 \cap G_1 \cap G$. Takto můžeme pokračovat dále. Pokud by existoval bod v průniku všech (do sebe zařazených koulí $U^{\varepsilon_n}(x_n)$), je vyhráno. Jestliže tedy ještě během důkazu zaručíme, aby $\varepsilon_n \to 0$, bude podle Cantorovy věty[3] průnik $\bigcap_n \overline{U^{\varepsilon_n}(x_n)}$ neprázdný. A bod v tomto průniku bude zřejmě ležet v $G \cap \bigcap_n G_n$. ■

Jiné důkazy principu stejnoměrné omezenosti

Existují různé důkazy principu stejnoměrné omezenosti. V 5.1 jsme uvedli „klasický” využitím Baireovy věty o kategoriích, důkaz v 12.4 byl založen na Zabrejkově lemmatu. Zcela odlišný důkaz (využívající jisté vlastnosti nekonečných matic) je uveden v monografii Ch. Swartz [1992]. V dalším podáme ještě tři další důkazy.

13.42. Metoda klouzajícího hrbu. Zajímavý důkaz principu stejnoměrné omezenosti je založen na tak zvané *metodě klouzajícího hrbu* (pocházející původně od H. Hahna a S. Banacha). A protože tuto metodu lze využít i v jiných situacích, stručně se jí věnujme. Ilustrativně pomocí ní dokážeme princip stejnoměrné omezenosti, pouze však pro případ posloupností.

Předpokládejme tedy, že $\{L_n\}$ je posloupnost spojitých lineárních zobrazení z Banachova prostoru X do normovaného lineárního prostoru Y,

$$K(x) := \sup\{||L_n x|| : n \in \mathbf{N}\} < \infty \quad \text{pro každé} \quad x \in X\,.$$

Nechť

$$\sup\{||L_n|| : n \in \mathbf{N}\} = \infty\,.$$

[3] *Cantorova věta* říká, že průnik klesající posloupnosti uzavřených množin v úplném metrickém prostoru je neprázdný, pokud průměry těchto množin konvergují k nule.

Potom můžeme předpokládat, že (po eventuálním vybrání vhodné podposloupnosti) $||L_n|| > n4^n$ pro každé n. Existuje tedy posloupnost $\{x_n\}$ tak, že

$$||x_n|| = 1 \quad \text{a} \quad ||L_n x_n|| \geq n4^n \,.$$

Položíme-li

$$T_n := 2^{-n} L_n \quad \text{a} \quad z_n := 2^{-n} x_n \,,$$

je

$$||z_n|| = 2^{-n} \quad \text{a} \quad ||T_n z_n|| > n \,.$$

Volíme-li i pevné, je

$$||T_i z_j|| \leq ||T_i|| \, ||z_j|| \to 0 \quad \text{pro} \quad j \to \infty \,.$$

Na druhé straně pro pevné j dostáváme z předpokladu, že

$$||T_i z_j|| = ||2^{-i} L_i z_j|| \leq 2^{-i} K(z_j) \to 0 \quad \text{pro} \quad i \to \infty \,.$$

Tedy řádky i sloupce (nekonečné) matice $(T_i z_j)$ konvergují k nulovému prvku prostoru Y. Tudíž můžeme nalézt n_2 tak, aby

$$||T_1 z_j|| \leq 2^{-3} \quad \text{pro} \quad j \geq n_2 \quad \text{a} \quad ||T_i z_1|| \leq 2^{-3} \quad \text{pro} \quad i \geq n_2 \,.$$

Indukcí pak nalezneme posloupnost $n_1 = 1 < n_2 < n_3 < \dots$ tak, aby

$$||T_{n_i} z_{n_j}|| \leq 2^{-i-j} \quad \text{pro} \quad i \neq j \,.$$

Je-li i pevné, máme

$$||T_{n_i} z_{n_i}|| > n_i \quad \text{a} \quad \sum_{j=1, j\neq i}^{\infty} ||T_{n_i} z_{n_j}|| \leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-i-j} = 2^{-i} \,.$$

Názorně řečeno, podíváme-li se v matici $(T_{n_i} z_{n_j})$ na i-tý řádek, je hodnota $||T_{n_i} z_{n_i}||$ velká (to je náš „hrb”), zatímco součet norem zbývajících vybraných členů je malý.

Nyní stačí položit $z := \sum_{j=1}^{\infty} z_{n_j}$. Protože X je úplný prostor a řada $\sum_{j=1}^{\infty} ||z_{n_j}||$ konverguje, konverguje i řada $\sum_{j=1}^{\infty} z_{n_j}$ a prvek z je tedy dobře definován. Podíváme-l se pro i pevné na odhad

$$||T_{n_i} z|| = ||\sum_{j=1}^{\infty} T_{n_i} z_{n_j}|| \geq ||T_{n_i} z_{n_i}|| - \sum_{j=1, j\neq i}^{\infty} ||T_{n_i} z_{n_j}|| \geq n_i - 2^{-i}$$

(všechny kroky je třeba podrobně zdůvodnit), docházíme ke sporu, neboť

$$||T_{n_i} z|| = ||2^{-n_i} L_{n_i} z|| \leq 2^{-n_i} K(z) \to 0 \quad \text{pro} \quad i \to \infty \,.$$

13.43. Elementární důkaz principu stejnoměrné omezenosti. Následující „elementární” důkaz principu stejnoměrné omezenosti pochází od J. Hennefelda [1980]. Zde je.

Nechť tedy $\mathfrak{G}$ je podmnožina $\mathcal{L}(X, Y)$, kde X je Banachův a Y normovaný lineární prostor. Předpokládejme, že množina $\{||Lx|| : L \in \mathfrak{G}\}$ je omezená pro každé $x \in X$. Indukcí sestrojíme posloupnosti $\{x_n\}$ v X a $\{L_n\}$ z $\mathfrak{G}$ tak, aby

$$||x_n|| = \frac{1}{4^n} \,,$$

$$||L_n(x_n)|| > \frac{2}{3} \, ||L_n|| \, ||x_n||$$

a

$$||L_n|| > 3 \,.\, 4^n \Big(n + \sup\{||L(x_1 + \cdots + x_{n-1})|| : L \in \mathfrak{G}\} \Big) \,.$$

Položíme–li

$$x := \sum x_n \,,$$

dostaneme, že $||L_n(x)|| > n$ pro každé n. A to je zjevný spor s předpokladem. Detaily lze nalézt v citovaném článku.

13.44. Další důkaz principu stejnoměrné omezenosti. Princip stejnoměrné omezenosti je také důsledkem Věty 6.4 o uzavřeném grafu. Zde je myšlenka.

Pro $x \in X$ položme
$$F_x(\Gamma) := \Gamma(x) \quad \text{pro} \quad \Gamma \in \mathfrak{G}\,.$$
Potom F_x je prvkem Banachova prostoru $\mathcal{B}(\mathfrak{G}, Y)$ ze Cvičení 2.9 a stačí ukázat, že zobrazení
$$T : x \mapsto F_x : X \to \mathcal{B}(\mathfrak{G}, Y)$$
má uzavřený graf. To vyplyne celkem snadno pomocí standardních úvah. Tudíž T je omezené zobrazení. Potom pro $x \in S_X$ a $\Gamma \in \mathfrak{G}$ máme
$$||\Gamma(x)|| = ||F_x(\Gamma)|| \leq ||F_x|| \leq ||T|| < \infty\,,$$
odkud již vyplývá tvrzení.

Volterrovy a Fredholmovy operátory

13.45. Volterrovy operátory. *Volterrův operátor* V je definován na prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ předpisem
$$Vf(x) := \int_0^x k(x,t)f(t)\,dt\,, \quad f \in \mathcal{C}([0,1])\,,$$
kde funkce $k(x,t)$, zvaná též *jádro operátoru* V, je spojitou funkcí na množině
$$M := \{(x,t) : x \in [0,1]\,,\, t \in [0,x]\}\,.$$
Neškodilo by si rozmyslet, že definice Volterrova operátoru je korektní, tedy že uvažovaný integrál existuje pro každé $x \in [0,1]$. Dále se procvičte a ukažte, že $Vf \in \mathcal{C}([0,1])$ pro každou spojitou funkci f na $[0,1]$. Je též evidentní, že Volterrův operátor V je lineární.

Označíme–li $K := \max\{|k(x,t)| : (x,t) \in M\}$, je
$$|Vf(x)| \leq \int_0^x |k(x,t)|\,|f(t)|\,dt \leq x\,K\,||f|| \leq K\,||f||\,.$$
Odtud ihned vyplývá, že operátor V je spojitý.

Volterrův operátor je kompaktní. Pokuste se sami imitovat důkaz speciálního Volterrova operátoru z Příkladu 14.14.

Zkoumejme nyní operátor $V - I$ a ptejme se, je–li prostý. Nechť tedy $Vf - f = 0$. Volíme–li $x \in [0,1]$, máme podle předešlého
$$|f(x)| = \big|Vf(x)\big| \leq \int_0^x |k(x,t)|\,|f(t)|\,dt \leq x\,K\,||f||\,.$$
Opakováním dostáváme odhad
$$|f(x)| = \big|Vf(x)\big| \leq \int_0^x |k(x,t)|\,t\,K\,||f||\,dt \leq \frac{x^2}{2}\,K^2\,||f||$$
a indukcí
$$|f(x)| \leq \frac{x^n}{n!}\,K^n\,||f|| \to 0 \quad \text{pro} \quad n \to \infty\,.$$
Odtud plyne, že $f(x) = 0$ a vidíme, že operátor $V - I$ je prostý. Obdobně bychom ukázali, že i operátor $V - \lambda I$ je prostý pro každé nenulové λ. Volterrův operátor V tedy nemá žádná nenulová vlastní čísla. Využijeme–li vlastností spektra kompaktního operátoru v 9.16, dostaneme že
$$\sigma(V) = \{0\} \cup \sigma_p(V) = \{0\}\,.$$

Poznámka. Indukcí lehko odvodíme, že

$$|V^n f(x)| \le K^n \, ||f|| \, \frac{x^n}{n!} \,,$$

tudíž

$$||V^n|| \le \frac{K^n}{n!} \,.$$

Z Beurlingova vzorečku

$$r(V) = \lim \sqrt[n]{||V^n||}$$

(viz Poznámku 7.9.b) plyne, že spektrální poloměr $r(V)$ Volterrova operátoru je roven 0. Musí tedy být $\sigma(V) = \{0\}$.

Z obecné teorie pak plyne, že řešení Volterrovy integrální rovnice

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)\, f(t)\, dt \,,$$

kde $g \in \mathcal{C}([0,1])$ je daná funkce, je pak pro $\lambda \neq 0$ dáno Neumannovou řadou

$$f = g + \lambda V g + \lambda^2 V^2 g + \lambda^3 V^3 g + \dots$$

Jako ilustraci si rozmyslete, že řešení integrální rovnice

$$f(x) = x^2 + \int_0^x x\, f(t)\, dt$$

je dáno řadou

$$f(x) = x^2 + \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{15} + \dots \,.$$

13.46. Fredholmovy operátory. Nechť k je spojitá funkce na $[0,1] \times [0,1]$. *Fredholmův operátor* $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(\mathcal{C}([0,1]))$ definujme předpisem

$$\mathcal{F} f(s) := \int_0^1 k(s,t) f(t)\, dt \quad \text{pro} \quad f \in \mathcal{C}([0,1]) \quad \text{a} \quad s \in [0,1].$$

Není těžké si uvědomit, že $\mathcal{F} f$ je korektně definováno (integrand je spojitá funkce), dále že $\mathcal{F} f \in \mathcal{C}([0,1])$ (využije se stejnoměrné spojitosti funkce k), že $\mathcal{F}$ je lineární operátor, a že je omezený ($\|\mathcal{F}\| \le \sup\{|k(s,t)| : s,t \in [0,1]\}$).

