Motto: Everybody writes and nobody reads
L. Fejr

PŘEDMLUVA

Vývoj matematiky pokračuje neustále obrovským tempem. Chceme-li dnes sledovat na úrovni nové trendy a výsledky matematických disciplin jako jsou teorie pravděpodobnosti, numerické metody, matematické modelování, teoretická fyzika, a samozřejmě matematická analýza, neobejdeme se bez mnoha partií moderní analýzy. Proto jsou také do studijních plánů oboru matematika, ale nejen tohoto oboru, zařazeny kromě základních přednášek matematické analýzy i přednášky z úvodu do komplexní a funkcionální analýzy, z teorie míry a integrálu či analýzy na varietách.

Autoři předložených skript, zdůrazněme skript, nikoliv učebnice, si nekladli za úkol pokrýt studijním textem celou tuto oblast. Vybrali některé partie, vztahující se těsně k teorii míry a integrálu, z nichž některé považují pro studenty matematicko-fyzikální fakulty za zcela základní a jiné naopak za nadstavbové.

Existuje mnoho pěkných učebnic, knih, studijních pomůcek a sbírek příkladů k této problematice. Mnohé z nich jsou uvedeny na konci v seznamu literatury. Skripta by neměla být jedinou literaturou používanou studenty k pochopení látky.

Před mnoha lety vydal první autor skripta “Teorie míry a integrálu I”, druhý díl nikdy nespatřil světlo světa. To z více důvodů. Jedním z nich bylo neustále měnění studijních plánů. Vydáním těchto skript je tedy částečně splacen starý dluh.

Při psaní těchto skript nám pomáhalo mnoho spolupracovníků. Mezi nimi i řada studentů, všichni zajisté přispěli ke zlepšení textu. Chceme jim dnes upřímně poděkovat a omluvit se, že je nemůžeme všechny jmenovitě uvést. Určitě bychom totiž při jejich výčtu na někoho zapomněli.

Autoři přejí studentům, aby se jim dobře studovalo.

Praha, 1986-92 Jaroslav Lukeš a Jan Malý

OBSAH

Úmluvy **1**

A. Míra a měřitelné funkce **2**
1. Lebesgueova míra na přímce
2. Abstraktní míra
3. Měřitelné funkce
4. Vytváření míry z vnější míry
5. Množinové systémy a množinové funkce
6. Znaménkové a komplexní míry

B. Abstraktní Lebesgueův integrál **22**
7. Integrování v **R**
8. Vybudování abstraktního integrálu
9. Integrály závislé na parametru
10. Prostory L^p
11. Součin měr a Fubiniova věta
12. Konvergence posloupností funkcí
13. Radon-Nikodýmova věta a Lebesgueův rozklad

C. Radonův integrál a míra **47**
14. Radonův integrál a Radonova vnější míra
15. Radonova míra
16. Rieszova věta o reprezentaci
17. Konvergence posloupností měr
18. Luzinova věta
19. Míry na topologických grupách

D. Integrál v R **67**
20. Souvislost integrálu a derivace
21. Funkce s konečnou variací a funkce absolutně spojité
22. Věty o existenci derivace skoro všude
23. Neurčitý Lebesgueův integrál a absolutní spojitost
24. Radonovy míry na přímce a distribuční funkce
25. Kurzweilův integrál

E. Integrál v $\mathbf{R}^n$ **84**
26. Lebesgueův integrál a míra v $\mathbf{R}^n$
27. Pokrývací věty
28. Derivování měr
29. Věta o hustotě a aproximativně spojité funkce
30. Lipschitzovské funkce
31. Věty o aproximaci
32. Distribuce
33. Fourierova transformace

F. Věty o substituci a k-rozměrné míry **115**
34. Věta o substituci
35. Stupeň zobrazení
36. Hausdorffova míra

G. Plošný a křivkový integrál **132**
37. Integrální počet ve vektorové analýze
38. Integrování diferenciálních forem
39. Integrální počet na varietách

H. Vektorové integrace **153**
40. Měřitelné funkce
41. Vektorové míry
42. Bochnerův integrál
43. Dunfordův a Pettisův integrál

Appendix o topologii **162**

Přehled literatury **164**

Stručný průvodce označením **172**

Rejstřík **174**

Úmluvy

Ve skriptech užíváme víceméně standardní označení.

$\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ značí po řadě množiny všech přirozených, celých, racionálních, reálných a komplexních čísel.

$\overline{\mathbf{R}}$ je rozšířená reálná osa ($= \mathbf{R} \cup -\infty \cup +\infty$) s obvyklou topologií.

Součin $0 \cdot \pm\infty$ i $\pm\infty \cdot 0$ definujeme jako 0.

Je-li X množina, značíme symbolem $\mathcal{P}(X)$ systém všech jejích podmnožin.

$\mathbf{R}^n$ je eukleidovský n-rozměrný prostor s eukleidovskou normou $|\dots|$ i metrikou. Vektor $x \in \mathbf{R}^n$ rozepisujeme do souřadnic $[x_1, \dots, x_n]$, máme však na paměti, že při násobení maticí zleva se chová jako "svislý vektor", totiž matice o jednom sloupci $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Vodorovnému zápisu dáváme přednost z estetických a typografických důvodů. *Standardní* (neboli *kanonickou*) bázi vektorového prostoru $\mathbf{R}^n$ označíme $\{e_1, ..., e_n\}$, vektor $e_n = [0, ..., 0, 1, 0, ..., 0]$ má 1 na n-tém místě. Skalární součin v $\mathbf{R}^n$ značíme $x \cdot y$.

Symbolem $U(x, r)$ budeme značit otevřenou kouli v metrickém prostoru (P, ρ) se středem v x a poloměrem r, příslušnou uzavřenou kouli označíme $B(x, r)$. Tedy $U(x, r) = \{y \in P \colon \rho(x, y) < r\}$, $B(x, r) = \{y \in P \colon \rho(x, y) \leq r\}$. Pro průměr množiny používáme symbol diam, pro vzdálenost množin (nebo bodu od množiny) dist.

Neřekneme-li nic jiného, *funkcí* na množině X rozumíme zobrazení X do $\overline{\mathbf{R}}$. Chceme-li zdůraznit, že funkce nenabývá hodnot $-\infty$ či $+\infty$, mluvíme o *reálné* funkci.

Místo značení $\{x \in X \colon f(x) > a\}$ apod. používáme někdy zkrácený zápis $\{f > a\}$.

Nechť X, Y, Z jsou množiny a $D \subset Y$. Mějme zobrazení $f \colon X \to Y$ a $g \colon D \to Z$. Potom složené zobrazení $g \circ f$ definujeme na množině $\{x \in X \colon f(x) \in D\}$ předpisem $x \mapsto g(f(x))$.

Symbol c_A používáme pro *charakteristickou funkci* množiny $A \subset X$, tj. funkci

$$c_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in A, \\ 0 & \text{pro } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

A. MÍRA A MĚŘITELNÉ FUNKCE

1. Lebesgueova míra

Již staří Egypťané se zabývali matematickým problémem vyměřování ploch jejich zavodňovaných polí. Později se problém míry prolíná v dalších oborech lidské činnosti a samozřejmě nachází svůj odraz i v teoretických zpracováních. Jde o to, abychom množině A uměli přiřadit její velikost λA – délku, plochu či objem. Je samozřejmé, že objem krychle či plocha obdélníka nebo kruhu by se měly shodovat se známými vzorci. Intuitivně je zřejmé, že míra by měla být nezáporná a aditivní, tj. splňovat rovnost

$$\lambda \bigcup A_j = \sum \lambda A_j \,,$$

pokud $\{A_j\}$ je konečný disjunktní systém množin. Pro úspěšný rozvoj teorie je zapotřebí, aby míra byla dokonce σ-aditivní, totiž aby uvedená rovnost platila pro spočetné disjunktní systémy množin. Snahou by také mělo být, aby co nejvíce množin mělo svoji "míru". Ideální stav – aby všechny množiny měly míru – je však nedosažitelný.

1.1. Lebesgueova vnější míra. Ukážeme teď, jak lze postupovat na reálné ose (stejný postup uplatníme později i v eukleidovském prostoru $\mathbf{R}^n$, kde dodáme potřebné důkazy). Mějme tedy libovolnou množinu $A \subset \mathbf{R}$ a položme

$$\lambda^* A := \inf\{\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) : \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i) \supset A\}.$$

Číslo $\lambda^* A$ (které může být i $+\infty$) nazveme *Lebesgueovou vnější mírou* množiny A.

1.2. Vlastnosti Lebesgueovy vnější míry. Je ihned vidět, že $\lambda^* A \le \lambda^* B$, pokud $A \subset B$, že míra jednobodových množin je 0, a po troše přemýšlení (viz cvičení 1.6), že $\lambda^* I$ je délka I v případě, je-li I interval (libovolného druhu). Dále lze poměrně jednoduše dokázat, že Lebesgueova vnější míra je *translačně invariantní*: Je-li $A \subset \mathbf{R}$ a $x \in \mathbf{R}$, potom $\lambda^* A = \lambda^*(x + A)$. Důležitou vlastností je *σ-subaditivita*: Pro každou posloupnost $\{A_j\}$ (libovolných) podmnožin $\mathbf{R}$ je

$$\lambda^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^* A_j \,.$$

V matematické terminologii bývá zvykem, že předpona nebo index σ naznačuje vztah ke spočetným sjednocením a δ ke spočetným průnikům.

Otázkou je, zda λ^* je aditivní množinová funkce - odpověď je záporná: Lze nalézt dvě disjunktní množiny A, B, pro něž

$$\lambda^*(A \cup B) < \lambda^* A + \lambda^* B$$

(viz 1.8). Vyvstává tedy potřeba nalézt (pokud možno co nejširší) systém množin, na němž by již míra λ^* byla aditivní. Tuto úlohu budeme řešit později v kapitole 4 značně obecněji, zde pouze stručně naznačíme jedno z jejích možných řešení v případě Lebesgueovy míry.

1.3. Lebesgueovsky měřitelné množiny. Definujeme-li pro omezenou množinu $A \subset I$ její "vnitřní míru" $\lambda_* A = \lambda^* I - \lambda^*(I \setminus A)$, je přirozené studovat systém takových množin, pro něž $\lambda_* A = \lambda^* A$ (viz cvičení 1.7). To nás vede k této definici.

Řekneme, že množina $A \subset \mathbf{R}$ je (lebesgueovsky) *měřitelná*, jestliže $\lambda^* I = \lambda^*(A \cap I) + \lambda^*(I \setminus A)$ pro každý omezený interval $I \subset \mathbf{R}$. Systém všech měřitelných množin na $\mathbf{R}$ značme symbolem $\mathfrak{M}$. Ne každá množina je měřitelná, jak uvidíme v 1.8. Množinovou funkci $M \mapsto \lambda^* M$, $M \in \mathfrak{M}$, budeme značit λ a nazývat *Lebesgueovou mírou*. Na měřitelných množinách se tedy množinové funkce λ^* a λ shodují, na neměřitelných je definována pouze λ^*.

Důležitá vlastnost míry λ je obsažena v následující větě, kterou nyní uvedeme bez důkazu.

1.4. Věta. *Jsou-li $M_n \in \mathfrak{M}$, jsou i $M_1 \setminus M_2$, $\bigcap_n M_n$ a $\bigcup_n M_n$ prvky $\mathfrak{M}$. Jsou-li množiny M_n navíc po dvou disjunktní, platí*

$$\lambda\Big(\bigcup_n M_n\Big) = \sum_n \lambda M_n.$$

1.5. Poznámka. Genialita Lebesgueova zavedení míry z počátku století spočívá právě v uvažování *spočetných* pokrytí množiny A intervaly. Uvažujeme-li v definici $\lambda^* A$ pouze *konečná* pokrytí, dostáváme pojem tzv. *Jordan-Peanova objemu*. Z hlediska moderní analýzy však tento nemá zdaleka takový význam jako Lebesgueova míra.

1.6. Cvičení. Je-li $I \subset \mathbf{R}$ interval (libovolného druhu), potom $\lambda^* I$ je jeho délka.

Návod. Stačí se omezit na případ, kdy $I = [a, b]$. Zřejmě $\lambda[a, b] \le b - a$ (neboť $[a, b] \subset (a - \varepsilon, b + \varepsilon)$). Nechť $\bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i) \supset [a, b]$. Z kompaktnosti plyne existence n , pro něž $\bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i) \supset [a, b]$. Indukcí (vzhledem k n) ukažte, že $b - a \le \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$.

1.7. Cvičení. Pro každou omezenou množinu $A \subset \mathbf{R}$ definujme

$$\lambda_* A := \lambda I - \lambda^*(I \setminus A)\,,$$

kde I je omezený interval obsahující A.

(a) Ukažte, že číslo $\lambda_* A$ nezávisí na volbě I.

(b) Omezená množina $A \subset \mathbf{R}$ je měřitelná, právě když $\lambda^* A = \lambda_* A$.

(c) Množina $M \subset \mathbf{R}$ je měřitelná, právě když její průnik s každým omezeným intervalem je měřitelný.

V další části kapitoly se budeme zabývat významnými množinami na reálné přímce.

1.8. Neměřitelná množina. Nyní dokážeme existenci neměřitelné podmnožiny $\mathbf{R}$. Tím současně ukážeme, že Lebesgueova vnější míra nemůže být aditivní.

Položme $x \sim y$, jestliže $x - y$ je racionální číslo. Je vidět, že $\sim$ je ekvivalence na $\mathbf{R}$, podle níž se $\mathbf{R}$ rozpadá na nespočetný systém $\mathcal{V}$ po dvou disjunktních tříd. Množina V patří do systému $\mathcal{V}$, právě když $V = x + \mathbf{Q}$ pro některé $x \in \mathbf{R}$. Z axiomu výběru plyne existence množiny $E \subset (0, 1)$, která s každou množinou $V \in \mathcal{V}$ má společný právě jeden bod. Ukážeme, že E neleží v $\mathfrak{M}$.

Buďte $\{q_n\}$ všechna racionální čísla z intervalu $(-1, +1)$. Není těžké ukázat, že množiny $E_n := q_n + E$ jsou po dvou disjunktní, a že

$$(0, 1) \subset \bigcup_n E_n \subset (-1, 2).$$

Pokud $E \in \mathfrak{M}$, jsou i $E_n \in \mathfrak{M}$ (to je nutno trochu zdůvodnit!) a věta 1.4 dává $\lambda \bigcup_n E_n = \sum_n \lambda E_n = \sum_n \lambda E$. Rozlišením případů $\lambda E = 0$ či $\lambda E > 0$ již lehko odvodíme spor.

1.9. Poznámky. 1. Důkaz existence neměřitelné množiny je nekonstruktivní (užívá axiomu výběru pro nespočetné systémy množin). K tématu neměřitelných množin se ještě vrátíme v poznámce 1.22.

2. Lehkou úvahou lze získat dokonce silnější tvrzení: Libovolná měřitelná množina $M \subset \mathbf{R}$ kladné míry obsahuje neměřitelnou podmnožinu. Stačí si totiž uvědomit, že $M = \bigcup_{q \in \mathbf{Q}} M \cap (E + q)$, kde E je neměřitelná množina z 1.8, a že libovolná měřitelná podmnožina E má již (Lebesgueovu) míru nula.

3. Van Vleck [1908] sestrojil množinu $E \subset [0, 1]$ pro niž $\lambda^* E = 1$ a $\lambda_* E = 0$.

1.10. Cvičení. Ukažte, že každá spočetná množina S má míru nula.

Návod. Uvažujte pokrytí $\bigcup_{j=1}^{\infty} (r_j - \varepsilon 2^{-j}, r_j + \varepsilon 2^{-j})$, kde $\{r_j\}$ je (nějaká) posloupnost všech prvků množiny S. Tvrzení také plyne z věty 1.4, uvědomíme-li si, že jednobodové množiny mají míru nula.

1.11. Racionální čísla. Množina $\mathbf{Q}$ všech racionálních čísel je spočetná, má tedy podle cvičení 1.10 Lebesgueovu míru nula. Jak je vidět z návodu ke cvičení 1.10, ke každému $k \in \mathbf{N}$ existuje otevřená množina G_k tak, že $\mathbf{Q} \subset G_k$ a $\lambda^* G_k \le 1/k$. Množina $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ má míru nula, je hustá a nespočetná (dokonce reziduální).

1.12. Cantorovo diskontinuum. Uvažujme posloupnost $\{\mathcal{K}_n\}$ konečných systémů intervalů definovaných následujícím způsobem: $\mathcal{K}_0 = \{[0,1]\}$, $\mathcal{K}_1 = \{[0, \frac{1}{3}], [\frac{2}{3}, 1]\}$. V indukčním kroku vyrobíme $\mathcal{K}_n$ z $\mathcal{K}_{n-1}$ jako systém všech uzavřených intervalů, které tvoří levou nebo pravou třetinu některého z intervalů ze systému $\mathcal{K}_{n-1}$ (prostřední třetiny vynecháváme). Potom $\mathcal{K}_n$ bude systém 2^n disjunktních uzavřených intervalů, z nichž každý má délku 3^{-n}. Označme K_n sjednocení systému $\mathcal{K}_n$. *Cantorovo diskontinuum* C pak definujeme jako $\bigcap_n K_n$. Není si těžké rozmyslet, že

$$C = \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i} : a_i \text{ je 0 nebo 2}\}.$$

Zhruba řečeno, do Cantorova diskontinua patří právě ty body z intervalu $[0,1]$, jejichž trojkový rozvoj neobsahuje cifru 1. Cantorovo diskontinuum má následující vlastnosti:

(a) C je kompaktní množina bez izolovaných bodů,

(b) C je řídká (a totálně nesouvislá) množina,

(c) C je nespočetná množina,

(d) Lebesgueova míra C je nula (spočtěte!).

1.13. Diskontinua kladné míry. Konstruujeme-li množinu $D \subset [0,1]$ podobným způsobem jako Cantorovo diskontinuum s tou výjimkou, že budeme vždy vynechávat intervaly délky $\varepsilon 3^{-n}$, kde $\varepsilon \in (0,1)$ (uvědomte si, že jejich středy nejsou stejné jako při konstrukci Cantorova diskontinua), dostaneme uzavřenou řídkou množinu, pro niž $\lambda D = 1 - \varepsilon$. Množinám těchto vlastností se říká *diskontinua kladné míry*. Lze je získat také jiným způsobem – je-li G otevřená podmnožina intervalu $(0,1)$ obsahující všechna racionální čísla z tohoto intervalu a $\lambda G = \varepsilon < 1$, pak $[0,1] \setminus G$ je diskontinuum míry $1 - \varepsilon$.

1.14. Cvičení. (a) Existuje neborelovská podmnožina Cantorova diskontinua.

Návod. Uvědomte si, že množina všech borelovských podmnožin Cantorova diskontinua má mohutnost kontinua, zatímco množina všech jeho podmnožin má větší mohutnost.

Místo této úvahy lze použít také následující myšlenku. Definujte

$$\kappa(t) := \inf\{x \in [0,1] : f(x) = t\},$$

kde f je Cantorova singulární funkce z 23.1. Ukažte, že κ je rostoucí na intervalu $[0,1]$, a tedy zajisté borelovská funkce. Nechť E je neměřitelná podmnožina $[0,1]$, $B := \kappa(E)$. Potom B (jakožto podmnožina Cantorova diskontinua) je měřitelná množina. Protože však $\kappa^{-1}(B) = E$ (a κ je borelovská funkce), nemůže B být borelovská množina.

(b) Existuje lebesgueovsky měřitelná neborelovská podmnožina $\mathbf{R}$.

1.15. Lebesgueova míra v $\mathbf{R}^n$. Zcela stejně jako v $\mathbf{R}$ lze definovat Lebesgueovu míru i v $\mathbf{R}^n$. Připomeňme, že intervalem v $\mathbf{R}^n$ rozumíme libovolný kartézský součin n jednorozměrných intervalů. Je-li $I := (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ otevřený interval, definujeme

$$\operatorname{vol} I = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n)\,.$$

Podobně definujeme $\operatorname{vol} I$ i pro intervaly jiných typů. Pro libovolnou množinu $A \subset \mathbf{R}^n$ definujme

$$\lambda^* A = \inf\{\sum \operatorname{vol} I_k : \bigcup I_k \supset A, I_k \text{ je otevřený interval}\}.$$

Řekneme, že množina $M \subset \mathbf{R}^n$ je *měřitelná*, jestliže $\lambda^* T = \lambda^*(A \cap T) + \lambda^*(A \setminus T)$ pro každou množinu $T \subset \mathbf{R}$. (Vedeni analogií s jednorozměrným případem bychom měli požadovat uvedenou rovnost jen pro omezené intervaly T. Změna nám však umožní aplikovat obecnou větu ze 4. kapitoly. Brzy ukážeme, že mezi těmito definicemi měřitelnosti není žádný rozdíl.) Symbol $\mathfrak{M}$ bude opět znamenat systém všech měřitelných množin. Pro $M \in \mathfrak{M}$ značíme $\lambda M := \lambda^* M$ n-rozměrnou *Lebesgueovu míru* množiny M.

1.16. Věta. *Pro každou posloupnost $\{A_j\}$ (libovolných) podmnožin $\mathbf{R}^n$ je*

$$\lambda^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^* A_j\,.$$

Důkaz. Tvrzení plyne z obecné věty 4.3. ■

1.17. Věta. *Jsou-li $M_n \in \mathfrak{M}$, jsou i $M_1 \setminus M_2$, $\bigcap_n M_n$ a $\bigcup_n M_n$ prvky $\mathfrak{M}$. Jsou-li množiny M_n navíc po dvou disjunktní, platí*

$$\lambda(\bigcup_n M_n) = \sum_n \lambda M_n.$$

Důkaz. Tvrzení plyne z obecné věty 4.5. ∎

Následující větu porovnejte se cvičením 1.6.

1.18. Věta. *Je-li $I \subset \mathbf{R}^n$ omezený interval, $I \subset \bigcup_j Q_j$, kde $\{Q_j\}$ je posloupnost otevřených intervalů, potom*

$$\operatorname{vol} I \le \sum_j \operatorname{vol} Q_j.$$

Tedy n-rozměrná Lebesgueova míra $\lambda^* I$ je rovna objemu $\operatorname{vol} I$.

Důkaz. Nechť J je kompaktní interval ležící v I. Existuje p tak, že intervaly $\{Q_1, ..., Q_p\}$ pokrývají J. Interval J lze nyní rozdělit na konečný počet n-rozměrných kompaktních intervalů $\{J_i\}$, které se nepřekrývají (mají společné pouze části hranic) takovým způsobem, aby vnitřek každého intervalu J_i byl obsažen v některém z intervalů Q_j. Potom zřejmě

$$\operatorname{vol} J = \sum_i \operatorname{vol} J_i \le \sum_{j=1}^{p} \operatorname{vol} Q_j \le \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{vol} Q_j.$$

Jelikož rozdíl $\operatorname{vol} I \setminus \operatorname{vol} J$ lze učinit libovolně malým, tvrzení je dokázáno. ∎

1.19. Věta. (a) *Každá borelovská podmnožina $\mathbf{R}^n$ je měřitelná.*

(b) *Je-li $\lambda^* A = 0$, je A měřitelná.*

Důkaz. Tvrzení (b) je zřejmé, budeme dokazovat (a). Dokážeme nejprve, že každý interval H tvořící poloprostor (např. tvaru $(-\infty, c) \times \mathbf{R}^{n-1}$) je měřitelný. Volme tedy "testovací" množinu T, $\lambda^* T < \infty$, a $\varepsilon > 0$. Existují otevřené intervaly $\{Q_j\}$ tak, že

$$\bigcup_j Q_j \supset T \text{ a } \sum_j \operatorname{vol} I_j < \lambda^* T + \varepsilon.$$

Najděme nyní otevřené intervaly I_j a J_j tak, aby

$$I_j \cup J_j = Q_j, \quad Q_j \cap H \subset I_j,\ Q_j \setminus H \subset J_j \text{ a } \lambda^* I_j + \lambda^* J_j < \lambda^* Q_j + \varepsilon 2^{-j}.$$

Potom

$$\lambda^*(T \cap I) + \lambda^*(T \setminus I) \le \sum_j \operatorname{vol} I_j + \sum_j \operatorname{vol} J_j \le \lambda^* T + \varepsilon.$$

Dokázali jsme měřitelnost všech intervalů H tvořících poloprostor. Z věty 1.17 dostáváme, že i každá borelovská množina je měřitelná. Systém měřitelných množin totiž tvoří σ–algebru a borelovské množiny jsou nejmenší σ–algebrou generovanou otevřenými množinami (o těchto pojmech se dočtete podrobněji v následujících kapitolách). Přitom každou otevřenou množinu lze vyjádřit jako spočetné sjednocení intervalů a každý interval je konečný průnik intervalů tvořících poloprostor. ∎

1.20. Věta. *Je-li $A \subset \mathbf{R}^n$, potom*

$$\lambda^* A = \inf\{\lambda G : G \text{ je otevřená a } G \supset A\}.$$

Důkaz. Z monotonie λ^* plyne jedna nerovnost. Je-li nyní $\lambda^* A < \infty$ a $\varepsilon > 0$, existují otevřené intervaly $I_j \subset \mathbf{R}^n$ tak, že

$$A \subset \bigcup_j I_j \quad \text{a} \quad \sum_j \operatorname{vol} I_j < \lambda^* A + \varepsilon.$$

Položíme-li $G = \bigcup_j I_j$, je G otevřená množina, $G \supset A$ a

$$\lambda^* G \le \sum_j \lambda^* I_j = \sum_j \operatorname{vol} I_j < \lambda^* A + \varepsilon.$$

■

Následující větu též porovnejte se cvičením 15.19.

1.21. Věta. *Buď $M \subset \mathbf{R}^n$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *M je měřitelná,*
(ii) *pro každý omezený interval I je $\lambda^* I = \lambda^*(I \cap M) + \lambda^*(I \setminus M)$,*
(iii) *ke každému $\varepsilon > 0$ existuje otevřená množina $G \supset M$ tak, že $\lambda^*(G \setminus M) < \varepsilon$,*
(iv) *existuje množina $D \supset M$ typu G_δ tak, že $\lambda^*(D \setminus M) = 0$,*
(v) *existují borelovské množiny B_i, B_e tak, že $B_i \subset M \subset B_e$ a $\lambda^*(B_e \setminus B_i) = 0$.*

Důkaz. Imlikace (i)$\Rightarrow$ (ii) je triviální. Nechť platí (ii). Zvolme $\varepsilon > 0$. Označme $I_k = (-k, k)^n$ Podle věty 1.20 najdeme otevřené množiny G_k a H_k tak, že že $I_k \cap M \subset G_k$, $I_k \setminus M \subset H_k$, $\lambda G_k \le \lambda^*(I_k \cap M) + 2^{-k}\varepsilon$ a $\lambda H_k \le \lambda^*(I_k \setminus M) + 2^{-k}\varepsilon$. Můžeme předpokládat, že G_k a H_k jsou podmnožiny I_k. Máme pak $G_k \setminus M \subset G_k \cap H_k$. S použitím (ii) a měřitelnosti otevřených množin dostáváme

$$\lambda I_k + \lambda(G_k \cap H_k) = \lambda G_k + \lambda H_k \le \lambda^*(I_k \cap M) + \lambda^*(I_k \setminus M) + 2^{-k+1}\varepsilon \le \lambda I_k + 2^{-k+1}\varepsilon\,.$$

Položme $G = \bigcup_k G_k$. Potom

$$\lambda^*(G \setminus M) \le \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(G_k \cap H_k) \le 2\varepsilon\,,$$

tedy platí (iii). Z (iii) okamžitě plyne (iv). Není těžké nyní rozmyslet implikaci (iv) $\Rightarrow$ (v). Pokud M splňuje (v), je $M = B_i \cup (M \setminus B_i)$, kde množiny B_i a $M \setminus B_i$ jsou měřitelné podle věty 1.19 (každá z jiného důvodu), takže (v) $\Rightarrow$ (i). ■

1.22. Historické poznámky. H. Lebesgue definoval původně vnější míru množin na reálné ose pomocí spočetných pokrytí intervaly přesně tak, jak jsme jeho postup v textu vysvětlili. Měřitelnost množin definoval jako ve cvičení 1.7.

Koncem minulého století se vyskytují různé pokusy definovat délku či plochu geometrických obrazců, v pracích G. Peana [1887] a C. Jordana [1892] se již uvažují “míry” i komplikovanějších množin.

Existence lebesgueovsky neměřitelné množiny je velice úzce svázána s použitím axiomu výběru (pro nespočetné systémy množin) a tvrzení, že takové množiny existují, bylo poprvé dokázáno G. Vitalim [*1905]. Solovayův výsledek [1970] říká, že existují modely teorie množin (samozřejmě nesplňující axiom výběru), v nichž každá podmnožina reálných čísel je lebesgueovsky měřitelná. Existenci neměřitelné množiny lze dokazovat (za různých množinových podmínek) také jinak. Zajímavé jsou konstrukce Bernsteinových množin (stále za předpokladu axiomu výběru) sloužících jako příklady neměřitelných množin i pro další množinové systémy . Jiná konstrukce neměřitelné množiny (opět axiom výběru) založená na výsledcích teorie grafů pochází od R. Thomase [1985]. Použitím nestandardních metod lze dokázat existenci neměřitelné množiny za předpokladu existence ultrafiltrů (slabší forma axiomu výběru; viz M. Davis [*1977]). Zcela nedávno M. Foreman a F. Wehrung v [1991] dokázali, že existence lebesgueovsky neměřitelné množiny již plyne z Hahn-Banachovy věty (což je opět slabší předpoklad než axiom výběru).

Podotkněme, že Lebesgueovu míru je možno rozšířit dále na “translačně-invariantní” míru definovanou na širší σ-algebře než je systém všech lebesgueovsky měřitelných množin. Konstrukci lze například nalézt u S. Kakutaniho a J.C. Oxtobyho [1950]. Lebesgueovu míru však nelze rozumně rozšířit na systém všech podmnožin $\mathbf{R}^n$.

Je zajímavé, že v $\mathbf{R}$ či v $\mathbf{R}^2$ existují konečně aditivní rozšíření Lebesgueovy míry na systém všech podmnožin, které mohou být navíc invariantní vůči posunutím a otáčením. To prvně dokázal S. Banach [1923]. Tento výsledek však nelze přenést do prostorů vyšší dimenze, což plyne ze slavného výsledku S. Banacha a A. Tarského [1924]:

Jsou-li U a V libovolné (!) omezené a otevřené množiny v prostoru $\mathbf{R}^n$, $n \ge 3$, potom existují množiny $E_1, ..., E_k$ a $F_1, ..., F_k$ tak, že $E_i \cap E_j = \emptyset = F_i \cap F_j$ pro $i \ne j$, $U = \bigcup E_i$, $V = \bigcup F_i$ a E_j lze získat z F_j translací, rotací či zrcadlením.