Soustřeďme se na důkaz, že $\mathcal{F}$ je kompaktní. Označme

$$B := \{f \in \mathcal{C}([0,1]) : \|f\| \le 1\} \,.$$

K tomu, abychom dokázali, že množina $\mathcal{F}(B)$ je relativně kompaktní v $\mathcal{C}([0,1])$, použijeme Arzelà-Ascoliho větu z 13.62. Ovšem $\mathcal{F}(B)$ je omezená množina, protože $\mathcal{F}$ je omezený operátor a zbývá ukázat, že $\mathcal{F}(B)$ je množina stejně spojitých funkcí. Ale to je snadné. Volíme-li $\varepsilon > 0$, najdeme $\delta > 0$ tak, aby $|k(s_1,t) - k(s_2,t)| < \varepsilon$, kdykoliv $t \in [0,1]$ a $|s_1 - s_2| < \delta$. Potom

$$\big|\mathcal{F} f(s_1) - \mathcal{F} f(s_2)\big| \le \max_{t \in [0,1]} \big|k(s_1,t) - k(s_2,t)\big| \, \|f\| \le \varepsilon \,.$$

Poznamenejme, že Fredholmovy operátory lze definovat i na mnohem obecnějších prostorech, zájemce odkažme na [Záp], 2.49.a. Samozřejmě také lze uvažovat Fredholmovy integrální rovnice, ale to je již jiná kapitola.

Kolmost v Banachových prostorech

V Hilbertových prostorech, kde máme k dispozici skalární součin, lze definovat kolmost – dva prvky jsou na sebe kolmé, jestliže jejich skalární součin je roven nule. Jak ale definovat kolmost v obecných Banachových prostorech ? A jaké vlastnosti od tohoto pojmu máme očekávat ? Uvedeme zde některé, otázkou ovšem je, zda je možno je vhodnou definicí všechny požadovat. Jelikož se jedná pouze o kapitolku informativního charakteru, omezíme se zde pouze na reálné prostory.

13.47. Požadavky na kolmost. Nechť X je reálný Banachův prostor, v němž máme definován pojem kolmosti dvou prvků: $x \perp y$. V každém případě požadujeme, aby nová definice kolmosti souhlasila s obvyklou definicí kolmosti v případě, kdy X je Hilbertův prostor. Dále na kolmost $\perp$ můžeme klást kupříkladu následující požadavky:

(a) pokud $x \perp y$, potom $y \perp x$,
(b) pokud $x \perp y$ a $x \perp z$, potom $x \perp y + z$,
(c) jestliže $x_n \perp y_n$, $x_n \to x$ a $y_n \to y$, potom $x \perp y$,
(d) jestliže $x \perp y$ a $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, potom $\lambda x \perp \mu y$
(e) jsou–li $x, y \in X$, mělo by existovat $\lambda \in \mathbf{R}$ tak, aby $x \perp \lambda x + y$.

13.48. Různé definice kolmosti. Existují různé navzájem neekvivalentní definice kolmosti. Každá z nich pak splňuje některé z uvedených požadavků. Uveďme nyní nejvíce užívané definice kolmosti (poznamenejme, že inspirací pro nás může být Cvičení 10.30.d).

Můžeme tedy říci, že prvek x je kolmý na prvek y, což zapisujeme jako $x \perp y$, jestliže:

(a) $||x + \lambda y|| = ||x - \lambda y||$ pro každé $\lambda \in \mathbf{R}$ (*Robertsova ortogonalita*),
(b) $||x|| \leq ||x + \lambda y||$ pro každé $\lambda \in \mathbf{R}$ (*Birkhoff–Jamesova ortogonalita*),
(c) $||x - y||^2 = ||x||^2|| + ||y||^2$ (*Pythagorova ortogonalita*),
(d) $||x + y|| = ||x - y||$ (*Birkhoffova ortogonalita*).

13.49. Birkhoff–Jamesova ortogonalita. Zdá se, že dnes nejvýznamnější roli má Birkhoff–Jamesova ortogonalita. Věnujme se jí tedy trochu podrobněji. Zopakujme však nejprve pro jistotu ještě jednou definici. Řekneme, že prvek x Banachova prostoru X je kolmý (v Birkhoff–Jamesově smyslu) k prvku y, jestliže $||x|| \leq ||x+\lambda y||$ pro každé $\lambda \in \mathbf{R}$. Skutečnost, že x je kolmý k y značíme symbolicky $x \perp y$. Ke kolizi se značením kolmosti v Hilbertových prostorech nemůže dojít. O tom svědčí následující lemma.

13.50. Lemma. *Nechť x a y jsou prvky Hilbertova prostoru H. Potom $(x, y) = 0$, právě když $||x|| \leq ||x + \lambda y||$ pro každé $\lambda \in \mathbf{R}$.*

Důkaz. Předpokládáme–li, že $(x, y) = 0$ a volíme λ libovolně, máme okamžitě

$$||x + \lambda y||^2 = ||x||^2 + 2\lambda(x, y) + \lambda^2||y||^2 \geq ||x||^2 .$$

Naopak, pokud pro každé $\lambda \in \mathbf{R}$ je

$$||x||^2 + 2\lambda(x, y) + \lambda^2||y||^2 = ||x + \lambda y||^2 \geq ||x||^2 ,$$

dostáváme, že

$$2\lambda(x, y) + \lambda^2||y||^2 \geq 0 .$$

Odtud plyne, že pro každé $\lambda \geq 0$ musí být splněna nerovnost

$$2(x, y) + \lambda||y||^2 \geq 0 .$$

Limitním přechodem $\lambda \to 0_+$ dostaneme nerovnost $(x, y) \geq 0$. Opačnou nerovnost $(x, y) \leq 0$ pak dostaneme pro případ $\lambda < 0$. ■

13.51. Příklad. Birkhoff–Jamesův pojem ortogonality není symetrický. Uvažujme třeba prostor l_2^1 (viz 13.15) a jeho prvky $x = (0, 1)$, $y = (2, 1)$. Rozmyslete si, že sice $x \perp y$, nikoliv však $y \perp x$.

13.52. Poznámka. Situace se symetrií Birkhoff–Jamesovy ortogonality je ještě zajímavější. Je–li totiž dimenze Banachova prostoru X alespoň 3 a Birkhoff–Jamesova ortogonalita je symetrická, je X již Hilbertův prostor. Přesněji, norma prostoru X již vznikne ze skalárního součinu.

Následující věty uvedeme bez důkazu. Slouží spíše jako ilustrace vlastností Birkhoff–Jamesovy kolmosti.

13.53. Věta. *Nechť x, y jsou prvky Banachova prostoru X, $x \neq \mathbf{0}$. Potom existuje $\lambda \in \mathbf{R}$ tak, že $x \perp \lambda x + y$.*

Obecně skalár λ není určen jednoznačně. Kdy tomu tak je, vypovídá následující věta. Ta je mimochodem i zajímavou charakteristikou hladkých prostorů (pro definici viz Poznámku 4.4.a).

13.54. Věta. *Nechť X je Banachův prostor. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) *X je hladký,*
(ii) *jsou-li $x, y \in X$, $x \neq \mathbf{0}$, existuje právě jedno $\lambda \in \mathbf{R}$ tak, že $x \perp \lambda x + y$,*
(iii) *jestliže $x \perp y$ a $x \perp z$, potom $x \perp y + z$.*

13.55. Poznámka. Pokud jde o charakteristiku prostorů, kde platí obdobné vztahy „zleva", ta vede na pojem striktní konvexity. Viz třeba [Záp], *21.9.

Algebraické lemma

13.56. Algebraické lemma. *Nechť $f, f_1, \dots, f_n$ jsou lineární formy na vektorovém prostoru W. Jestliže*

$$\ker f \supset \ker f_1 \cap \dots \cap \ker f_n\,,$$

potom f je lineární kombinací $f_1, \dots, f_n$, tj. existují čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tak, že

$$f = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n\,.$$

Důkaz. Důkaz lze vést třeba pomocí matematické indukce. Zde je myšlenka. Především lze předpokládat, že žádná z uvažovaných lineárních forem není nulová. Pokud je $n = 1$, najdeme $w \in W$ tak, aby $f_1(w) = 1$. Potom pro $x \in W$ máme

$$f_1\big(x - f_1(x)w\big) = f_1(x) - f_1(w)\,f_1(x) = 0\,,$$

takže podle předpokladu

$$0 = f\big(x - f_1(x)w\big) = f(x) - f(w)\,f_1(x)\,.$$

Vidíme, že $f = f(w)\,f_1$. Předpokládejme tedy, že tvrzení platí pro jisté n. Označme $V := \ker f_{n+1}$, g restrikci f na V a g_j restrikce f_j na V, $j = 1, \dots, n$. Potom

$$\ker g \supset \ker g_1 \cap \dots \cap \ker g_n\,,$$

takže podle indukčního předpokladu existují $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tak, že

$$g = \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_n g_n\,.$$

Tedy

$$\ker f_{n+1} = V \subset \ker\Big(f - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j\Big)\,.$$

Podle již dokázaného je f_{n+1} násobkem lineární formy $f - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j$. Odtud vidíme, že f je lineární kombinací forem $f_1, \dots, f_{n+1}$ a indukce je dokončena. ∎

13.57. Důsledek. *Nechť E je nekonečně rozměrný normovaný lineární prostor. Jsou–li $f_1, \dots, f_n \in E^*$, potom*

$$\bigcap_{j=1}^{n} \ker f_j \neq \{\mathbf{0}\}\,.$$

Důkaz. Předpokládejme, že $\bigcap\limits_{j=1}^{n} \ker f_j = \{\mathbf{0}\}$. V tom případě ovšem

$$\{\mathbf{0}\} = \bigcap_{j=1}^{n} \ker f_j \subset \ker \varphi$$

pro libovolnou formu $\varphi \in X^*$. Podle právě zmíněného algebraického lemmatu 13.56 je potom φ lineární kombinací forem $f_1, \dots, f_n$. To ale neznamená nic jiného než že dimenze prostoru X^* je nejvýše n. A protože $\dim X = \dim X^*$, má X konečnou dimenzi, což je ve sporu s předpokladem. ■

Zobecnění Rieszova lemmatu

V Poznámce 9.5 jsme uvedli, že v libovolném normovaném lineárním prostoru nekonečné dimenze – ať si zvolíme jaké chceme $\beta \in (0,1)$ – vždy existuje posloupnost $\{x_n\}$ (lineárně nezávislých) prvků z jednotkové sféry tak, že $||x_n - x_k|| \geq \beta$ kdykoliv $n \neq k$. Nyní ukážeme, že platí i daleko silnější tvrzení.

Předpokládejme tedy v dalším, že E je normovaný lineární prostor nekonečné dimenze; dále opět označme $S_E := \{x \in E : ||x|| = 1\}$ jeho jednotkovou sféru.

13.58. Tvrzení. *Existuje (lineárně nezávislá) posloupnost $\{x_n\}$ z S_E tak, že $||x_n - x_k|| \geq 1$ kdykoliv $n \neq k$.*

Důkaz. Posloupnost $\{x_n\}$ se konstruuje induktivně. Prvek $x_1 \in S_E$ se zvolí libovolně. Předpokládejme tedy, že máme již zkonstruovány lineárně nezávislé prvky $x_1, \dots, x_n$ z S_E tak, že $||x_j - x_k|| \geq 1$ pro každou dvojici j,k různých indexů. Nechť M je podprostor E generovaný prvky $x_1, \dots, x_n$. Podle Poznámky 9.2.b nalezneme x_{n+1} tak, by $||x_{n+1}|| = 1 = \operatorname{dist}(x_{n+1}, M)$. Tím je indukční krok hotov, prvek x_{n+1} leží na jednotkové sféře S_E, je lineárně nezávislý na $x_1, \dots, x_n$ a jeho vzdálenost od těchto prvků je alespoň 1. ■

13.59. Kottmanovo tvrzení. *Existuje dokonce posloupnost $\{x_n\}$ z S_E tak, že $||x_n - x_k|| > 1$ kdykoliv $n \neq k$.*

Důkaz. Volme $x_1 \in S_E$. Podle Věty o tečně 4.3 existuje $f_1 \in E^*$ tak, že $||f_1|| = 1 = f_1(x_1)$. Předpokládejme, že jsme již sestrojili vektory $x_1, x_2, \dots, x_n$ v jednotkové sféře S_E a lineárně nezávislé funkcionály $f_1, f_2, \dots, f_n$ v E^* tak, že $||x_n - x_k|| > 1$ kdykoliv $n \neq k$ a

$$||f_j|| = 1 = f_j(x_j) \quad \text{pro každé} \quad j \in \{1, 2, \dots, n\}\,.$$

Podaří-li se nám zkonstruovat $x_{n+1} \in S_E$ a $f_{n+1} \in E^*$ tak, aby $||f_{n+1}|| = 1 = f_{n+1}(x_{n+1})$, $f_j(x_{n+1}) < 0$ pro $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ a aby funkcionály $f_1, f_2, \dots, f_{n+1}$ byly lineárně nezávislé, je vyhráno. Potom totiž pro $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ budeme mít

$$||x_{n+1} - x_j|| \geq |f_j(x_{n+1} - x_j)| = |f_j(x_{n+1}) - f_j(x_j)| = |f_j(x_{n+1}) - 1| > 1\,.$$

Ke konstrukci x_{n+1} a f_{n+1} potřebujeme nalézt nenulové vektory $a, b \in E$ tak, aby

$$f_j(a) = -1 < 0 = f_j(b) \quad \text{pro každé} \quad j \in \{1, 2, \dots, n\}\,,$$

položit $x_{n+1} := \frac{a + \lambda b}{||a + \lambda b||}$, kde $\lambda > 0$ je zvoleno tak, že $||a|| < ||a + \lambda b||$, použít opět Větu o tečně pro nalezení f_{n+1} a trochu (šikovně) počítat.

Rozveďme přeci jen tuto myšlenku trochu podrobněji. Protože prostor E je nekonečně rozměrný, je podle Důsledku 13.57

$$\bigcap_{j=1}^{n} \ker f_j \neq \{\mathbf{0}\}\,.$$

Stačí tedy vzít $b \in \bigcap\limits_{j=1}^{n} \ker f_j$. Protože lineární formy $f_1, \dots, f_n$ jsou lineárně nezávislé, pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$ existuje $x_j \in E$ tak, že

$$f_j(x_j) = 1 \quad \text{a} \quad f_j(x_k) = 0 \quad \text{pro} \quad k \neq j\,.$$

Položíme–li

$$a := -(x_1 + \dots + x_n)\,,$$

je $f_j(a) = -1$ pro každé $j = 1, \dots, n$. Pokračujme dále. Především si musíme rozmyslet, proč existuje takové $\lambda > 0$, pro něž $||a|| < ||a + \lambda b||$. Jak jsme naznačili, položíme

$$x_{n+1} := \frac{a + \lambda b}{||a + \lambda b||}$$

a opět podle Věty o tečně nalezneme $f_{n+1} \in E^*$ tak, aby

$$||f_{n+1}|| = 1 = f_{n+1}(x_{n+1}).$$

Potom samozřejmě $||x_{n+1}|| = 1$ a pro $j = 1, \dots, n$ dostáváme

$$f_j(x_{n+1}) = f_j\Big(\frac{a + \lambda b}{||a + \lambda b||}\Big) = \frac{1}{||a + \lambda b||} f_j(a + \lambda b) < 0.$$

Zbývá ukázat, že funkcionály $f_1, \dots, f_n, f_{n+1}$ jsou lineárně nezávislé. Předpokládejme tedy, že

$$f_{n+1} = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n.$$

Potom

$$\begin{aligned} ||a + \lambda b|| &= f_{n+1}(a + \lambda b) = \alpha_1 f_1(a + \lambda b) + \dots + \alpha_n f_n(a + \lambda b) = \\ &= \alpha_1 f_1(a) + \dots + \alpha_n f_n(a) = f_{n+1}(a) \le ||a|| < \\ &< ||a + \lambda b||, \end{aligned}$$

což je zjevný spor. ■

Protože samozřejmě $||x - y|| \le 2$ pro každé dva prvky $x, y \in S_X$, zajímá nás, jak extrémně daleko mohou být od sebe prvky posloupnosti z S_X. Podíváme–li se na prostor c_0 a posloupnost $\{x_n\}$, kde

$$x_n = (1, 1, , \dots, 1, -1, 0, 0, \dots),$$

je $x_n \in S_{c_0}$ a lehce spočítáme, že

$$||x_n - x_k|| = 2 \quad \text{pro} \quad n \ne k.$$

A to je maximální hodnota, kterou můžeme dosáhnout. Následující věta, jejíž důkaz je neobyčejně těžký (využívá třeba i Ramseyovu teorii), je završením cesty na jejímž počátku stála Rieszova věta o skoro kolmici.

13.60. Elton–Odellova $(1 + \varepsilon)$–věta. *Ke každému normovanému lineárnímu prostoru X nekonečné dimenze existuje $\varepsilon(X) > 0$ a posloupnost $\{x_n\}$ z jednotkové sféry S_X tak, že*

$$||x_n - x_k|| \ge 1 + \varepsilon(X) \quad \textit{kdykoliv} \quad n \ne k.$$

Rieszova věta o reprezentaci

13.61. Rieszova věta o reprezentaci. *Nechť K je kompaktní prostor a L je nezáporný lineární funkcionál na prostoru $\mathcal{C}(K)$. Potom existuje Radonova míra μ na K tak, že*

$$Lf = \int_K f \, d\mu \quad \textit{pro každou} \quad f \in \mathcal{C}(K).$$

Míra μ je jednoznačně určena na borelovských množinách z K.

Důkaz. Důkaz, dokonce v obecnějším kontextu lokálně kompaktních prostorů, lze nalézt ve skriptech [MI], věta 16.5. ■

Arzelà–Ascoliho věta

V definici kompaktních operátorů požadujeme, aby omezené množiny byly zobrazovány na množiny, které jsou relativně kompaktní. Abychom tedy mohli posoudit, zda ten či onen operátor je kompaktní, potřebujeme znát, jak jsou v jednotlivých Banachových prostorech charakterizovány relativně kompaktní množiny. Vcelku dostačující přehled lze nalézt v [Záp], *1.14. Zde pro pohodlí pouze sformulujeme kriterium relativní kompaktnosti v prostorech $\mathcal{C}(K)$.

13.62. Arzelà-Ascoliho věta. *Buď K kompaktní prostor. Množina A je relativně kompaktní v prostoru $\mathcal{C}(K)$, právě když A je omezená a stejně spojitá.*

Připomeňme, že množina funkcí $\mathcal{F}$ na prostoru K se nazývá *stejně spojitá*, jestliže ke každému $x \in K$ a každému $\varepsilon > 0$ lze nalézt takové okolí U bodu x, že $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$, kdykoliv $f \in \mathcal{F}$ a $t \in U$.

14. Příklady k procvičení

Normy operátorů

14.1. Příklad. *Definujme funkcionál T na Banachově prostoru $\mathcal{C}([-1,3])$ předpisem*

$$T : f \mapsto 7\,f(-1) - 2\,f(0) + f(2)\,, \quad f \in \mathcal{C}([-1,3])\,.$$

Spočtěte $||T||$.

Návod. Protože

$$|Tf| = |7\,f(-1) - 2\,f(0) + f(2)| \le 7\,|f(-1)| + 2\,|f(0)| + |f(2)| \le 10\,||f||\,,$$

je $||T|| \le 10$. Určitě existuje spojitá funkce $g \in \mathcal{C}([-1,3])$ tak, že $-1 \le g \le 1$ na $[-1,3]$, $g(-1) = g(2) = 1$ a $g(0) = -1$. Potom ovšem $||g|| = 1$ a $Tg = 10$. Tudíž $||T|| = 10$. ♣

14.2. Příklad. *Spočtěte normu funkcionálu*

$$T : f \mapsto \int_{-1}^{0} f - \int_{0}^{1} f\,, \quad f \in \mathcal{C}([-1,1])\,.$$

Návod. Protože

$$|Tf| \le \Big|\int_{-1}^{0} f\Big| + \Big|\int_{0}^{1} f\Big| \le \int_{-1}^{0} |f| + \int_{0}^{1} |f| \le 2\,||f||\,,$$

je $||T|| \le 2$. Volíme-li (třeba) spojitou funkci g (závislou na n) na $[-1,1]$ tak, aby byla lineární v intervalech $[-1,-\frac{1}{n}]$, $[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]$ a $[\frac{1}{n},1]$ a tak, aby

$$g(-1) = g(-\frac{1}{n}) = 1 \quad \text{a} \quad g(\frac{1}{n}) = g(1) = -1$$

(nakreslete si graf !), dostaneme, že $||g|| = 1$ a $Tg = 2 - \frac{1}{n}$. Tudíž $||T|| = 2$. Existuje funkce $g \in \mathcal{C}([-1,1])$ tak aby $||g|| \le 1$ a současně $|Tg| = 2$? ♣

14.3. Příklad. *Nechť lineární funkcionál T na prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ je definován předpisem*

$$Tf = \int_0^1 f(\sqrt{t})\,dt\,.$$

Najděte $||T||$.

Návod. Máme

$$\begin{aligned} ||T|| :&= \sup\{|Tf| : f \in \mathcal{C}([0,1])\,,\ ||f|| \le 1\} = \sup\Big\{\Big|\int_0^1 f(\sqrt{t})\,dt\Big| : f \in \mathcal{C}([0,1])\,,\ ||f|| \le 1\Big\} \\ &\le \sup\Big\{\int_0^1 \big|f(\sqrt{t})\big|\,dt : f \in \mathcal{C}([0,1])\,,\ ||f|| \le 1\Big\} \le \int_0^1 1\,dt = 1\,. \end{aligned}$$

Pro funkci $g = 1$ na $[0,1]$ dostáváme $||g|| = 1$ a $|Tg| = |\int_0^1 1\,dt| = 1$. Musí tedy být $||T|| = 1$. ♣

14.4. Příklad. *Nechť lineární funkcionál T na prostoru l^2 je definován předpisem*

$$T\{x_n\} = x_1 + x_2 \,.$$

Najděte $||T||$.

Návod. Pokud $x = \{x_n\} \in l^2$ a

$$||\,\{x_n\}\,|| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots} \le 1 \,,$$

musí být nutně

$$|T\,\{x_n\}\,|^2 \le (|x_1| + |x_2|)^2 \le 2\,(|x_1|^2 + |x_2|^2) \le 2\,(|x_1|^2 + |x_2|^2) + \ldots) \le 2 \,.$$

Tudíž $||T|| \le \sqrt{2}$. Protože pro $x = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \ldots)$ máme $||x|| = 1$ a $|T(x)| = \sqrt{2}$, je $||T|| = \sqrt{2}$.

Podívejme se ještě na jiné řešení. Podle Fréchet–Rieszovy věty 10.21 existuje právě jeden prvek $h \in l^2$ tak, že

$$T(x) = (x, h) \quad \text{pro každé} \quad h \in l^2 \,.$$

Je ihned vidět, že $h = (1, 1, 0, 0, \ldots)$. Co je však pro náš příklad podstatné, je rovnost norem: $||T|| = ||h||$ (zde, samozřejmě, norma $||T||$ se bere v prostoru $\mathcal{L}(l^2)$, zatímco norma $||h||$ je v prostoru l^2). Tudíž

$$||T|| = ||h|| = \sqrt{12 + 12 + 0 + \ldots} = \sqrt{2} \,. \quad \clubsuit$$

$\clubsuit$

14.5. Příklad. *Pro $\{x_n\} \in l^1$ položme*

$$T : \{x_n\} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n} \,.$$

Ukažte, že $T \in (l^1)^*$ a spočtěte $||T||$.

Návod. Protože pro $\{x_n\} \in l^1$ je

$$\big|T\,\{x_n\}\big| = \Big|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}\Big| \le \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = ||\,\{x_n\}\,|| \,,$$

je T omezený funkcionál. Zřejmě je i lineární, tedy $T \in (l^1)^*$. Z uvedeného odhadu plyne, že $||T|| \le 1$. Protože pro posloupnost $x := (1, 0, 0, \ldots)$ je $||x|| = 1$ a $|Tx| = 1$, je $||T|| = 1$.