V této větě, známé jako Banach-Tarského paradox, nemohou být samozřejmě obecně všechny množiny E_i a F_i měřitelné; uvědomte si, že množiny U, V mohou mít různou míru. O těchto i o dalších zajímavostech se lze dočíst v knize S. Wagona [*1985].

2. Abstraktní míra

K vytvoření abstraktního pojmu míry jsme zatím vedeni příkladem Lebesgueovy míry, to je však pouze jeden z důležitých případů. Dnes třeba v celé moderní teorii pravděpodobnosti pojem míry hraje základní roli. Při matematickém modelování fyzikálních veličin nestačí již k popisu jejich rozložení pojem funkce, pojem míry je i zde nezbytný. A to nemluvíme již o některých partiích moderní analýzy, kde se bez pojmu míry neobejdeme – zmiňme se třeba o důležité teorii distribucí, o popisu duálů prostorů spojitých funkcí či o k-rozměrných mírách v n-rozměrném prostoru, sloužících k měření (zakřivených ploch).

Připomeňme, že Lebesguova míra nebyla definována na systému všech podmnožin $\mathbf{R}$, ale jen na jakémsi jeho podsystému, který byl uzavřen na všechny spočetné množinové operace. Z toho budeme vycházet i v abstraktním přístupu.

2.1. σ-algebry. Systém $\mathcal{S}$ podmnožin dané množiny X nazveme *σ-algebrou*, jestliže

(a) $X \in \mathcal{S}$,
(b) $A \in \mathcal{S} \implies X \setminus A \in \mathcal{S}$,
(c) $A_n \in \mathcal{S} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$.

Dvojici $(X, \mathcal{S})$ budeme nazývat *měřitelný prostor*.

Zřejmě každá σ-algebra je uzavřena i na spočetné průniky, rozdíly dvou množin a obsahuje prázdnou množinu.

Ne každý systém množin tvoří σ-algebru. Nicméně, je-li $\mathcal{T}$ libovolný systém podmnožin X, existuje *nejmenší* σ-algebra $\sigma(\mathcal{T})$, která obsahuje $\mathcal{T}$. Stačí totiž za $\sigma(\mathcal{T})$ vzít průnik všech σ-algeber (v X), které obsahují $\mathcal{T}$. Přitom je nutné si uvědomit, že alespoň jedna taková σ-algebra existuje (totiž σ-algebra $\mathcal{P}(X)$ *všech* podmnožin X), a že průnik libovolného systému σ-algeber je opět σ-algebra (důkaz je lehký, ale zkuste si ho pořádně udělat). Systém $\sigma(\mathcal{T})$ budeme nazývat *σ-algebrou generovanou $\mathcal{T}$*.

2.2. Příklady. Jedním z nejdůležitějších příkladů je σ-algebra $\mathfrak{M}$ všech lebesgueovsky měřitelných množin na přímce. Další důležitou skupinou příkladů jsou borelovské σ-algebry z 2.3. V tomto odstavci přidáme na dokreslení pár triviálních a ilustrativních příkladů. Nechť X je libovolná množina. Potom

(a) $\{\emptyset, X\}$ je σ-algebra,
(b) systém $\mathcal{P}(X)$ všech podmnožin X tvoří σ-algebru,
(c) $\{A \subset X : A$ je spočetná anebo $X \setminus A$ je spočetná$\}$ je σ-algebra.

2.3. Borelovské množiny. Nechť $\mathcal{G}$ značí systém všech otevřených podmnožin topologického prostoru P. Potom $\sigma(\mathcal{G})$ – připomeňme, že to je značení pro nejmenší σ-algebru obsahující $\mathcal{G}$ – obsahuje i všechny uzavřené množiny. Dále musí $\sigma(\mathcal{G})$ obsahovat všechny spočetné průniky otevřených množin (těmto množinám říkáme *množiny typu G_δ*) a všechna spočetná sjednocení otevřených množin (tím nedostáváme ovšem nic nového, neboť sjednocení – dokonce libovolného počtu – otevřených množin je opět množina otevřená), spočetná sjednocení uzavřených množin (*množiny typu F_σ*), spočetná sjednocení množin typu G_δ (*typ $G_{\delta\sigma}$*), spočetné průniky množin typu F_σ (*typ $F_{\sigma\delta}$*), a tak bychom mohli pokračovat. Podotkněme pouze, že pro úplný popis všech možných "typů" bychom museli použít (v netriviálních případech) všechna spočetná ordinální čísla.

Systém množin $\sigma(\mathcal{G})$ budeme v dalším značit $\mathcal{B}$ (či $\mathcal{B}(P)$) a jeho prvky budeme nazývat *borelovskými množinami*.

2.4. Míra. Buď $\mathcal{S}$ systém podmnožin množiny X. Nezápornou množinovou funkci $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ nazýváme *mírou*, jestliže

(a) $\mathcal{S}$ je σ-algebra,
(b) $\mu\emptyset = 0$,
(c) pro každou posloupnost $\{A_n\}$ po dvou disjunktních množin z $\mathcal{S}$ je

$$\mu\Big(\bigcup A_n\Big) = \sum \mu A_n \,.$$

Z (b) a (c) okamžitě plyne, že každá míra je *monotonní* (A , $B \in \mathcal{S}$, $A \subset B \implies \mu A \le \mu B$); vlastnosti (c) se také říká *σ-aditivita* míry.

Řekneme, že míra je *konečná*, je-li $\mu X < +\infty$; *σ-konečná*, jestliže existují množiny $M_n \in \mathcal{S}$ tak, že $\mu M_n < +\infty$ a $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. Je-li $\mu X = 1$, říkáme, že míra μ je *pravděpodobnostní*. Míru μ budeme nazývat *úplnou*, jestliže pro každé dvě množiny A , $B \subset X$ platí

$$A \subset B, \quad B \in \mathcal{S}, \quad \mu B = 0 \implies A \in \mathcal{S}$$

(a tudíž potom také $\mu A = 0$).

Trojici $(X, \mathcal{S}, \mu)$ nazýváme *prostorem s mírou*, jestliže $\mathcal{S}$ je σ-algebra podmnožin dané množiny X a μ je míra na $\mathcal{S}$. Množinám ze σ-algebry $\mathcal{S}$ říkáme také někdy v krátkosti *měřitelné*.

Je-li μ míra na X a $E \in \mathcal{S}$, definujme $\mu_E\, A = \mu(A \cap E)$ pro $A \in \mathcal{S}$. Příbuzným pojmem (nezaměňovat!) je *restrikce* $\mu_{|A}$ míry μ na množinu $A \in \mathcal{S}$: Označíme-li $\mathcal{S}_A$ σ-algebru $\{M \in \mathcal{S}\colon M \subset A\}$ podmnožin A, definujeme $\mu_{|A}(M) = \mu(M)$ pro $M \in \mathcal{S}_A$. Konečně, je-li $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ σ-algebra podmnožin X, pak symbol $\mu_{|\mathcal{T}}$ značí míru $E \mapsto \mu E$, $E \in \mathcal{T}$.

2.5. Příklady. (a) *Lebesgueova míra* na systému všech lebesguovsky měřitelných množin v $\mathbf{R}^n$. Tato míra je úplná, σ-konečná, nikoliv však konečná.

(b) *Aritmetická míra.* Zde X je libovolná množina, $\mathcal{S} = \mathcal{P}(X)$ systém všech podmnožin X,

$$\mu A = \begin{cases} \text{počet prvků množiny } A, \text{ je-li } A \text{ konečná}, \\ +\infty, \text{ je-li } A \text{ nekonečná}. \end{cases}$$

Aritmetická míra je úplná; σ-konečná, právě když X je spočetná a konečná pouze v případě, kdy X je konečná.

(c) *Diracova míra.* Zde opět X je libovolná množina, $x \in X$, $\mathcal{S} = \mathcal{P}(X)$. Definujme

$$\mu A = \begin{cases} 1, \text{ pokud } x \in A, \\ 0, \text{ jestliže } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Míře μ se říká Diracova míra v bodě x a značí se symbolem ε_x. Diracova míra je úplná a konečná.

(d) *Triviální míra.* Je-li $\mathcal{S}$ libovolná σ-algebra podmnožin X a $\mu A = 0$ pro všechna $A \in \mathcal{S}$, je μ příkladem konečné míry, která není úplná, pokud $\mathcal{S} \ne \mathcal{P}(X)$.

2.6. Vlastnosti míry. *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou. Potom míra μ má následující vlastnosti:*

(a) $A_n \in \mathcal{S},\ A_1 \subset A_2 \subset \dots \implies \mu(\bigcup A_n) = \lim \mu A_n$,
(b) $A_n \in \mathcal{S},\ A_1 \supset A_2 \supset \dots,\ \mu A_1 < +\infty \implies \mu(\bigcap A_n) = \lim \mu A_n$,
(c) $A_n \in \mathcal{S} \implies \mu(\bigcup A_n) \le \sum \mu A_n$.

Důkaz. (a) Protože množiny $A_1,\ A_2 \setminus A_1,\ A_3 \setminus A_2, \dots$ jsou po dvou disjunktní, dostáváme

$$\begin{aligned}\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) &= \mu\Big(A_1 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_{n+1} \setminus A_n)\Big) = \mu A_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_{n+1} \setminus A_n) \\ &= \lim_k \Big(\mu A_1 + \sum_{n=1}^{k-1} (\mu A_{n+1} \setminus A_n)\Big) = \lim_k \mu A_k .\end{aligned}$$

(b) Podle (a) je

$$\begin{aligned}\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) &= \mu A_1 - \mu\Big(A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \mu A_1 - \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_1 \setminus A_n\Big) \\ &= \mu A_1 - \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu A_n .\end{aligned}$$

(c) Stačí uvažovat posloupnost

$$B_1 = A_1,\ B_2 = A_2 \setminus A_1,\ B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \dots$$

a uvědomit si, že $\bigcup B_n = \bigcup A_n$, přičemž v nové posloupnosti $\{B_n\}$ jsou množiny po dvou disjunktní. ■

2.7. Zúplnění míry. Nyní se vrátíme k pojmu úplnosti míry. Ukážeme, že každý prostor s mírou lze “rozšířit” na prostor s úplnou mírou.

Nechť $(X,\mathcal{S},\mu)$ je prostor s mírou. Označme $\mathcal{N}$ systém všech množin $A\subset X$, k nimž existuje $B\in\mathcal{S}$ tak, že $\mu B=0$ a $A\subset B$. Dále označme $\overline{\mathcal{S}}$ systém všech sjednocení $M\cup N$, kde $M\in\mathcal{S}$ a $N\in\mathcal{N}$. Na $\overline{\mathcal{S}}$ zavedeme množinovou funkci $\overline{\mu}$ předpisem

$$\overline{\mu}(M\cup N)=\mu M,\qquad M\in\mathcal{S},N\in\mathcal{N}\,.$$

Hodnota $\overline{\mu}E$ zřejmě nezávisí na volbě vyjádření $E=M\cup N$. Množinovou funkci $\overline{\mu}$ na $\overline{\mathcal{S}}$ nazýváme *zúplněním* míry μ.

2.8. Věta. *$\overline{\mathcal{S}}$ je σ-algebra obsahující $\mathcal{S}$ a $\overline{\mu}$ je úplná míra na $\overline{\mathcal{S}}$, shodující se s μ na $\mathcal{S}$.*

Důkaz. Není těžké si jednotlivá tvrzení podrobně rozmyslet. Triviálně $\mathcal{S}\subset\overline{\mathcal{S}}$. Jelikož $\mathcal{S}$ i $\mathcal{N}$ jsou uzavřeny na spočetná sjednocení, platí totéž i o $\overline{\mathcal{S}}$. Je-li $E\in\overline{\mathcal{S}}$, najdeme $M\in\mathcal{S}$, $N\in\mathcal{N}$ a $B\in\mathcal{S}$ tak, že $N\subset B$, $\mu B=0$ a $E=M\cup N$. Potom $X\setminus E=\big(X\setminus(M\cup B)\big)\cup(B\setminus N)\in\overline{\mathcal{S}}$. Dále se lehko ověří, že $\overline{\mu}$ je úplná míra na $\overline{\mathcal{S}}$ a $\mu=\overline{\mu}$ na $\mathcal{S}$. ■

2.9. Poznámka. Zúplnění míry tedy dostaneme tak, že k původní σ-algebře přidáme všechny množiny, které se od původně měřitelných množin liší o podmnožinu množiny nulové míry. Přitom míra takto upravené množiny zůstane zachována.

Poznamenejme ještě, že je více rozšíření míry na úplnou míru. Naše zúplnění (které je jednoznačné!) je v jistém smyslu minimální (porovnej se cvičením 2.13).

2.10. Cvičení. Buď f nezáporná funkce na množině X, $\mathcal{S}$ σ-algebra na X. Pro $B\in\mathcal{S}$ položme

$$\mu B:=\sum_{x\in B}f(x)\,.$$

(Zopakujte si, že podle definice

$$\sum_{x\in B}f(x)=\sup_K\{\sum_{x\in K}f(x):K\subset B,K\text{ konečná}\}.)$$

Ukažte, že μ je míra na $\mathcal{S}$ (tzv. *váhová aritmetická míra*).

(a) Speciální volbou $\mathcal{S}=\mathcal{P}(X)$ a $f=1$ na X dostáváme aritmetickou míru.

(b) Je-li $\mathcal{S}=\mathcal{P}(X)$, $z\in X$ a $f=c_{\{z\}}$, je μ Diracova míra v bodě z.

2.11. Cvičení. (a) Triviální míra na $\mathcal{S}=\{\emptyset,\mathbf{R}\}$ není úplná. Jak vypadá její zúplnění ?

(b) Lebesgueova míra v $\mathbf{R}$, pokud ji uvažujeme pouze na σ-algebře borelovských množin (viz cvičení 1.14.a), není úplná.

(c) Buď $X=\{1,2,3,4\}$, $\mathcal{S}=\{\emptyset,\{1,2\},\{3,4\},X\}$, ω míra na $\mathcal{P}(X)$ taková, že

$$\omega\{1\}=\omega\{2\}=0\,,\ \omega\{3\}=\omega\{4\}=1\,.$$

Je-li $\mu=\omega_{|\mathcal{S}}$, není μ úplná.
Buď dále

$$\mathcal{T}=\mathcal{S}\cup\{\{1\},\{2\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}\,,\quad \nu=\omega_{|\mathcal{T}}\,.$$

Potom ν je úplná. Jak vypadá zúplnění μ ?

2.12. Cvičení. Zúplnění Lebesgueovy míry uvažované na σ-algebře všech borelovských množin v $\mathbf{R}$ je právě Lebesgueova míra na lebesgueovsky měřitelných množinách (viz též věta 26.1).

2.13. Cvičení. Buď $(X,\mathcal{T},\nu)$ zúplnění $(X,\mathcal{S},\mu)$. Je-li μ_1 úplná míra na σ-algebře $\mathcal{S}_1$ s vlastnostmi $\mathcal{S}\subset\mathcal{S}_1$ a $\mu=\mu_1|_{\mathcal{S}}$, potom $\mathcal{T}\subset\mathcal{S}_1$ a $\nu=\mu_1|\mathcal{T}$.

2.14. Cvičení (Borel-Cantelliho lemma). Buď $(X,\mathcal{S},\mu)$ prostor s mírou, $A_n\in\mathcal{S}$. Jestliže $\sum\mu A_n<+\infty$, potom $\mu(\limsup A_n)=0$ (definujeme $\limsup A_n:=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$).

Lze něco říci v případě, kdy $\sum\mu A_n=+\infty$?

2.15. Cvičení (Darbouxova vlastnost). Buď $(X,\mathcal{S},\mu)$ prostor s mírou. Jestliže míra μ neobsahuje žádný atom (množina $A\in\mathcal{S}$ se zove *atom*, jestliže $\mu A>0$ a pro jakoukoliv množinu $B\in\mathcal{S}$, $B\subset A$ je buďto $\mu B=0$ anebo $\mu B=\mu A$), potom

$$\{\mu A:A\in\mathcal{S}\}=[0,\mu X]\,.$$

Návod. Volme $0<\alpha<\mu X$. Položme $\mathcal{A}=\{A\in\mathcal{S}:\mu A\geq\alpha\}$. Potom existuje množina $C\in\mathcal{A}$ tak, že $\mu A=\mu C$ pro všechna $A\in\mathcal{A}$, $A\subset C$. Obdobně najdeme $D\in\mathcal{S}$, $D\subset C$, $\mu D\leq\alpha$ s vlastností: $\mu B=\mu D$ pro každou množinu $B\in\mathcal{S}$, pokud $D\subset B\subset C$ a $\mu B\leq\alpha$. Protože $C\setminus D$ nemůže být atom, musí být $\mu C=\mu D=\alpha$.

2.16. Historické poznámky. E. Borel ukázal v [1895] a [*1898], že délka intervalu může být rozšířena na σ-aditivní množinovou funkci (míru) definovanou na systému všech "borelovských" množin. H. Lebesgue byl ovšem prvním, kdo pomocí této míry vybudoval teorii integrálu. Pojem míry na obecných prostorech, nikoliv pouze eukleidovských, náleží podle všeho až J. Radonovi [1913]. A.N. Kolmogorov zavedl v [*1933] axiomatickou teorii pravděpodobnosti (rozumějme - abstraktní pravděpodobnostní míry).

Darbouxova vlastnost reálné míry je speciálnější verze obecné *Ljapunovovy věty* (A. Ljapunov [1940]), podle které obor hodnot konečně-dimenzionální neatomické vektorové míry je kompaktní konvexní množina.

3. Měřitelné funkce

V úvodní kapitole jsme viděli, že Lebesgueova míra, pokud má mít jisté rozumné vlastnosti, nemůže být definována na všech podmnožinách $\mathbf{R}^n$. Je jí zapotřebí uvažovat na menším systému všech měřitelných množin. Rovněž tak nelze očekávat rozumnou teorii integrování na třídě všech funkcí, bude nutné se omezit na jisté rozumné funkce. Tato třída funkcí by měla samozřejmě obsahovat charakteristické funkce všech měřitelných množin a být uzavřena na obvyklé (jak algebraické, tak i limitní) operace. Jak uvidíme, těmto požadavkům vyhovuje následující přirozená definice.

V dalším předpokládáme, že $\mathcal{S}$ je σ-algebra (podmnožin dané množiny X).

3.1. Měřitelné funkce. Nechť $D \in \mathcal{S}$. Funkce $f : D \to \overline{\mathbf{R}}$ se nazve *měřitelnou* (přesněji $\mathcal{S}$-měřitelnou) *na* D, jestliže pro každé $\alpha \in \mathbf{R}$ je $\{x \in D : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{S}$. Komplexní funkce na D je měřitelná, je-li její reálná i imaginární složka měřitelná.

3.2. Příklady. (a) Jestliže $\mathcal{S}$ je σ-algebra *všech* podmnožin X, potom každá funkce na X (nabývající třeba i nevlastních hodnot!) je $\mathcal{S}$-měřitelná.

(b) Pouze konstanty jsou $\mathcal{S}$-měřitelné v případě $\mathcal{S} = \{\emptyset, X\}$.

(c) Je-li $\mathcal{B}$ σ-algebra všech borelovských množin topologického prostoru X, potom $\mathcal{B}$-měřitelným funkcím říkáme krátce *borelovské funkce* na X.

3.3. Poznámka. Jelikož σ-algebra je uzavřená na tvoření doplňků, funkce f je $\mathcal{S}$-měřitelná, právě když $\{f \leq \alpha\} \in \mathcal{S}$ pro každé $\alpha \in \mathbf{R}$. Vzhledem k tomu, že

$$\{f \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f > \alpha - \frac{1}{n}\} \,,$$

lze v definici $\mathcal{S}$-měřitelnosti nahradit podmínku $\{f > \alpha\} \in \mathcal{S}$ podmínkou $\{f \geq \alpha\} \in \mathcal{S}$ (a konečně i podmínkou $\{f < \alpha\} \in \mathcal{S}$). Další ekvivalentní podmínky jsou ve cvičení 3.6.

3.4. Věta. *Buďte f,g $\mathcal{S}$-měřitelné funkce na X. Potom*

(a) $\{x \in X : f(x) < g(x)\} \in \mathcal{S}$,
(b) $f^{-1}(+\infty)\,,\ f^{-1}(-\infty) \in \mathcal{S}$.

Důkaz. Tvrzení plyne snadno ze vztahů

$$\{f < g\} = \bigcup_{r \in \mathbf{Q}} (\{f < r\} \cap \{g > r\})\,,$$

$$\{x \in X : f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f > n\}\,.$$

■

3.5. Vlastnosti $\mathcal{S}$-měřitelných funkcí. *Buďte f, g, f_n $\mathcal{S}$-měřitelné funkce na X, $\lambda \in \mathbf{R}$. Potom jsou $\mathcal{S}$-měřitelné i následující funkce:*

(a) λf, $f+g$ *(pokud součet $f+g$ má všude smysl),* $\max(f,g)$, $\min(f,g)$, $|f|$, fg, f/g *(pokud g nenabývá hodnoty* 0*),*
(b) $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\limsup f_n$, $\liminf f_n$ *a také* $\lim f_n$ *(existuje-li).*

Důkaz. Naznačme myšlenky jen u některých důkazů, ostatní si jako cvičení proveďte sami.

(a) Buď $\alpha \in \mathbf{R}$. Potom $\{f + g > \alpha\} = \{f > \alpha - g\}$ (a funkce $\alpha - g$ je zřejmě $\mathcal{S}$-měřitelná). Dále můžeme využít vztahů

$$\max(f,g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)\,,$$

$$fg = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2)$$

a dokázat, že $|f|$ i f^2 jsou $\mathcal{S}$-měřitelné, je-li sama f $\mathcal{S}$-měřitelná. V případě $|f|$ je to velice snadné, jinak

$$\{f^2 > \alpha\} = \begin{cases} X & \text{pro } \alpha < 0, \\ \{|f| > \sqrt{\alpha}\} & \text{pro } \alpha \geq 0\,. \end{cases}$$

(b) Jako návod uveďme pouze vztah

$$\{\sup f_n > \alpha\} = \bigcup_n \{f_n > \alpha\}\,.$$

■

3.6. Cvičení. (a) Ukažte, že reálná funkce f je $\mathcal{S}$-měřitelná, právě když $f^{-1}(G) \in \mathcal{S}$ pro každou otevřenou množinu $G \subset \mathbf{R}$, anebo právě když $f^{-1}(B) \in \mathcal{S}$ pro každou borelovskou množinu $B \subset \mathbf{R}$.

Návod. Protože každou otevřenou množinu $G \subset \mathbf{R}$ lze vyjádřit ve tvaru $G = \bigcup(a_n, b_n)$ (přičemž $(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, +\infty)$), vidíme, že funkce f je $\mathcal{S}$-měřitelná, právě když $f^{-1}(G) \in \mathcal{S}$ pro každou otevřenou množinu $G \subset \mathbf{R}$ (uvědomte si, že $\{f > \alpha\} = f^{-1}((\alpha, +\infty))$!). Dále, uvažujte systém

$$\{B \subset \mathbf{R} : B \text{ borelovská, } f^{-1}(B) \in \mathcal{S}\}\,,$$

o němž ukážete, že tvoří σ-algebru a obsahuje všechny otevřené množiny.

(b) Charakteristiku uvedenou v (a) nelze použít pro funkce nabývající nevlastních hodnot, ledaže bychom použili pojem otevřené, resp. borelovské podmnožiny $\overline{\mathbf{R}}$.

3.7. Cvičení. Necht $\{f_n\}$ je posloupnost $\mathcal{S}$-měřitelných funkcí. Ukažte, že množiny

$$\{x \in X\colon \lim f_n(x) \text{ existuje }\} \text{ a } \{x \in X\colon \lim f_n(x) \text{ existuje a je konečná }\}$$

leží v $\mathcal{S}$.

3.8. Jednoduché funkce. *Jednoduchou funkcí* na X rozumíme (konečnou) lineární kombinaci charakteristických funkcí množin z $\mathcal{S}$. Jinými slovy, reálná (či komplexní) funkce f je jednoduchá, jestliže f je $\mathcal{S}$-měřitelná a $f(X)$ je konečná podmnožina $\mathbf{R}$ (či $\mathbf{C}$). Každá jednoduchá funkce má tedy tvar $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i c_{A_i}$, kde λ_i jsou čísla a $A_i \in \mathcal{S}$. Podotkněme, že toto vyjádření není jednoznačné!

3.9. Věta. *Buď $f \geq 0$ $\mathcal{S}$-měřitelná funkce na X. Potom existuje posloupnost $\{f_n\}$ nezáporných jednoduchých funkcí na X tak, že $f_n \nearrow f$.*

Důkaz (kreslete si). Pro $n \in \mathbf{N}$ a $k = 1, 2, \ldots, n2^n$ položte

$$F_{n,k} = \{x \in X : \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}\}$$

a definujte

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{k-1}{2^n}\,, & \text{pokud } x \in F_{n,k}\,, \\ n & \text{pro } x \in X \setminus \bigcup\limits_k F_{n,k}\,. \end{cases}$$

Lehko ověříte, že f_n jsou jednoduché a $f_n \nearrow f$. ■

3.10. Cvičení. Nechť f, f_n mají stejný význam jako v předchozí větě. Ukažte, že $f_n \rightrightarrows f$ na každé množině, na níž je f omezená.

3.11. Cvičení. Je-li f $\mathcal{S}$-měřitelná funkce, existuje posloupnost jednoduchých funkcí $\{f_n\}$ tak, že $|f_n| \leq |f|$ a $f_n \to f$ na X.

Nejčastěji přicházíme do styku s měřitelností v situaci, kdy na dané σ–algebře máme zadánu míru. Předpokládejme proto v dalším, že $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou. Zavedení následujícího pojmu je důležité v Lebesgueově teorii integrace, neboť množiny míry nula jsou v mnohém ohledu zanedbatelné.

3.12. Pojem skoro všude. Řekneme, že funkce h je definována *μ-skoro všude* (krátce *skoro všude*) na X, jestliže pro její definiční obor $D \in \mathcal{S}$ platí $\mu(X \setminus D) = 0$. Nechť f a g jsou funkce definované skoro všude na X. Řekneme, že $f(x) \leq g(x)$ *pro μ-skoro všechna* $x \in X$, nebo $f \leq g$ *μ-skoro všude*, jestliže existuje množina N tak, že $\mu N = 0$ a pro všechna $x \in X \setminus N$ je $f(x) \leq g(x)$. Podobně interpretujeme fráze "skoro všechna" a "skoro všude" v jiných souvislostech, např. u rovnosti funkcí či u konvergence skoro všude.

3.13. μ-měřitelné funkce. Řekneme, že funkce f s definičním oborem $D \in \mathcal{S}$ je *měřitelná* (přesněji μ-měřitelná), jestliže $\mu(X \setminus D) = 0$ a f je měřitelná (přesněji $\mathcal{S}_D$-měřitelná) na D.

Zdůrazněme, že rozlišujeme mezi "měřitelnou funkcí" (μ-měřitelnou, definovanou obecně jen skoro všude) a "$\mathcal{S}$-měřitelnou funkcí", definovanou všude na X.

3.14. Rovnost skoro všude. Vztah "$f = g$ skoro všude" je zřejmě ekvivalence na množině všech funkcí (nebo měřitelných funkcí) na X. Je dobré si uvědomit následující pozorování.

(a) Nechť μ je míra na $(X, \mathcal{S})$ a f μ-měřitelná funkce s definičním oborem $D \in \mathcal{S}$. Potom existuje $\mathcal{S}$-měřitelná funkce g na X tak, že $f = g$ na D, speciálně můžeme volit

$$g = \begin{cases} f & \text{na } D, \\ 0 & \text{na } X \setminus D\,. \end{cases}$$

(b) Je-li μ úplná míra na $(X, \mathcal{S})$ a f μ-měřitelná funkce, potom každá funkce g rovná f skoro všude je měřitelná.

3.15. Cvičení. Nalezněte příklad prostoru s mírou, na němž existuje $\mathcal{S}$-měřitelná funkce f a $\mathcal{S}$-neměřitelná funkce g tak, že $f = g$ skoro všude.

3.16. Cvičení. Nechť $(X, \overline{\mathcal{S}}, \overline{\mu})$ je zúplnění prostoru s mírou $(X, \mathcal{S}, \mu)$.

(a) Ukažte, že všude definovaná funkce f na X je $\overline{\mathcal{S}}$-měřitelná, právě když existují $\mathcal{S}$-měřitelné funkce g, h tak, že $g \leq f \leq h$ na X a $g = h$ μ-skoro všude v X.

Návod. Jedna implikace je snadná. Buď tedy f $\overline{\mathcal{S}}$-měřitelná. Potom nalezněte podle cvičení 3.11 posloupnost jednoduchých ($\overline{\mathcal{S}}$-měřitelných) funkcí $\{f_n\}$ tak, aby $f_n \to f$ na X. K nim pak nalezněte $\mathcal{S}$-měřitelné funkce g_n, h_n tak, aby platilo $g_n \leq f_n \leq h_n$ a $g_n = h_n$ μ-skoro všude (to je snadné) a položte

$$g := \limsup g_n\,, \quad h := \liminf h_n\,.$$

(b) Je-li f $\overline{\mathcal{S}}$-měřitelná funkce na X, existuje $\mathcal{S}$-měřitelná funkce g tak, že $f = g$ $\overline{\mu}$-skoro všude.

Návod. Tvrzení je zřejmé pro charakteristické funkce množin z $\overline{\mathcal{S}}$, tedy i pro $\overline{\mathcal{S}}$-měřitelné jednoduché funkce. Poté použijte vhodně cvičení 3.11.

3.17. Cvičení. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost $\mathcal{S}$-měřitelných funkcí na X konvergující k funkci f μ-skoro všude.

(a) Je-li míra μ úplná, je i f $\mathcal{S}$-měřitelná.

(b) Je-li f definována na X a $\mathcal{S}$-měřitelná, existuje posloupnost $\{f_n^*\}$ $\mathcal{S}$-měřitelných funkcí tak, že $f_n = f_n^*$ μ-skoro všude a $f_n^* \to f$ všude na X.

(c) Je-li tedy míra μ úplná, je funkce f $\mathcal{S}$-měřitelná, právě když existuje posloupnost jednoduchých funkcí konvergující k f μ-skoro všude.

3.18. Vzory a obrazy měřitelných množin. Víme již, že reálné měřitelné funkce jsou právě ty, pro něž vzory borelovských množin jsou množiny měřitelné. Pro dokreslení situace uveďme následující příklady pro případ Lebesgueovy míry na $\mathbf{R}$.

(a) Položme $g(x) = \frac{1}{2}(x + f(x))$, kde f je Cantorova singulární funkce z 23.1. Potom g je spojitá a rostoucí funkce zobrazující interval $[0, 1]$ na $[0, 1]$. Je-li C Cantorovo diskontinuum a φ inverzní funkce k g na $[0, 1]$, je $\varphi^{-1}(C)$ (lebesgueovsky) měřitelná množina kladné míry. Podle poznámky 1.9.2 existuje neměřitelná množina $E \subset \varphi^{-1}(C)$. Konečně, pro $M := \varphi(E)$ máme $M \subset C$; je tedy M měřitelná, přičemž $\varphi^{-1}(M) = g(M) = E$ je množina neměřitelná. Podotkněme ještě, že M není borelovská. (Porovnejte též se cvičením 1.14.a.)