Poznamenejme ještě, že podle 13.31 existuje právě jeden prvek $\{a_n\} \in l^\infty$ tak, že

$$T\,\{x_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x_n \quad \text{pro každou posloupnost} \quad \{x_n\} \in l^1 \,,$$

přičemž $||T|| = ||\,\{a_n\}\,||$. Ihned vidíme, že $\{a_n\} = \big\{\frac{1}{n}\big\}$. Tudíž $||T|| = ||\,\big\{\frac{1}{n}\big\}\,||_{l^\infty} = 1$. $\clubsuit$

14.6. Příklad. *Pro $\{x_n\} \in l^2$ položme*

$$T : \{x_n\} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n} \,.$$

Ukažte, že $T \in (l^2)^*$ a spočtěte $||T||$.

Návod. Protože $\left\{\frac{1}{n}\right\} \in l^2$, je pro $\{x_n\} \in l^2$ podle Schwarzovy nerovnosti

$$\left|T\left\{x_n\right\}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}\right| \le \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}\, \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2} = \sqrt{\frac{\pi^2}{6}}\, ||\left\{x_n\right\}|| = \frac{\pi}{\sqrt{6}}\, ||\left\{x_n\right\}||\,.$$

Odtud plyne, že T je omezený, samozřejmě lineární, funkcionál na prostoru l^2 a že $||T|| \le \frac{\pi}{\sqrt{6}}$. Položme $a := \frac{\sqrt{6}}{\pi}\,\left\{\frac{1}{n}\right\}$. Protože $||a|| = 1$ a

$$\left|Ta\right| = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}\,,$$

je $||T|| = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$.

Poznamenejme ještě, že podle Fréchet–Rieszovy věty 10.21 existuje právě jeden prvek $\{a_n\} \in l^2$ tak, že

$$T\left\{x_n\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x_n \quad \text{pro každou posloupnost} \quad \{x_n\} \in l^2\,,$$

přičemž $||T|| = ||\left\{a_n\right\}||$. Ihned vidíme, že $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$. Tudíž

$$||T|| = \left\|\left\{\frac{1}{n}\right\}\right\|_{l^2} = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\Big)^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}\,.$$

♣

14.7. Příklad. *Na Banachově prostoru c (všech konvergentních posloupností) definujme funkcionál T předpisem*

$$T : \{x_n\} \mapsto \lim x_n\,, \quad \{x_n\} \in c\,.$$

Spočtěte $||T||$.

Návod. Ze základních vět o limitách konvergentních posloupností plyne, že T je lineární funkcionál. Protože

$$|T\left\{x_n\right\}| = |\lim x_n| \le \sup\left\{|x_1|, |x_2|, \dots\right\} = ||\left\{x_n\right\}||_c\,,$$

dostáváme $||T|| \le 1$. Volíme-li například posloupnost $a := (1, 1, 1, \dots)$, je $a \in c$, $||a|| = 1$ a $Ta = 1$. Tedy $||T|| = 1$. ♣

14.8. Příklad. *Na Banachově prostoru $\mathcal{M}([-2, 2])$ všech Radonových měr (viz 13.22) uvažujme míru*

$$\mu := \varepsilon_{-1} - \varepsilon_1\,.$$

Spočtěte $||\mu||$.

Návod. Připomeňme, že ε_x značí *Diracovu míru* v bodě x; ta je definována tak, že $\varepsilon_x(A) = \chi_A(x)$ pro libovolnou množinu A. Především, podle definice je

$$||\mu|| := \mu^+([-2, 2]) + \mu^-([-2, 2])\,,$$

kde μ^+ je kladná variace míry μ a μ^- její záporná variace ($|\mu| := \mu^+ + \mu^-$ je pak nezáporná míra, t.zv. totální variace μ). Musíme tedy nejdříve zjistit, jak vypadají míry μ^+ a μ^-. Ale podle definice je pro množinu A

$$\mu^+(A) := \mu(A \cap P) \quad \text{a} \quad \mu^-(A) := -\mu(A \cap N)\,,$$

kde (P, N) je *Hahnův rozklad* intervalu $[-2, 2]$. Tím rozumíme takovou dvojici množin (P, N), pro něž $[-2, 2] = P \cup N$, $P \cap N = \emptyset$ a množina P má tu vlastnost, že $\mu(E) \ge 0$ pro každé $E \subset P$

a $\mu(E) \leq 0$ pro každé $E \subset N$. Také připomeňme, že Hahnův rozklad vždy existuje a je (v jistém smyslu) určen jednoznačně. Vše si zopakujte třeba ze skript [LM].

Není těžké si rozmyslet, že (třeba) množiny $P = [-2,0]$ a $N = (0,2]$ tvoří Hahnův rozklad $[-2,2]$, a tudíž že

$$\mu^+ = \varepsilon_{-1} \quad \text{a} \quad \mu^- = \varepsilon_1 .$$

Máme tedy

$$||\mu|| = \varepsilon_{-1}([-2,2]) + \varepsilon_1([-2,2]) = 2 .$$

Ještě poznámka. Uvažujeme-li funkcionál

$$L : f \mapsto f(-1) - f(1) \quad \text{pro} \quad f \in \mathcal{C}([-2,2]) ,$$

je L spojitý lineární funkcionál na prostoru $\mathcal{C}([-2,2])$. V obdobném Příkladu 14.1 jsme ukázali, že $||L|| = 2$. Není těžké si rozmyslet, že naše míra μ reprezentuje funkcionál L podle Rieszovy věty o reprezentaci. Pro libovolnou funkci $f \in \mathcal{C}([-2,2])$ je totiž

$$Lf = \int_{[-2,2]} f \, d\mu = \varepsilon_{-1}(f) - \varepsilon_1(f) = f(-1) - f(1) .$$

Také víme, že $||L|| = ||\mu||$. Takže jsme i jiným způsobem zjistili, že $||\mu|| = 2$. ♣

14.9. Neřešené příklady. *Najděte normu $||T||$ lineárního funkcionálu*

(a)

$$T\{x_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x_n \quad \textit{na prostoru} \quad c_0 ,$$

(b)

$$T\{x_n\} = x_1 + x_2 \quad \textit{na prostoru} \quad l^\infty ,$$

(c)

$$T\{x_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) x_n \quad \textit{na prostoru} \quad l^1 ,$$

(d)

$$Tf(x) = \int_0^1 e^{x-t} f(t) \, dt \quad \textit{na prostoru} \quad \mathcal{C}([0,1]) ,$$

(e)

$$Tf(x) = \int_0^1 xt \, f(t) \, dt \quad \textit{na prostoru} \quad \mathcal{L}^2([0,1]) ,$$

(f)

$$Tf = \int_{-1}^1 t f(t) \, dt \quad \textit{na prostoru} \quad \mathcal{C}([-1,1]) ,$$

(g)

$$Tf = \int_0^1 f(t^2) \, dt \quad \textit{na prostoru} \quad \mathcal{C}([0,1]) ,$$

(h)

$$Tf = \int_{-1}^1 f(t) \, dt - f(0) + 2f(1) \quad \textit{na prostoru} \quad \mathcal{C}([-1,1]) ,$$

(i)

$$Tf = \int_0^1 f(t) \, dt \quad \textit{na prostoru} \quad \mathcal{C}([-1,1]) ,$$

(j)
$$Tf = 7(f(-1) + f(1)) \quad \textit{na prostoru} \quad \mathcal{C}([-1,1])\,.$$

(k)
$$Tf = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} f\Big(\frac{1}{n}\Big) \quad \textit{na prostoru} \quad \mathcal{C}([-1,1])\,,$$

(l)
$$T\{x_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}} \quad \textit{na prostoru} \quad l^1\,,$$

(m)
$$T\{x_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n \quad \textit{na prostoru} \quad l^1\,.$$

Spektrum a kompaktnost operátorů

14.10. Příklad. *Nechť operátor $T \in \mathcal{L}(\mathcal{L}^2([0,1]))$ je definován předpisem pro $f \in \mathcal{L}^2([0,1])$ takto:*
$$Tf(x) = x \int_0^1 f(t)\,dt\,, \quad x \in [0,1]\,.$$
Najděte $||T||$, $\sigma_p(T)$, $\sigma(T)$ a zjistěte, zda T je kompaktní.

Návod. Především si rozmyslete, že skutečně $Tf \in \mathcal{L}^2([0,1])$ pro $f \in \mathcal{L}^2([0,1])$.

Dále sledujte odhad pro $f \in \mathcal{L}^2[(0,1])$ (použije se Hölderova nerovnost)
$$\begin{aligned} ||Tf|| = ||x \int_0^1 f|| &= \Big(\int_0^1 \Big|x \int_0^1 f\Big|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big|\int_0^1 f\Big| \Big(\int_0^1 |x|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{3}}\Big|\int_0^1 f\Big| \le \sqrt{\frac{1}{3}}\Big(\int_0^1 |f|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_0^1 1\Big)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{3}}\,||f||\,. \end{aligned}$$
Odtud je vidět, že $||T|| \le \sqrt{\frac{1}{3}}$. Protože pro funkci $f = 1$ na $[0,1]$ je $||f|| = 1$ a $||Tf|| = \sqrt{\frac{1}{3}}$, je $||T|| = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

Zkoumejme nyní, jak vypadá bodové spektrum $\sigma_p(T)$. Zajímá nás tedy, zda existuje nenulový prvek $f \in \mathcal{L}^2[(0,1])$ tak, aby
$$Tf(x) = \lambda f(x) \quad \text{pro (skoro všechna)} \quad x \in [0,1]\,.$$
Pokud $\lambda = 0$, stačí vzít libovolnou nenulovou spojitou funkci f takovou, že $\int_0^1 f = 0$, třeba $f(x) = \sin 2\pi x$. Pokud je $\lambda \neq 0$ a
$$Tf(x) = x\int_0^1 f = \lambda f(x)\,,$$
vidíme, že f musí být lineární, $f(x) = kx$ (skoro všude). Potom ovšem
$$x \int_0^1 kt\,dt = \lambda\, kx \ \text{ pro skoro všechna } x \in [0,1]\,,$$
a jediná možná volba λ je $\lambda = \frac{1}{2}$. Tudíž bodové spektrum sestává ze dvou hodnot, $\sigma_p(T) = \{0, \frac{1}{2}\}$.

Můžete se nyní pokusit zjistit přímo, jak vypadá spektrum $\sigma(T)$, jinými slovy, pro které hodnoty λ rovnice
$$Tf - \lambda f = g$$
nemá řešení pro každou funkci $g \in \mathcal{L}^2[(0,1])$. Můžeme postupovat ale i jinak. Operátor T je spojitý a konečně dimenzionální (dokonce jednorozměrný). Takže je kompaktní. A v tom případě víme, že
$$\sigma(T) = \{0\} \cup \sigma_p(T) = \left\{0, \frac{1}{2}\right\}.$$
♣

14.11. Příklad. *Definujme operátor $T : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ předpisem*

$$T : f(x) \longmapsto f(x^2)\,, \quad x \in [0,1]\,.$$

Spočtěte $||T||$, $\sigma_p(T)$, $\sigma(T)$ a rozhodněte, zda je T kompaktní.

Návod. Protože $||Tf|| = \max\big\{|f(x^2)| : x \in [0,1]\big\}$, je zřejmě

$$||T|| = \sup\{||Tf|| : ||f|| \le 1\} \le 1\,.$$

Pro funkci $f_0 = 1$ je $||f_0|| = 1$ a $||Tf_0|| = 1$, odkud dostáváme, že $||T|| = 1$.

Vyšetřujme, jak vypadají vlastní čísla operátoru T. Hledáme tedy taková $\lambda \in \mathbf{C}$, aby rovnice $Tf = \lambda f$ měla nenulové řešení. Přitom víme, že

$$\sigma_p(T) \subset \sigma(T) \subset \{z \in \mathbf{C} : |z| \le ||T|| = 1\}\,.$$

Je-li $\lambda = 0$ a $Tf = \lambda f = 0$, musí být $f(x^2) = 0$ pro každé $x \in [0,1]$. Odtud dostáváme, že $f = 0$ a tudíž $0 \notin \sigma_p(T)$. Pokud $\lambda = 1$ a $Tf = \lambda f = f$, je určitě nenulovým řešením rovnice $f(x^2) = f(x)$ pro $x \in [0,1]$ každá konstantní funkce. Je tedy $1 \in \sigma_p(T)$. Zbývá vyšetřit případ, kdy $|\lambda| \in (0,1]$, $\lambda \ne 1$. Z rovnosti $Tf(x) = f(x^2) = \lambda f(x)$ dostáváme pro každé $x \in [0,1]$ a každé n

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} f(x^2) = \frac{1}{\lambda^2} f(x^4) = \cdots = \frac{1}{\lambda^n} f(x^{2^n})\,.$$

Odtud plyne, že $f(x) = \lambda^n f(x^{2^{-n}})$. Pokud je $|\lambda| < 1$, je nutně $f(x) = 0$, neboť $\lambda^n \to 0$ a f je funkce omezená na intervalu $[0,1]$. Podívejme se tedy na poslední případ, kdy $|\lambda| = 1$ a $\lambda \ne 1$. V tom případě $f(0) = \lambda f(0)$ i $f(1) = \lambda f(1)$, a v obou případech máme $f(0) = f(1) = 0$. Buď tedy $x \in (0,1)$. Protože opět $f(x) = \frac{1}{\lambda^n} f(x^{2^n})$ a $x^{2^n} \to 0$, je $f(x) = 0$. Tím jsme ukázali, že $\lambda \notin \sigma_p(T)$. Tudíž $\sigma_p(T) = \{1\}$.

Zbývá zjistit, které body náleží do spektra operátoru T. Podívejme se proto na řešení rovnice $Tf - \lambda f = g$ v prostoru $\mathcal{C}([0,1]$. (Víme již, kdy operátor $T - \lambda I$ není prostý a zajímá nás nyní, kdy není na.) Z uvedené rovnosti dostáváme pro každé $x \in [0,1]$ rovnost

$$f(x^2) = g(x) + \lambda f(x)\,,$$

a tudíž

$$f(x) = g(x^{\frac{1}{2}}) + \lambda f(x^{\frac{1}{2}}) = g(x^{\frac{1}{2}}) + \lambda g(x^{\frac{1}{4}}) + \lambda^2 f(x^{\frac{1}{4}})\,.$$

Indukcí pak získáme rovnost

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j\, g\big(x^{2^{-1-j}}\big) + \lambda^n f\big(x^{2^{-n}}\big)\,.$$

Protože pro $|\lambda| < 1$ poslední řada konverguje (g je omezená funkce) a $\lambda^n f\big(x^{2^{-n}}\big) \to 0$ pro každou omezenou funkci f, je (spojitá) funkce

$$f(x) := \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j g\big(x^{2^{-1-j}}\big)$$

řešením rovnice $Tf - \lambda f = g$.

Pokud je $|\lambda| = 1$, nemá rovnice $Tf - \lambda f = g$ řešení pro každou pravou stranu $g \in \mathcal{C}([0,1])$. Kupříkladu pro $\lambda = -1$ nalezněte spojitou po částech lineární funkci g na $[0,1]$ a $x \in [0,1]$ tak, aby uvedená řada v bodě x divergovala. Stačí třeba vzít pro pevné x hodnotu

$$g\big(x^{2^{-1-j}}\big) = \frac{(-1)^j}{j}\,.$$

Tudíž $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| = 1\}$.

Operátor T není kompaktní. To můžeme podepřít více argumenty. Především, jeho spektrum $\sigma(T)$ je nespočetná množina. A to se u kompaktního operátoru nemůže stát. Také víme, že v případě nekonečně dimenzionálního prostoru vždy $0 \in \sigma(T)$, a ani tomu tak v našem případě není. Anebo můžeme vyjít přímo z definice. Posloupnost $\{x^n\}$ je zajisté v $\mathcal{C}([0,1])$ omezená. Ovšem z posloupnosti obrazů $\{Tx^n\} = \left\{x^{2n}\right\}$ nelze vybrat konvergentní - neexistuje totiž funkce $f \in \mathcal{C}([0,1])$, k níž by vybraná posloupnost z $\left\{x^{2n}\right\}$ konvergovala (dokonce stejnoměrně). Každá podposloupnost z $\left\{x^{2n}\right\}$ totiž konverguje k nespojité funkci.

Ostatně, není náhodou pravda, že operátor T zobrazuje jednotkovou kouli $B_{\mathcal{C}([0,1])}$ opět na $B_{\mathcal{C}([0,1])}$? (Je–li $g \in B_{\mathcal{C}([0,1])}$ a $f(x) := g(\sqrt{x})$, není již $f \in B_{\mathcal{C}([0,1])}$ a $Tf = g$?)

V rámci procvičení zkuste též nalézt posloupnost funkcí v $\{f_n\}$ $\mathcal{C}([0,1])$ konvergující slabě k 0, avšak takovou, aby posloupnost $\{Tf_n\}$ k nule nekonvergovala v prostoru $\mathcal{C}([0,1])$, tj. stejnoměrně. (Potřebujeme ale vědět, kdy posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje v prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ slabě. Pokud si nevzpomenete, podívejte se na tuto charakteristiku v 3.7.) I to bude argument ukazující, že T není kompaktní. Podle Věty 8.14 totiž každý kompaktní operátor převádí slabě konvergentní posloupnosti na silně konvergentní. ♣

14.12. Příklad. *Nalezněte spektrum a bodové spektrum operátoru $T \in \mathcal{L}(l^2)$ definovaného předpisem*

$$T\{x_n\} = (0, x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \dots)\,.$$

Je operátor T kompaktní ?

Návod. Spočtěme cvičně normu T. Máme

$$||T\{x_n\}||^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x_n}{n}\right|^2 \le \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2 = ||\{x_n\}||^2\,,$$

tedy $||T|| \le 1$. Volba prvku $x = (1,0,0,\dots)$ dá $||x|| = 1$, přičemž $||Tx|| = 1$. Dostáváme, že $||T|| = 1$.

Nechť $\lambda \in \mathbf{C}$. Hledejme $x = \{x_n\} \in l^2$ tak, aby $Tx = \lambda x$. Dostáváme

$$(0, x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \dots)\,.$$

Pro $\lambda \neq 0$ musí tedy být $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = 0$. Pokud $\lambda = 0$, je též $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = 0$. Rovnice $Tx = \lambda x$ nemá tudíž pro žádné λ nenulové řešení, žádné komplexní číslo není vlastním číslem operátoru T. Je tedy $\sigma_p(T) = \emptyset$.

Operátor T je kompaktní. To nahlédneme třeba takto. Pro pevné n označme

$$T_n : \{x_n\} \mapsto (0, x_1, \frac{1}{2}x_2, \dots, \frac{1}{n}x_n, 0, 0, \dots)\,.$$

Každý z operátorů T_n je omezený a konečně dimenzionální. Protože pro každé n a každé $||x|| \le 1$ je

$$||T_n x - Tx||^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty}\left|\frac{x_j}{j}\right|^2 \le \frac{1}{n^2}\sum_{j=n+1}^{\infty}|x_j|^2 \le \frac{1}{n^2}||x||^2 \le \frac{1}{n^2}\,,$$

je $||T_n - T||^2 \le \frac{1}{n^2}$. Vidíme, že $T_n \to T$ v normě prostoru $\mathcal{L}(l^2)$. Protože operátory T_n jsou kompaktní (jakožto spojité a konečně dimenzionální), je i operátor T kompaktní podle Věty 8.9.

Z předchozího vyplývá, že $\sigma(T) = \{0\}$. Spektrum kompaktního operátoru (na nekonečně dimenzionálním prostoru) totiž vždy obsahuje 0 (Věta 9.16), přičemž současně podle téže věty víme, že libovolný nenulový prvek spektra kompaktního operátoru již musí být jeho vlastním číslem.

Jak bychom přímo dokázali, že spektrum T sestává pouze z nuly ? ♣

14.13. Příklad. *Nalezněte normu, spektrum a bodové spektrum operátoru $T \in \mathcal{L}(l^2)$ definovaného předpisem*

$$T\{x_n\} = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)\,.$$

Je operátor T kompaktní ?

Návod. Operátor T je evidentně izometrií, tedy $||T|| = 1$, a tudíž $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \le 1\}$. Obdobně jako v minulém příkladu 14.12 ukažte, že $\sigma_p(T) = \emptyset$.

Ukážeme nyní, že libovolné $|\lambda| \le 1$ leží ve spektru $\sigma(T)$. V tom případě totiž operátor $T - \lambda I$ nezobrazuje l^2 na l^2, protože neexistuje žádné $z := \{z_n\} \in l^2$ tak, aby

$$(T - \lambda I)z = (-\lambda z_1, z_1 - \lambda z_2, z_2 - \lambda z_3, \dots) = (1, 0, 0, \dots)\,.$$

Vyloučíme-li triviální případ $\lambda = 0$, musel by z uvedené rovnosti prvek z mít tvar

$$z = \Big(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda^3}, \dots\Big)\,.$$

Ten však pro $|\lambda| \le 1$ určitě v l^2 neleží.

Operátor T není kompaktní. To plyne ihned z faktu, že jeho spektrum je nespočetná množina $\{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \le 1\}$ (viz 9.16). Anebo se procvičme a ukažme jiný argument. Protože prostor l^2 jakožto Hilbertův je reflexivní, pro nekompaktnost T stačí ukázat, že nepřevádí slabě konvergentní posloupnosti na silně konvergentní (viz Tvrzení 8.16). To nahlédneme třeba takto. Posloupnost $\{e_n\}$, kde $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ konverguje k nulovému prvku $\mathbf{0}$ v prostoru l^2 slabě (viz třeba Příklad 3.6.a), avšak posloupnost $\{Te_n\}$ není konvergentní. ♣

14.14. Příklad. *Definujme operátor T na prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ předpisem*

$$T : f(x) \mapsto \int_0^x f\,, \quad x \in [0,1]\,.$$

Spočtěte $||T||$, $\sigma_p(T)$, $\sigma(T)$ a rozhodněte, zda je T kompaktní.

Návod. Máme

$$||Tf|| = \max_{x\in[0,1]} \Big|\int_0^x f\Big| \le \int_0^1 |f| \le ||f||\,.$$

Tedy $||T|| \le 1$. Pro konstantní funkci $g = 1$ na $[0,1]$ a pro $x \in [0,1]$ je

$$|Tg(x)| = \Big|\int_0^x 1\Big| = x\,,$$

takže $||Tg|| = 1$. Závěr: $||T|| = 1$.

Podívejme se na bodové spektrum operátoru T. Víme, že λ je jeho vlastním číslem, existuje-li netriviální řešení rovnice $Tf = \lambda f$. Hledáme tedy nenulovou spojitou funkci f tak, aby

$$\int_0^x f = \lambda\, f(x) \quad \text{pro každé} \quad x \in [0,1]\,.$$

Z této rovnosti předně ihned vychází, že $\lambda\, f(0) = \int_0^0 f = 0$, a za druhé že funkce f musí mít spojitou derivaci, pokud $\lambda \neq 0$. Je-li $\lambda = 0$, musí být $\int_0^x f = 0$ pro každé $x \in [0,1]$, a tudíž $f = 0$ na $[0,1]$ (jak to zdůvodníme ?). Tudíž 0 není vlastním číslem T. Je-li nyní $\lambda \neq 0$, z uvedené rovnosti dostáváme

$$f(x) = \lambda\, f'(x)\,, \quad x \in [0,1]\,.$$

Řešením této diferenciální rovnice zjistíme, že existuje taková konstanta K, že $f(x) = K\, e^{\frac{x}{\lambda}}$. Protože $f(0) = 0$, je $K = 0$. Daná rovnice tedy nemá netriviální řešení, a tudíž operátor T nemá žádná vlastní čísla.