(b) Aniž bychom následující tvrzení odůvodňovali, uveďme, že spojitý obraz borelovské množiny na $\mathbf{R}$ je vždy měřitelný, ale nemusí být borelovský.

4. Vytváření míry z vnější míry

Jak jsme se již zmínili, teorie míry je důležitá v mnoha partiích moderní analýzy. Leckdy však bývá obtížné zadefinovat přímo míru na jisté σ-algebře. Mnohdy ji pohodlněji získáme konstrukcí z jistých množinových funkcí, ať již jsou tyto definovány na poněkud "malém" systému množin (a míru pak získáme procesem rozšíření) anebo naopak na příliš "velikém" systému množin (míra se pak vytvoří zúžením na menší systém množin). V této kapitole se budeme zabývat konstrukcí míry z tzv. vnější míry. To je zobecnění postupu, který jsme již použili při zavedení Lebesgueovy míry. Zde také splatíme dluh vůči nedokázaným tvrzením z první kapitoly.

4.1. Vnější míra. *Vnější mírou* na množině X rozumíme množinovou funkci γ, která *každé* množině $A \subset X$ přiřadí nezáporné číslo γA (reálné nebo $+\infty$), přičemž jsou splněny následující požadavky:

(a) $\gamma\emptyset = 0$,
(b) $A \subset B \implies \gamma A \le \gamma B$,
(c) $\gamma(\bigcup A_n) \le \sum \gamma A_n$

Vlastnosti (c) se říká *σ-subaditivita* vnější míry.

4.2. Příklady vnějších měr. (a) Lebesgueova vnější míra v $\mathbf{R}^n$.

(b) *Hausdorffova* vnější míra z kapitoly 36.

(c) Aritmetická míra.

(d) Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou. Potom $A \mapsto \inf\{\mu M : M \in \mathcal{S},\ M \supset A\}$ je vnější míra, která se značí μ^*, viz též cvičení 4.8.

Důležitý příklad vytváření vnější míry je v následující větě.

4.3. Věta. *Nechť $\mathcal{G}$ je systém podmnožin množiny X obsahující $\emptyset$ a $\nu : \mathcal{G} \to [0, +\infty]$ je množinová funkce na $\mathcal{G}$, pro niž $\nu\emptyset = 0$. Pro $A \subset X$ položme*

$$\tilde{\nu} A = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \nu G_n : G_n \in \mathcal{G},\ \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \supset A\}$$

(uvědomte si, že $\inf\emptyset = +\infty$). Potom $\tilde{\nu}$ je vnější míra.

Důkaz. Trochu těžší je pouze ověření σ-subaditivity $\tilde{\nu}$. Nechť tedy $A \subset \bigcup\limits_n A_n$, $\sum \tilde{\nu} A_n < +\infty$. Volme $\varepsilon > 0$ a nalezněme $G_n^j \in \mathcal{G}$ tak, aby

$$\bigcup_j G_n^j \supset A_n \text{ a } \sum_j \nu G_n^j < \tilde{\nu} A_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\,.$$

Potom

$$\bigcup_{n,j} G_n^j \supset A \text{ a } \sum_n \tilde{\nu} A_n \ge \tilde{\nu} A - \varepsilon.$$

■

4.4. γ-měřitelné množiny. Množinu $M \subset X$ nazveme *γ-měřitelnou (podle Carathéodoryho)*, jestliže pro každou "testovací" množinu $T \subset X$ platí

$$\gamma T = \gamma(T \cap M) + \gamma(T \setminus M)$$

(jinými slovy, M aditivně "rozštípne" každou množinu v X). Systém všech (carathéodoryovsky) měřitelných množin označme $\mathfrak{M}(\gamma)$. K důkazu měřitelnosti množiny M stačí ověřit pouze nerovnost

$$\gamma T \ge \gamma(T \cap M) + \gamma(T \setminus M)\ ,$$

a to ještě samozřejmě jen v případech, kdy $\gamma T < +\infty$.

4.5. Věta. *Systém měřitelných množin $\mathfrak{M}(\gamma)$ tvoří σ-algebru a γ je na něm úplná míra.*

Důkaz rozdělíme do několika kroků.

(a) Ihned je vidět, že $\emptyset$, $X \in \mathfrak{M}(\gamma)$, a jestliže $M \in \mathfrak{M}(\gamma)$, potom i $X \setminus M \in \mathfrak{M}(\gamma)$. Buďte M, $N \in \mathfrak{M}(\gamma)$, chceme ukázat, že i $M \cap N \in \mathfrak{M}(\gamma)$. Volme tedy testovací množinu $T \subset X$. Potom

$$\gamma T = \gamma(T \cap M) + \gamma(T \setminus M)$$

a také

$$\gamma(T \cap M) = \gamma(T \cap M \cap N) + \gamma((T \cap M) \setminus N)\,.$$

Nyní použijeme testovací množinu $T \setminus (M \cap N)$ a měřitelnost M:

$$\gamma(T \setminus (M \cap N)) = \gamma((T \cap M) \setminus N) + \gamma(T \setminus M)\,.$$

Z posledních tří rovností plyne

$$\gamma T = \gamma(T \cap (M \cap N)) + \gamma(T \setminus (M \cap N))\,.$$

Protože $\mathfrak{M}(\gamma)$ je uzavřen na doplňky a konečné průniky, je uzavřen i na konečná sjednocení.

(b) Chceme ukázat, že funkce γ je σ-aditivní na $\mathfrak{M}(\gamma)$. Volme tedy $M_n \in \mathfrak{M}(\gamma)$ po dvou disjunktní. Je-li testovací množina $T = M_1 \cup M_2$ a využijeme-li měřitelnosti M_1, dostáváme

$$\gamma(M_1 \cup M_2) = \gamma M_1 + \gamma M_2 \,.$$

Je tedy γ konečně aditivní. Dále

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma M_n = \lim_k \sum_{n=1}^{k} \gamma M_n = \lim_k \gamma\Big(\bigcup_{n=1}^{k} M_n\Big) \le \gamma\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\Big) \,.$$

Opačná nerovnost však platí vždy.

(c) Buďte nyní opět $M_n \in \mathfrak{M}(\gamma)$ po dvou disjunktní. Chceme dokázat, že $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n \in \mathfrak{M}(\gamma)$. Volme tedy testovací množinu $T \subset X$. Potom

$$\gamma T = \gamma\Big(T \setminus \bigcup_{n=1}^{k} M_n\Big) + \gamma\Big(T \cap \bigcup_{n=1}^{k} M_n\Big) \ge \gamma\Big(T \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\Big) + \sum_{n=1}^{k} \gamma(T \cap M_n)$$

pro každé $k \in \mathbf{N}$. Odtud ihned plyne, že

$$\gamma T \ge \gamma\Big(T \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\Big) + \gamma\Big(T \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\Big)$$

(neboť γ je σ-aditivní). Pomocí těchto jednotlivých kroků již důkaz věty zajisté sami dokončíte (uvědomte si též, že $A \in \mathfrak{M}(\gamma)$, kdykoliv $\gamma A = 0$). ■

4.6. Cvičení. Buď γ nezáporná funkce na $\mathcal{P}(X)$, $\gamma\emptyset = 0$. Ukažte, že systém (carathéodoryovsky) měřitelných množin tvoří algebru množin a γ je na ní aditivní.

Návod. Všimněte si, kde jsme vlastně v důkazu věty 4.5 využili monotonii a σ-subaditivitu vnější míry.

4.7. Cvičení. Řekneme, že vnější míra γ je *regulární*, jestliže ke každé množině $A \subset X$ existuje $M \in \mathfrak{M}(\gamma)$ tak, že $A \subset M$ a $\gamma A = \gamma M$.

Každá regulární vnější míra γ splňuje podmínku:

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \quad \Longrightarrow \quad \gamma(\cup A_n) = \lim \gamma A_n \,.$$

Dokažte! Ukažte také, že Lebesgueova vnější míra je regulární. (Poznamejme, že oproti tomu existuje klesající posloupnost $\{M_n\}$ podmnožin $[0,1]$ takových, že $\lambda^* M_n = 1$ a $\bigcap\limits_n M_n = \emptyset$).

4.8. Cvičení. Buď $(X, \mathcal{S}, \mu)$ prostor s mírou, $A \subset X$. Položme

$$\mu^* A := \inf\{\mu M : M \in \mathcal{S}, A \subset M\}, \quad \mu_* A := \sup\{\mu M : M \in \mathcal{S}, M \subset A\}.$$

(a) Nechť $\mu^* A < +\infty$. Ukažte, že $A \in \mathfrak{M}(\mu^*)$, právě když $\mu_* A = \mu^* A$.

(b) Ukažte, že $\mathcal{S} \subset \mathfrak{M}(\mu^*)$ a $\mu = \mu^*$ na $\mathcal{S}$.

4.9. Historické poznámky. Carathéodoryho charakteristika měřitelných množin se poprvé objevuje v jeho knize [*1918] o reálných funkcích.

5. Množinové systémy a množinové funkce

Při konstrukci Lebesgueovy míry vycházíme z primitivní množinové funkce “objem intervalu”. Postupy používané k jejímu rozšíření na plnohodnotnou Lebesgueovu míru poskytují možnosti zobecňování.

V této kapitole se budeme věnovat množinovým systémům z hlediska teorie míry, ponechávajíce stranou topologickou stránku problematiky. Je však užitečné si povšimnout některých paralel mezi topologickými množinovými systémy a σ-algebrami, viz [Ru]. Topologické znalosti potřebné při studiu základů teorie míry jsou připomenuty v Appendixu.

5.1. Množinové systémy. Nyní uvedeme několik definic, užívaných zejména v abstraktní teorii míry a teorii pravděpodobnosti. Systém $\mathcal{A}$ podmnožin množiny X obsahující $\emptyset$ se zove:

(a) *polookruh*, jestliže

(a1) $A,\, B \in \mathcal{A} \implies A \cap B \in \mathcal{A}$,

(a2) $A,\, B \in \mathcal{A},\, A \subset B \implies$ existují disjunktní množiny $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{A}$ tak, že $B \setminus A = \bigcup\limits_{j=1}^{n} C_j$;

(b) *okruh*, jestliže $A,\, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B,\, A \setminus B \in \mathcal{A}$ (potom též $A \cap B \in \mathcal{A}$);

(c) *algebra*, jestliže je okruh a $X \in \mathcal{A}$;

(d) *Dynkinův systém*, jestliže

(d1) $X \in \mathcal{A}$,

(d2) $A, B \in \mathcal{A},\ B \subset A \implies A \setminus B \in \mathcal{A}$,

(d3) jsou-li $A_n \in \mathcal{A}$ po dvou disjunktní, potom $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$;

(e) π-*systém*, jestliže $A,\, B \in \mathcal{A} \implies A \cap B \in \mathcal{A}$;

(f) δ-*okruh*, jestliže $\mathcal{A}$ je okruh uzavřený na spočetné průniky;

(g) σ-*okruh*, jestliže $\mathcal{A}$ je okruh uzavřený na spočetná sjednocení.

5.2. Pramíra. Nezápornou množinovou funkci μ nazveme *pramírou* na X, jestliže definiční obor μ je okruh $\mathcal{A}$ podmnožin X a μ splňuje

(a) $\mu\emptyset = 0$,

(b) je-li $\{A_j\} \subset \mathcal{A}$ posloupnost po dvou disjunktních množin, přičemž $\bigcup A_j \in \mathcal{A}$, potom $\mu(\bigcup A_j) = \sum \mu A_j$.

Pramíra je vlastně σ-aditivní množinová funkce definovaná na *okruhu* množin. Definice konečné či σ-konečné pramíry je analogická příslušným definicím pro míru v 2.4.

5.3. Příklady. Označme $\mathcal{I}$ systém všech intervalů na $\mathbf{R}$ včetně degenerovaných (tj. prázdné množiny a jednobodových množin) a $\mathcal{I}^b$ systém všech omezených intervalů z $\mathcal{I}$. Dále nechť $\mathcal{I}_l$ je systém všech zleva uzavřených intervalů tvaru $[a, b)$ obohacený o $\emptyset$, $\mathbf{R}$ a intervaly typu $(-\infty, b)$ a $\mathcal{I}_l^b = \mathcal{I}_l \cap \mathcal{I}^b$.

(a) Systémy $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}_l$, $\mathcal{I}^b$, $\mathcal{I}_l^b$ jsou polookruhy, což již není pravda o systémech všech otevřených, resp. uzavřených intervalů.

(b) Uzavřeme-li $\mathcal{I}^b$, resp. $\mathcal{I}_l^b$ na konečná sjednocení, dostaneme okruh. Uzavřeme-li $\mathcal{I}$, resp. nebo $\mathcal{I}_l$ na konečná sjednocení, dostaneme dokonce algebru $\mathcal{A}$, resp. $\mathcal{A}_l$. Množinovou funkci $I \to \operatorname{vol} I$ lze (jednoznačně) rozšířit na $\mathcal{A}$, resp. $\mathcal{A}_l$ tak, aby byla pramírou. Rozmyslete si, proč je důležité uvažovat i degenerované intervaly.

(c) Uzavřeme-li $\mathcal{I}$ nebo $\mathcal{I}_l$ na spočetná sjednocení, nedostaneme ani polookruh. Uvažujte příklad, kdy odečtením spočetného sjednocení otevřených intervalů od $[0, 1]$ vznikne Cantorovo diskontinuum, které není spočetným sjednocením intervalů.

(d) Nechť $\mathcal{S}$ a $\mathcal{T}$ jsou σ–algebry (stačí polookruhy). Potom systém všech množin tvaru $A \times B$, kde $A \in \mathcal{S}$ a $B \in \mathcal{T}$, tvoří polookruh.

(e) Nechť $\mathcal{D}$ je polookruh. Potom množina všech konečných disjunktních sjednocení prvků z $\mathcal{D}$ je okruh (vlastně nejmenší okruh obsahující $\mathcal{D}$).

(f) Uvažujte systém $\mathcal{H}$ všech podmnožin o sudém počtu prvků množiny $\{1, 2, \ldots, 20\}$ a ukažte, že $\mathcal{H}$ tvoří Dynkinův systém, nikoliv však polookruh.

(g) Systém všech spočetných podmnožin množiny X tvoří σ-okruh, který v případě nespočetné množiny X není σ-algebra.

(h) Systém všech lebesgueovsky měřitelných množin konečné míry tvoří δ-okruh.

(i) Nechť $\mathcal{A}$ je systém všech sjednocení konečně mnoha intervalů (včetně degenerovaných) a $\mathcal{A}' = \{A \cap \mathbf{Q} : A \in \mathcal{A}\}$. Potom $\mathcal{A}'$ je algebra podmnožin $\mathbf{Q}$ a $\nu : A \cap \mathbf{Q} \mapsto \lambda A$ je konečně aditivní množinová funkce, která není pramíra.

(j) Nechť $\mathcal{A}$ je algebra všech konečných sjednocení intervalů na $(0, 1)$. Definujme množinovou funkci ν na $\mathcal{A}$ předpisem

$$\nu(A) = \begin{cases} 1 & \text{obsahuje-li } A \text{ pravé okolí nuly,} \\ 0 & \text{v ostatních případech.} \end{cases}$$

Potom ν je konečně aditivní množinová funkce na $\mathcal{A}$, která není pramíra.

5.4. Věta. Nechť $\mathcal{G}$ je okruh podmnožin množiny X a nechť ν je pramíra na $\mathcal{G}$. Vytvořme vnější míru $\tilde{\nu}$ podle věty 4.3. Potom

(a) $\tilde{\nu} = \nu$ na $\mathcal{G}$,

(b) $\mathcal{G} \subset \mathfrak{M}(\tilde{\nu})$.

Důkaz. Zřejmě $\tilde{\nu} \le \nu$. Buď tedy $G \in \mathcal{G}$, $\tilde{\nu}G < +\infty$ a $\{G_n\} \subset \mathcal{G}$, $\bigcup G_n \supset G$. Potom

$$\nu G = \nu(\bigcup_n (G_n \cap G)) \le \sum_n \nu(G_n \cap G) \le \sum_n \nu G_n \,,$$

tudíž $\nu G \le \tilde{\nu} G$.
Buď nyní $G \in \mathcal{G}$. Volte testovací množinu $T \subset X$, $\tilde{\nu}T < +\infty$, a $\varepsilon > 0$. Existují $G_n \in \mathcal{G}$ tak, že

$$T \subset \bigcup_n G_n \quad \text{a} \quad \sum_n \nu G_n \le \tilde{\nu}T + \varepsilon.$$

Potom

$$\tilde{\nu}T + \varepsilon \ge \sum_n \nu G_n = \sum_n \big(\nu(G_n \cap G) + \nu(G_n \setminus G)\big) \ge \tilde{\nu}(T \cap G) + \tilde{\nu}(T \setminus G)\,,$$

tudíž $G \in \mathfrak{M}(\tilde{\nu})$. ■

5.5. Hopfova věta (o rozšíření míry). *Buď μ pramíra na algebře $\mathcal{A}$ podmnožin množiny X. Potom existuje (a v případě, že μ je σ-konečná, právě jedna) míra $\tilde{\mu}$ na $\sigma(\mathcal{A})$, která se rovná μ na $\mathcal{A}$.*

Důkaz. Existence míry $\tilde{\mu}$ je zaručena větami 4.3 a 5.4, stačí si uvědomit, že $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathfrak{M}(\tilde{\mu})$.

K otázce jednoznačnosti. Buď ν míra na $\sigma(\mathcal{A})$, $\nu = \mu$ na $\mathcal{A}$. Lehko zjistíte (z konstrukce vnější míry $\tilde{\mu}$), že $\nu \le \tilde{\mu}$ na $\sigma(\mathcal{A})$. Dále si uvědomte, že pro $A_j \in \mathcal{A}$, $A = \bigcup_j A_j$ máme

$$\nu A = \lim_n \nu(\bigcup_{j=1}^n A_j) = \lim_n \mu(\bigcup_{j=1}^n A_j) = \tilde{\mu}A.$$

Je-li tedy $E \in \sigma(\mathcal{A})$, $\tilde{\mu}E < \infty$, existují k danému $\varepsilon > 0$ množiny $A_j \in \mathcal{A}$, $A = \bigcup_j A_j$ tak, že $E \subset A$ a $\tilde{\mu}A < \tilde{\mu}E + \varepsilon$. Odtud

$$\tilde{\mu}E \le \tilde{\mu}A = \nu A = \nu E + \nu(A \setminus E) \le \nu E + \tilde{\mu}(A \setminus E) \le \nu E + \varepsilon\,,$$

tedy $\tilde{\mu}E = \nu E$. Buď konečně $X = \bigcup_j X_j$, $\mu X_j < +\infty$; lze předpokládat, že X_j jsou po dvou disjunktní. Je-li $E \in \sigma(\mathcal{A})$, potom

$$\tilde{\mu}E = \sum_j \tilde{\mu}(E \cap X_j) = \sum_j \nu(E \cap X_j) = \nu E.$$

■

5.6. Cvičení. Buď $\mathcal{A}$ systém podmnožin množiny X. Ukažte, že existuje nejmenší Dynkinův systém $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ obsahující $\mathcal{A}$.

5.7. Cvičení. Ukažte, že každá σ-algebra tvoří Dynkinův systém. Dynkinův systém je σ-algebra, právě když je π-systém.

5.8. Cvičení. Je-li $\mathcal{A}$ π-systém, potom $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$.

5.9. Cvičení. Předpoklady Hopfovy věty lze zeslabit. Ukažte totiž, že tvrzení věty 5.4 zůstane v platnosti, předpokládáme-li pouze, že μ je konečně aditivní a σ-subaditivní na polookruhu $\mathcal{A}$ (a $\mu\emptyset = 0$).

Návod. Prvně si uvědomte, že μ je monotonní. Dále postupujte jako ve větě 5.4 a ukažte, že $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}(\tilde{\mu})$. V podstatném kroku využijte existenci množin $C_n^j \in \mathcal{A}$ s vlastností $G_n \setminus (G \cap G_n) = \bigcup_j C_n^j$.

5.10. Cvičení. Nechť $\mathcal{A}$ je π-systém na X. Jsou-li μ_1, μ_2 dvě pravděpodobnostní míry na $\sigma(\mathcal{A})$, které se shodují na $\mathcal{A}$, potom $\mu_1 = \mu_2$ na $\sigma(\mathcal{A})$.

Návod. Nechť $\mathcal{D} := \{M \in \sigma(\mathcal{A}) : \mu_1(M) = \mu_2(M)\}$. Ukažte, že $\mathcal{D}$ je Dynkinův systém a použijte cvičení 5.7.

5.11. Cvičení. Definujme (C je Cantorovo diskontinuum a f Cantorova funkce z 23.1)

$$\mathcal{A} := \{[a,b) \setminus C : a,b \in [0,1]\}, \quad \nu([a,b) \setminus C) := f(b) - f(a).$$

Ukažte, že $\mathcal{A}$ je polookruh a ν je konečně aditivní, ale nikoliv σ-aditivní funkce na $\mathcal{A}$.

5.12. Cvičení. (a) Buď $n \in \mathbf{N}$, X libovolná množina. Uvažujme množinovou funkci ν jako restrikci aritmetické míry na systém

$$\mathcal{G}_n := \emptyset \cup \{A \subset X : A \text{ má právě } n \text{ prvků}\}$$

a vytvořme vnější míru $\tilde{\nu}$ podle věty 4.3. Zkoumejte vztah systémů $\mathcal{G}_n$ a $\mathfrak{M}(\tilde{\nu})$ a porovnejte s větou 5.4.

(b) Podobnou úlohu zkoumejte v případě $X = (0,1)$, $\mathcal{G} = \mathcal{P}(X)$ a

$$\nu A := \inf\{\sum_{i=1}^{k}(b_i - a_i) : \bigcup_{i=1}^{k}(a_i,b_i) \supset A\}$$

(νA je *Jordan–Peanův* objem množiny A).

5.13. Cvičení. Buď μ^* vnější míra na X vytvořená z pramíry μ na algebře podle věty 4.3 taková, že $\mu^* X < +\infty$. Pro $A \subset X$ položme

$$\mu_* A := \mu^* X - \mu^*(X \setminus A).$$

Ukažte, že $A \in \mathfrak{M}(\mu^*)$, právě když $\mu_* A = \mu^* A$. (Porovnejte též s větou 5.4.)

5.14. Kapacita na kompaktech. Uvažujme lokálně kompaktní topologický prostor X. Reálnou nezápornou funkci $\mathcal{C}$ definovanou na systému $\mathcal{K}(X)$ všech kompaktních podmnožin X nazveme *Choquetovou kapacitou*, jestliže splňuje následující podmínky:

(a) $K_1 \subset K_2 \Longrightarrow \mathcal{C}(K_1) \leq \mathcal{C}(K_2)$,
(b) $K_1 \supset K_2 \supset K_3 ... \Longrightarrow \mathcal{C}(\bigcap K_n) = \lim \mathcal{C}(K_n)$,
(c) $\mathcal{C}(K_1 \cap K_2) + \mathcal{C}(K_1 \cup K_2) \leq \mathcal{C}(K_1) + \mathcal{C}(K_2)$ (tzv. *silná subaditivita*), kdykoliv $K_n \in \mathcal{K}(X)$.

Důležitým příkladem je Newtonova kapacita v $\mathbf{R}^n$, $n \geq 3$. Definujeme-li *Newtonův potenciál* Radonovy míry μ na $\mathbf{R}^n$ předpisem

$$\mathcal{N}^\mu(x) := \int_{\mathbf{R}^n} \frac{d\mu(t)}{|x-t|^{n-2}},$$

lze zavést *Newtonovu kapacitu* $\operatorname{cap} \mathrm{K}$ kompaktu $K \subset \mathbf{R}^n$ jako

$$\operatorname{cap} \mathrm{K} := \sup\{\mu K : \operatorname{supt} \mu \subset K,\ \mathcal{N}^\mu \leq 1 \text{ na } \mathbf{R}^n\}.$$

Důkaz, že tato kapacita splňuje podmínky (a), (b) i (c) lze nalézt třeba ve skriptech [KNV] .

5.15. Vnější kapacita. Buď X topologický prostor. Zobrazení $c : \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$ nazveme *vnější kapacitou*, jestliže

(a) $A \subset B \quad \Longrightarrow \quad cA \leq cB$,
(b) $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \quad \Longrightarrow \quad \sup cA_n = c(\bigcup A_n)$,
(c) $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots$, K_n kompaktní $\quad \Longrightarrow \quad \inf cK_n = c(\bigcap K_n)$.

Množinu $A \subset X$ nazveme *c-kapacitabilní*, jestliže

$$cA = \sup\{cK : K \text{ kompakt },\ K \subset A\}.$$

1. Je-li $\mathcal{C}$ Choquetova kapacita na lokálně kompaktním prostoru ze cvičení 5.14, definujte

$$cA := \sup\{C(K) : K \subset A, K \text{ kompakt }\}$$

a zkoumejte, zda c je vnější kapacita.

2. Nechť c je současně vnější kapacita a vnější míra. Zkoumejte vztah mezi pojmy c-kapacitability a c-měřitelnosti v Carathéodoryově smyslu.

Uvažujte příklady:

(a) X je dvoubodová množina s diskrétní topologií, $cA = 1$ když $A \neq \emptyset$, $c\,\emptyset = 0$,
(b) X je $\mathbf{R}$ s eukleidovskou topologií, c je vnější Lebesgueova míra,
(c) jako (b), ale na $\mathbf{R}$ uvažujte diskrétní topologii.
(d) c je vnější kapacita odvozená z Newtonovy kapacity jako v předchozím odstavci. V tomto případě vyjde, že množina $A \subset \mathbf{R}^n$ je c-měřitelná podle Carathéodoryho, právě když $cA = 0$ nebo $c(\mathbf{R}^n \setminus A) = 0$ (to není úplně snadné, viz knihu M.M. Rao [*1987]). Na druhé straně, jeden z hlubokých Choquetových výsledků říká, že každá borelovská množina v $\mathbf{R}^n$ je c-kapacitabilní.

5.16. Historické poznámky. "Hopfova věta" se většinou připisuje H. Hahnovi či C. Carathéodorymu, ale původně asi patří M. Fréchetovi [1915]. Důkaz pomocí Carathéodoryho věty byl podán nezávisle H. Hahnem [*1924] a A.N. Kolmogorovem [*1933].

Pojmy π-systému či Dynkinova systému byly zkoumány E.B. Dynkinem v roce 1959 jako prostředky pro teorii pravděpodobnosti. Systémy podobných vlastností vyšetřoval již W. Sierpiński [1928].

Studium kapacit v klasické teorii potenciálu, kterému bylo věnováno mnoho prací ve 20.-40. letech, je spojeno se jmény Ch. de la Vallée Poussin, N. Wiener, O. Frostman či M. Brelot, abychom jmenovali alespoň některá. V převážné míře se jedná o newtonovskou kapacitu a roli množin majících "malou" kapacitu. Dalo by se říci, v jistém smyslu, že teorie kapacit je mladší sestrou teorie Lebesgueovy míry. V 50. letech se pak rozvíjí obecná teorie kapacit a G. Choquet dokazuje slavnou větu o kapacitabilitě. O tom se lze dočíst v pěkném článku od samotného Choqueta [1989].

6. Znaménkové a komplexní míry

V této kapitole budeme vyšetřovat "míry", které mohou nabývat i záporných (nebo dokonce imaginárních) hodnot.

6.1. Znaménkové míry. Buď $\mathcal{S}$ σ-algebra podmnožin X. Řekneme, že $\mu : \mathcal{S} \to \overline{\mathbf{R}}$ je *znaménková míra* na $\mathcal{S}$, jestliže

(a) $\mu\emptyset = 0$,

(b) $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$, kdykoliv $A_n \in \mathcal{S}$ jsou po dvou disjunktní.

6.2. Poznámky. 1. Znaménková míra může ze dvou nevlastních hodnot $+\infty$ či $-\infty$ nabývat pouze jedné. Kdyby totiž existovaly množiny $E, F \in \mathcal{S}$ tak, že $\mu E = +\infty$ a $\mu F = -\infty$, potom by $\mu(E \cap F)$ musela být konečná (proč?), bylo by $\mu(E \setminus F) = +\infty, \mu(F \setminus E) = -\infty$ a rovnost (b) by neměla smysl pro (disjunktní) množiny $E \setminus F$ a $F \setminus E$.

2. Uvědomte si, že řada $\sum \mu A_n$ v podmínce (b) konverguje absolutně. (Tato řada totiž konverguje – a k témuž číslu – po každém přerovnání, což je, jak zajisté dobře víte, ekvivalentní s absolutní konvergencí!)

3. Podobně jako v případě "nezáporné" míry platí následující tvrzení

$$A_n \in \mathcal{S}\,,\ A_n \nearrow A \implies \mu A_n \to \mu A\,,$$
$$A_n \in \mathcal{S}\,,\ A_n \searrow A\ ,\ |\mu A_1| < +\infty \implies \mu A_n \to \mu A\,.$$

4. Nezapomeňte, že znaménková míra μ nemusí být monotonní– je-li $A \subset B$, nemusí ještě být $\mu A \leq \mu B$!

6.3. Hahnův rozklad. Řekneme, že množina $P \in \mathcal{S}$ je *kladná* pro znaménkovou míru μ, jestliže $\mu E \geq 0$ pro každou množinu $E \in \mathcal{S}$, $E \subset P$. Obdobně definujeme i množiny *záporné* pro μ.

Dvojici (P, N) nazveme *Hahnovým rozkladem* X, jestliže

(a) $P \cup N = X$, $P \cap N = \emptyset$,

(b) P je kladná a N je záporná (pro μ).

6.4. Příklady. (a) Prázdná množina je vždy kladná i záporná. Dvojice $(X, \emptyset)$ tvoří Hahnův rozklad, právě když μ je nezáporná.

(b) Dvojice $(\mathbf{R}\,, \emptyset)$, $(\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}\,, \mathbf{Q})$, $(\mathbf{R} \setminus \{5\}\,, \{5\})$ tvoří Hahnovy rozklady Lebesgueovy míry.

(c) Je-li míra μ_f vytvořená pomocí hustoty f z μ ($\mu_f A = \int_A f\,d\mu$, kde $f \in \mathcal{L}^*(\mu)$ – viz 8.19), potom množina $P := \{f \geq 0\}$ je kladná pro μ_f a $(\{f \geq 0\}, \{f < 0\})$ je Hahnovým rozkladem pro μ_f.

6.5. Věta (Hahnův rozklad). *Pro každou znaménkovou míru μ vždy existuje Hahnův rozklad. Tento rozklad je jednoznačný v tomto smyslu: Jsou-li (P_1, N_1) a (P_2, N_2) dva Hahnovy rozklady, potom*

$$\mu(P_1 \cap E) = \mu(P_2 \cap E)\,, \quad \mu(N_1 \cap E) = \mu(N_2 \cap E)$$

pro každou množinu $E \in \mathcal{S}$.

Důkaz. Začneme s důkazem jednoznačnosti, ten je jednodušší. Nechť (P_1, N_1) a (P_2, N_2) jsou Hahnovy rozklady. Potom zřejmě $\mu(P_1 \cap E) = \mu(E \cap (P_1 \cap P_2)) = \mu(E \cap P_2)$ a podobně i $\mu(N_1 \cap E) = \mu(N_2 \cap E)$.

Pro existenční důkaz předpokládejme, že $\mu S < +\infty$ pro všechna $S \in \mathcal{S}$. Důkaz rozdělme do tří kroků.

1. krok: *Je-li $A \in \mathcal{S}$, $\mu A > -\infty$, a $\varepsilon > 0$, potom existuje množina $B \subset A$ tak, že $\mu B \geq \mu A$ a $\mu M > -\varepsilon$ pro všechna $M \subset B$.*

Buď $c = \sup\{\mu C\colon C \subset A\}$. Všimněme si, že $\mu A \leq c < \infty$. Požadované vlastnosti má taková množina $B \subset A$, pro niž $\mu B \geq \max(\mu A,\ c - \varepsilon/2)$. Kdyby totiž existovala $M \subset B$ tak, že $\mu M \leq -\varepsilon$, bylo by $\mu(B \setminus M) = \mu B - \mu M \geq c + \varepsilon/2$, což není možné.

2. krok: *Je-li $A \in \mathcal{S}$, $\mu A > -\infty$, potom existuje kladná množina $B \subset A$ tak, že $\mu B \geq \mu A$.*

Podle prvního kroku sestrojíme posloupnost množin $A_n \in \mathcal{S}$ tak, aby

$$A_n \subset A,\ \mu A_n \geq \mu A,\ A_1 \supset A_2 \supset \dots ,$$

přičemž $\mu M > -\frac{1}{n}$, kdykoli $M \subset A_n$. Položíme-li $B = \bigcap A_n$, je $B \subset A$ a $\mu B = \lim \mu A_n \geq \mu A$. Navíc je B kladná: Je-li totiž $M \subset B$, je $\mu M > -\frac{1}{n}$ pro každé n, neboť $M \subset B \subset A_n$.

3. KROK: K dokončení důkazu položme $s = \sup\{\mu A : A \in \mathcal{S}\}$. Protože $\emptyset \in \mathcal{S}$, je $s \geq 0$. Existují tedy $P_n \in \mathcal{S}$ tak, že $\mu P_n \to s$. Podle druhého kroku lze předpokládat, že P_n jsou kladné. Navíc můžeme předpokládat, že $P_1 \subset P_2 \subset \dots$ (sjednocení dvou kladných množin je kladná množina!). Položíme-li nyní $P = \bigcup P_n$, je $P \subset A$ a $\mu P = \lim \mu P_n = s$ a P je kladná (kdykoli totiž $E \subset P$, je $E \cap P_n \nearrow E$ a $\mu(E \cap P_n) \geq 0$). Zbývá ukázat, že množina $N := X \setminus P$ je záporná. Ale to je celkem zřejmé – kdyby existovala $E \subset N$, $\mu E > 0$, potom bychom dostali $\mu(E \cup P) = \mu E + \mu P > s$. (Důkaz věty o Hahnově rozkladu není zase tolik těžký – doporučujeme při promýšlení kreslit obrázky.) ■

6.6. Variace míry. Nechť (P, N) je Hahnův rozklad pro znaménkovou míru μ na prostoru $(X, \mathcal{S})$. Můžeme nyní definovat:

$$\mu^+ E = \mu(E \cap P), \quad \mu^- E = -\mu(E \cap N), \quad |\mu|(E) = \mu^+ E + \mu^- E$$

pro každou množinu $E \in \mathcal{S}$. Podle předchozího definice $\mu^+ E$ a $\mu^- E$ nezávisí na volbě Hahnova rozkladu (jenž *není* jednoznačně určen!). Sami lehko odvodíte, že množinové funkce μ^+, μ^- a $|\mu|$ jsou nezáporné míry na $\mathcal{S}$. Nazýváme je *pozitivní, negativní* a *totální variací* znaménkové míry μ. Shrňme nyní naše poznatky do následující věty.

6.7. Věta (Jordanův rozklad znaménkové míry). *Funkce μ^+, μ^- a $|\mu|$ jsou nezáporné míry na $\mathcal{S}$, přičemž $\mu = \mu^+ - \mu^-$. Je-li také $\mu = \nu_1 - \nu_2$, kde ν_1, ν_2 jsou nezáporné míry, potom $\nu_1 \geq \mu^+$, $\nu_2 \geq \mu^-$.*

Důkaz. Zbývá dokázat pouze poslední část věty. Je-li však $E \in \mathcal{S}$, potom

$$\mu^+ E = \mu(E \cap P) = \nu_1(E \cap P) - \nu_2(E \cap P) \leq \nu_1(E \cap P) \leq \nu_1 E .$$

■

6.8. Poznámka. Rozklad znaménkové míry μ na rozdíl dvou nezáporných měr není v žádném netriviálním případě jednoznačný – je-li totiž ν libovolná nezáporná míra, je $\mu = (\mu^+ + \nu) - (\mu^- + \nu)$. Jordanův rozklad je však v jistém smyslu minimální.

Důležitá charakteristika totální variace znaménkové míry, často sloužící i jako její definice, je obsažena v následující větě.

6.9. Věta. *Buď μ znaménková míra na $(X, \mathcal{S})$, $E \in \mathcal{S}$. Potom*

$$|\mu|(E) = \sup\Big\{\sum_{k=1}^{n} |\mu A_k| : A_k \in \mathcal{S} \textit{ jsou po dvou disjunktní, } \bigcup_{k=1}^{n} A_k = E\Big\} .$$

Důkaz. Zřejmě

$$\sum_k |\mu A_k| = \sum_k |\mu^+ A_k - \mu^- A_k| \leq \sum_k (\mu^+ A_k + \mu^- A_k) = \sum_k |\mu|(A_k) = |\mu| E .$$

Na druhé straně, je-li (P, N) Hahnův rozklad pro μ, položíme $A_1 = E \cap P$, $A_2 = E \cap N$ a zjistíme, že suprema se dokonce nabývá. ■

6.10. Komplexní míry. Na závěr se stručně zmiňme o komplexních mírách. *Komplexní mírou* na $(X, \mathcal{S})$ rozumíme funkci $\mu \colon \mathcal{S} \to \mathbf{C}$, pro niž $\mu \emptyset = 0$ a která je σ-aditivní (tj. $\mu\big(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\big) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu A_k$, kdykoli $\{A_k\}$ je posloupnost po dvou disjunktních množin z $\mathcal{S}$; poznamenejme, že jako v poznámce 6.2.2 řada napravo vždy konverguje absolutně).

Každou komplexní míru μ lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru $\mu = \mu_r + i\mu_i$, kde μ_r a μ_i jsou (konečné!) znaménkové míry na $(X, \mathcal{S})$. Speciálně tedy každou *konečnou* znaménkovou míru můžeme chápat jako komplexní míru.

Je-li μ komplexní míra, definujeme její *totální variaci* $|\mu|$ předpisem

$$|\mu|(E) = \sup\Big\{\sum_{k=1}^{n} |\mu A_k| : A_k \in \mathcal{S} \text{ jsou po dvou disjunktní, } \bigcup_{k=1}^{n} A_k = E\Big\}.$$

Vzhledem k větě 6.9 není tato definice ve sporu s definicí totální variace znaménkové míry.

6.11. Věta. *Buď μ komplexní míra na $(X, \mathcal{S})$. Potom totální variace $|\mu|$ je konečná nezáporná míra na $(X, \mathcal{S})$.*

Důkaz. Zřejmě $|\mu|(\emptyset) = 0$ a není těžké ukázat, že $|\mu|$ je konečně aditivní. Je-li $\mu = \mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4)$, kde $\mu_1 - \mu_2$ je Jordanův rozklad μ_r a $\mu_3 - \mu_4$ je Jordanův rozklad μ_i, (μ_j jsou tedy nezáporné konečné míry), je

$$|\mu|(A) \le \mu_1 A + \mu_2 A + \mu_3 A + \mu_4 A,$$

tedy $|\mu|(A) < +\infty$. Jsou-li $A_n \in \mathcal{S}$, $A_n \searrow \emptyset$, je $\lim \mu_j A_n = 0$ pro každé $j = 1, 2, 3, 4$, takže také $|\mu|(A_n) \to 0$. Odtud již snadno dokážeme σ-aditivitu. ■

6.12. Poznámky. 1. Všimněte si rozdílu definic totální variace v případě znaménkové či komplexní míry!

2. Uvědomte si, že obor hodnot každé komplexní míry je vždy *omezená* podmnožina komplexní roviny $\mathbf{C}$.

6.13. Cvičení. Buď μ znaménková míra na $(X, \mathcal{S})$, $E \in \mathcal{S}$. Potom $\mu^+ E = \sup\{\mu B : B \in \mathcal{S},\ B \subset E\}$.

6.14. Cvičení. Buď μ komplexní míra na $(X, \mathcal{S})$, $E \in \mathcal{S}$. Potom

$$|\mu|(E) = \sup\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} |\mu A_k| : A_k \in \mathcal{S} \text{ jsou po dvou disjunktní, } \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = E\Big\}.$$

6.15. Cvičení. Buď μ komplexní míra na $(X, \mathcal{S})$. Potom $|\mu|$ je nejmenší ze všech nezáporných měr ν splňujících $\nu A \ge |\mu A|$ pro všechna $A \in \mathcal{S}$.

6.16. Cvičení. Zkoumejte, zda platí vzorec

$$|\mu| = |\mu_r| + |\mu_i|$$

nebo

$$|\mu| = \sqrt{|\mu_r|^2 + |\mu_i|^2}\,.$$

6.17. Cvičení. Symbolem $\mathbf{M}(\mathcal{S})$ označme množinu všech konečných znaménkových či komplexních měr na $(X, \mathcal{S})$. Pro $\mu \in \mathbf{M}(\mathcal{S})$ položme $\|\mu\| = |\mu|(X)$. Ukažte, že $(\mathbf{M}(\mathcal{S}), \|\ldots\|)$ je Banachův prostor (tj. $\mathbf{M}(\mathcal{S})$ je vektorový prostor a $\|\ldots\|$ je norma, v níž je $\mathbf{M}(\mathcal{S})$ úplný).

Návod. Poněkud obtížnější je pouze důkaz úplnosti. Je-li $\{\mu_n\}$ cauchyovská posloupnost v $\mathbf{M}(\mathcal{S})$, existuje $\lim \mu_n A$ pro každé $A \in \mathcal{S}$. Definujte

$$\mu A = \lim \mu_n A.$$

Ukažte, že μ je σ-aditivní a $\|\mu_n - \mu\| \to 0$.

6.18. Cvičení. Nechť μ, $\mu_n \in \mathbf{M}(\mathcal{S})$, $\|\mu_n - \mu\| \to 0$. Potom $\mu_n A \to \mu A$ pro každou množinu $A \in \mathcal{S}$.

6.19. Cvičení. Ukažte, že množina $\mathbf{M}(\mathcal{S})$ všech znaménkových měr na $(X, \mathcal{S})$ vybavená uspořádáním

$$\mu \le \nu, \quad \text{jestliže } \mu A \le \nu A \text{ pro všechna } A \in \mathcal{S}$$

tvoří svaz (tj. pro libovolné μ, $\nu \in \mathbf{M}(\mathcal{S})$ existuje $\sup(\mu, \nu)$, $\inf(\mu, \nu)$) ve smyslu teorie uspořádaných množin (tj. nikoli "$\sup(\mu, \nu)(A) = \sup(\mu(A), \nu(A))$" – taková množinová funkce by obecně nebyla míra!).

Návod. Položte

$$\sup(\mu, \nu) = \frac{1}{2}(\mu + \nu + |\nu - \mu|), \quad \inf(\mu, \nu) = \frac{1}{2}(\mu + \nu - |\nu - \mu|)\,.$$

6.20. Konečně aditivní míry – náboje. Reálná množinová funkce ν na *algebře* množin $\mathcal{A}$ se nazve *nábojem*, jestliže

(a) $\nu\emptyset = 0$,
(b) $\nu(A \cup B) = \nu A + \nu B$, kdykoliv A, $B \in \mathcal{A}$, $A \cap B = \emptyset$.

Je-li ν náboj, definujeme $\nu^+ A = \sup\{\nu F : F \in \mathcal{A}, F \subset A\}$, $\nu^- A = -\inf\{\nu F : F \in \mathcal{A}, F \subset A\}$, $|\nu|(A) = \nu^+ A + \nu^- A$.

6.21. Cvičení. Ukažte, že množinové funkce ν^+, ν^-, $|\nu|$ jsou nezáporné konečně aditivní míry na $\mathcal{A}$.

6.22. Cvičení. Buď $X = [0,1)$. Nechť $\mathcal{A}$ je systém všech konečných sjednocení intervalů typu $[a,b) \subset [0,1)$. Ověřte, že $\mathcal{A}$ je algebra. Nechť

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{pro } x \in (0,1), \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Je-li $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} [a_i, b_i)$, definujeme $\nu A = \sum (f(b_i) - f(a_i))$.
Ukažte, že

(a) definice νA nezávisí na vyjádření $A = \bigcup [a_i, b_i)$,
(b) ν je náboj na $\mathcal{A}$,
(c) $\nu A \leq 0$ pro $A \subset (0,1)$,
(d) $\nu([0,1)) = 1$,
(e) $\nu^+([0,1)) = \nu^-([0,1)) = +\infty$

(vidíme tedy, že pro náboje nemusí platit $\nu = \nu^+ - \nu^-$),

(f) neexistuje “Hahnův rozklad” pro ν.

6.23. Cvičení. Buď ν náboj na $\mathcal{A}$. Ukažte, že $\nu = \nu^+ - \nu^-$, právě když ν je omezený (tj. $\sup\{|\nu A| : A \in \mathcal{A}\} < +\infty$).

6.24. Historické poznámky. Znaménkové míry zkoumal již H. Lebesgue v [1910], přičemž se hlavně zabýval případem měr zadaných hustotou (viz 8.19).

Existence Hahnova rozkladu prostoru a Jordanův rozklad znaménkové míry jsou poprvé v plné obecnosti dokázány v Hahnově knize [*1921], jejíž druhý díl do jeho smrti v roce 1934 nikdy nevyšel. Později se však objevila kniha H. Hahn a A. Rosenthal [*1948].

Teorii nábojů je věnována monografie K.P.S. Bhaskara Rao and M. Bhaskara Rao [*1983]

B. ABSTRAKTNÍ LEBESGUEŮV INTEGRÁL

7. Integrování v R

7.1. Newtonův integrál. Nechť f je reálná funkce na intervalu (a, b). Funkci F na (a, b) nazveme *primitivní funkcí* k f, jestliže $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (a, b)$. Číslo $A \in \mathbf{R}$ nazveme *Newtonovým integrálem* funkce f (na (a, b)), jestliže existuje primitivní funkce F k f na (a, b) tak, že $A = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x)$. Newtonův integrál funkce f na (a, b) nezávisí na volbě F, neboť libovolné dvě primitivní funkce se liší o konstantu. Značíme jej $N\int_a^b f$. K tomu, aby funkce f byla newtonovsky integrovatelná (tj. měla Newtonův integrál) jsou tedy zapotřebí dvě věci: existence primitivní funkce a existence jejích vlastních limit v krajních bodech.

7.2. Riemannův integrál. Nechť f je omezená funkce na omezeném intervalu (a, b). Je-li $\{\xi_0, \dots, \xi_m\}$ (konečná) posloupnost bodů $[a, b]$ (tzv. *dělení* intervalu $[a, b]$), $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ posloupnost reálných čísel, $a = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_m = b$, pak číslo $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j(\xi_j - \xi_{j-1})$ nazveme *horním Riemannovým součtem* k f, je-li $\alpha_j \ge f$ na každém intervalu (ξ_{j-1}, ξ_j), resp. *dolním Riemannovým součtem* k f, je-li $\alpha_j \le f$ na každém (ξ_{j-1}, ξ_j). Označme

$$\mathcal{R}^* f = \inf\{A : A \text{ je horní Riemannův součet k } f\},$$
$$\mathcal{R}_* f = \sup\{A : A \text{ je dolní Riemannův součet k } f\}.$$

Je-li $\mathcal{R}^* f = \mathcal{R}_* f$, pak řekneme, že funkce f je *riemannovsky integrovatelná* na (a, b), společnou hodnotu nazýváme *Riemannovým integrálem* a značíme $R\int_a^b f$.

7.3 Věta. *Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Potom existují Newtonův i Riemannův integrál funkce f na (a, b) a rovnají se.*

Důkaz. Ze stejnoměrné spojitosti f snadno dostaneme existenci $R\int_a^x f$ pro všechna $x \in (a, b)$. Ověříme, že $x \mapsto R\int_a^x f$ je primitivní funkce k f, a tím je dokázána i existence Newtonova integrálu a jejich rovnost. ∎

7.4. Poznámka. Každá riemannovsky integrovatelná funkce je *absolutně* riemannovsky integrovatelná, tj. její absolutní hodnota je též riemannovsky integrovatelná. Totéž nelze říci o Newtonově integrálu. (Uvažujte příklad $x \mapsto \sin x/x$ na intervalu $(1, +\infty)$; substitucí $t = 1/x$ dostaneme příklad na omezeném intervalu.)

7.5. Dirichletova funkce. *Dirichletovou funkcí D* rozumíme charakteristickou funkci množiny všech racionálních čísel. Rozmyslete si, že $D = 0$ skoro všude. Dirichletova funkce není nikde spojitá, nemá primitivní funkci (to by musela mít Darbouxovu vlastnost) ani Riemannův integrál na $(0, 1)$ ($\mathcal{R}^* D = 1$, $\mathcal{R}_* D = 0$).

7.6. Riemannova funkce. *Riemannova funkce R* je také rovna nule ve všech iracionálních číslech. Je-li $r = p/q$ racionální číslo, čísla p a q jsou celá nesoudělná a $q > 0$, potom $R(r)$ definujeme jako $1/q$. (Nulu chápeme jako podíl $0/1$, tedy $R(0) = 1$.) Riemannova funkce je spojitá v x, právě když x je iracionální. Riemannova funkce slouží jako příklad "divoké" funkce riemannovsky integrovatelné na omezených intervalech, Newtonův integrál (ani primitivní funkci) samozřejmě nemá.

7.7. Různé příklady. Charakteristická funkce Cantorova diskontinua je riemannovsky integrovatelná. Charakteristická funkce diskontinua kladné míry není riemannovsky integrovatelná. Neomezená newtonovsky integrovatelná funkce ovšem nemůže být riemannovsky integrovatelná; jsou však i příklady omezených newtonovsky integrovatelných funkcí, které nemají Riemannův integrál, viz 7.9.f.

7.8. Čebyševova nerovnost pro Riemannův integrál. Je-li f nezáporná omezená funkce na (a, b), $\varepsilon > \mathcal{R}^* f$ a $\tau > 0$, potom množinu $\{f \ge \tau\}$ lze pokrýt sjednocením konečně mnoha intervalů, jejichž součet délek je menší než ε/τ (takže $\lambda^*\{f \ge \tau\} < \varepsilon/\tau$).

Návod. Najděme dělení $a = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_m = b$ a čísla c_j tak, aby $c_j \ge f$ na (ξ_{j-1}, ξ_j) a $\sum_{j=1}^{m} c_j(\xi_j - \xi_{j-1}) < \varepsilon$. Potom součet délek intervalů (ξ_{j-1}, ξ_j), pro něž je $c_j \ge \tau$, je menší než ε/τ.

7.9. Riemannovsky integrovatelné funkce. Teorie Lebesgueovy míry nám umožňuje hlubší pohled na třídu riemannovsky integrovatelných funkcí.

(a) Pro každou omezenou funkci f na intervalu (a, b) je zřejmě

$$\mathcal{R}^* f = \inf\{\int_a^b g : g \text{ je po částech konstantní, } g \geq f\},$$
$$\mathcal{R}_* f = \sup\{\int_a^b g : g \text{ je po částech konstantní, } g \leq f\}.$$

(Funkce f se nazývá *po částech konstantní* na $[a, b]$, jestliže existují ξ_j tak, že $a = \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_m = b$ a f je konstantní v každém intervalu (ξ_{j-1}, ξ_j).)

(b) Je-li f reálná omezená funkce na intervalu (a, b), funkce

$$f^* := \inf\{g : g \geq f, \ g \text{ je spojitá funkce}\}$$

se nazývá *horní Baireovou* funkcí (příslušnou f). Analogicky se definuje dolní Baireova funkce f_*.

Ukažte, že funkce f^* je vždy polospojitá shora a f je spojitá v bodě x, právě když $f^*(x) = f_*(x)$.

(c) Ukažte, že

$$\mathcal{R}^* f = \inf\{R \int_a^b g : g \geq f, \ g \text{ spojitá } \}.$$

(d) Nechť f je omezená funkce na intervalu (a, b). Ukažte, že následující výroky jsou ekvivalentní:

(i) funkce f je riemannovsky integrovatelná,
(ii) ke každému $\varepsilon > 0$ existují spojité funkce t, s na (a, b) tak, že $t \leq f \leq s$ a $R\int_a^b (s - t) < \varepsilon$,
(iii) $f_* = f^*$ skoro všude,
(iv) existují funkce u, v , u polospojitá shora, v polospojitá zdola tak, že $v \leq f \leq u$ a $u = v$ skoro všude,
(v) množina bodů nespojitosti funkce f má Lebesgueovu míru nula.

Návod. Použijte (b) a (c). Pro implikaci (ii) $\Longrightarrow$ (iii) dostáváme s použitím 7.8 $\lambda^*\{f^* - f_* \geq 1/k\} \leq \lambda^*\{s - t \geq 1/k\} \leq k\varepsilon$ pro každé $k \in \mathbf{N}$ a $\varepsilon > 0$, tedy $\lambda^*\{f^* \neq f_*\} = 0$.

(e) Ukažte, že každá riemannovsky integrovatelná funkce je měřitelná.

Návod. Každá polospojitá funkce je zřejmě měřitelná. Dále použijte (d) a větu 3.14.b.

(f) Na základě charakteristiky v (v) lze konstruovat omezené newtonovsky integrovatelné funkce nemající Riemannův integrál. Příklad funkce Volterrova typu sestrojený pomocí uzavřených řídkých množin kladné míry (příklad 1.13) lze nalézt v [L-Př].

7.10. Historické poznámky. Začátky integrálního počtu jsou svázány se jmény I. Newtona a G.W. Leibnize. Moderní teorie integrálu se rozvíjela od počátku minulého století a je spojena se slavnými jmény jako jsou A. Cauchy, L. Dirichlet, B. Riemann, C. Jordan, E. Borel, H. Lebesgue či G. Vitali, abychom jmenovali alespoň některá z nich. Rovněž tak je i mnoho prací o historii, viz 8.25.

8. Vybudování abstraktního integrálu

Příklady ze sedmé kapitoly ukazují že Riemannův i Newtonův integrál se vyznačují chudobou třídy integrovatelných funkcí. Pro aplikace ve funkcionální analýze je fatálním nedostatkem neúplnost normovaného lineárního prostoru všech riemannovsky, resp. absolutně newtonovsky, integrovatelných funkcí na $[a, b]$. Tento handicap odstraňuje Lebesgueův integrál, který zavedeme v této kapitole, a to dokonce v abstraktních prostorech s mírou. Hlavní výhody Lebesgueova integrálu spočívají v širší třídě integrovatelných funkcí a v možnostech dávaných větami o limitním přechodu (Leviho či Lebesgueovou). Za tyto přednosti platíme ovšem ztrátou elementárnosti.

Buď nyní $(X, \mathcal{S}, \mu)$ prostor s mírou a $D \in \mathcal{S}$. Naší snahou je přiřadit každé funkci f z nějakého systému $\mathcal{A}$ hodnotu (integrál) $\int_D f \, d\mu$ tak, aby

(a) toto zobrazení (z $\mathcal{A}$ do $\overline{\mathbf{R}}$) mělo rozumné vlastnosti (linearita, monotonie, ...),
(b) systém $\mathcal{A}$ byl co nejširší,
(c) v konkrétním případě, kdy μ je Lebesgueova míra na přímce a f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$, splýval $\int_{[a,b]} f \, d\mu$ s integrálem (Newtonovým, Riemannovým) z funkce f na $[a, b]$.

Náš postup bude vcelku jednoduchý: Nejdříve budeme definovat $\int_X f \, d\mu$ přirozeným způsobem pro nezáporné jednoduché funkce, potom jej rozšíříme na nezáporné měřitelné funkce pomocí aproximace zdola jednoduchými funkcemi a obecný případ dokončíme rozkladem funkce na kladnou a zápornou část.

Je jasné, že při budování této teorie se setkáváme s celou řadou otázek souvisejících především s korektností jednotlivých definic. Tak kupř. musíme ukázat, že definice $\int_X s\,d\mu$ v případě jednoduché funkce s nezávisí na jejím vyjádření (to totiž není jednoznačné). Rovněž tak se musíme vypořádat s problémy, kdy v definicích se objeví nevlastní hodnoty a "neurčité výrazy".

Stále mějme na paměti vzorový příklad n-rozměrné Lebesgueovy míry v $\mathbf{R}^n$. Pro integrování podle Lebesgueovy míry λ budeme používat tradiční značení

$$\int_E f\,dx := \int_E f\,d\lambda\,, \int_a^b f\,dx := \int_{(a,b)} f\,d\lambda\,.$$

Rozveďme nyní jednotlivé kroky zavedení abstraktního integrálu podrobněji.

8.1. Jednoduché funkce. Připomeňme, že jednoduchá funkce je taková měřitelná funkce s na X, která nabývá pouze konečně mnoha (vlastních) hodnot. Tedy s je jednoduchá, právě když s je $\mathcal{S}$-měřitelná a $s(X) \subset \mathbf{R}$ je konečná množina. Zřejmě pro každou jednoduchou funkci s lze najít $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbf{R}$ a po dvou disjunktní množiny $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{S}$ tak, že

$$s = \sum_{j=1}^{n} \beta_j c_{B_j}\,.$$

Takové vyjádření ovšem není jednoznačné.

Pro následující lemma i další výklad připomínáme úmluvu $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.

8.2. Lemma. *Nechť množiny $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{S}$, resp. $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{S}$ jsou po dvou disjunktní. Nechť α_i a β_j jsou nezáporná reálná čísla. Je-li $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i c_{A_i} \le \sum_{j=1}^{n} \beta_j c_{B_j}$, potom*

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu A_i \le \sum_{j=1}^{n} \beta_j \mu B_j\,.$$

Důkaz. Doplňme ještě pro pohodlí $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, $A_0 = X \setminus \bigcup_{i=1}^{m} A_i$ a $B_0 = X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} B_i$ (takže systémy množin $\{A_i\}$, $\{B_j\}$ tvoří "rozklad" či "dělení" prostoru X). Pro každou dvojici indexů $i \in \{0, \dots, m\}$, $j \in \{0, \dots, n\}$ nastane $A_i \cap B_j = \emptyset$ nebo $\alpha_i \le \beta_j$. Tedy

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \mu A_i \le \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) \le \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \beta_j \mu(A_i \cap B_j) \le \sum_{j=0}^{n} \beta_j \mu B_j\,.$$

■

8.3. Zavedení abstraktního integrálu. Je-li $D \in \mathcal{S}$ a s nezáporná jednoduchá funkce vyjádřená ve tvaru $s = \sum_{j=1}^{n} \beta_j c_{B_j}$, kde množiny B_j jsou po dvou disjunktní a koeficienty β_j jsou nezáporné, definujme $\int_D s\,d\mu := \sum_{j=1}^{n} \beta_j \mu(D \cap B_j)$. Podle předchozího lemmatu není na škodu korektnosti nejednoznačnost ve vyjádření funkce s. Dále definujme

$$\int_D f\,d\mu := \sup\left\{\int_D s\,d\mu : 0 \le s \le f \text{ na } D,\ s \text{ jednoduchá}\right\},$$

pokud $f \ge 0$ je měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$. Opět využijeme předchozí lemma, abychom se ujistili, že v případě, kdy funkce f je jednoduchá, není nová definice ve sporu s původní.

Je-li f měřitelná na D, definujeme $\int_D f\,d\mu := \int_D f^+\,d\mu - \int_D f^-\,d\mu$, má-li tento rozdíl smysl (tj. není-li tvaru $\infty - \infty$).
Zde $f = f^+ - f^-$ je rozklad funkce f na kladnou a zápornou část ($f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = \max(-f, 0)$).

Pokud funkce f je definovaná na celém prostoru X a $M \in \mathcal{S}$, potom zřejmě

$$\int_M f\, d\mu = \int_X f c_M\, d\mu\,.$$

Dokažte sami: $\int_M f\, d\mu = \int_M f\, d\nu$, kde $\nu = \mu_{|A}$ vznikne přirozenou restrikcí míry μ na σ-algebru $\mathcal{S}_M := \{A \in \mathcal{S} : A \subset M\}$ podmnožin M.

Je účelné definovat integrál i pro funkce definované pouze *skoro všude*. V tom případě, je-li f měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$ a $\mu(X \setminus D) = 0$, definujeme

$$\int_X f\, d\mu := \int_D f\, d\mu\,.$$

Symbolem $\mathcal{L}^*$ či $\mathcal{L}^*(\mu)$ značme systém všech měřitelných funkcí f (s hodnotami v $\overline{\mathbf{R}}$, definovaných skoro všude na X), pro něž je (Lebesgueův, abstraktní) integrál definován. Místo zápisu $f \in \mathcal{L}^*(\mu)$ říkejme též, že integrál $\int_X f\, d\mu$ *má smysl*, nebo také že funkce f *má integrál* $\int_X f\, d\mu$.

Dále buď

$$\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(\mu) = \left\{ f \in \mathcal{L}^*(\mu) : \int_X f\, d\mu \in \mathbf{R} \right\}.$$

Je-li $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, říkáme též, že integrál $\int_X f\, d\mu$ *konverguje*, nebo že funkce f je μ*-integrovatelná*.

8.4. Lebesgueovsky integrovatelné funkce v R. (a) Každá omezená měřitelná funkce na omezeném intervalu (a tudíž každá riemannovsky integrovatelná funkce) je lebesgueovsky integrovatelná. Funkce z příkladů 7.5 až 7.7 jsou tedy lebesgueovsky integrovatelné.

(b) Je-li f riemannovsky integrovatelná funkce na $[a, b]$, potom zřejmě $\int_a^b f\, d\lambda \le \mathcal{R}^* f = \mathcal{R}_* f \le \int_a^b f\, d\lambda$, takže Lebesgueův a Riemannův integrál funkce f mají stejnou hodnotu.