A nyní ke spektru operátoru T. Potřebovali bychom zjistit pro které hodnoty λ je operátor T na, tj. kdy rovnice

$$Tf - \lambda f = g$$

má (či nemá) řešení pro každou pravou stranu $g \in \mathcal{C}([0,1])$. Nechť $\lambda = 0$. Protože $Tf(0) = 0$, tak pro funkci g takovou, že $g(0) \neq 0$ rozhodně řešení neexistuje. Odtud vyplývá, že $0 \in \sigma(T)$. V případě $\lambda \neq 0$ hledáme tedy řešení rovnice

$$\int_0^x f - \lambda\, f(x) = g(x)\ , \quad x \in [0,1]\,,$$

kde $g \in \mathcal{C}([0,1])$ je daná funkce. Nechť h je primitivní funkce k f, tj. $h' = f$. Máme tedy řešit diferenciální rovnici

$$h - \lambda h' = g\,.$$

Ukažte sami, že tato rovnice má řešení. Dostáváme tedy, že $\sigma(T) = \{0\}$.

Podívejme se nyní, zda T je kompaktní. Volme tedy omezenou posloupnost $\{f_n\}$ v $\mathcal{C}([0,1])$. Potřebujeme ukázat, že posloupnost obrazů $\{Tf_n\}$ je relativně kompaktní. Nechť tedy $K > 0$ je taková konstanta, že

$$||f_n|| \leq K \quad \text{pro všechna } n\,.$$

Pokusíme se použít Arzelà–Ascoliho kriterium 13.62. Množina $\{Tf_n\}$ bude relativně kompaktní, bude-li omezená a stejně spojitá. Ale

$$||Tf_n|| = \max_{x\in[0,1]} \Big|\int_0^x f_n\Big| \leq \max_{x\in[0,1]} \int_0^x |f_n| \leq \int_0^1 K = K\,.$$

Obdobně zjistíme, že pro $x, y \in [0,1]$ a $n \in \mathbf{N}$ je

$$\big|Tf_n(x) - Tf_n(y)\big| \leq \Big|\int_x^y |f_n|\Big| \leq K\,|x-y|\,.$$

Z tohoto odhadu by již mělo být zřejmé, že posloupnost $\{Tf_n\}$ je stejně spojitá. Tím jsme dokázali, že T je kompaktní operátor.

Určení spektra operátoru T jsme si mohli trochu ulehčit. Víme-li již, že T je kompaktní a $\sigma_p(T) = \emptyset$, je podle Věty 9.16 v našem případě

$$\sigma(T) = \{0\} \cup \sigma_p(T) = \{0\}\ . \quad \clubsuit$$

14.15. Příklad. *Definujme operátor T, tentokráte ovšem na prostoru*

$$X := \{f \in \mathcal{C}([0,1]) : f(0) = 0\}\ ,$$

opět předpisem

$$T : f(x) \mapsto \int_0^x f\ , \quad x \in [0,1]\,.$$

Spočtěte $||T||$, $\sigma_p(T)$, $\sigma(T)$ a rozhodněte, zda je T kompaktní. Porovnejte s předchozím příkladem 14.14.

Návod. V 2.3.c jsme ukázali, že $||T|| = 1$. Dále postupujte obdobně jako v příkladu 14.14. Mohli bychom nějak využít jeho výsledků ? Snad pouze podejme jeden trochu nestandardní argument proč $0 \in \sigma(T)$. K tomu si musíme uvědomit, že neurčitý integrál libovolné spojité (dokonce integrovatelné) funkce je vždy funkce absolutně spojitá, tedy

$$\int_0^x f \in \big\{\varphi \in \mathcal{AC}([0,1]) : \varphi(0) = 0\big\} \quad \text{pro} \quad f \in \mathcal{C}([]0,1)\,.$$

Protože na intervalu $[0,1]$ existují spojité funkce, které nejsou absolutně spojité (uměli byste uvést příklad ? [4]), je tudíž

$$T(X) \subset \{\varphi \in \mathcal{AC}([0,1]) : \varphi(0) = 0\} \subsetneqq X\,.$$

Vidíme, že operátor T není na. $\clubsuit$

[4] zkuste si vzpomenout na Cantorovu funkci

14.16. Příklad. *Na prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ definujme operátor T předpisem*

$$T : f(x) \mapsto x^2 f(0)\,, \quad f \in \mathcal{C}([0,1])\,.$$

Spočtěte $||T||$, $\sigma_p(T)$, $\sigma(T)$ a rozhodněte, zda je T kompaktní.

Návod. Operátor T je bezesporu lineární a jeho obor hodnot $\mathcal{R}T$ je roven $\{\lambda x^2 : \lambda \in \mathbf{R}\}$. Tedy $\mathcal{R}T$ je jednodimenzionálním podprostorem prostoru $\mathcal{C}([0,1])$. Dokážeme-li tedy, že T je spojitý, bude kompaktní podle Věty 8.7. Máme odhad

$$|Tf(x)| = |x^2 f(0)| \le |f(0)| \le ||f||\,,$$

tudíž $||Tf|| \le ||f||$. Odtud dostáváme $||T|| \le 1$. Pro funkci $g = 1$ na $[0,1]$ je $|Tg(x)| = x^2$. Protože $||g|| = 1$ a $||Tg|| = 1$, je i $||T|| = 1$. Tím jsme současně ukázali, že T je kompaktní.

Nicméně jako cvičení na Arzelà–Ascoliho kritérium 13.62 ukažme, že T je kompaktní. Volme tedy posloupnost $\{f_n\}$ z jednotkové koule prostoru $\mathcal{C}([0,1])$. Potřebujeme ukázat, že množina $\{Tf_n\}$ je relativně kompaktní. Z odhadu

$$||Tf_n|| \le ||T||\,||f_n|| \le ||f_n|| \le 1\,, \quad n \in \mathbf{N}\,,$$

plyne, že posloupnost $\{Tf_n\}$ je omezená. Využijeme-li ještě odhadu

$$|Tf_n(x) - Tf_n(y)| = |(x^2 - y^2)\,f_n(0)| \le |(x-y)(x+y)| \le 2\,|x-y|$$

platného pro $x, y \in [0,1]$ a $n \in \mathbf{N}$, lehko ověříme, že posloupnost funkcí $\{Tf_n\}$ je stejně spojitá. A stačí použít zmíněnou Arzelà–Ascoliho větu.

Podívejme se nyní, jak vypadají vlastní čísla operátoru T. Hledáme tedy netriviální řešení rovnice

$$x^2 f(0) = \lambda f(x)\,.$$

Je-li $\lambda = 0$, určitě je řešením třeba funkce $f(x) = x$. Tedy 0 je vlastním číslem. Pokud ovšem $\lambda \ne 0$, je řešením funkce

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} f(0)\,x^2\,.$$

Odtud dostáváme, že $f(0) = 0$, a tudíž $f(x) = 0$ pro každé $x \in [0,1]$. Vidíme, že $\sigma_p(T) = \{0\}$. A protože T je kompaktní, máme

$$\sigma(T) = \{0\} \cup \sigma_p(T) = \{0\}\,.$$

Jako cvičení by bylo vhodné se podívat na rovnici

$$x^2 f(0) - \lambda f(x) = g(x)$$

a zjistit, pro které hodnoty λ má řešení pro každou funkci $g \in \mathcal{C}([0,1])$. ♣

14.17. Příklad. *Na prostoru $\mathcal{L}^2([-1,1])$ definujme operátor T předpisem*

$$T : f(x) \mapsto \int_{-1}^{1} x^2 t f(t)\,dt\,, \quad f \in \mathcal{L}^2([-1,1])\,.$$

Spočtěte $||T||$, $\sigma_p(T)$, $\sigma(T)$ a rozhodněte, zda je T kompaktní.

Návod. Pomocí Schwarzovy nerovnosti dostaneme

$$\begin{aligned}||Tf||^2 &= \int_{-1}^{1} |Tf(x)|^2\,dx = \int_{-1}^{1} x^4 \Big(\int_{-1}^{1} tf(t)\,dt\Big)^2 dx = \frac{2}{5}\Big(\int_{-1}^{1} tf(t)\,dt\Big)^2 \le \\ &\le \frac{2}{5}\,||t||^2\,||f||^2 = \frac{4}{15}\,||f||^2\,.\end{aligned}$$

Pro funkci $f(t) = t$ máme

$$||f|| = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{a} \quad ||Tf|| = \frac{2}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^2,$$

což nás vede k výsledku $||T|| = \frac{2}{\sqrt{15}}$.

Podívejme se nyní, jak vypadají vlastní čísla operátoru T. Hledáme tedy netriviální řešení rovnice

$$(T - \lambda I)f = 0\,.$$

Z rovnosti

$$x^2 \int_{-1}^{1} tf(t)\,dt = \lambda f(x)$$

vidíme, že funkce f musí být násobkem funkce x^2. Tudíž

$$x^2 \int_{-1}^{1} tkt^2\,dt = \lambda kx^2\,,$$

z čehož dostáváme

$$\lambda = \int_{-1}^{1} t^3\,dt = 0\,.$$

V bodovém spektru $\sigma_p(T)$ tedy leží pouze 0. Protože T je kompaktní, dostáváme

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{0\}\,. \quad \clubsuit$$

♣

14.18. Příklad. *Na (komplexním) prostoru l^2 definujme operátor T předpisem*

$$T : \{x_n\} \mapsto \{i^n x_n\}\ , \quad \{x_n\} \in l^2\,.$$

Spočtěte $||T||$, $\sigma_p(T)$, $\sigma(T)$ a rozhodněte, zda je T kompaktní.

Návod. Spočteme nejdříve normu T. Pro $\{x_n\} \in l^2$ máme

$$||T\{x_n\}||^2 = \sum_n |i^n x_n|^2 = \sum_n |x_n|^2 = ||\{x_n\}||^2\,.$$

Odtud plyne, že $||T|| = 1$.

Podívejme se, jak mohou vypadat vlastní čísla operátoru T. Je-li tedy $\lambda \in \sigma_p(T)$, potom, pokud hledáme nenulový prvek $\{x_n\} \in l^2$ tak, aby $T\{x_n\} = \lambda\{x_n\}$, musí nutně být $i^n x_n = \lambda x_n$ pro každé n. Jedinými kandidáty na vlastní čísla jsou tudíž pouze hodnoty i, i^2, i^3, i^4. A každé z těchto čísel také leží v bodovém spektru $\sigma_p(T)$. Kupříkladu $i \in \sigma_p(T)$, neboť vektor

$$z = (i, 0, 0, \dots)$$

je vlastním vektorem příslušným k i. Zajisté, $Tz = iz$. Je tedy

$$\sigma_p(T) = \left\{i, i^2, i^3, i^4\right\} = \{i, -1, -i, 1\}\ .$$

Není-li λ vlastním číslem, je operátor $T - \lambda I$ invertibilní. Jeho inverzí je totiž operátor

$$U : \{x_n\} \mapsto \left\{\frac{1}{i^n - \lambda}\, x_n\right\}\,.$$

To ovšem musíme ukázat. Předně $U\{x_n\} \in l^2$. To je snad zřejmé, neboť

$$||U\{x_n\}||^2 \le K\,||x_n||^2\,,$$

kde

$$K = \max\left\{\left|\frac{1}{i-\lambda}\right|, \left|\frac{1}{i^2-\lambda}\right|, \left|\frac{1}{i^3-\lambda}\right|, \left|\frac{1}{i^4-\lambda}\right|\right\}\,.$$

Vidíme také, že U je lineární a omezený na l^2, a tak jedině zbývá ověřit rovnost

$$U\,(T - \lambda I) = (T - \lambda I)\,U = I\,.$$

Ale to již není žádný problém. (Jinak, je skoro hned vidět že operátor $T - \lambda I$ je invertibilní, právě když $\lambda \neq i^n$ pro každé n.)