(c) Má-li funkce Newtonův integrál i Lebesgueův integrál, pak jsou si rovny. Důkaz tohoto tvrzení není vůbec samozřejmý. Dostaneme jej oklikou přes Kurzweilův integrál v kapitole 25; elementárnější důkaz je možno nalézt ve skriptech [L-T], str. 174.

(d) Má-li funkce f Newtonův integrál, pak je měřitelná. (Lze ji napsat jako bodovou limitu posloupnosti spojitých funkcí. Až na technické detaily jde o posloupnost $f_n : x \mapsto n(F(x + \frac{1}{n}) - F(x))$, kde F je primitivní funkce k f.) Může se stát, že f nemá Lebesgueův integrál, ale to jen v případě, že f není absolutně newtonovsky integrovatelná.

(e) Jelikož neměřitelné funkce se prakticky nevyskytují, úloha zjistit, zda funkce f je lebesgueovsky integrovatelná, se redukuje na odhad konečnosti či nekonečnosti integrálů $\int_a^b f^+\, dx$ a $\int_a^b f^-\, dx$. Např. funkce $x \mapsto x^p$ je integrovatelná na $(0, 1)$, právě když $p > -1$. Příklady a metody na vyšetřování integrovatelnosti (dokonce i v $\mathbf{R}^n$) lze nalézt ve skriptech [L-Př].

Klíčovou větou je následující Leviho věta o monotonní konvergenci (nejprve pro nezáporné funkce).

8.5. Věta. *Jsou-li $f_n \ge 0$ měřitelné funkce na X, $f_n \nearrow f$, potom $\int_X f_n\, d\mu \to \int_X f\, d\mu$.*

Důkaz. Z definice integrálu je ihned vidět, že posloupnost $\left\{\int_X f_n\, d\mu\right\}$ je neklesající, existuje tedy $\alpha := \lim \int_X f_n\, d\mu$. Jelikož $f_n \le f$, je i $\alpha \le \int_X f\, d\mu$ a tvrzení je zřejmé v případě, kdy $\alpha = +\infty$. Předpokládejme tedy $\alpha < +\infty$, zvolme (pevně) jednoduchou funkci s, $0 \le s \le f$, a dokazujme, že $\int_X s\, d\mu \le \alpha$. Důkaz rozdělme do několika kroků:

(a) Buď $\tau \in (0, 1)$ a položme $E_n = \{x \in X : f_n(x) \ge \tau s(x)\}$. Ukažte, že $E_n \in \mathcal{S}$, $E_n \subset E_{n+1}$ (to je snadné) a $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X$ (pokud $f(x) = 0$, je $x \in E_1$; je-li $f(x) > 0$, je $\tau s(x) < f(x)$ a použijeme definice limity!). Tedy $\mu(E_n \cap A) \to \mu A$ pro každou množinu $A \in \mathcal{S}$.

(b) Nechť $s = \sum_{j=1}^{k} \beta_j c_{A_j}$, kde A_j jsou po dvou disjunktní. Potom

$$\int_X f_n\, d\mu \ge \int_{E_n} f_n\, d\mu \ge \int_{E_n} \tau s\, d\mu = \tau \int_{E_n} \Big(\sum_{j=1}^{k} \beta_j c_{A_j}\Big)\, d\mu = \tau \sum_{j=1}^{k} \beta_j \mu(A_j \cap E_n).$$

(c) Limitním přechodem v (b) (za použití (a)) dostáváme

$$\alpha \geq \tau \sum_{j=1}^{k} \beta_j \mu A_j = \tau \int_X s \, d\mu.$$

Tato nerovnost platí pro každé $\tau \in (0,1)$, tedy limitním přechodem dostáváme $\alpha \geq \int_X s \, d\mu$. ■

8.6. Věta. *Nechť $g \in \mathcal{L}^*$ a f je měřitelná funkce, $f = g$ skoro všude. Potom $f \in \mathcal{L}^*$ a $\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu$.*

Důkaz je zřejmý. ■

8.7. Poznámka. Ke každé nezáporné měřitelné funkci f na X existuje posloupnost jednoduchých funkcí $s_n \geq 0$ tak, že $s_n \nearrow f$. Podle předchozí věty víme, že $\int_X f \, d\mu = \lim \int_X s_n \, d\mu$, kterážto rovnost se v mnoha učebnicích bere přímo za definici integrálu z nezáporných měřitelných funkcí. Není třeba zdůrazňovat, že v případě takto definovaného integrálu je nutné dokázat nezávislost definice $\int_X f \, d\mu$ na volbě posloupnosti $\{s_n\}$.

8.8. Věta. *Jsou-li f_1, f_2 nezáporné měřitelné funkce, potom $\int_X (f_1 + f_2) \, d\mu = \int_X f_1 \, d\mu + \int_X f_2 \, d\mu$.*

Důkaz. Zřejmě můžeme předpokládat, že f_1 a f_2 jsou definované všude na X. Nejdříve se provede důkaz v případě, kdy f_1 a f_2 jsou dokonce jednoduché. Podobně jako v lemmatu 8.2 najdeme po dvou disjunktní $\mathcal{S}$-měřitelné množiny $A_0, \ldots, A_m$, resp. $B_0, \ldots, B_n$, a nezáporná reálná čísla $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$ a $\beta_0, \ldots, \beta_n$ tak, že $X = \bigcup_{i=0}^{m} A_i = \bigcup_{j=0}^{n} B_j$, $f_1 = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i c_{A_i}$ a $f_2 = \sum_{j=0}^{n} \beta_j c_{B_j}$. Potom

$$\int_X (f_1 + f_2) \, d\mu = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} (\alpha_i + \beta_j) \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \mu A_i + \sum_{j=0}^{n} \beta_j \mu B_j = \int_X f_1 \, d\mu + \int_X f_2 \, d\mu \,.$$

V obecném případě najdeme posloupnosti $\{s_n^1\}$ a $\{s_n^2\}$ jednoduchých funkcí s vlastností $s_n^i \nearrow f_i$ a použijeme právě dokázané a větu 8.5. ■

8.9. Věta (vlastnosti $\mathcal{L}^1(\mu)$). *Platí následující tvrzení:*

(a) *Je-li $f \in \mathcal{L}^1$, je f konečná skoro všude.*
(b) *Jsou-li $f, g \in \mathcal{L}^1, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$, potom $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1$ a $\int_X (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int_X f \, d\mu + \beta \int_X g \, d\mu$ (podle (a) je součet $\alpha f + \beta g$ definován skoro všude!).*
(c) *Je-li $f \in \mathcal{L}^1$, potom $|f| \in \mathcal{L}^1$ a $\left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d\mu$ (tj. integrál je "absolutně konvergentní").*
(d) *$\mathcal{L}^1$ tvoří svaz (tj. $f, g \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow \max(f,g), \min(f,g) \in \mathcal{L}^1$).*
(e) *Je-li f měřitelná, $g \in \mathcal{L}^1$, $|f| \leq g$, potom $f \in \mathcal{L}^1$.*

Důkaz. (a) Buď $f \in \mathcal{L}^1$, $A := \{x \in X : f(x) = \infty\}$. Potom A je měřitelná a $0 \leq n c_A \leq f^+$ pro každé $n \in \mathbf{N}$. Tedy $0 \leq \int_X n c_A \, d\mu \leq \int_X f^+ \, d\mu$, odkud dostáváme $\mu A \leq \frac{1}{n} \int_X f^+ \, d\mu < \infty$ pro každé $n \in \mathbf{N}$. Vidíme, že $\mu A = 0$.

(b) Sami dokažte, že $\int_X \alpha f \, d\mu = \alpha \int_X f \, d\mu$, kdykoliv $f \in \mathcal{L}^1$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Buďte $f, g \in \mathcal{L}^1$. Pišme $f = f^+ - f^-$, $g = g^+ - g^-$ a $h = f + g$ (podle (a) je funkce h definována skoro všude). Ukažte, že

$$h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-,$$

tudíž

$$\int_X h^+ \, d\mu + \int_X f^- \, d\mu + \int_X g^- \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu + \int_X g^+ \, d\mu + \int_X h^- \, d\mu$$

(pro nezáporné měřitelné funkce je aditivita integrálu dokázána ve větě 8.8). Odtud již lehko tvrzení vyplyne, dokážeme-li, že integrály $\int_X h^+ \, d\mu$ a $\int_X h^- \, d\mu$ jsou konečné. Ale to je snadné, neboť

$$0 \leq h^+ = (f+g)^+ \leq f^+ + g^+.$$

(c) Je-li $f \in \mathcal{L}^1$, je $|f| = f^+ + f^- \in \mathcal{L}^1$ podle (b); dále

$$\begin{aligned} |\int_X f\,d\mu| &= |\int_X f^+\,d\mu - \int_X f^-\,d\mu| \le |\int_X f^+\,d\mu| + |\int f^-\,d\mu| \\ &= \int_X f^+\,d\mu + \int_X f^-\,d\mu = \int_X |f|\,d\mu. \end{aligned}$$

(d) Plyne ihned z (b), (c) a ze vztahu

$$\max(f,g) = \frac{1}{2}(f + g + |f+g|).$$

(e) Je-li f měřitelná, je funkce f^+ také měřitelná a

$$0 \le \int_X f^+\,d\mu \le \int_X g\,d\mu < \infty$$

(ze vztahu $0 \le f^+ \le |f| \le g$), tudíž $f^+ \in \mathcal{L}^1$. Obdobně $f^- \in \mathcal{L}^1$, odkud $f(= f^+ - f^-) \in \mathcal{L}^1$. ■

8.10. Poznámky. 1. Tvrzení (b) předchozí věty připomíná axiomy lineárního prostoru, ale $\mathcal{L}^1$ lineární prostor v pravém slova smyslu netvoří (proč ?). Opravdovým lineárním prostorem je množina všech konečných všude definovaných funkcí z $\mathcal{L}^1$ nebo prostor L^1, který budeme definovat v kapitole 10.

2. Při definici abstraktního Lebesgueova integrálu si počínáme, jako kdybychom zaváděli a-součet řady předpisem $s = s_+ - s_-$, kde s_+ je součet kladných členů, $-s_-$ je součet záporných členů, a na rozdíl $s_+ - s_-$ klademe podmínku, aby měl smysl. Pak se nemůžeme divit, že abstraktní Lebesgueův integrál je absolutně konvergentní, stejně tak jako konečný (=reálný) a-součet řady je definován, právě když je tato řada *absolutně* konvergentní v obvyklém smyslu. Klasická definice součtu řady však počítá i se sčítáním řad, pro něž $s_+ = s_- = +\infty$ (neabsolutně konvergentní řady). To je umožněno tím, že řady sčítáme v předepsaném pořadí sčítanců. Nabízí se otázka, zda není možné rozšířit pojem abstraktního Lebesgueova integrálu tak, že k integrovatelným funkcím ve smyslu definice 8.3 přibudou další, "neabsolutně integrovatelné", funkce. Ukazuje se, že má-li mít takové rozšíření rozumný smysl, potřebujeme na X další strukturu (nestačí σ-algebra a míra), jakési "pořadí sčítání". Tímto způsobem je kupříkladu definován Newtonův integrál. Uvědomte si, že vlastně

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{\sin x}{x}\,dx\,,$$

podobně jako

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k}\,.$$

Tak je možné zobecnit i Lebesgueův integrál na přímce – o tom se dočtete v kapitole Kurzweilův integrál. Podobnost integrálu s řadami ovšem není náhodná, a-součet řady není nic jiného než integrál podle aritmetické míry a (obvyklý) součet je jeho zobecnění pomocí dodatečné struktury – uspořádání na množině všech přirozených čísel.

V teorii Lebesgueova integrálu hrají důležitou roli věty o limitních přechodech. První z nich se týká monotonní konvergence, druhá zase tzv. majorizované konvergence.

8.11. Leviho věta. *Nechť f_n jsou měřitelné funkce, $f_n \nearrow f$ skoro všude, a nechť $\int_X f_1\,d\mu > -\infty$. Potom $\int_X f\,d\mu = \lim \int_X f_n\,d\mu$.*

Důkaz. Tuto větu jsme vlastně dokázali v případě, kdy f_n jsou nezáporné funkce a $f_n \nearrow f$ všude. Obecný případ již lehko na zmíněnou větu 8.5 převedeme. Nejprve předefinujme funkce f a f_n na množinách míry nula tak, aby $f_n \nearrow f$ všude. Položíme-li $g_n = f_n + f_1^-$ (případ, kdy $\int_X f_n\,d\mu = \infty$ od jistého n je triviální - lze tedy předpokládat $f_n \in \mathcal{L}^1$ pro všechna n; rovněž tak si uvědomme, že $f_1^- \in \mathcal{L}^1$!), dostáváme $g_n \ge 0$, g_n měřitelné a $g_n \nearrow f + f_1^-$. Podle věty 8.5 tedy máme $\int_X g_n\,d\mu \to \int_X (f + f_1^-)\,d\mu$. Protože však $\int_X f_n\,d\mu = \int_X g_n\,d\mu - \int_X f_1^-\,d\mu$, tvrzení odtud lehko plyne. ■

8.12. Leviho věta pro řady. *Jsou-li f_n nezáporné měřitelné funkce, potom $\int_X \sum f_n\,d\mu = \sum \int_X f_n\,d\mu$.*

Důkaz je zřejmý z vět 8.5 a 8.8. ■

8.13. Lebesgueova věta. *Buďte f_n měřitelné funkce, $f_n \to f$ skoro všude. Existuje-li funkce $h \in \mathcal{L}^1$ tak, že $|f_n| \le h$ skoro všude pro všechna n, je $f \in \mathcal{L}^1$ a $\int_X f\,d\mu = \lim \int_X f_n\,d\mu$.*

Důkaz se snadno převede na Leviho větu, uvědomíme-li si, že $f = \limsup f_n = \liminf f_n$. Vskutku, položme $s_n = \sup\{f_n, f_{n+1}, \dots\}, t_n = \inf\{f_n, f_{n+1}, \dots\}$. Potom skoro všude $-h \le t_n \le f_n \le s_n \le h$, $s_n \searrow f$, $t_n \nearrow f$ a

$$-\infty < \int_X -h\,d\mu \le \int_X t_1\,d\mu \le \int_X s_1\,d\mu \le \int_X h\,d\mu < +\infty.$$

Protože podle Leviho věty (předpoklady jsou splněny!) $\int_X f\,d\mu = \lim \int_X t_n\,d\mu = \lim \int_X s_n\,d\mu$ a $\int_X t_n\,d\mu \le \int_X f_n\,d\mu \le \int_X s_n\,d\mu$, plyne odtud tvrzení. ∎

8.14. Lebesgueova věta pro řady. *Nechť $\{h_n\}$ je posloupnost měřitelných funkcí na X a $g \in \mathcal{L}^1$. Jestliže*

$$|\sum_{j=1}^{n} h_j| \le g \qquad \textit{skoro všude}$$

pro všechna $n \in \mathbf{N}$ a řada $\sum\limits_{j=1}^{\infty} h_j$ konverguje skoro všude, potom

$$\int_X \sum_{j=1}^{\infty} h_j\,d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X h_j\,d\mu\,.$$

Důkaz. Věta je bezprostředním důsledkem předchozí. ∎

8.15. Fatouovo lemma. *Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost měřitelných funkcí a $g \in \mathcal{L}^1$. Nechť $f_n \ge g$ skoro všude pro všechna $n \in \mathbf{N}$. Potom*

$$\int_X \liminf f_n\,d\mu \le \liminf \int_X f_n\,.$$

Důkaz. Položme $g_k = \inf\{f_n : k \le n\}$. Potom $g_k \nearrow \liminf f_n$ a lze použít opět Leviho větu. ∎

8.16. Věta. *Nechť $f \ge 0$ je měřitelná funkce. Jestliže $\int_X f\,d\mu = 0$, potom $f = 0$ skoro všude.*

Důkaz. Označme $A_n = \{x \in X : f(x) \ge \frac{1}{n}\}$. Potom $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in X : f(x) > 0\}$ a ze vztahu $0 \le c_{A_n} \le nf$ plyne, že $\mu A_n = 0$. ∎

8.17. Věta. *Buď $f \in \mathcal{L}^1$. Jestliže $\int_E f\,d\mu = 0$ pro každou měřitelnou množinu E, potom $f = 0$ skoro všude.*

Důkaz. Označíme-li $E = \{f \ge 0\}$, potom $\int_E f\,d\mu = \int_E f^+\,d\mu = 0$ a použitím předchozí věty máme $f^+ = 0$ skoro všude. Obdobně $f^- = 0$ skoro všude. ∎

8.18. Důsledek. *Nechť f, $g \in \mathcal{L}^1$. Jestliže*

$$\int_E f\,d\mu \le \int_E g\,d\mu$$

pro každou měřitelnou množinu E, potom $f \le g$ skoro všude.

Důkaz. Buď $h = (f-g)^+$. Potom $h \ge 0$ a $0 \le \int_E h\,d\mu = \int_{E \cap \{h>0\}} (f-g)\,d\mu \le 0$. Odtud podle věty 8.17 dostáváme $(f-g)^+ = 0$ skoro všude. ∎

8.19. Míra s hustotou f. Je-li $f \in \mathcal{L}^*$, položme

$$\mu_f(E) := \int_E f\,d\mu$$

pro $E \in \mathcal{S}$. (Znaménkové) míře μ_f říkáme *míra s hustotou f*.

8.20. Věta. *Nechť f je nezáporná měřitelná funkce na X. Potom množinová funkce μ_f je míra na X. Navíc, $\mu_f(E) = 0$ pro každou množinu E, pro niž $\mu E = 0$.*

Důkaz plyne snadno z věty 8.12. (Snad pouze si rozmyslete, že $fc_A = \sum_n fc_{A_n}$ pokud $A = \bigcup_n A_n$ a $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro $i \neq j$.) ■

8.21. Poznámka. Naskýtá se otázka, zda pro každé dvě míry na $\mathcal{S}$, řekněme μ a ν, existuje vždy nezáporná měřitelná funkce f na X tak, že $\nu = \mu_f$, tj. zda

$$\nu E = \int_E f \, d\mu$$

pro všechna $E \in \mathcal{S}$. Odpověď je samozřejmě negativní, existuje-li taková funkce f, potom nutně $\nu E = 0$, kdykoli $\mu E = 0$. Jsou-li však μ a ν již svázány touto podmínkou (říkáme, že ν je absolutně spojitá vzhledem k μ), potom existuje funkce f uvedených vlastností (alespoň pro "rozumné" míry) - to bude obsahem kapitoly o Radon-Nikodýmově větě.

8.22. Cvičení. Nechť $f \in \mathcal{L}^1$. Potom

(a) μ_f je konečná znaménková míra na $\mathcal{S}$,

(b) ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $|\mu_f(E)| < \varepsilon$, kdykoliv $\mu E < \delta$.

Návod. (a) Pro ověření rovnosti $\mu_f(A) = \sum \mu_f(A_n)$ ($A_n \in S$ po dvou disjunktní) použijte větu 8.14 pro $h_n = fc_{A_n}$.

(b) Nechť existuje $\varepsilon > 0$ a posloupnost $\{E_n\}$ tak, že $\mu E_n < 2^{-n}$ a $\int_{E_n} |f| \geq \varepsilon$. Položíme-li $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$, je $\mu E = 0$ a $\int_E f \, d\mu \geq \varepsilon$, což je spor.

8.23. Obraz míry. Buď $(Y, \mathcal{T})$ měřitelný prostor a $f : X \to Y$ měřitelné zobrazení (tj. $f^{-1}(E) \in \mathcal{S}$, kdykoli $E \in \mathcal{T}$). Množinová funkce

$$E \mapsto \mu(f^{-1}(E)), \qquad E \in \mathcal{T}$$

se zove *obrazem míry* μ při zobrazení f; značíme ji symbolem $f(\mu)$.

(a) Ukažte, že $f(\mu)$ je míra na $(Y, \mathcal{T})$.

(b) Nechť $g : Y \to \overline{\mathbf{R}}$ je $\mathcal{T}$-měřitelná funkce. Ukažte, že g je $f(\mu)$-integrovatelná, právě když $g \circ f \in \mathcal{L}^1$. V tomto případě je

$$\int_Y g \, df(\mu) = \int_X g \circ f \, d\mu \,.$$

Návod. Pro charakteristické funkce se jedná vlastně o definici. Poté uvažujte jednoduché funkce a použijte limitní přechod.

8.24. Cvičení. Buď f rostoucí diferencovatelná funkce na $\mathbf{R}$, $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Nechť μ je míra na $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ daná předpisem

$$\mu E = \int_E f' \, dx \,.$$

Ukažte, že $f(\mu) = \lambda$.

8.25. Historické poznámky. Moderní teorie integrace začíná Lebesgueovou doktorskou disertací [1902], které předcházel krátký článek [1901]. V něm vyložená definice využívá zkonstruovanou Lebesgueovu míru na $\mathbf{R}$. Myšlenka použít při definici integrálu (stále ovšem na přímce) jednoduché funkce (ne však totožné s našimi) pochází od F. Riesze [1912], [1920].

Čtenáře můžeme odkázat na historická pojednání T. Hawkinse v [*1970] či F.A. Medveděva [1975], R. Henstocka [*1988], T.H. Hildebrandta [1953]. Je zcela jasné, že H. Lebesgue navazoval na mnohé práce svých předchůdců (B. Riemann, C. Jordan, G. Peano, E. Borel a další). Méně už je známé, že zhruba ve stejné době publikovali G. Vitali a W.H. Young zcela nezávisle podobné výsledky.

Věta 8.11 o monotonní konvergenci byla dokázána Beppo Levim [1906], Lemma 8.15 P.J.L. Fatouem [1906] a věta 8.13 pak samotným H. Lebesguem [1910].

Poznamenejme ještě, že H. Lebesgue rozvinul svoji teorii integrace převážně pro případ "Lebesgueových měr" v $\mathbf{R}^n$. Později J. Radon v [1913] uvažoval obecnější míry na $\mathbf{R}^n$, dnes jim říkáme Radonovy. Obecnou teorii pro míry na libovolných σ-algebrách pak podal M. Fréchet v [1915]. Od té doby bylo na toto téma publikováno mnoho prací, monografie [*1950] P.R. Halmose v jistém smyslu završuje toto bádání a patří dnes k nejcitovanějším.

9. Integrály závislé na parametru

Lebesgueova věta o záměně limity a integrálu má jednoduchý, ale důležitý důsledek, známý jako věta o spojitosti integrálu závislého na parametru.

9.1. Věta. *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou a P je metrický prostor. Buď $a \in P$ a U okolí bodu a v P. Nechť funkce $F : U \times X \to \mathbf{R}$ má následující vlastnosti:*

(a) *existuje množina $N \subset X$ míry nula tak, že pro všechna $x \in X \setminus N$ je funkce $F(., x)$ spojitá v a,*

(b) *pro všechna $t \in U$ je funkce $F(t, .)$ měřitelná,*

(c) *existuje funkce $g \in \mathcal{L}^1(X)$ tak, že pro všechna $t \in U$ je $|F(t, .)| \leq g$ skoro všude.*

Potom pro všechna $t \in U$ je $F(t, .) \in \mathcal{L}^1(X)$ a funkce

$$f : t \mapsto \int_X F(t, .)\, d\mu$$

je spojitá v bodě a.

Důkaz. Připomeňme, že v metrických prostorech lze použít ekvivalentní tzv. Heineovu definici limity: K důkazu tvrzení

$$\lim_{t \to a} \int_X F(t, .)\, d\mu = \int_X F(a, .)\, d\mu$$

stačí ověřit, že pro každou posloupnost $t_j \to a$ bodů množiny U platí

$$\lim_j \int_X F(t_j, .)\, d\mu = \int_X F(a, .)\, d\mu .$$

To je však zřejmé z Lebesgueovy věty o záměně limity a integrálu. ■

Nyní uvedeme větu o derivování integrálu podle parametru.

9.2. Věta. *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou a $I \subset \mathbf{R}$ je otevřený interval. Nechť funkce $F : I \times X \to \mathbf{R}$ má následující vlastnosti:*

(a) *existuje množina $N \subset X$ míry nula tak, že pro všechna $x \in X \setminus N$ je funkce $F(., x)$ diferencovatelná na I,*

(b) *pro všechna $t \in I$ je funkce $F(t, .)$ měřitelná,*

(c) *existuje funkce $g \in \mathcal{L}^1(X)$ tak, že pro všechna $t \in I$ je $\left|\frac{d}{dt} F(t, .)\right| \leq g$ skoro všude,*

(d) *existuje $t_0 \in I$ tak, že $F(t_0, .) \in \mathcal{L}^1(X)$.*

Potom pro všechna $t \in I$ je $F(t, .) \in \mathcal{L}^1(X)$, funkce

$$f : t \mapsto \int_X F(t, .)\, d\mu$$

je diferencovatelná na I a platí vzorec

$$f'(t) = \int_X \frac{d}{dt} F(t, .)\, d\mu .$$

Důkaz. Nechť $a, b \in I$, $b \neq a$. Podle věty o střední hodnotě pro každé $x \in X \setminus N$ existuje ξ mezi a a b tak, že

$$\left|\frac{F(b, x) - F(a, x)}{b - a}\right| = \left|\frac{d}{dt} F(\xi, x)\right| \leq g(x).$$

Odtud pro $a = t_0$ plyne, že funkce

$$x \mapsto \frac{F(b, x) - F(a, x)}{b - a}$$

je integrovatelná, tudíž i funkce $F(b,.)$ je integrovatelná. Zvolme znovu $a \in I$. Pro každou posloupnost $t_j \to a$ bodů $I \setminus \{a\}$ dostáváme z Lebesgueovy věty

$$\lim_j \int_X \frac{F(t_j,.) - F(a,.)}{t_j - a}\, d\mu = \int_X \frac{d}{dt} F(t,.)\, d\mu\,.$$

Podle Heineovy definice limity je tedy

$$\frac{d}{dt}\int_X F(t,.)\, d\mu = \lim_{t\to a} \int_X \frac{F(t,.) - F(a,.)}{t - a}\, d\mu = \int_X \frac{d}{dt} F(t,.)\, d\mu\,.$$

■

9.3. Poznámky. 1. Povšimněte si, že v důkazech předchozích vět jsme podstatným způsobem využili Lebesgueovu větu. Obdobným způsobem bychom mohli vyslovit tvrzení založená na Leviho větě.

2. Jelikož spojitost a derivace jsou lokální pojmy, lze aplikovat uvedené věty tím způsobem, že předpoklady (c) lze ověřit také jen lokálně.

3. Řadu příkladů k objasnění a procvičení lze najít ve skriptech [L-Př].

10. Prostory L^p

Lebesgueovy prostory L^p jsou důležitým prostředkem propojujícím teorii míry a funkcionální analýzu a nepostradatelným nástrojem v teorii diferenciálních rovnic, teorii pravděpodobnosti a dalších oborech.

V této kapitole bude $(X, \mathcal{S}, \mu)$ prostor s mírou a p číslo z intervalu $[1, \infty]$.

10.1. Množina $\mathcal{L}^p$. (a) Nechť $p < \infty$. Symbolem $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(X, \mathcal{S}, \mu)$ značíme množinu všech μ-měřitelných funkcí na X, pro něž

$$\int_X |f|^p\, d\mu < \infty\,.$$

Číslo

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p\, d\mu\right)^{1/p}$$

se nazývá L^p-*norma* funkce z $\mathcal{L}^p$. Za chvíli ukážeme, že $||...||_p$ má skutečně všechny důležité vlastnosti normy.

(b) Symbolem $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{S}, \mu)$ značíme množinu všech μ-měřitelných funkcí na X, pro něž existuje konstanta M tak, že

$$|f(x)| \le M \qquad \text{pro } \mu\text{-skoro všechna } x \in X.$$

Nejmenší konstanta M s takovou vlastností se nazývá L^∞-*normou* funkce f a značí se $\|f\|_\infty$. Rozdíl mezi $\|f\|_\infty$ a $\sup_X |f|$ spočívá, zhruba řečeno, v tom, že funkce $\|f\|_\infty$ zanedbává hodnoty f na množinách míry nula.

V textu budeme používat také zkrácená označení $\mathcal{L}^p(X)$ nebo $\mathcal{L}^p(\mu)$, podle toho, co bude vhodné zdůraznit.

10.2. Youngova nerovnost. *Nechť a, b jsou nezáporná čísla a $p, q \in (1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Potom*

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\,.$$

Důkaz. Můžeme předpokládat, že $ab > 0$. Jelikož přirozený logaritmus ln je konkávní funkce, je

$$\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \ge \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) = \ln a + \ln b = \ln(ab)\,.$$

Odtud dostáváme požadovanou nerovnost. ■

10.3. Hölderova nerovnost. *Nechť $f \in \mathcal{L}^p$ a $g \in \mathcal{L}^q$, kde p, q jsou čísla z $(1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Potom $fg \in \mathcal{L}^1$ a*

$$\int_X fg\,d\mu \leq \left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X |g|^q\,d\mu\right)^{1/q}.$$

Důkaz. Označme

$$s = \left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{1/p}, \qquad t = \left(\int_X |g|^q\,d\mu\right)^{1/q}.$$

Potom pro každé $x \in X$ máme podle Youngovy nerovnosti ($a = f(x)/s$, $b = g(x)/t$)

$$\frac{f(x)g(x)}{st} \leq \frac{|f(x)||g(x)|}{st} \leq \frac{|f(x)|^p}{ps^p} + \frac{|g(x)|^q}{qt^q}.$$

Tedy

$$\frac{1}{st}\int_X fg\,d\mu \leq \frac{\int_X |f|^p\,d\mu}{ps^p} + \frac{\int_X |g|^q\,d\mu}{qt^q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Tím je tvrzení dokázáno. ∎

10.4. Minkowského nerovnost. *Nechť f, $g \in \mathcal{L}^p$. Potom $f + g \in \mathcal{L}^p$ a*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Důkaz. Z nerovnosti $|f + g| \leq |f| + |g|$ dostaneme důkaz v případě $p = 1$.
Nechť $p = \infty$. Je-li $|f| \leq s$ μ-skoro všude a $|g| \leq t$ μ-skoro všude, pak $|f + g| \leq s + t$ μ-skoro všude a tudíž

$$||f + g||_\infty \leq s + t.$$

Přechodem k infimu přes s a t dostaneme

$$||f + g||_\infty \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty.$$

Zbývá případ $1 < p < \infty$. Hölderova nerovnost dává

$$\begin{aligned}&\int_X |f|\,|f+g|^{p-1}\,d\mu \\ &\quad\leq \left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X |f+g|^{(p-1)q}\,d\mu\right)^{1/q} = \left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X |f+g|^p\,d\mu\right)^{1-1/p}.\end{aligned}$$

Podobně

$$\int_X |g|\,|f+g|^{p-1}\,d\mu \leq \left(\int_X |g|^p\,d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X |f+g|^p\,d\mu\right)^{1-1/p}.$$

Tedy

$$\begin{aligned}\int_X |f+g|^p\,d\mu &\leq \int_X |f|\,|f+g|^{p-1}\,d\mu + \int_X |g|\,|f+g|^{p-1}\,d\mu \\ &\leq \left(\left(\int_X |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_X |g|^p\right)^{1/p}\right) \left(\int_X |f+g|^p\,d\mu\right)^{1-1/p}.\end{aligned}$$

Dokazovanou nerovnost dostaneme elementární úpravou. ∎

10.5. Prostory L^p. Označíme-li pro f, $g \in \mathcal{L}^p$

$$\rho_p(f, g) = \|f - g\|_p,$$

má ρ všechny vlastnosti metriky na $\mathcal{L}^p$ až na jednu "maličkost": Můžeme najít různé funkce, které mají nulovou vzdálenost. Abychom mohli pracovat v teorii metrických (dokonce lineárních normovaných) prostorů, přiřadíme každé funkci $f \in \mathcal{L}^p$ třídu funkcí

$$[f] = \{g \in \mathcal{L}^p \colon g = f \ \mu\text{-skoro všude na } X\}$$

a definujeme

$$L^p = L^p(X, \mathcal{S}, \mu) = \{[f] \colon f \in \mathcal{L}^p\}\,.$$

Potom L^p je lineární prostor, vybavený operacemi

$$[f] + [g] := [f+g]\,, \quad \alpha[f] := [\alpha f]$$

($\alpha \in \mathbf{R}$), normou

$$\|\,[f]\,\|_p := \|f\|_p$$

a metrikou (tentokráte už doopravdy)

$$\rho_p([f],[g]) := \rho_p(f,g)\,.$$

Snadno nahlédneme, že uvedené definice jsou korektní (tj. nezávislé na výběru reprezentantů).

V matematické literatuře je běžné nerozlišovat funkce a třídy funkcí, leckdy ani $\mathcal{L}^p$ a L^p. Říkáme například, že $\{f_j\}$ je cauchyovská posloupnost v L^p a myslíme tím, že f_j jsou funkce a $\{[f_j]\}$ je cauchyovská posloupnost v L^p.

10.6. Úplnost L^p. *Nechť $\{f_j\}$ je cauchyovská posloupnost v L^p. Potom $\{f_j\}$ je konvergentní v L^p, tj. existuje $f \in \mathcal{L}^p$ tak, že*

$$\int_X |f - f_j|^p \, d\mu \to 0\,.$$

Důkaz. Snadný případ $p = \infty$ přenecháme čtenáři. Nechť $p < \infty$. Nejprve vyberme podposloupnost $\{g_j\}$ z posloupnosti $\{f_i\}$ tak, aby

$$S := \sum_{j=1}^{\infty} \|g_j - g_{j+1}\|_p < \infty\,.$$

Označme $h = \sum\limits_{j=1}^{\infty} |g_j - g_{j-1}|$. Potom podle Leviho věty 8.12 a Minkowského nerovnosti je

$$\begin{aligned}\int_X h^p \, d\mu &= \int_X \left(\sum_{j=1}^{\infty} |g_j - g_{j+1}|\right)^p d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X \left(\sum_{j=1}^{k} |g_j - g_{j+1}|\right)^p \\ &\le \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{k} \|g_j - g_{j+1}\|_p\right)^p \le S^p < \infty\,.\end{aligned}$$

Tedy podle věty 8.9.a existuje množina $M \subset X$ tak, že $\mu(X \setminus M) = 0$ a $h < \infty$ na M. Můžeme také předpokládat, že $|g_1| < \infty$ na M. Pro všechna $x \in M$ je posloupnost $\{g_j(x)\}$ cauchyovská v $\mathbf{R}$, tudíž i konvergentní. Můžeme tedy μ-skoro všude definovat

$$f(x) = \lim_{j\to\infty} g_j(x)\,.$$

Nyní dokážeme, že $f \in \mathcal{L}^p$ a $\|f - f_j\| \to 0$. Posloupnost $\{|g_j|^p\}$ konverguje μ-skoro všude k $\{|f|^p\}$, přičemž

$$|g_j|^p \le (|g_j - g_1| + |g_1|)^p \le (h + |g_1|)^p$$

pro všechna $k \in \mathbf{N}$. Lebesgueova věta 8.13 (majoranta $(h + |g_1|)^p$) dává

$$\int_X |f|^p \, d\mu = \lim_{j\to\infty} \int_X |g_j|^p \, dx \le \int_X (h + |g_1|)^p \, d\mu < \infty \, .$$

Vidíme, že f je prvkem $\mathcal{L}^p$. Podobně podle Lebesgueovy věty (majoranta h^p)

$$\|f - g_j\|_p^p = \int_X |f - g_j|^p \, d\mu \to 0 \, .$$

Jelikož posloupnost $\{f_j\}$ je cauchyovská v L^p, je zřejmě

$$\lim_{j\to\infty} \|f_j - g_j\|_p = 0 \, .$$

Dostáváme tudíž

$$\lim_{j\to\infty} \|f_j - f\|_p = 0 \, ,$$

tedy funkce f je limitou posloupnosti $\{f_j\}$ v L^p. ■

10.7. Poznámky. 1. V terminologii funkcionální analýzy jsme právě dokázali, že L^p je *Banachův prostor*.

2. S L^p-prostory se setkáme ještě v dalších kapitolách. Upozorněme třeba na charakteristiku spojitých lineárních funkcionálů na těchto prostorech, kterou odvodíme na základě Radon-Nikodýmovy věty ve cvičení 13.17.

3. V případě, že μ je aritmetická míra na množině X, značíme $l^p(X) = L^p(X, \mathcal{P}(X), \mu)$. Tak dostaneme pro $X = \mathbf{N}$ i známé prostory posloupností:

– prostor l^p, $1 \le p < \infty$, všech posloupností $x = \{x_n\}$, pro něž $\|x\|_p := \big(\sum_n |x_n|^p\big)^{1/p} < \infty$,

– prostor l^∞ všech omezených posloupností $x = \{x_n\}$ s normou $\|x\|_\infty := \sup_n |x_n|$.

10.8. Cvičení. Buďte $f_n, f \in \mathcal{L}^\infty$. Ukažte, že $||f_n - f||_\infty \to 0$, právě když existuje množina $E \in \mathcal{S}$, $\mu E = 0$ tak, že $f_n \rightrightarrows f$ na $X \setminus E$.

10.9. Cvičení. Nechť $\{f_n\} \subset \mathcal{L}^p$, $p \in [1, +\infty)$, je cauchyovská posloupnost. Všimněte si, že v průběhu důkazu věty 10.6 jsme ukázali, že z posloupnosti $\{f_n\}$ lze vybrat podposloupnost, která konverguje μ-skoro všude v X. Porovnejte toto tvrzení také s větou 12.4.

10.10. Cvičení. (a) Buď $p \in [1, +\infty)$. Ukažte, že množina jednoduchých funkcí

$$\mathcal{J} := \{\sum_j \beta_j c_{B_j} : B_j \in \mathcal{S}, \mu B_j < +\infty\}$$

je hustá v $\mathcal{L}^p$.

Návod. Samozřejmě $\mathcal{J} \subset \mathcal{L}^p$. Volte $f \in \mathcal{L}^p$. Protože f je konečná skoro všude, nalezneme podle cvičení 3.11 posloupnost $\{f_n\}$ jednoduchých funkcí tak, aby $f_n \to f$ skoro všude a $|f_n| \le |f|$. Zřejmě $f_n \in \mathcal{J}$ a podle Lebesgueovy věty (majoranta $2^p|f|^p$) je $||f_n - f||_p \to 0$.

(b) Ukažte, že množina všech jednoduchých funkcí je hustá v $\mathcal{L}^\infty$.

10.11. Cvičení. Definujte prostory $\mathcal{L}^p$, L^p a L^p-normu jako na začátku této kapitoly i pro $p \in (0, 1)$. Ukažte:

(a) L^p je vektorový prostor.

(b) Trojúhelníková nerovnost pro L^p-normu platí, právě když $p \ge 1$.

Návod. Je-li $0 < p < 1$, uvažujte charakteristické funkce dvou disjunktních množin kladné míry.

(c) Položíme-li $d_p(f, g) := \int |f - g|^p \, d\mu$ pro $p \in (0, 1)$, je d_p metrika na L^p a L^p je úplný metrický lineární prostor.

10.12. Historické poznámky. "Hölderova nerovnost" byla poprvé dokázána A.L. Cauchym v [*1821] v případě $p = 2$ pro konečné součty (tedy vlastně pro aritmetickou míru na konečné množině). V.Y. Bunyakovský [1859] ji dokázal (stále pro $p = 2$) pro Riemannovy integrály a stejný výsledek získal i H.A. Schwarz v [1885]. Pro obecný případ p, ale stále pro konečné součty, byla tato nerovnost dokázána L.J. Rogersem [1888] a O. Hölderem [1889]. Definitivní podoba uvedená v 10.3 pochází až od F. Riesze [1910]. Tamtéž je také dokázána Minkowského nerovnost, původní práce pro konečné součty pochází samozřejmě od H. Minkowského [1907].

Počátek teorie L^p-prostorů jde k F. Rieszovi [1906], kde definuje L^2-metriku a k E. Fischerovi [1907], který dokazuje úplnost L^2. F. Riesz poté definuje i L^p pro ostatní p v [1909a] a [1910] a dokazuje jejich úplnost. Pojem Banachova prostoru má kořeny v pracích S. Banacha [1922] a N. Wienera [1922]. Toto období pak kulminuje vydáním fundamentální Banachovy monografie [*1932].

11. Součin měr a Fubiniova věta

V této kapitole se soustředíme na řešení následujícího problému. Máme dány dva prostory s mírou $(X, \mathcal{S}, \mu)$ a $(Y, \mathcal{T}, \nu)$. Na kartézském součinu $X \times Y$ bychom chtěli definovat součinovou míru τ na nějaké σ-algebře $\mathcal{U}$, přičemž požadujeme, aby τ i $\mathcal{U}$ měly blízký vztah k původním prostorům s mírou. Je-li totiž $M = S \times T$, kde $S \in \mathcal{S}, T \in \mathcal{T}$ (takovým množinám říkejme *měřitelné obdélníky*), zcela určitě by mělo platit

$$\tau M = \mu S \cdot \nu T$$

(tato rovnost vlastně říká, že "plocha" obdélníka je rovna součinu "délek" jeho "stran"). A ještě jeden požadavek - Lebesgueova míra v $\mathbf{R}^n$ by měla vzniknout ze "součinu" Lebesgueových měr v $\mathbf{R}^k$ a $\mathbf{R}^m$ pro $n = k + m$.

11.1. Součinová σ-algebra. Nejdříve zavedeme pojem součinové σ-algebry. Jsou-li $\mathcal{S}$ a $\mathcal{T}$ nějaké σ-algebry, *součinová σ-algebra* $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$ bude pro nás vždy σ-algebra generovaná systémem všech měřitelných obdélníků . Tedy $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$ je nejmenší σ-algebra, která obsahuje všechny množiny typu $S \times T$, kde $S \in \mathcal{S}$ a $T \in \mathcal{T}$. (Pozor: $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$ je něco zcela jiného než "množinový" kartézský součin $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$.)

Je-li $M \subset X \times Y$, $x \in X$, označme

$$M^x := \{y \in Y : [x, y] \in M\} .$$

Množině M^x říkejme *řez* M v bodě x. Obdobně definujeme $M_y := \{x \in X : [x, y] \in M\}$, pokud $y \in Y$.

11.2. Lemma. *Je-li $M \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$ a $x \in X$, potom $M^x \in \mathcal{T}$ (a, samozřejmě, symetricky $M_y \in \mathcal{S}$ pro $y \in Y$).*

Důkaz. Označí-li se $\mathcal{A} := \{E \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{T} : E^x \in \mathcal{T}\}$, lehko zjistíte, že $\mathcal{A}$ obsahuje všechny měřitelné obdélníky a že tvoří σ-algebru (využijte toho, že $\big(X \times Y \setminus E\big)^x = Y \setminus E^x$ a $\big(\bigcup\limits_\alpha E_\alpha\big)^x = \bigcup\limits_\alpha E_\alpha^x$). Tudíž $\mathcal{A} = \mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$. ∎

11.3. Monotonní systém. K dalšímu postupu potřebujeme pojem monotonního systému a některé jeho vlastnosti. Říkejme tedy, že soustava množin $\mathcal{M}$ tvoří *monotonní systém*, jestliže

$$M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \dots, \qquad M_n \in \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup M_n \in \mathcal{M},$$
$$M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \dots, \qquad M_n \in \mathcal{M} \Rightarrow \bigcap M_n \in \mathcal{M}.$$

Zřejmě každý monotonní systém, který je současně i algebrou, tvoří σ-algebru.

Naznačme stručně myšlenku, k čemu bude užitečný pojem monotonního systému. Podívejme se na důkaz posledního lemmatu a na jeho hlavní ideu. Jestliže $\mathcal{A}$ byl systém všech množin z $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$, pro které tvrzení platilo, viděli jsme, že $\mathcal{A}$ obsahoval všechny měřitelné obdélníky a tvořil σ-algebru. To již stačilo k tomu, aby $\mathcal{A} = \mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$, jinými slovy, aby pro všechny množiny z $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$ platilo naše tvrzení. Důkazy následujících tvrzení mají obdobnou strukturu – uvažujeme systém $\mathcal{A}$ množin z $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$, pro něž uvažované tvrzení platí a ukážeme o něm, že obsahuje všechny měřitelné obdélníky (to bývá většinou snadné) a snažíme se ověřit, že tvoří σ-algebru. To však není vždy tak jednoduché, leckdy bývá snažší dokázat, že $\mathcal{A}$ je "pouze" monotonní systém (většinou pomocí Leviho věty). I v tomto případě pak bude $\mathcal{A} = \mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$, jak vyplývá z následující věty.

11.4. Věta. *Nechť $\mathcal{R}$ je algebra množin. Potom nejmenší monotonní systém obsahující $\mathcal{R}$ je $\sigma(\mathcal{R})$.*

Důkaz. Označme $\mathcal{M}$ nejmenší monotonní systém obsahující $\mathcal{R}$ (existuje!). Stačí tedy ukázat, že $\mathcal{M}$ tvoří algebru. Buď $E \in \mathcal{M}$ a označme $\mathcal{K}_E = \{B\colon E \setminus B,\ B \setminus E,\ B \cup E \in \mathcal{M}\}$. K důkazu, že $\mathcal{M}$ je algebra stačí vlastně ověřit inkluzi $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}_E$. Volme tedy (pevně) množinu F a tvrzení dokažme v následujících krocích:

(a) $\mathcal{K}_F$ je monotonní třída (snadné),

(b) $\mathcal{R} \subset \mathcal{K}_F$ pro $F \in \mathcal{R}$ (ještě snažší),

(c) $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}_F$ pro $F \in \mathcal{R}$ (pouze definice $\mathcal{M}$),

(d) je-li $E \in \mathcal{M}$, je $\mathcal{R} \subset \mathcal{K}_E$ (buď $F \in \mathcal{R}$; podle (c) je $E \in \mathcal{K}_F$, tudíž $F \in \mathcal{K}_E$), a tedy $\mathcal{R} \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{K}_E$ opět podle definice $\mathcal{M}$. ■

Základ pro definici součinové míry je obsažen v následujícím tvrzení.

11.5. Lemma. *Buďte $(X, \mathcal{S}, \mu)$ a $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ dva prostory se σ-konečnými měrami, buď dále $E \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$. Potom funkce $x \to \nu(E^x)$ je $\mathcal{S}$-měřitelná ($E^x \in \mathcal{T}$ podle předchozího lemmatu!), funkce $y \mapsto \mu(E_y)$ je $\mathcal{T}$-měřitelná a*

$$\int_X \nu(E^x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E_y) d\nu(y).$$

Důkaz. Nechť $\mathcal{A}$ je systém těch množin z $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$, pro něž všechna uvedená tvrzení platí. Dále označme symbolem $\mathcal{R}$ systém všech konečných disjunktních sjednocení měřitelných obdélníků . Sami ověřte, že $\mathcal{R}$ tvoří algebru. Ukážeme-li, že $\mathcal{A}$ tvoří monotonní systém obsahující $\mathcal{R}$, bude $\mathcal{A} = \mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$ podle předchozí věty, a tudíž lemma bude dokázáno. Důkaz dokončete nyní ověřením těchto tvrzení:

(a) $\mathcal{A}$ obsahuje každý měřitelný obdélník (to je lehké),

(b) $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$ (k tomu stačí ukázat, že $\bigcup\limits_{j=1}^{n} E_j \in \mathcal{A}$ pokud $E_j \in \mathcal{A}$ jsou disjunktní),

(c) $E_n \in \mathcal{A}, E_1 \subset E_2 \subset \dots \Rightarrow \bigcup E_n \in \mathcal{A}$ (použijte Leviho větu a vlastnosti řezů),

(d) $E_n \in \mathcal{A}, E_1 \supset E_2 \supset \dots \Rightarrow \bigcap E_n \in \mathcal{A}$ (nejdříve uvažujte případ, kdy míry μ a ν jsou konečné a postupujte stejně jako v (c); teprve poté uvažujte obecný případ σ-konečných měr).

(Mimochodem, proč jsme v tvrzení (d) potřebovali uvažovat - na rozdíl od případu (c) - nejprve situaci, kdy míry jsou konečné?) ■

11.6. Součin měr. Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$, $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ jsou prostory se σ-konečnými měrami. Míra τ na $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$ se nazývá *součinem měr* μ a ν (značíme $\mu \otimes \nu$), jestliže

$$\tau(A \times B) = \mu A \cdot \nu B,$$

kdykoliv $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{T}$. Na základě následující věty můžeme říci, že operace $\otimes$ je je korektně definována.

11.7. Věta. *Buďte opět $(X, \mathcal{S}, \mu)$, $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ dva prostory se σ-konečnými měrami. Potom existuje právě jedna míra τ na $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$ tak, že*

$$\tau(A \times B) = \mu A \cdot \nu B,$$

kdykoliv $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{T}$ (tj. existuje právě jeden součin měr μ a ν).

Důkaz. Podívejme se nejdříve na jednoznačnost. Jsou-li τ_1, τ_2 míry na $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$, $\tau_j(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$, $j = 1, 2$, pro $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{T}$, potom systém $\mathcal{D} = \{E \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{T} : \tau_1 E = \tau_2 E\}$ obsahuje všechny měřitelné obdélníky, je uzavřen na konečná disjunktní sjednocení (tedy $\mathcal{R} \subset \mathcal{D}$) a tvoří monotonní systém (dokažte opět podrobně; pro klesající posloupnosti uvažujte nejdříve případ konečných měr). Tudíž $\mathcal{D} = \mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$ a jsme hotovi.

Existence součinové míry: Pro $E \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$ položme

$$\tau E = \int_X \nu E^x \, d\mu \quad \left(= \int_Y \mu E_y d\nu \text{ podle lemmatu 11.5}\right).$$

Rutinním způsobem se ověří, že τ je míra na $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$, splňující $\tau(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$ pro $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{T}$. ■

11.8. Lemma. *Buďte $(X, \mathcal{S}, \mu)$, $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ dva prostory se σ-konečnými měrami. Nechť f je $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$-měřitelná funkce na $X \times Y$. Potom funkce $f(x, \cdot)$ je $\mathcal{T}$-měřitelná na Y pro každé $x \in X$.*

Důkaz. Zvolme $\alpha \in \mathbf{R}$, $x \in X$. K důkazu tvrzení si stačí uvědomit, že

$$\{y \in Y : f(x,y) > \alpha\} = \{(t,y) \in X \times Y : f(t,y) > \alpha\}^x .$$

■

11.9. Fubiniova věta. *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$, $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ jsou dva prostory se σ-konečnými měrami, τ je součin μ a ν a h je funkce na $X \times Y$. Nechť $\int_{X\times Y} h d\tau$ má smysl. Potom*

$$\int_{X\times Y} h d\tau = \int_X \Big(\int_Y h(x,\cdot) d\nu\Big) d\mu,$$

(a obdobně - symetricky - v obráceném pořadí integrace).

Důkaz. Lze předpokládat $h \geq 0$ (jinak použijeme rozkladu $h = h^+ - h^-$). Tvrzení platí zřejmě v případě, kdy $h = c_A$ pro $A \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$ (to je vidět z důkazu věty 11.7), a tudíž z linearity (obou stran rovnosti) i pro nezáporné jednoduché funkce. Je-li nyní $h \geq 0$ libovolná $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$-měřitelná funkce, nalezneme posloupnost $\{h_n\}$ jednoduchých nezáporných funkcí, $h_n \nearrow h$ (viz věta 3.9). Potom ovšem $\int_{X\times Y} h_n d\tau \to \int_{X\times Y} h d\tau$. Na druhé straně, $h_n(x,\cdot) \nearrow h(x,\cdot)$ a pro (jednoduché) funkce h_n tvrzení platí, tudíž (dvojnásobným) využitím Leviho věty lehko dokončíme důkaz. ■

11.10. Poznámky. 1. Lebesgueova míra v $\mathbf{R}^{n+k}$ je zúplnění součinu Lebesgueových měr v $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^k$. Tomuto důležitému příkladu věnujeme větší prostor v kapitole 26.

2. Nechť τ je součin σ-konečných měr μ a ν. Potom míra τ nemusí být úplná, ani když μ a ν jsou úplné. (Rozmyslete si, že množina $\{(x,x) \colon x \in M\}$ je měřitelná vzhledem k součinu Lebesgueových měr, právě když množina $M \subset \mathbf{R}$ je lebesgueovsky měřitelná, zatímco vzhledem ke zúplnění součinu Lebesgueových měr jsou měřitelné všechny podmnožiny diagonály $\{(x,x) \colon x \in \mathbf{R}\}$.) Pro zúplněný součin měr však platí následující varianta Fubiniovy věty.

11.11. Věta. *Buďte $(X, \mathcal{S}, \mu)$, $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ dva prostory s úplnými σ-konečnými měrami. Nechť τ je součin μ a ν a $\overline{\tau}$ je zúplnění τ. Nechť h je funkce definovaná $\overline{\tau}$-skoro všude na $X \times Y$, pro niž $\int_{X\times Y} h\, d\overline{\tau}$ má smysl. Potom funkce $h(x,\cdot)$ je ν-měřitelná pro μ-skoro všechna $x \in X$ a platí*

$$\int_{X\times Y} h d\overline{\tau} = \int_X \Big(\int_Y h(x,\cdot) d\nu\Big) d\mu,$$

(a obdobně - symetricky - v obráceném pořadí integrace).

Důkaz. Jako obvykle stačí větu dokázat pro charakteristické funkce. Buď M množina tvaru $A \cup N$, kde $A \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$ a $N \subset B$ pro $B \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$, $\tau B = 0$. Podle Fubiniovy věty je

$$\int_Y c_B(x,\cdot)\, d\nu = 0$$

pro μ-skoro všechna $x \in X$, tím spíš

$$\int_Y c_N(x,\cdot)\, d\nu = 0$$

pro μ-skoro všechna $x \in X$. Odtud již snadno odvodíme, že

$$\int_{X\times Y} c_M d\overline{\tau} = \int_X \Big(\int_Y c_M(x,\cdot) d\nu\Big) d\mu .$$

■

11.12. Cvičení. Ukažte, že každý Dynkinův systém je monotonní systém, a najděte příklad, že tomu není naopak.

11.13. Historické poznámky. Součin měr a převedení vícerozměrné integrace na jednorozměrnou bylo ze začátku studováno v případě Lebesgueovy míry v $\mathbf{R}^2$ a objevuje se již u H. Lebesguea [*1904]. G. Fubini pak v [1907] vyslovuje větu o záměně pořadí integrace, zdá se však, že jeho důkaz není zcela v pořádku. Ten pak vyspravil L. Tonelli v [1909]. Zhruba ve 30. letech se objevuje řada prací k abstraktní teorii součinu měr. Metoda popsaná v této kapitole pochází od H. Hahna [1933].

Podotkněme, že existují teorie zabývající se součinem měr, které nemusejí být nutně σ-konečné. Také teorie nekonečných součinů měr (máme na mysli nekonečný počet činitelů) je velice důležitá.

12. Konvergence posloupností funkcí

Na různých systémech funkcí na množině X lze studovat mnoho typů konvergence posloupností funkcí. Podstatně záleží na tom, jakou strukturu máme danou na X či na samotném prostoru funkcí.

12.1. Výčet druhů konvergence. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí na X a f je "limitní" funkce. V každém případě můžeme uvažovat

(a) *bodovou konvergenci* (píšeme $f_n \to f$),
(b) *stejnoměrnou konvergenci* (píšeme $f_n \rightrightarrows f$);

je-li navíc na X dána topologická struktura, přichází dále v úvahu

(c) *lokálně stejnoměrná konvergence.*

Často je již na samotném systému funkcí zadána nějaká norma či obecně topologie, která určuje další typy konvergencí.

Nás budou především zajímat druhy konvergence spojené s pojmem míry. Předpokládejme tedy v dalším, že $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je opět prostor s mírou. Potom je přirozené vyšetřovat

(d) *konvergenci skoro všude* (tj. ve skoro všech bodech),
(e) *konvergenci v normě prostoru* L^p ,
(f) *konvergenci v míře*

a

(g) μ*-stejnoměrnou konvergenci.*

Nyní podáme definici posledních dvou zmíněných pojmů.

12.2. Konvergence v míře. Nechť f, f_n jsou měřitelné, skoro všude konečné funkce na X. Řekneme, že f_n *konvergují v míře* k f, jestliže

$$\lim \mu\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\} = 0$$

pro každé $\varepsilon > 0$.

12.3. μ-stejnoměrná konvergence. Nechť f, f_n jsou skoro všude konečné funkce na X. Řekneme, že f_n konvergují k f μ*-stejnoměrně*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ najdeme množinu $M \in \mathcal{S}$ tak, že $\mu M < \varepsilon$ a konvergence $f_n \to f$ je stejnoměrná na $X \setminus M$.

Rozmyslete si, že limita posloupnosti konvergující v míře (resp. μ-stejnoměrně) je určena jednoznačně až na množinu míry nula a je konečná μ-skoro všude.

Důležitý vztah mezi jednotlivými konvergencemi udává následující věta, v níž implikace (b) $\Longrightarrow$ (c) bývá označována jako *Rieszova věta.*

12.4. Věta. *Nechť $1 \leq p < \infty$ a $\{f_n\}$ je posloupnost měřitelných, skoro všude konečných funkcí na X. Uvažujme následující výroky:*

(a) *$f_n \in \mathcal{L}^p, \|f_n - f\|_p \to 0$ (tj. f_n konvergují k f v prostoru L^p),*
(b) *f_n konvergují k f v míře,*
(c) *existuje vybraná posloupnost $\{f_{n_k}\}$ tak, že $f_{n_k} \to f$ skoro všude.*

Potom (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c).

Důkaz. (a) $\Longrightarrow$ (b): Volme $\varepsilon > 0$ a označme $E_n = \{x \in X : |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}$. Potom $\varepsilon^p \mu E_n \leq \int_{E_n} |f - f_n|^p \, d\mu \leq \|f - f_n\|_p^p$, odkud již plyne tvrzení.

(b) $\Longrightarrow$ (c): Nechť tedy f_n konvergují k f v míře. Nalezněme posloupnost $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ tak, aby

$$\mu\{x \in X : |f(x) - f_{n_j}(x)| \geq \frac{1}{j}\} < \frac{1}{2^j}\,.$$

Položíme-li $A_j := \bigcup\limits_{k=j}^{\infty} \{x \in X : |f(x) - f_{n_k}(x)| \geq \frac{1}{k}\}$, je $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$.
Jelikož $\mu A_1 \leq \sum \frac{1}{2^k} < +\infty$, platí pro množinu $B := \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} A_j$

$$\mu B = \lim \mu A_j \leq \lim \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \lim \frac{1}{2^{j-1}} = 0$$

(uvědomte si souvislost s Borel-Cantelliho lemmatem 2.14!). Stačí nyní dokázat, že $f_{n_k}(x) \to f(x)$ pro $x \in X \setminus B$. Ale to je již snadné. Je-li totiž $x \in X \setminus B$ a $\varepsilon > 0$, existuje $j = j(x)$ tak, že $x \in X \setminus A_j = \bigcap\limits_{k=j}^{\infty} \{y \in X : |f(y) - f_{n_k}(y)| < \frac{1}{k}\}$. Je-li $k_0 > \max(j(x), \frac{1}{\varepsilon})$, pak už pro všechna $k \geq k_0$ dostáváme $|f(x) - f_{n_k}(x)| < \frac{1}{k} \leq \varepsilon$. ■

Následující lemma bude sloužit jako základ důkazu v dalších důležitých větách.

12.5. Lemma. *Nechť $\mu X < +\infty$ a f, f_n jsou konečné funkce na X, $f_n \to f$ skoro všude na X. Jsou-li $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, existuje měřitelná množina $M \subset X$ a n_0 tak, že $\mu(X \setminus M) < \delta$ a $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, kdykoliv $x \in M$ a $n \geq n_0$.*

Důkaz. Položme $E_m := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ pro každé } n \geq m\}$. Potom $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \dots$, $X = \bigcup E_n$ a $\lim \mu(X \setminus E_n) = 0$ ($\mu(X \setminus E_1) \leq \mu X < +\infty$!). Existuje tedy n_0 tak, že $\mu(X \setminus E_{n_0}) < \delta$. Nyní stačí položit $M := E_{n_0}$. ■

Implikace (a) $\Longrightarrow$ (b) v následující větě se nazývá *Jegorovova věta*, implikace (a) $\Longrightarrow$ (c) pak *Lebesgueova věta*.

12.6. Věta. *Nechť $\mu X < +\infty$ a nechť f, f_n jsou měřitelné, skoro všude konečné funkce na X. Uvažujme následující výroky:*

(a) *$f_n \to f$ skoro všude,*
(b) *f_n konvergují k f μ-stejnoměrně,*
(c) *f_n konvergují k f v míře.*

Potom (a)$\Longleftrightarrow$(b) $\Longrightarrow$ (c).

Důkaz. Předpokládejme (a). Označme $E := \{x \in X : f(x), f_n(x) \text{ jsou konečné a } f_n(x) \to f(x)\}$. Zřejmě $\mu(X \setminus E) = 0$ a můžeme tedy v důkazu předpokládat, že $E = X$. Volme $\delta > 0$ a $k \in \mathbf{N}$. Podle předchozího lemmatu existují $M_k \in \mathcal{S}$ a n_k tak, že

$$\mu(X \setminus M_k) < \frac{\delta}{2^k}, \qquad |f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{k}$$

pro $x \in M_k$ a $n \geq n_k$. Položíme-li $A := \bigcap M_k$, je $\mu(X \setminus A) \leq \delta$, přičemž

$$\sup_{x \in A} |f(x) - f_n(x)| \leq \sup_{x \in M_k} |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}$$

pro $n \geq n_k$.

Předpokládejme nyní (b). Označíme-li $S_n(\varepsilon) := \{x \in X : |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}$, jde o to ukázat, že $\lim \mu S_n(\varepsilon) = 0$ pro každé $\varepsilon > 0$. Ale to je již snadné pomocí (b), musíme si pouze uvědomit, co to je stejnoměrná konvergence.