Operátor T není kompaktní, neboť bodové spektrum $\sigma_p(T)$ neobsahuje 0 (a prostor l^2 je nekonečně dimenzionální). ♣

14.19. Příklad. *Nalezněte spektrum a bodové spektrum operátoru $T \in \mathcal{L}(L^2([0,1]))$ definovaného pro $f \in L^2([0,1])$ předpisem*

$$Tf(x) = x\,f(x)\,, \quad x \in [0,1]\,.$$

Je operátor T kompaktní ?

Návod. První věc, kterou si musíme uvědomit, je postřeh, že Tf je prvkem $L^2([0,1])$, pokud $f \in L^2([0,1])$. Ale to je snadné, neboť $|Tf| \le |f|$ na $[0,1]$ (a funkce Tf je na $[0,1]$ měřitelná !).

Dále, abychom se trochu procvičili, spočteme $||T||$. Protože

$$||Tf||^2 = \Big(\int_0^1 \big(x\,f(x)\big)^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}} \le \Big(\int_0^1 \big(f(x)\big)^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}} = ||f||^2\,,$$

je zcela jistě $||T|| \le 1$. Dále bychom potřebovali sestrojit posloupnost $\{f_n\}$ funkcí z $L^2([0,1])$ tak, aby

$$||f_n|| = 1 \quad \text{a} \quad ||Tf_n|| \to 1\,.$$

O to se již pokuste sami. Pokud se to podaří, dostaneme, že $||T|| = 1$.

Podívejme se, jak vypadá bodové spektrum $\sigma_p(T)$. Zajímá nás tedy, zda rovnice

$$(T - \lambda I)f = 0$$

má pro dané λ netriviální řešení (nezapomeňte přitom, že funkce z prostoru $L^2([0,1])$ jsou „určeny" pouze skoro všude). Není těžké si rozmyslet, že jako řešení uvedené rovnice

$$(x - \lambda)\,f(x) = 0\,, \quad x \in [0,1]\,,$$

dostáváme pouze funkci $f = 0$ (skoro všude). Při této úvaze rozlište případy, kdy $\lambda = 0$ či $\lambda \neq 0$. Tudíž $\sigma_p(T) = \emptyset$.

Obraťme nyní pozornost ke spektru $\sigma(T)$. Volme tedy funkci $g \in L^2([0,1])$ a ptejme se, pro jaká λ má rovnice

$$(T - \lambda I)f = g$$

v prostoru $L^2([0,1])$ řešení. Rozlišme opět případy $\lambda = 0$ a $\lambda \neq 0$. Pokud $\lambda = 0$, může mít rovnice

$$x\,f(x) = g(x)$$

za řešení pouze funkci $f(x) = \frac{g(x)}{x}$ (opět pozor na rovnost skoro všude). Vezmeme-li například funkci $g(x) = \sqrt{x}$, je g prvkem $L^2([0,1])$ a $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ nikoliv. Tedy $0 \in \sigma(T)$. V případě $\lambda \neq 0$ nám vychází řešení

$$f(x) = \frac{g(x)}{x - \lambda}\,, \quad x \in [0,1]\,.$$

Pro $\lambda \in (0,1]$ a $g(x) = 1$ (třeba), není f prvkem $L^2([0,1])$. Pro ostatní λ z $\mathbf{C}$, je funkce $\frac{1}{x-\lambda}$ na intervalu $[0,1]$ spojitá, takže rovnice $Tf - \lambda f = g$ má řešení v prostoru $L^2([0,1])$ pro každou funkci $g \in L^2([0,1])$. Závěr ? Spektrum $\sigma(T)$ je rovno $[0,1]$.

Pokud bychom věděli něco hlubšího o operátorech na Hilbertových prostorech, mohli bychom z tvaru spektra usoudit na normu $||T||$. Operátor T je totiž hermiteovský, což znamená, že

$$(Tf, g) = \int_0^1 x\,f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_0^1 f(x)\,\overline{x\,g(x)}\,dx = (f, Tg)\,.$$

Podle [Záp] je pak $\sigma(T)$ podmnožinou $\mathbf{R}$ a $||T|| = \max \sigma(T) = 1$.

Operátor T nemůže být kompaktní, neboť jeho spektrum je nespočetná množina. A to by bylo ve sporu s Větou 9.16.

Uveďme ještě jiné odůvodnění (podle P. Podbrdského), proč T není kompaktní, a to přímo z definice. Uvažujme posloupnost funkcí $\{f_n\}$, kde

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in [0, \frac{1}{2}]\,, \\ \frac{1}{2x}\sin(4n\pi x) & \text{pro } x \in [\frac{1}{2}, 1]\,. \end{cases}$$

Potom $||f|| \leq 1$ a

$$Tf_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in [0, \frac{1}{2}]\,, \\ \frac{1}{2}\sin(4n\pi x) & \text{pro } x \in [\frac{1}{2}, 1]\,. \end{cases}$$

Nyní spočítáme, že $||Tf_n|| = \frac{1}{2}$ pro každé n a že posloupnost $\{Tf_n\}$ je ortogonální. Odtud při použití Pythagorovy věty 10.7

$$||Tf_n - Tf_k||^2 = ||Tf_n||^2 + ||Tf_k||^2 = \frac{1}{2} \quad \text{pro} \quad n \neq k\,.$$

Vidíme, že z posloupnosti $\{Tf_n\}$ nelze vybrat konvergentní. ♣

14.20. Neřešené příklady. *Najděte normu $||T||$, spektrum $\sigma(T)$ a bodové spektrum $\sigma_p(T)$ lineárního operátoru T a rozhodněte, zda T je kompaktní v následujících případech:*

(a)
$$Tf(x) = \operatorname{arctg} x\, f(x) \quad \text{na prostoru} \quad \mathcal{C}([0,1])\,,$$

(b)
$$Tf(x) = \sin x\, f(x) \quad \text{na prostoru} \quad \mathcal{C}([0,1])\,,$$

(c)
$$Tf(x) = \varphi(x)\, f(x) \quad \text{na prostoru} \quad \mathcal{C}([0,1])\,,$$

kde $\varphi \in \mathcal{C}([0,1])$ je daná funkce,

(d)
$$T\{x_n\} = (x_2, x_3, x_4, \dots) \quad \text{na prostoru} \quad l^5\,,$$

(e)
$$T\{x_n\} = (x_2, x_4, x_6, \dots) \quad \text{na prostoru} \quad l^2\,,$$

(f)
$$T\{x_n\} = (2x_2, \frac{3}{2}x_3, \frac{4}{3}x_4, \dots) \quad \text{na prostoru} \quad l^2\,,$$

(g)
$$T\{x_n\} = (\frac{1}{2}x_2, \frac{2}{3}x_3, \frac{3}{4}x_4, \dots) \quad \text{na prostoru} \quad l^2\,,$$

(h)
$$T\{x_n\} = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4, \dots) \quad \text{na prostoru} \quad l^2\,,$$

(k)
$$T\{x_n\} = (x_2 + x_3 + x_4 + \dots, x_2, x_3, \dots) \quad \text{na prostoru} \quad l^1\,,$$

(l)
$$T\{x_n\} = (x_2, x_1, \frac{1}{2}x_4, \frac{1}{2}x_3, \frac{1}{3}x_6, \frac{1}{3}x_5, \dots) \quad \text{na prostoru} \quad l^2\,,$$

(m)
$$Tf = f(\sqrt{2}) + f \quad \text{na prostoru} \quad \mathcal{C}([0,2])\,.$$

Různé příklady

Nyní následují příklady víceméně bez ladu a skladu. Jejich samostatným řešením byste se měli procvičit a dokázat si, že dané problematice (aspoň trochu) rozumíte a s danými pojmy umíte pracovat. Příklady jsou ve značné míře elementární, pokud je některý poněkud složitější, je označen hvězdičkou.

14.21. Příklad. *Nechť operátor* $T \in \mathcal{L}(\mathcal{C}([-1,1]))$ *je definován předpisem*

$$Tf(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big)\,.$$

Najděte $||T||$ *a ukažte, že* T *je projekce. Jak vypadá* $\ker T$ *a* $\mathcal{R}T$ *?*

14.22. Příklad. *Nechť operátor* $T \in \mathcal{L}(\mathcal{C}([-1,1]))$ *je definován předpisem*

$$Tf(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big)\,.$$

Najděte $||T||$ *a ukažte, že* T *je projekce. Jak vypadá* $\ker T$ *a* $\mathcal{R}T$ *?*

14.23. Příklad. *Nechť* $(X, ||.||)$ *je Banachův prostor,* $L \in \mathcal{L}(X)$ *a* $||.||_1$ *je ekvivalentní norma s* $||.||$ *(připomeňme ještě jednou, že existují kladné konstanty* α, β *tak, že* $\alpha||x|| \le ||x||_1 \le \beta||x||$ *pro každé* $x \in X$*). Ukažte, že* L *je omezený operátor na* $(X, ||.||_2)$*.*

14.24. Příklad. *Nechť* $\{e_n\}$ *je ortonormální báze (separabilního) nekonečně dimenzionálního Hilbertova prostoru* H*. Je-li* $x = \sum_n x_n e_n$*, položme*

$$||x||_e = \sum_n \frac{|x_n|}{2^n}\,.$$

Ukažte, že $||.||_e$ *je norma na* H*, která není ekvivalentní původní normě prostoru* H*.*

Návod. Uvědomte si, že $||e_n||_e = \frac{1}{2^n}$. ♣

14.25. Příklad. *Ukažte, že identické zobrazení* l^1 *do* l^2 *je omezený lineární operátor.*

Návod. Využijte toho, že $\{x \in l^1 : ||x||_1 \le 1\} \subset \{x \in l^2 : ||x||_2 \le 1\}$. ♣

14.26. Příklad. *Ukažte, že do prostoru* l^1 *nelze zavést skalární součin tak, aby dal původní normu tohoto prostoru.*

14.27. Příklad. *Nechť* M *je libovolná podmnožina Hilbertova prostoru* H*. Ukažte, že ortogonální doplněk* $M^\perp$ *je uzavřený podprostor* H*.*

14.28. Příklad. *Nechť* M *je podmnožina Hilbertova prostoru* H*. Ukažte, že* $M \subset M^{\perp\perp}$*, přičemž rovnost nastat nemusí.*

14.29. příklad. *Ukažte, že*

$$\big\{\{x_n\} \in l^2 : x_1 = x_3 = x_5 = \cdots = 0\big\}$$

je uzavřený podprostor l^2 *a nalezněte jeho ortogonální doplněk.*

14.30. Příklad. *Najděte ortogonální doplněk množiny*

$$M := \{\{x_n\} \in l^2 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}\,.$$

Návod. Je pravda, že

$$M^\perp = \{\{x_n\} \in l^2 : x_1 = x_2 = x_3\,,\ x_4 = x_5 = \cdots = 0\}\,?$$ ♣

14.31. Příklad. *Najděte ortogonální doplněk množiny*

$$M := \{\{x_n\} \in l^2 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n} = 0\}\,.$$

14.32. Příklad. *Ukažte, že množina*

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{C}^n : x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1\}$$

je v prostoru $\mathbf{C}^n$ *uzavřená a konvexní. Nalezněte její prvek mající nejmenší normu.*

14.33. Příklad. *Nechť* $M := \{f \in \mathcal{C}([0,1]) : f(0) = 0\}$ *a funkce* $g := 1$ *na* $[0,1]$*. Ukažte, že* M *je uzavřený podprostor* $\mathcal{C}([0,1])$*. Dále popište množinu* $\{\varphi \in M : ||g - \varphi|| = \operatorname{dist}(g, M)\}$*.*

14.34. Příklad. *Uvažujte posloupnost* $\{\mu_n\}$ *znaménkových Radonových měr na Banachově prostoru* $\mathcal{C}([-1,1])$ *definovaných předpisem*

$$\mu_n := \varepsilon_{-\frac{1}{n}} - \varepsilon_{\frac{1}{n}}$$

(zde ε_z *značí Diracovu míru v bodě* z*). Ukažte, že* $\mu_n \stackrel{w^*}{\to} 0$*, ačkoliv* $||\mu_n|| = 2$*.*

Návod. V (analogickém) příkladu 14.8 jsme ukázali, že $||\mu_n|| = 2$. Abychom ověřili, že $\mu_n \stackrel{w^*}{\to} 0$, volme $f \in \mathcal{C}([-2,2])$. Potřebujeme dokázat, že $\mu_n(f) \to 0$. Ale to je snadné, neboť

$$\mu_n(f) = f(-\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{n}) \to f(0) - f(0) = 0$$

díky spojitosti funkce f.