Implikace (b) $\Longrightarrow$ (a) je zřejmá. ■

12.7. Cvičení. Nechť $\mu X < \infty$ a f, f_n jsou měřitelné skoro všude konečné funkce na X. Potom $f_n \to f$ v míře, právě když pro každou vybranou posloupnost $\{f_{n_k}\}$ existuje její vybraná podposloupnost $\{f_{n_{k_j}}\}$, která konverguje k f skoro všude.

Návod. Jedna implikace je v 12.4. Jestliže $\{f_n\}$ splňují "podmínku pod-podposloupností" a přesto nekonvergují v míře, existuje $\varepsilon > 0$ a posloupnost $\{g_n\}$ vybraná z $\{f_n\}$ tak, že $\mu\{|g_n - f| > \varepsilon\} > \varepsilon$ pro všechna n a $g_n \to f$ skoro všude. Označme h_n charakteristickou funkci množiny $\{|g_n - f| > \varepsilon\}$. Potom $h_n \to 0$ skoro všude a z Lebesgueovy věty 8.13 (majoranta 1) dostáváme spor.

12.8. Cvičení. Buď $(X, \mathcal{S}, \mu)$ prostor s mírou. Nechť φ je pomocná funkce na $[0, \infty]$, rostoucí, omezená, spojitá a splňující $\varphi(0) = 0$, $\varphi(s+t) \leq \varphi(s) + \varphi(t)$ pro všechna $s, t \geq 0$ (například funkce $t \mapsto t/(1+t)$). Definujte

$$\rho(f, g) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \varphi(\mu\{|f - g| \geq 1/j\}) .$$

a) Ukažte, že funkce ρ je pseudometrika na prostoru všech měřitelných funkcí na X.

(b) f_n konvergují k f v míře, právě když $\rho(f, f_n) \to 0$.

12.9. Cvičení (Vitaliova věta). Pro $1 \leq p < +\infty$, $f_n \in \mathcal{L}^p$ platí:

$$f_n \to f \text{ skoro všude, } \|f_n\|_p \to \|f\|_p \implies \|f_n - f\|_p \to 0.$$

Návod. Položme $\varphi_n = 2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$. Potom $\varphi_n \to 2^p|f|^p$ skoro všude. Jelikož $|f_n - f|^p \leq (|f_n| + |f|)^p \leq 2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p)$, jsou $\varphi_n \in \mathcal{L}^1$, $\varphi_n \geq 0$. Podle Fatouova lemmatu je

$$2^p \int_X |f|^p \leq \liminf \int_X \varphi_n = 2^p \int_X |f|^p - \limsup \int_X |f_n - f|^p .$$

Odtud plyne, že $\limsup \int_X |f_n - f|^p = 0$.

12.10. Cvičení. (a) (Jegorov) Buď μ σ-konečná míra na $(X, \mathcal{S})$, f_n měřitelné, $f_n \to f$ skoro všude, (f_n, f skoro všude konečné). Ukažte, že existují $E_k \in \mathcal{S}$ konečné míry tak, že $\mu(X \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = 0$ a $f_n \rightrightarrows f$ na každé E_k.

(b) Ukažte, že předpoklad σ-konečnosti míry μ je podstatný.

Návod. Buď X množina všech konvergentních posloupností $x = \{x_k\}$ reálných čísel a μ aritmetická míra na X. Definujme posloupnost f_n funkcí na X předpisem $f_n(x) = x_n$. Zvolte posloupnost E_j podmnožin X, na nichž f_n konverguje stejnoměrně a najděte konvergentní posloupnost $\{y_k\}$, která do žádné z množin E_j nepatří (neboť konverguje pomaleji než všechny posloupnosti z E_j).

(c) Zkoumejte, které implikace mezi tvrzeními uvedenými ve větě 12.6 platí i bez předpokladu konečnosti míry X.

Návod. Z (b) plyne (a) i (c). Jinak uvažujte příklad $X = (0, +\infty)$ a $f_n = c_{(n,n+1)}$.

12.11. Cvičení. Nalezněte funkce f_n na $[0, 1]$ tak, aby f_n konvergovaly v Lebesgueově míře k nule, ale posloupnost $\{f_n(x)\}$ nekonvergovala pro žádné $x \in [0, 1]$.

Návod. Uvažujte charakteristické funkce intervalů $[\dfrac{k-1}{m}, \dfrac{k}{m}]$ uspořádané do vhodné posloupnosti.

12.12. Slabá konvergence v L^p. Nechť $1 \leq p < +\infty$ a $q = \frac{p}{p-1}$ ($q = +\infty$, je-li $p = 1$). Nechť f, $f_j \in \mathcal{L}^p$. Řekneme, že f_j *konvergují slabě* k f v L^p (značíme $f = w\text{-}\lim f_j$), jestliže $\int_X f_j g \, d\mu \to \int_X fg \, d\mu$ pro každou funkci $g \in \mathcal{L}^q$.

(a) Je-li $f = w\text{-}\lim f_j$, $g = w\text{-}\lim f_j$, potom $g = f$ skoro všude.

(b) Jestliže $\|f - f_j\|_p \to 0$, pak $f = w\text{-}\lim f_j$.

(c) Nechť f, $f_j \in \mathcal{L}^p$. Nechť $\mathcal{F}$ je množina funkcí z $\mathcal{L}^q$, jejíž lineární obal je hustý v L^q. Je ekvivalentní:

(i) $f = w\text{-}\lim f_j$,

(ii) posloupnost $\{\|f_j\|_p\}$ je omezená a $\int_X g f_j \, d\mu \to \int_X gf \, d\mu$ pro každou funkci $g \in \mathcal{F}$.

Návod. Typická aplikace Banach-Steinhausovy věty z funkcionální analýzy.

(d) Za $\mathcal{F}$ lze vzít množinu všech charakteristických funkcí množin z $\mathcal{S}$ v případě $p = 1$, či množinu všech charakteristických funkcí množin z $\mathcal{S}$ konečné míry, je-li $p > 1$; v konkrétním případě Lebesgueovy míry nám dává další možnosti věta 31.4.

(e) Je-li $p > 1$, pak z každé omezené (v normě) posloupnosti funkcí z $\mathcal{L}^p$ lze vybrat slabě konvergentní.

Návod. Je-li prostor L^p separabilní (v aplikacích většinou bývá), postupujte podobně jako v důkazu věty 17.10. Neseparabilní případ obtížností přesahuje běžný rámec cvičení, lze jej zvládnout na základě znalostí z funkcionální analýzy. Jde o to, že L^p je pro $1 < p < \infty$ reflexivní a reflexivní prostory jsou právě touto vlastností charakterizovány, viz např. věta 33.4. v knize L. Mišíka [*1989]

(f) Nechť $p > 1$. Je-li $f_j \to f$ skoro všude a tvoří-li $\|f_j\|_p$ omezenou posloupnost, je $f = w\text{-}\lim f_j$. Tvrzení zůstává v platnosti, nahradíme-li předpoklad $f_j \to f$ skoro všude předpokladem $f_j \to f$ v míře.

(g) (Radon-Rieszova věta) Nechť $p > 1$, $f = w\text{-}\lim f_j$ a $\|f\|_p = \lim \|f_j\|_p$. Potom $\|f - f_j\|_p \to 0$. (Jaké tvrzení dostaneme spojením (f) a (g)?)

Návod. Při důkazu se podstatným způsobem využije uniformní konvexita prostorů L^p pro $1 < p < \infty$, viz knihu M.M. Rao [*1987], Proposition 5.5.3.

(h) Posloupnost $f_j : x \mapsto \sin jx$ konverguje slabě k nule pro každé p na každém omezeném intervalu. Žádná její podposloupnost není skoro všude konvergentní.

(i) Nechť $f_j = j^{1/p}$ na $(0, 1/j)$ a $f_j(x) = 0$ na $(1/j, 1)$. Posloupnost $\{f_j\}$ je omezená v normě prostoru $L^p(0, 1)$ a konverguje skoro všude k nule. Je-li $p = 1$, není (a nelze z ní vybrat) slabě konvergentní. Je-li $p > 1$, je sice slabě konvergentní, ale nikoli v normě.

12.13. Slabá* konvergence. Předpokládejme, že μ je σ-konečná míra na X. Nechť f, $f_j \in L^\infty$. Říkáme, že f_j *konvergují slabě** k f (značíme $f = w^*\text{-}\lim f_j$), jestliže $\int_X f_j g \, d\mu \to \int_X fg \, d\mu$ pro každou funkci $g \in \mathcal{L}^1$.

(a) Je-li $f = w^*\text{-}\lim f_j$, $g = w^*\text{-}\lim f_j$, potom $g = f$ skoro všude.

(b) Jestliže $\|f - f_j\|_\infty \to 0$, pak $f = w^*\text{-}\lim f_j$.

(c) Nechť f, $f_j \in \mathcal{L}^\infty$. Nechť $\mathcal{F}$ je množina funkcí z $\mathcal{L}^1$, jejíž lineární obal je hustý v L^1. Je ekvivalentní:

(i) $f = w^*\text{-}\lim f_j$,

(ii) posloupnost $\{\|f_j\|_\infty\}$ je omezená a $\int_X g f_j \, d\mu \to \int_X g f \, d\mu$ pro každou funkci $g \in \mathcal{F}$.

(d) Je-li $f_j \to f$ skoro všude a tvoří-li $\|f_j\|_\infty$ omezenou posloupnost, je $f = w^*\text{-}\lim f_j$.

(e) Z každé omezené (v normě) posloupnosti f_n funkcí z $\mathcal{L}^\infty$ lze vybrat slabě* konvergentní.

Návod. Pišme $X = \bigcup X_k$, kde $X_1 \subset X_2 \subset \dots$ a $\mu X_k < \infty$. Nechť $\{g_n\}$ je omezená (v normě) posloupnost funkcí z L^∞ a

$$\tilde{g}_{n,k} = \begin{cases} g_n & \text{na } X_k, \\ 0 & \text{na } X \setminus X_k \,. \end{cases}$$

Potom $\{\tilde{g}_{n,k}\}_n$ je omezená i v normě L^2 a existuje její podposloupnost $\{\tilde{g}_{n_i,k}\}_n$, která konverguje slabě v L^2 k jakési funkci $\tilde{g}_k$. To ovšem znamená, že $\lim_i \int_X g_{n_i} u \, d\mu = \int_X \tilde{g}_k u \, d\mu$ pro každou funkci $u \in L^2$, která je rovna nule vně X_k. Diagonální metodou (viz. 17.10) najdeme posloupnost h_n vybranou z f_n a limitní funkci f tak, že $\int_X f_n u \, d\mu \to \int_X f u \, d\mu$ pro každou funkci $u \in L^2$, která je rovna nule vně některé množiny X_k. Množina všech takových funkcí u je však hustá v L^1 a tudíž z (c) dostaneme $f = w^*\text{-}\lim f_n$.

(f) Posloupnost $f_j : x \mapsto \sin jx$ konverguje slabě* k nule. (To je vlastně Riemann-Lebesgueovo lemma.)

(g) Nechť $f_j = 0$ na $(0, 1/j)$ a $f_j(x) = 1$ na $(1/j, 1)$. Posloupnost $\{f_j\}$ je omezená v normě prostoru L^∞ a konverguje skoro všude i slabě* k funkci 1. Je $\|\lim f_j\|_\infty = \lim \|f_j\|_\infty = 1$, ale $\lim \|f - f_j\|_\infty \neq 0$.

12.14. Poznámky. 1. Pro ty, kdož znají elementy funkcionální analýzy, přidejme poznámku na vysvětlenou. Je-li X Banachův prostor a X^* jeho (topologický) duál, $x_n, x \in X$, $F_n, F \in X^*$, říkáme, že

(a) x_n *konvergují slabě* k x, jestliže $F(x_n) \to F(x)$ pro každý funkcionál $F \in X^*$,

(b) F_n *konvergují slabě** k F, jestliže $F_n(z) \to F(z)$ pro každé $z \in X$.

Použijeme-li nyní poznatky z 13.17, jsou předchozí definice slabé a slabé* konvergence v prostorech L^p lépe pochopitelné (alespoň pokud $1 < p < \infty$ nebo μ je σ-konečná).

2. Říkáme, že Banachův prostor je *uniformně konvexní*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x, y \in X$, $\|x\| = \|y\| = 1$ platí

$$\|\frac{1}{2}(x + y)\| > 1 - \delta \implies \|y - x\| < \varepsilon \,.$$

Každý uniformně konvexní Banachův prostor je *lokálně uniformně konvexní*, to znamená, že kdykoliv $\|x_n\| = \|x\| = 1$ a $\|\frac{1}{2}(x_n + x)\| \to 1$, potom $\|x_n - x\| \to 0$. Prostory L^p jsou pro $1 < p < \infty$ uniformně konvexní (to plyne z Clarksonových nerovností, viz třeba knihu E. Hewitt and K. Stromberg [*1965]).

3. Říká se, že Banachův prostor X má *Kadec-Kleeovu vlastnost*, jestliže $\|x_n - x\| \to 0$, kdykoliv $x_n \in X$ konvergují slabě k x a $\|x_n\| \to \|x\|$. Každý lokálně uniformně konvexní Banachův prostor (tedy i prostory L^p, $1 < p < \infty$) má Kadec-Kleeovu vlastnost. Vskutku - je-li $\{x_n\}$ posloupnost, která nekonverguje k prvku x a pro niž $\|x_n\| = \|x\| = 1$, z lokální uniformní konvexity nalezneme její podposloupnost, nazvěme ji opět $\{x_n\}$, a $0 < \varepsilon < 1$ tak, aby $\|\frac{1}{2}(x_n + x)\| < 1 - \varepsilon$. Pomocí Hahn-Banachovy věty dále nalezneme $F \in X^*$ tak, že $\|F\| = 1 = F(x)$. Odtud vyplyne, že posloupnost $F(x_n)$ nemůže konvergovat k $F(x)$.

4. Prostory L^1 již nemusejí být (lokálně) uniformně konvexní ani pro ně nemusí platit tvrzení analogické k 12.12.f. Nicméně, jsou-li $f_n \in L^1$, $f_n \to f$ skoro všude (viz 12.9) anebo v míře a $\|f_n\| \to \|f\|$, potom $\|f_n - f\| \to 0$.

12.15. Cvičení. Nechť $\mu X < \infty$ a $1 \le p < r \le +\infty$. Předpokládejme, že $\{\|f_j\|_r\}_j$ tvoří omezenou posloupnost a $f_j \to f$ skoro všude (stačí v míře). Potom $\|f - f_j\|_p \to 0$. Ukažte, že tvrzení neplatí pro $r = p$.

12.16. Historické poznámky. Pojem konvergence v míře byl definován F. Rieszem [1909a], kde je také dokázána implikace (b) $\implies$ (c) věty 12.4. Jegorovova věta pro případ Lebesgueovy míry byla dokázána D. Jegorovem [1911].

13. Radon-Nikodýmova věta a Lebesgueův rozklad

13.1. Radon-Nikodýmova derivace a absolutní spojitost měr. Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou a $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ nezáporná funkce na X. V 8. kapitole jsme definovali na $(X, \mathcal{S})$ míru μ_f předpisem

$$\mu_f(E) = \int_E f \, d\mu \,, \qquad E \in \mathcal{S} \,.$$

V této kapitole budeme řešit opačnou úlohu: Jsou-li μ a ν míry na $\mathcal{S}$, ptáme se, zda existuje nezáporná funkce $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, pro niž $\nu = \mu_f$. Ihned vidíme, že obecně taková funkce nemusí existovat. Každá míra tvaru μ_f totiž splňuje $\mu_f(E) = 0$, kdykoliv $\mu(E) = 0$. Ukážeme však, že pokud je taková podmínka splněna (tj. $\mu E = 0 \implies \nu E = 0$), potom hledanou funkci f, kterou budeme nazývat *hustotou* nebo *Radon-Nikodýmovou derivací* míry ν (vzhledem k μ), lze nalézt. Hustota míry ν vzhledem k μ je určena jednoznačně až na μ-nulovou množinu a bývá značena $\dfrac{d\nu}{d\mu}$.

Budeme tedy říkat, že míra ν na $\mathcal{S}$ je *absolutně spojitá* vzhledem k μ (píšeme $\nu \ll \mu$), jestliže pro každou množinu $E \in \mathcal{S}$ platí

$$\mu E = 0 \implies \nu E = 0 \,.$$

Metod, jak dokázat existenci hustoty, je více. Náš přístup bude založen na následující "variační" úvaze. Představujme si, že hledaná funkce f existuje a leží v $\mathcal{L}^2$. Uvažujme funkcionál

$$J_0 : g \mapsto \int_X |g - f|^2 \, d\mu$$

na prostoru $L^2(\mu)$. Funkce f zřejmě reprezentuje jediný prvek prostoru $L^2(\mu)$, v němž J_0 nabývá svého minima. Pro všechna $g \in L^2(\mu)$ je

$$J_0(g) = J(g) + \int_X f^2 d\mu \,,$$

kde

$$J(g) = \int_X (g^2 - 2fg) \, d\mu = \int_X g^2 \, d\mu - 2 \int_X g \, d\nu.$$

Vzhledem k tomu, že funkcionály J a J_0 se liší pouze o konstantu, poznáme funkci f jako prvek, v němž nabývá minima funkcionál J. To je také myšlenka důkazu následujícího lemmatu.

13.2. Lemma. *Nechť ν, σ jsou konečné míry na $(X, \mathcal{S})$, takové že $\nu A \le \sigma A$ pro každou $A \in \mathcal{S}$. Potom existuje $f \in \mathcal{L}^2(\sigma)$ tak, že*

$$\nu A = \int_A f \, d\sigma$$

pro všechna $A \in \mathcal{S}$.

Důkaz. Označme

$$J(g) = \int_X g^2 \, d\sigma - 2 \int_X g \, d\nu$$

pro $g \in \mathcal{L}^2(\sigma)$. Buď

$$c := \inf\{J(g) : g \in L^2(\sigma)\} \,.$$

Jelikož $\nu A \le \sigma A$ pro každou $A \in \mathcal{S}$, pro $g \in \mathcal{L}^2(\sigma)$ platí odhad

$$J(g) \ge \int_X (g^2 - 2|g|) \, d\sigma = \int_X (|g| - 1)^2 \, d\sigma - \sigma(X) \ge -\sigma(X),$$

takže $c \in \mathbf{R}$. Najděme posloupnost $\{f_j\}$ funkcí z $\mathcal{L}^2(\sigma)$ tak, že $J(f_j) \to c$. Lehko zjistíme, že pro $g, h \in \mathcal{L}^2(\sigma)$ platí "rovnoběžníkové pravidlo"

$$J(g) + J(h) - 2J\big(\tfrac{1}{2}(g + h)\big) = \frac{1}{2}\|g - h\|_2^2 \,,$$

tedy pro $j, k \in \mathbf{N}$, $j, k \to \infty$ máme

$$\frac{1}{2}\int_X |f_j - f_k|^2 \, d\sigma \le J(f_j) + J(f_k) - 2c \to 0\,.$$

Jinými slovy, posloupnost $\{f_j\}$ je cauchyovská, a tedy konvergentní, v $L^2(\sigma)$. Buď f limita této posloupnosti v normě prostoru $L^2(\sigma)$. Zřejmě $J(f) = c$. Zvolme $A \in \mathcal{S}$. Pro všechna $t \in \mathbf{R}$ máme

$$J(f) \le J(f + tc_A),$$

neboli

$$0 \le 2t \int_X f c_A \, d\sigma + t^2 \int_X c_A^2 \, d\sigma - 2t \int_X c_A \, d\nu = 2t\Bigl(\int_X f \, d\sigma - \nu A\Bigr) + t^2 \sigma A\,.$$

Odtud plyne (uvědomte si, že t může být kladné i záporné), že

$$|\int_X f \, d\sigma - \nu A| \le \frac{1}{2}|t| \, \sigma A\,.$$

Limitním přechodem pro $t \to 0$ dostáváme požadované tvrzení. ■

13.3. Poznámka. Důkaz předchozího lemmatu se jeví přehlednějším, stavíme-li na znalosti teorie Hilbertových prostorů. K funkcionálu

$$F(g) = \int_X g \, d\nu\,, \quad g \in L^2(\sigma)$$

lze nalézt pomocí Rieszovy věty o reprezentaci spojitých lineárních funkcionálů na Hilbertových prostorech (to není Rieszova věta z kapitoly 16) prvek $f \in L^2(\sigma)$ tak, že pro každé $g \in L^2(\sigma)$ je

$$F(g) = \int_X fg \, d\sigma\,.$$

Nyní stačí za g položit c_A, kde A probíhá $\mathcal{S}$.

13.4. Radon-Nikodýmova věta. *Buďte μ, ν konečné míry na $(X, \mathcal{S})$, $\nu \ll \mu$. Potom existuje nezáporná funkce $h \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tak, že*

$$\nu A = \int_A h \, d\mu$$

pro všechna $A \in \mathcal{S}$. Tato funkce je určena jednoznačně jako prvek $L^1(\mu)$ – tj. až na množinu míry nula.

Důkaz. Jednoznačnost dostáváme z věty 8.17, budeme se tedy věnovat existenci. Položme $\sigma = \mu + \nu$. Podle předchozího lemmatu existuje funkce $f \in \mathcal{L}^2(\sigma)$ tak, že

$$\nu A = \int_A f \, d\sigma$$

pro všechna $A \in \mathcal{S}$. Z nerovností

$$\int_A f \, d\sigma = \nu A \ge 0\,, \quad \int_A f \, d\sigma = \nu A \le \sigma A = \int_A 1 \, d\sigma$$

dostáváme podle důsledku 8.18 $0 \le f \le 1$ σ-skoro všude. Ukážeme, že dokonce $f < 1$ σ-skoro všude. Označíme-li $E = \{f = 1\}$, potom

$$\nu E = \int_E f \, d\sigma = \sigma E,$$

tedy $\mu E = 0$, což ale podle předpokladů znamená i $\nu E = 0$ a $\sigma E = 0$. Pro každou množinu $A \in \mathcal{S}$ máme

$$\int_X c_A f \, d\mu = \int_X c_A (1 - f) \, d\nu\,.$$

Vidíme (pro jednoduché funkce z linearity, dále limitním přechodem), že

$$\int_X gf\,d\mu = \int_X g(1-f)\,d\nu$$

pro každou nezápornou $\mathcal{S}$-měřitelnou funkci g na X. Buď opět $A \in \mathcal{S}$. Speciální volbou

$$g = \frac{c_A}{1-f}$$

dostáváme

$$\int_X \frac{f}{1-f}\,c_A\,d\mu = \int_X c_A\,d\nu\,.$$

Funkce

$$h := \frac{f}{1-f}$$

má všechny požadované vlastnosti (jelikož $\int_X h\,d\mu = \nu(X) < +\infty$, je $h \in \mathcal{L}^1(\mu)$). ■

13.5. Věta. *Nechť μ a ν jsou konečné míry na $(X,\mathcal{S})$. Potom následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) $\nu \ll \mu$,
(ii) *existuje nezáporná funkce $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tak, že pro všechna $E \in \mathcal{S}$ je*

$$\nu E = \int_E f\,d\mu\,,$$

(iii) *ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $\nu E < \varepsilon$ pro všechna $E \in \mathcal{S}$ splňující $\mu E < \delta$.*

Důkaz. (i) $\Longrightarrow$ (ii) je v podstatě věta 13.4, (ii) $\Longrightarrow$ (iii) plyne z cvičení 8.22(b) a (iii) $\Longrightarrow$ (i) je zřejmé. ■

13.6. Poznámky. 1. Radon-Nikodýmovu větu lze v mnohém ohledu zobecnit, platí její varianty pro znaménkové, komplexní míry atd. Pro σ-konečné míry uveďme toto znění:

Buďte μ, ν σ-konečné míry na $(X,\mathcal{S})$, $\nu \ll \mu$. Potom existuje nezáporná $\mathcal{S}$-měřitelná funkce h (nikoli nutně z $\mathcal{L}^1(\mu)$) tak, že

$$\nu A = \int_A h\,d\mu$$

pro všechna $A \in \mathcal{S}$. Tato funkce je určena jednoznačně až na množinu míry nula.

Vskutku, nalezneme posloupnosti $\{A_n\}$, $\{B_n\} \subset \mathcal{S}$ po dvou disjunktních množin tak, aby bylo $\mu A_n < +\infty$, $\nu B_n < +\infty$, $\bigcup A_n = \bigcup B_n = X$. Aplikací věty 13.4 na restrikce měr μ a ν na množiny $A_n \cap B_k$ dostáváme tvrzení.

2. Dokazujeme-li Radon–Nikodýmovu větu nebo Hahnovu větu o rozkladu nezávisle, musíme vždy vynaložit jisté úsilí. Poněkud snadnější je důkaz Radon–Nikodýmovy věty z Hahnovy věty nebo naopak. Obé naznačíme.

Mějme konečné míry μ a ν na $(X,\mathcal{S})$, $\nu \ll \mu$. Chceme dokázat existenci Radon–Nikodýmovy derivace. Pro $\alpha \in \mathbf{Q}$ najděme Hahnův rozklad $X = P_\alpha \cup N_\alpha$ tak, aby $\nu - \alpha\mu$ byla nezáporná míra na P_α a $-(\nu - \alpha\mu)$ byla nezáporná míra na N_α, přičemž pro $\alpha = 0$ položme $P_0 = X$, $N_0 = \emptyset$. Pak najdeme $d\nu/d\mu$ ve tvaru

$$f(x) = \sup\{\alpha \in \mathbf{Q} \cap [0,+\infty) : x \in P_\alpha\}\,.$$

Na druhé straně, je-li μ znaménková míra a $f = \dfrac{d\mu^+}{d|\mu|}$, potom (P,N) je Hahnův rozklad X podle μ pro $P = \{f = 1\}$, $N = X \setminus P$.

13.7. Integrál podle znaménkové, resp. komplexní míry. Nechť μ je znaménková, resp. komplexní míra na $(X,\mathcal{S})$. Potom definujeme

$$\int_X f\,d\mu = \int_X af\,d|\mu|\,,$$

kde $a = d\mu/d|\mu|$. Ukažte, že $|a| = 1$ skoro všude.

13.8. Singulární a absolutně spojité míry. Říkáme, že (obecně i znaménkové nebo komplexní) míry μ a ν na měřitelném prostoru $(X,\mathcal{S})$ jsou (navzájem) *singulární*, což zapisujeme $\mu \perp \nu$, jestliže existuje $M \in \mathcal{S}$ tak, že $|\mu|(M) = |\nu|(X \setminus M) = 0$. Tento vztah je zřejmě symetrický.

Rovněž tak definujeme i absolutní spojitost v případě obecných měr. Míra ν je *absolutně spojitá* vzhledem k μ, jestliže $\nu E = 0$ pro každou množinu $E \in \mathcal{S}$, pro niž $|\mu|(E) = 0$.

13.9. Příklady. (a) Je-li μ znaménková míra, potom μ^+ a μ^- jsou navzájem singulární. To plyne ihned z definice těchto měr a vlastností Hahnova rozkladu.

(b) Diracova míra v bodě $z \in \mathbf{R}$ a Lebesgueova míra jsou navzájem singulární na $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$.

(c) Je-li η Lebesgue-Stieltjesova míra odpovídající Cantorově singulární funkci (viz příklad 23.1, cvičení 24.8) a λ Lebesgueova míra, potom $\eta \perp \lambda$ na $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$.

13.10. Lebesgueova věta o rozkladu. *Buď μ (nezáporná) míra na $(X, \mathcal{S})$ a ν σ-konečná anebo komplexní míra na $(X, \mathcal{S})$. Potom existuje jednoznačný rozklad $\nu = \nu_a + \nu_s$, kde $\nu_a \ll \mu$ a $\nu_s \perp \mu$.*

Důkaz (viz též cvičení 13.12). Buď zpočátku ν konečná nezáporná míra. Existují $B_j \in \mathcal{S}$ takové, že $\mu B_j = 0$ a $\lim \nu B_j = \sup\{\nu B : B \in \mathcal{S},\ \mu B = 0\}$ (pozor na role μ a ν !). Je-li $M = \bigcup B_j$, je $\mu M = 0$ a pro míry

$$\nu_a A := \nu(A \setminus M),\ \nu_s A := \nu(A \cap M)$$

platí $\nu = \nu_a + \nu_s$. Zřejmě $\nu_s \perp \mu$. Je-li nyní $\mu B = 0$, potom

$$\nu_a(B) = \nu(B \setminus M) = 0,$$

neboť každá množina $B' \in \mathcal{S}$, $B' \subset X \setminus M$, musí splňovat $\nu B' = 0$, pokud $\mu B' = 0$. (Jinak by bylo $\mu(M \cup B') = 0$ a $\nu(B' \cup M) > \nu M$.)

Je-li nyní $X = \bigcup X_k$, kde $\nu X_k < +\infty$, nalezněme množiny $M_k \subset X_k$ jako v prvé části důkazu a položme

$$M = \bigcup M_k\,, \quad \nu_a A = \nu(A \setminus M)\,, \quad \nu_s A = \nu(A \cap M).$$

Případ, kdy ν je znaménková či komplexní, lehko převedeme na předchozí.

Nyní se zabývejme jednoznačností. Mějme současně $\nu = \nu'_a + \nu'_s$ s existencí množiny $M' \in \mathcal{S}$, pro niž $\mu M' = 0$ a $\nu'_s(X \setminus M') = 0$. Zvolme $A \in \mathcal{S}$ a označme $C = A \cap (M \cup M')$, $D = A \setminus (M \cup M')$. Máme $\mu C \le \mu M + \mu M' = 0$, tedy $\nu_a C = \nu'_a C = 0$ a $\nu_s C = \nu'_s C$. Dále $\nu_s D = \nu'_s D = 0$, tedy také $\nu_a D = \nu'_a D = 0$. Jelikož $A = C \cup D$ a $C \cap D = \emptyset$, dostáváme $\nu_s A = \nu'_s A$ a $\nu_a A = \nu'_a A$. ∎

13.11. Poznámka. Buď $\nu = \nu_a + \nu_s$ Lebesgueův rozklad míry ν vzhledem k μ. Potom zřejmě existuje množina $M \in \mathcal{S}$ tak, že $\nu_s = \nu_M$ a $\nu_a = \nu_{X \setminus M}$.

13.12. Cvičení. Proveďte detailně alternativní důkaz Lebesgueovy věty o rozkladu – existenci (za předpokladu σ-konečnosti obou měr) pomocí Radon-Nikodýmovy věty a jednoznačnost podle následujícího cvičení 13.13.c.

Návod. (a) Existence: Předpokládejte μ, ν nezáporné a položte $\lambda = \mu + \nu$, $f = d\mu/d\lambda$. Potom Lebesgueův rozklad ν podle μ dostaneme ve tvaru $\nu_s = \nu_M$, $\nu_a = \nu_{X \setminus M}$, kde $M = \{f = 0\}$.