Z tohoto příkladu je vidět, že norma není „spojitou" funkcí vůči w^*–konvergenci (ale je „zdola polospojitou" funkcí). ♣

14.35. Příklad. *Nalezněte (banachovsky) adjungovaný operátor k* $T : c_0 \to c_0$ *daného předpisem*

$$T : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto \Big(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots\Big)\,.$$

Návod. Podle 13.28 je duál c_0^* izometricky–izomorfní prostoru l^1, přičemž toto zobrazení je dáno takto: Je–li $\varphi \in c_0^*$, existuje právě jeden prvek $\{\alpha_n\} \in l^1$ tak, že

$$\varphi(\{x_n\}) = \sum \alpha_n\, x_n \quad \text{pro} \quad \{x_n\} \in c_0\,.$$

Naším úkolem je tedy najít zobrazení, které prvku $\{\alpha_n\} \in l^1$ přiřadí $T'(\{\alpha_n\})$. Protože

$$T'\varphi(\{x_n\}) = \varphi(T\{x_n\}) = \sum \frac{x_n}{n}\,\alpha_n = \sum \frac{\alpha_n}{n}\,x_n\,,$$

vidíme, že

$$T' : (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots) \mapsto \Big(\alpha_1, \frac{\alpha_2}{2}, \frac{\alpha_3}{3}, \dots\Big)\,. \quad ♣$$

14.36. Příklad. *Nalezněte (banachovsky) adjungovaný operátor k* $T : l^1 \to l^1$ *daného předpisem*

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_1, x_2, x_3, 0, 0, \dots)\,.$$

14.37. Příklad. *Nalezněte (banachovsky) adjungovaný operátor k* $T : l^1 \to l^1$ *daného předpisem*

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, \dots)\,.$$

14.38. Příklad. *Nalezněte (banachovsky) adjungovaný operátor k* $T : l^1 \to l^1$ *daného předpisem*

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_2, x_3, x_4, \dots)\,.$$

14.39. Příklad. *Definujme operátor* $T : l^2 \to c_0$ *jako „identitu". Nalezněte (banachovsky) adjungovaný operátor k* T*.*

14.40. Příklad. *Nechť M je podprostor normovaného lineárního prostoru E. Ukažte, že uzávěr $\overline{M}$ je podprostor E. Taktéž ukažte, že uzávěr konvexní množiny je opět konvexní množina.*

14.41. Příklad. *Nechť M je uzavřený podprostor normovaného lineárního prostoru E a $x \in E$. Ukažte, že množina*

$$x + M := \{x + m : m \in M\}$$

je uzavřená.

14.42. Příklad. *Nechť T je lineární zobrazení mezi normovanými lineárními prostory E a Y. Ukažte, že T je omezené, právě když převádí cauchyovské posloupnosti v E na cauchyovské posloupnosti v Y.*

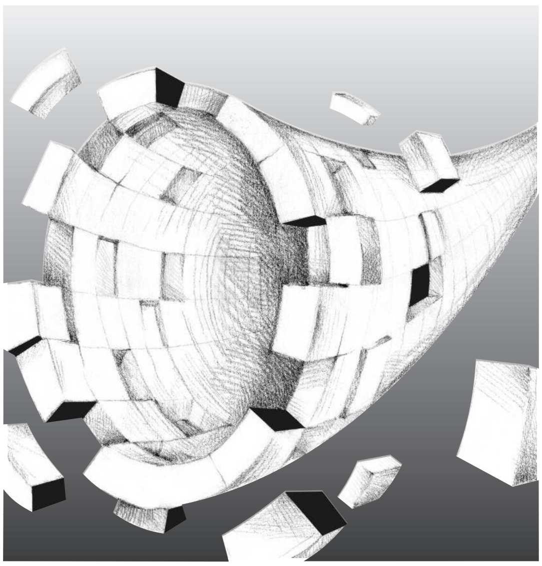
14.43. *Příklad. *Nechť f je lineární funkcionál na normovaném lineárním prostoru E. Ukažte, že $f \in E^*$, právě když jeho jádro $\ker f$ je uzavřená množina v E.*

14.44. *Příklad. *Nechť E je normovaný lineární prostor, $x \in E$ a $f \in E^*$, $|f| = 1$. Ukažte, že $\operatorname{dist}(x, \ker f) = |f(x)|$.*

14.45. Příklad. *Nechť T je omezený operátor na Hilbertově prostoru H a T^* jeho hermiteovsky adjungovaný operátor (viz 10.29). Ukažte, že $\ker T^* = (\mathcal{R}T)^{\perp}$.*

14.46. *Příklad. *Nechť $T \in \mathcal{L}(E, Y)$, kde E a Y jsou normované lineární prostory. Ukažte, že adjungovaný operátor T' je prostý, právě když $\overline{\mathcal{R}T} = Y$.*

Návod. Předpokládáte–li, že $\overline{\mathcal{R}T} \neq Y$, použijte důsledek Hahn–Banachovy věty 4.14 k nalezení $f \in Y^*$ s vlastnostmi $||f|| = 1$ a $f = 0$ na $\overline{\mathcal{R}T}$. Potom $T'f = 0$, ačkoliv $f \neq 0$. Důkaz druhé implikace je přímočarejší. ♣



Literatura

Krátký přehled literatury

Učebnice a skripta vydaná v Praze

S. Fučík a J. Milota
[FM] *Matematická analýza II: Diferenciální počet funkcí více proměnných*, skripta, SPN Praha, 1975.

P.Habala, P. Hájek and V. Zizler
[HHZ] *Introduction to Banach spaces I, II*, Matfyzpress Praha, 1996.

M. Katětov a J. Jelínek
[KJ] *Úvod do funkcionální analýzy*, skripta, SPN Praha, 1968.

J. Lukeš
[Záp] *Zápisky z funkcionální analýzy*, skripta, UK Praha, 1998, 2002, 2003.

J. Lukeš a J. Malý
[LM] *Míra a integrál*, skripta, UK Praha, 1993, 2002.

J. Lukeš and J. Malý
[MI] *Measure and integral*, Matfyzpress Praha, 1995, 2005.

L. Motl a M. Zahradník
[MZ] *Pěstujeme lineární algebru*, skripta, Karolinum, UK Praha, 1995.

K. Najzar
[Naj] *Funkcionální analýza*, skripta MFF UK, 1988.

I. Netuka a J. Veselý
[NeVe] *Příklady z funkcionální analýzy*, skripta MFF UK, 1972.

W. Rudin
[Rud] *Analýza v reálném a komplexním oboru*, Academia Praha, 1977, 2003.

J. Stará
[Sta] *Příklady z matematické analýzy IV: Funkcionální analýza*, skripta, SPN Praha, 1975.

A.E. Taylor
[Tay] *Úvod do funkcionální analýzy*, Academia Praha, 1973.

Ostatní knihy

G. Choquet
[1969] *Lectures on analysis I, II and III*, W.A. Benjamin.

J.B. Conway
[1985] *A course in functional analysis*, Springer-Verlag, (2. vydání 1997).

P. Drábek and J. Milota
[2004] *Lectures on nonlinear analysis*, Vydavatelský servis, Plzeň.

P. Drábek and J. Milota
[2007] *Methods of nonlinear analysis: Applications to differential equations*, Birkhäuser Verlag.

M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos Santalucía, J. Pelant and V. Zizler
[2001] *Functional analysis and infinite–dimensional geometry*, CMS Books in Mathematics, Springer–Verlag, New York.

E. Hewitt and K. Stromberg
[1965] *Real and abstract analysis*, Springer Verlag, (2. vydání 1969, 3. vydání 1975).

L. Mišík
[1989] *Funkcionálna analýza*, Alfa Bratislava.

P. Quittner
[1990] *Funkcionálna analýza v príkladoch*, Veda, SAV Bratislava.

W. Rudin
[1973] *Functional analysis*, Mc Graw-Hill, (ruský překlad 1975).

Ch. Swartz
[1992] *An introduction to functional analysis*, Marcel Dekker.

D. Werner
[1995] *Funktionalanalysis*, Springer-Verlag (5. vydání 2005).

Citované články

J. Hennefeld
[1980] *A nontopological proof of the uniform boundedness theorem*, Amer. Math. Monthly **87**, 217.

J. Schwartz
[1951] *A note on the space* L_p^*, Proc. Amer. Math. Soc. **2**, 270–275.

Poznámka. Obšírný seznam literatury lze nalézt ve skriptech [Záp].

Stručný průvodce označením

$\mathbf{N}$	přirozená čísla
$\mathbf{Z}$	celá čísla
$\mathbf{R}$	reálná čísla
$\mathbf{C}$	komplexní čísla
$\mathbf{F}$	$\mathbf{R}$ nebo $\mathbf{C}$
Δ	uzavřený jednotkový kruh v $\mathbf{C}$
$\mathbf{T}$	jednotková kružnice v rovině
λ, λ_n	Lebesgueova míra
ε_x	Diracova míra v bodě x
ε_x	obraz prvku x v X^{**}
$\mathbf{R}^n$	n-rozměrný eukleidovský prostor
$\mathbf{C}^n$	n-rozměrný komplexní prostor
$\mathcal{C}(K)$	spojité funkce na K
$\mathcal{M}(P)$	znaménkové Radonovy míry
$\mathcal{M}^1(P)$	pravděpodobnostní míry
$\mathcal{AC}$	absolutně spojité funkce
c_0	posloupnosti konvergující k nule
c	prostor konvergentních posloupností
$\mathcal{L}^p$, L^p	elpéčka
l^p	malá elpéčka
$\mathcal{L}(X,Y)$	spojitá lineární zobrazení z X do Y
$\mathcal{L}(X)$	operátory na X
$\mathcal{K}(X)$	kompaktní operátory na X
$r(x)$	spektrální poloměr
$\sigma(x)$	spektrum
$\sigma_p(x)$	bodové spektrum
$\operatorname{dist}(x,M)$	vzdálenost x od M
w	slabá topologie
w^*	slabá* topologie
$M/\sim$	faktormnožina

$U^r(x)$	otevřená koule o středu x a poloměru r
$B(x,r)$	uzavřená koule o středu x a poloměru r
B_X	uzavřená jednotková koule v prostoru X
S_X	jednotková sféra v prostoru X
P_A	projekce na A
$\ker T$	jádro zobrazení T
$\mathcal{R}(T)$,$\mathcal{R}T$	obor hodnot zobrazení T
$X^\#$	algebraický duál
X^*	(topologický) duál
εX	kanonický obraz X v X^{**}
L'	banachovsky adjungované zobrazení
L^*	hermiteovsky adjungované zobrazení
lin	lineární obal
$A \oplus B$	algebraický součet
$A \oplus_t B$	topologický součet
$A \subset\subset W$	A je podprostor ve W
E/M	faktorprostor
e_n	jednotkový vektor $(0,\dots,0,1,0,\dots)$
$\Vert f\Vert_p$	L^p-norma funkce f
$\operatorname{supt} f$	nosič funkce
$L\circ T$, LT	složení zobrazení
I	identické zobrazení
χ_M	charakteristická funkce množiny M
$\overline{A}$	uzávěr množiny A
$\operatorname{Int} A$	vnitřek množiny A
∂A	hranice množiny A
$A^\perp$	kolmice, anihilátor
$x_n \xrightarrow{w} x$	slabá konvergence
$f_n \xrightarrow{w^*} f$	slabá* konvergence
$f_n \rightrightarrows f$	stejnoměrná konvergence

Rejstřík

Rejstřík