(b) Jednoznačnost: Je-li $\nu = \nu_a + \nu_s = \nu'_a + \nu'_s$, je $\nu_a - \nu'_a = \nu_s - \nu'_s$ současně absolutně spojitá i singulární vzhledem k μ.

13.13. Cvičení. Dokažte následující tvrzení (všechny míry – ať již nezáporné, znaménkové či komplexní – uvažujeme na měřitelném prostoru $(X, \mathcal{S})$):

(a) Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) $\mu \perp \nu$,

(ii) $|\mu| \perp |\nu|$,

(iii) $(\mu_r)^+ \perp (\nu_r)^+$, $(\mu_r)^- \perp (\nu_r)^-$, $(\mu_i)^+ \perp (\nu_i)^+$ a $(\mu_i)^- \perp (\nu_i)^-$,

(b) $\nu_1 \perp \mu$, $\nu_2 \perp \mu \implies \nu_1 + \nu_2 \perp \mu$,

(c) $\nu \perp \mu$, $\nu \ll \mu \implies \nu = 0$.

13.14. Cvičení. Je-li $S \subset \mathbf{R}$ spočetná, $f \ge 0$ a $\mu = \sum_{s \in S} f(s)\varepsilon_s$ (ε_s jsou Diracovy míry, srov. cvičení 2.10), nalezněte Lebesgueův rozklad μ vzhledem k Lebesgueově míře.

13.15. Cvičení. Buď $\mu \in \mathbf{M}(X)$ (viz cvičení 6.17), $V = \{\nu \in \mathbf{M}(X) : \nu \perp \mu\}$. Ukažte, že V je uzavřený lineární podprostor Banachova prostoru $\mathbf{M}(X)$.

13.16. Cvičení. Nechť μ, ν jsou konečné nezáporné míry na $(X, \mathcal{S})$. Buď $\sup$, $\inf$ jako v cvičení 6.19 a $\sigma = \mu + \nu$.

(a) Ukažte, že následující výroky jsou ekvivalentní:

(i) $\mu \perp \nu$,

(ii) $\inf(\mu, \nu) = 0$,

(iii) $\sup(\mu, \nu) = \mu + \nu$.

(b) $\dfrac{d\sup(\mu,\nu)}{d\sigma} = \max(\dfrac{d\mu}{d\sigma}, \dfrac{d\nu}{d\sigma})$.

13.17. Duály k L^p. Nechť $p, q \in [1, +\infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Nechť μ je σ-konečná míra na $(X, \mathcal{S})$, k níž se vztahují prostory L^p a L^q.

(a) Je-li $v \in L^q$, potom přiřazení $u \mapsto \int_X uv\,d\mu$ je spojitý lineární funkcionál na L^p.

(b) Nechť $p < +\infty$ a f je spojitý lineární funkcionál na L^p. Potom existuje $v \in L^q$ tak, že $f(u) = \int_X uv\,d\mu$ pro všechna $u \in L^p$ a $\|v\|_q = \|f\|$.

Návod. Podle Radon-Nikodýmovy věty existuje μ-měřitelná konečná funkce v tak, že $f(c_E) = \int_E v\,d\mu$ pro každou množinu $E \in \mathcal{S}$. Zbývá dokázat, že $v \in L^q$ a $\|v\|_q = \|f\|$. Najdeme rostoucí posloupnost $\{E_j\}$ množin $\mathcal{S}$ konečné míry tak, aby na každé E_j byla v omezená a $\bigcup E_j$ bylo X. Položme $u_j = |v|^{q-2} v c_{E_j}$. Potom $u_j \in L^p$ a tedy $\|u_j\|_p^p = \int_{E_j} |v|^q\,d\mu = f(u_j) \le \|f\|\,\|u_j\|_p$, neboli $\int_{E_j} |v|^q\,d\mu = \left(\|u_j\|_p^{p-1}\right)^q \le \|f\|^q$. Z Leviho věty dostaneme, že $v \in L^q$ a $\|v\|_q \le \|f\|$. Opačný odhad norem plyne snadno z Hölderovy nerovnosti.

13.18. Poznámka. Předchozí věta, která vlastně popisuje duální prostory k L^p pro $1 < p < \infty$, byla dokázána pomocí Radon-Nikodýmovy věty a nezbylo tedy než omezit se na případ σ-konečných měr. Uvedená věta však platí pro zcela libovolné míry.

Podobně lze dokázat, že libovolný prvek prostoru L^∞ určuje předpisem jako v 13.17.a spojitou lineární formu na L^1, avšak ne každý prvek duálu k L^1 je tohoto tvaru. Abychom mohli prvky duálu k L^1 charakterizovat pomocí prvků z L^∞, je třeba se omezit kupříkladu na případ σ-konečných měr. Jeden z možných popisů duálu k $L^1(\mu)$ v případě zcela obecné míry μ lze nalézt u J. Schwartze [1951].

Předpoklady kladené na míry v Radon-Nikodýmově větě z poznámky 13.6.1 lze ještě zobecnit na případ tzv. *lokalizovatelných* měr. Tento koncept, zahrnující v sobě případ jak σ–konečných měr tak i případ Radonových měr z dalších kapitol, byl zaveden I.E. Segalem v [1954] a lze se o něm dočíst třeba v knize M.M. Rao [*1987].

Poznamenejme ještě, že duály k prostorům L^∞ lze popsat pomocí (omezených) konečně aditivních měr, viz třeba knihu E. Hewitt and K. Stromberg [*1965].

13.19. Historické poznámky. Radon-Nikodýmova věta byla poprvé dokázána H. Lebesgueem [1910] (proto se někdy i jeho jméno připojuje k názvu této věty) pro případ měr absolutně spojitých vzhledem k Lebesgueově míře, později byla zobecněna M.J. Radonem [1913] na případ Radonových měr a O. Nikodýmem [1930] pro míry v abstraktních prostorech. Lebesgueův rozklad v případě obecných měr je v Saksově monografii [*1937]. Existují různé důkazy Radon-Nikodýmovy věty. Jeden z nich je založen na Hahnově rozkladu, modernější, využívající Rieszovy věty o reprezentaci funkcionálů na Hilbertových prostorech, pochází od J. von Neumanna. Náš důkaz využívá variační princip a je blízký von Neumannovu.

V klasickém případě Lebesgueovy míry náleží charakteristika duálů k L^p-prostorům pro $p > 1$ F. Rieszovi [1910] a v případě $p = 1$ H. Steinhausovi [1919].

C. RADONŮV INTEGRÁL A MÍRA

14. Radonův integrál a Radonova vnější míra

14.1. Radonův integrál. V této kapitole P značí lokálně kompaktní topologický prostor. Můžeme si představovat, že P je otevřená nebo uzavřená podmnožina $\mathbf{R}^n$ – to jsou pro nás nejdůležitější příklady lokálně kompaktních prostorů.

Nosičem funkce f rozumíme uzávěr množiny $\{x \in P : f(x) \neq 0\}$. Značíme jej $\operatorname{supt} f$.

Je-li $K \subset P$ kompaktní množina, symbolem $\mathcal{C}_K(P)$ značíme vektorový prostor všech spojitých funkcí na P s nosičem v K. Dále značíme $\mathcal{C}_c(P)$ množinu všech spojitých funkcí na P s kompaktním nosičem, tj. $\mathcal{C}_c(P) = \bigcup\{\mathcal{C}_K(P)\colon K \subset P$ je kompaktní $\}$. Je-li prostor P kompaktní, splývá $\mathcal{C}_c(P)$ s prostorem $\mathcal{C}(P)$ všech spojitých funkcí na P.

Říkáme, že funkcionál A na $\mathcal{C}_cP$ je *nezáporný*, jestliže $Af \geq 0$, kdykoliv $f \geq 0$, a *monotonní*, jestliže $Af \leq Ag$, jakmile $f \leq g$. Zřejmě každý lineární funkcionál je nezáporný, právě když je monotonní (pro nelineární funkcionály jsou to různé pojmy).

Radonovým integrálem na P rozumíme každý nezáporný lineární funkcionál na prostoru $\mathcal{C}_c(P)$.

14.2. Příklady. (a) Fixujme pevně bod $a \in P$. Lehko ověříme, že zobrazení

$$\varepsilon_a : f \mapsto f(a)\,, \quad f \in \mathcal{C}_c(P)$$

je Radonův integrál na $\mathcal{C}_c(P)$. Tomuto funkcionálu též budeme říkat *Diracův integrál* v bodě a.

(b) Funkcionál

$$Af := \int_a^b f$$

je Radonův integrál na $\mathcal{C}([a,b])$. (Pod integrálem vpravo si můžeme představit třeba Newtonův či Riemannův integrál; jelikož f je spojitá, $\int_a^b f$ vždy existuje.)

(c) Předchozí příklad můžeme zobecnit. Je-li φ neklesající funkce na $\mathbf{R}$ a $[a,b] \subset \mathbf{R}$, můžeme položit

$$\begin{aligned} A_\varphi f = (RS)\int_a^b f\,d\varphi := \inf\{\sum_{i=1}^n c_i(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}))\,:\\ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,\ c_i \geq f \text{ na } [x_{i-1}, x_i]\} \end{aligned}$$

pro každou $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Funkcionál A_φ je Radonův integrál a nazývá se *Riemann-Stieltjesův integrál*. Pro $\varphi(x) = x$ splývá s obyčejným Riemannovým integrálem.

(d) Riemannův integrál, či obecněji Riemann-Stieltjesův integrál, definujeme i pro funkce z $\mathcal{C}_c(\mathbf{R})$. K tomu využijeme pozorování, že $\int_a^b f\,d\varphi = \int_c^d f\,d\varphi$, kdykoli $f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{R})$, $\operatorname{supt} f \subset [a,b] \cap [c,d]$. Je-li $f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{R})$, položme tedy $A_\varphi f = \int_a^b f\,d\varphi$, kde $[a,b]$ je libovolný interval obsahující nosič funkce f. Takto definovaný funkcionál A_φ je Radonův integrál na $\mathbf{R}$.

(e) Jako další příklad Radonova integrálu na P může sloužit funkcionál

$$f \mapsto \int_G f \circ \psi\, g\,,$$

kde g je spojitá nezáporná funkce na otevřené množině $G \subset \mathbf{R}^k$ a $\psi : G \to P$ je je spojité zobrazení. Do tohoto schématu se vejdou i následující důležité příklady (f) a (g).

(f) Nechť $G \subset \mathbf{R}^k$ je otevřená množina a $\psi : G \to \mathbf{R}^n$ je difeomorfní zobrazení. Potom Radonův integrál

$$f \mapsto \int_G f \circ \psi \sqrt{\det((\nabla\psi)^*\nabla\psi)}\,.$$

je vlastně (k-rozměrný) plošný integrál prvého druhu funkce f přes $\psi(G)$.

(g) Nechť $P = \{z \in \mathbf{R}^2 : |z| = 1\}$. Je-li f spojitá funkce na P a $x = (r\cos\omega,\, r\sin\omega)$, $|x| < 1$, položme

$$Af(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)f(\cos t, \sin t)}{1 - 2r\cos(t-\omega) + r^2}\,dt\,.$$

Není těžké nahlédnout, že zobrazení

$$f \mapsto Af(x)$$

je Radonův integrál na $\mathcal{C}(P)$.

Integrál definující $Af(x)$ se zove *Poissonův*. Hraje důležitou roli při řešení (parciální diferenciální) Laplaceovy rovnice $\triangle u = 0$. Funkce $f \mapsto Af(x)$ je totiž při pevné funkci f harmonická v kruhu $U = \{x \in \mathbf{R}^2; |x| < 1\}$ (tj. řeší tam Laplaceovu rovnici), přičemž navíc

$$\lim_{x\in U, x\to z} Af(x) = f(z)$$

pro každé $z \in P$.

Tento příklad je speciálním případem (e), avšak v teorii parciálních diferenciálních rovnic se studuje zobecnění, jehož převedení na příklad (e) ani cokoli podobného není obecně možné.

Důležitá vlastnost Radonova integrálu je popsána v následující větě.

14.3. Věta (Daniellova vlastnost). *Buď A Radonův integrál na P, $f_n \in \mathcal{C}_c(P)$, $f_n \searrow 0$. Potom $Af_n \to 0$.*

Důkaz. Nechť $\lim Af_n = b > 0$ ($\lim Af_n$ vždy existuje, proč?). Podle Diniho věty víme, že $f_n \rightrightarrows 0$ na P (uvažujte posloupnost $\{f_n\}$ na nosiči funkce f_1), existuje tudíž posloupnost $\{n_k\}$ tak, že $|f_{n_k}| \le \dfrac{1}{k^2}$ pro každé $k \in \mathbf{N}$. Řada $\sum f_{n_k}$ tedy konverguje stejnoměrně na P a položíme-li $f = \sum f_{n_k}$, jest $f \in \mathcal{C}_c(P)$ (odůvodněte!). Pro každé k jest pak ovšem

$$bk \le \sum_{i=1}^{k} Af_{n_i} = A(\sum_{i=1}^{k} f_{n_i}) \le Af\,,$$

odkud již lehko odvodíte spor. ∎

14.4. Polospojité funkce. Připomeňme, že funkce $f : P \to \overline{R}$ se nazývá *zdola polospojitá*, jestliže pro každé $c \in \mathbf{R}$ je množina $\{x \in P : f(x) > c\}$ otevřená. Obdobně definujeme shora polospojité funkce.

Označme $C_c^{\uparrow}(P)$ množinu všech zdola polospojitých funkcí na P, které jsou nezáporné vně některé kompaktní množiny a nenabývají hodnotu $-\infty$. Symetricky definujeme $C_c^{\downarrow}(P)$.

14.5. Rozšiřování Radonova integrálu. Nechť A je Radonův integrál na P. Pomocí A lze postupně definovat integrál pro širší a širší třídy funkcí.

1. Pro $f \in \mathcal{C}_c(P)$ samozřejmě definujeme $\int f = Af$.
2. Je-li $f \in C_c^{\uparrow}(P)$, definujeme $\int f = \sup\{\int g \colon g \in C_c(P), g \le f\}$.
3. Pro libovolnou funkci f na P položme

$$\int^* f = \inf\{\int u \colon u \in C_c^{\uparrow}(P), u \ge f\},$$

$$\int_* f = -\int^* (-f)\,.$$

4. Řekneme, že funkce f na P je *A-integrovatelná*, jestliže $\int_* f = \int^* f \in \mathbf{R}$, v tom případě společnou hodnotu označíme $\int f$.

14.6. Vlastnosti rozšířeného Radonova integrálu. Při rozšiřování Radonova integrálu je třeba dokázat, že v každém stadiu splývá "nový integrál" se "starým integrálem" pro funkce integrovatelné podle předchozích definic. Dále se odvodí, že

(a) $\int_* f \le \int^* f$ pro každou funkci f na P,

(b) množina všech konečných A-integrovatelných funkcí na P je vektorový prostor a $\int$ je na ní nezáporný lineární funkcionál,

(c) je-li f nezáporná borelovská funkce a $\int^* f < \infty$, potom f je A-integrovatelná.

14.7. Míra z rozšířeného Radonova integrálu. Buď $\mathfrak{M}_f(A)$ δ-okruh všech podmnožin P, jejichž charakteristická funkce je A-integrovatelná a $\mathfrak{M}(A)$ nejmenší σ-algebra obsahující $\mathfrak{M}_f(A)$. Potom zobrazení $\mu_A^* : E \mapsto \int^* c_E$ je vnější míra na P a zobrazení $\mu_A : E \mapsto \int^* c_E$ je míra na $\mathfrak{M}(A)$. Dále množina všech A-integrovatelných funkcí na P splývá s množinou všech μ_A-integrovatelných funkcí na P a pro každou takovou funkci f je $\int f = \int_P f\, d\mu_A$. Míra μ_A je úplná a má následující vlastnosti:

(a) definiční obor $\mathfrak{M}(A)$ míry μ_A obsahuje borelovskou σ-algebru $\mathcal{B}(P)$,
(b) $\mu_A K < \infty$ pro každý kompakt $K \subset P$,
(c) $\mu_A G = \sup\{\mu_A K : K \subset G, K \text{ kompakt }\}$ pro každou otevřenou množinu $G \subset P$,
(d) $\mu_A M = \inf\{\mu_A G : G \supset M, G \text{ otevřená }\}$ pro každou množinu $M \in \mathfrak{M}(A)$.

14.8. Příklady. (a) Je-li $z \in P$ a $Af = f(z)$ Diracův integrál v bodě z, potom je μ_A rovno Diracově míře v bodě z (podotkněme, že Diracova míra je definovaná na σ-algebře všech podmnožin P).

(b) Je-li A_φ Riemann-Stieltjesův funkcionál určený na $\mathbf{R}$ neklesající funkcí φ, nazveme příslušnou míru $\lambda_\varphi := \mu_{A_\varphi}$ *Lebesgue-Stieltjesovou mírou*. Ukažte, že v případě $\varphi(x) = x$ dostáváte Lebesgueovu míru.

(c) Je-li Radonův integrál určen Poissonovým integrálem z příkladu 14.2.g, nazývá se příslušná Radonova míra *harmonickou mírou* v bodě x.

14.9. Poznámka. Výklad problematiky uvedené v bodech 14.5 – 14.7 by se ovšem značně rozrostl, kdybychom každé vyslovené tvrzení dokazovali. V těchto skriptech půjdeme jinou cestou- existenci míry μ_A (tzv. Rieszovu větu o reprezentaci) dokážeme co nejpříměji a rozšíření Radonova integrálu na systém všech A-integrovatelných funkcí získáme rovnou jako $f \mapsto \int_P f\, d\mu_A$. Základní důkazové metody zůstanou stejné, nelze říci, že by volba té či oné cesty něco ušetřila.

14.10. Znaménkové a komplexní Radonovy integrály. Lineární funkcionál A na prostoru $\mathcal{C}_c(P)$ nazveme *znaménkovým Radonovým integrálem*, jestliže ke každé kompaktní množině K existuje konstanta a_K tak, že $|A(f)| \le a_K \sup_K |f|$ pro všechna $f \in \mathcal{C}_K(P)$. Obdobně definujeme *komplexní Radonovy integrály* na prostoru $\mathcal{C}_c(P, \mathbf{C})$ všech komplexních spojitých funkcí s kompaktních nosičem na P.

Příkladem znaménkového Radonova integrálu je každý rozdíl (nezáporných) Radonových integrálů. Brzy uvidíme, že vlastně všechny znaménkové Radonovy integrály lze vyjádřit ve tvaru rozdílu nezáporných Radonových integrálů.

14.11. Variace znaménkového Radonova integrálu. Nechť A je znaménkový nebo komplexní Radonův integrál na P. *Variací* A rozumíme (nezáporný) Radonův integrál $|A|$, který je definován v následujících krocích:

1. Je-li $f \in \mathcal{C}_c(P)$ nezáporná funkce, definujeme

$$|A|(f) = \sup\{Ag\colon g \in \mathcal{C}_c(P),\ |g| \le f\}\,.$$

Samozřejmě, $0 \le |A|(f) < +\infty$. Jsou-li f_1, $f_2 \in \mathcal{C}_c(P)$ nezáporné, je zřejmě $|A|(f_1 + f_2) \ge |A|(f_1) + |A|(f_2)$. K opačné nerovnosti použijeme Rieszovo lemma o rozkladu. Podle něj ke zvolené $g \in \mathcal{C}_c(P)$, $|g| \le f_1 + f_2$, existují g_1, $g_2 \in \mathcal{C}_c(P)$ tak, že $g = g_1 + g_2$, $|g_j| \le f_j$, $j = 1, 2$. Vskutku: hledané funkce jsou dány vzorci $g_j = f_j g (f_1 + f_2)^{-1}$ na množině $G := \{f_1 + f_2 > 0\}$ a dodefinovány nulou vně G. (Rozmyslete si, proč jsou spojité i v bodech ∂G !) Tedy $|A|(f_1) + |A|(f_2) \ge Ag_1 + Ag_2 = Ag$, odkud přechodem k supremu přes g dostáváme $|A|(f_1 + f_2) \le |A|(f_1) + |A|(f_2)$.

2. Je-li $f \in \mathcal{C}_c(P)$ libovolná, definujeme

$$|A|(f) = |A|(f^+) - |A|(f^-)\,.$$

Ze vzorce $f_1^+ + f_2^+ + (f_1 + f_2)^- = f_1^- + f_2^- + (f_1 + f_2)^+$ a výsledků předchozího kroku snadno dostaneme aditivitu funkcionálu $|A|$. Jelikož zřejmě $|A|(\gamma f) = \gamma |A|(f)$ pro každou $f \in \mathcal{C}_c(P)$ a každé $\gamma \in \mathbf{R}$, je funkcionál $|A|$ lineární.

14.12. Rozklad znaménkových a komplexních Radonových integrálů. Každý komplexní Radonův integrál lze bez potíží rozložit na reálnou a imaginární část, které jsou ovšem znaménkové Radonovy integrály. Je-li A znaménkový Radonův integrál, potom lze A vyjádřit ve tvaru $A = A^+ - A^-$, kde $A^+ := \frac{1}{2}(|A| + A)$ (*kladná variace*) a $A^- := \frac{1}{2}(|A| - A)$ (*záporná variace*) jsou nezáporné Radonovy integrály. Existuje více způsobů, jak rozložit znaménkový Radonův integrál na rozdíl nezáporných, ale rozklad na kladnou a zápornou variaci je “minimální” ve stejném smyslu, o jakém jsme hovořili u Jordanova rozkladu míry.

14.13. Cvičení (součin Radonových integrálů). Buďte A_1, A_2 Radonovy integrály na lokálně kompaktních prostorech P_1, P_2. Ukažte, že existuje právě jeden Radonův integrál A na $P_1 \times P_2$ tak, že

$$A\, f = A_1 f_1 \cdot A_2 f_2\,,$$

kdykoliv $f_1 \in \mathcal{C}_c(P_1)$, $f_2 \in \mathcal{C}_c(P_2)$ a $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2)$, $x_1 \in P_1$, $x_2 \in P_2$. Dokažte tvrzení i pro znaménkové a komplexní Radonovy integrály.

Návod. Podle Stone-Weierstrassovy věty je množina všech lineárních kombinací funkcí tvaru $f_1(x) \cdot f_2(y)$, kde $f_i \in \mathcal{C}_c(P_i)$, hustá v $\mathcal{C}_c(P_1 \times P_2)$.

14.14. Historické poznámky. Mnozí autoři při budování teorie integrálu nevycházejí z prvotního pojmu míry, ale uvažují nezáporné lineární funkcionály na jistém prostoru funkcí definovaných na zcela abstraktní množině a tento funkcionál pak jistou procedurou rozšíří na větší systém funkcí. Přesněji, začíná se s *Rieszovým svazem* $\mathcal{R}$ funkcí na množině X (což je lineární prostor funkcí uzavřený na tvoření konečných maxim a minim) a nezáporným lineárním funkcionálem na $\mathcal{R}$ splňujícím “Daniellovu podmínku”. Podobně jako v 14.5 se tento rozšíří, definuje se přirozeným způsobem míra a odvodí se její vlastnosti. Tuto metodu rozvinuli P.J. Daniell [1918] (pro rozšiřování používal posloupnosti funkcí) a M.H. Stone v sérii článků [1948] a [1949] (pomocí zobecněných posloupností). Podotkněme, že podobné přístupy se vyskytují v té či oné formě i u mnoha dalších autorů (W.H. Young [1904], H.H. Golstine [1941], J. Mařík [1952] a další).

Myšlenka rozšiřování Radonova integrálu náleží také mnoha autorům. Zdá se však, že to byli až bourbakisté, kteří ji rozpracovali pro obecné lokálně kompaktní prostory.

A ještě pár slov o tom, proč se mnozí autoři omezují na teorii integrace v lokálně kompaktních prostorech. Kakutaniho věta o reprezentaci (S. Kakutani [1941]) totiž říká, že ke každému “abstraktnímu” funkcionálu A na Rieszově svazu $\mathcal{R}$ existuje lokálně kompaktní prostor P_K a Radonův integrál A_K na něm, tak že příslušné prostory “integrovatelných” funkcí jsou izomorfní. Kakutaniho reprezentace má však i některé nevýhody - změnou výchozího funkcionálu se mění i prostor P a navíc, je-li výchozí prostor již sám lokálně kompaktní, může Kakutaniho reprezentace vést k jinému prostoru. Za předpokladu, že Rieszův svaz $\mathcal{R}$ na splňuje *Stoneovu podmínku* ($\min(1, f) \in \mathcal{R}$, když $f \in \mathcal{R}$), zkonstruoval H. Bauer v [1957] jinou reprezentaci (P_B, A_B), která překonává výše zmíněné nedostatky. Prostor P_B nezávisí na A; je-li $\mathcal{R}$ prostor všech spojitých funkcí s kompaktním nosičem na lokálně kompaktním prostoru P, lze ztotožnit P_B s P, $\mathcal{C}_c(P_B)$ s $\mathcal{R}$ a A_B s A.

Samozřejmě, žádná podobná reprezentace nemůže zachovat topologii na výchozím prostoru, pokud tento není lokálně kompaktní.

Mnoho prací se zabývá i integrováním v topologických prostorech bez předpokladu lokální kompaktnosti (kupříkladu v separabilních metrických prostorech), ale tam již souhra mezi topologickou strukturou a mírou není tolik plodná.

15. Radonova míra

15.1. Zavedení Radonovy míry. Vlastnosti míry μ_A z předchozí kapitoly (14.7) nás inspirují k následující definici.

Buď P lokálně kompaktní prostor a $\mathcal{B}(P)$ σ-algebra všech borelovských množin na P. Řekneme, že μ je *Radonova míra* na $(P, \mathcal{S})$, jestliže

(a) $\mathcal{S}$ je σ-algebra obsahující $\mathcal{B}(P)$,
(b) $\mu K < \infty$ pro každý kompakt $K \subset P$,
(c) $\mu G = \sup\{\mu K : K \subset G, K \text{ kompakt }\}$ pro každou otevřenou množinu $G \subset P$,
(d) $\mu A = \inf\{\mu G : G \supset A, G \text{ otevřená }\}$ pro každou množinu $A \in \mathcal{S}$.

Je-li μ úplná Radonova míra na $(P, \mathcal{S})$, pak μ i σ-algebra $\mathcal{S}$ jsou jednoznačně určeny hodnotami μ na $\mathcal{B}(P)$. V tom případě říkáme, že μ je úplná Radonova míra na P.

15.2. Poznámky. 1. Existuje vzájemně jednoznačná korespondence mezi Radonovými integrály a úplnými Radonovými měrami; Radonovu integrálu A odpovídá úplná Radonova míra μ_A a obráceně, je-li μ úplná Radonova míra, potom $\mu = \mu_A$, kde A je Radonův integrál $f \mapsto \int_P f\, d\mu$.

Příklady Radonových měr jsou vlastně opakováním příkladů Radonových integrálů.

2. Zúplnění Radonovy míry je zřejmě opět Radonova míra. Abychom získali představu o struktuře systému všech Radonových měr na P, můžeme zavést ekvivalenci: Dvě Radonovy míry nazveme ekvivalentní (aspoň pro účely této poznámky), jestliže se shodují na $\mathcal{B}(P)$. Uvědomte si, že dvě ekvivalentní Radonovy míry mají také stejné zúplnění a mohou se lišit jen definičním oborem $\mathcal{S}$, nikoli hodnotami na jednotlivých množinách. A tak v každé třídě ekvivalence najdeme dva význačné reprezentanty: "minimálního", definovaného právě na $\mathcal{B}(P)$, a "maximálního", který je úplný.

Borelovská σ-algebra má jednotící význam, jsou na ní definovány všechny "minimální" Radonovy míry, zatímco definiční obory úplných Radonových měr se mohou lišit. (Kupříkladu existují lebesgueovsky neměřitelné množiny, zatímco každá množina je měřitelná vzhledem k úplné Diracově míře z příkladu 14.8.a.)

3. Je nutno upozornit, že terminologie v literatuře je dost nejednotná, pokud jde o otázku, co je to Radonova míra a jaká σ-algebra je jejím definičním oborem. Radonovým měrám na $\mathcal{B}(P)$ se často říká *regulární borelovské míry*.

4. Předpokládejme, že prostor P je navíc metrizovatelný a separabilní a $\mathcal{S} = \mathcal{B}(P)$. Potom z vlastnosti (b) míry μ na $(P, \mathcal{S})$ plyne (c) a (d). Vskutku: každou otevřenou množinu lze v tom případě napsat jako sjednocení spočetně mnoha kompaktních množin, z toho dostaneme (c). Uvažujeme-li soubor všech borelovských množin A splňujících pro každou otevřenou množinu U

$$\mu(A \cap U) = \inf\{\mu G \colon G \supset A \cap U, G \text{ otevřená }\},$$

jde zřejmě o σ-algebru, obsahující všechny otevřené množiny, je tedy splněn i požadavek (d).

V dalším buď μ Radonova míra na $(P, \mathcal{S})$.

15.3. Lemma. *Je-li $E \in \mathcal{S}$, $\mu E < \infty$, potom*

$$\mu E = \sup\{\mu K \colon K \subset E,\ K \text{ kompaktní }\}.$$

Důkaz. Volme $\varepsilon > 0$. Potom existuje otevřená množina $G \supset E$ a kompaktní množina $K \subset G$ tak, že $\mu(G \setminus E) < \varepsilon$ a $\mu K > \mu G - \varepsilon$. Dále najděme otevřenou množinu V obsahující $G \setminus E$, pro niž $\mu V < \varepsilon$. Položíme-li $H = K \setminus V$, je H kompaktní a

$$E \setminus H \subset (E \cap K \setminus H) \cup (E \setminus K) \subset V \cup (G \setminus K)\,.$$

Tedy $\mu H > \mu E - 2\varepsilon$. ■

15.4. Lemma. *Nechť $f \geq 0$ je μ-integrovatelná funkce na P. Potom*

(a) $$\int_P f\,d\mu = \inf\{\int_P g\,d\mu : g \in \mathcal{C}_c^{\uparrow}, g \geq f\},$$

(b) $$\int_P f\,d\mu = \sup\{\int_P h\,d\mu : h \in \mathcal{C}_c^{\downarrow}, 0 \leq h \leq f\}.$$

Důkaz. (a) Zvolme $\varepsilon > 0$. Najděme posloupnost $\{s_k\}$ jednoduchých funkcí, $0 \leq s_k \nearrow f$. Jelikož $f = s_1 + \sum\limits_{k=2}^{\infty}(s_k - s_{k-1})$, existují množiny $A_j \in \mathcal{S}$ a čísla $\alpha_j \geq 0$ tak, že $f = \sum\limits_{j=1}^{\infty}\alpha_j c_{A_j}$. Vzhledem k tomu, že f je μ-integrovatelná, je zřejmé, že $\mu A_j < \infty$ pro všechna j. Najdeme otevřené množiny $G_j \supset A_j$ tak, že $\mu(G_j \setminus A_j) < 2^{-j}\,\varepsilon$. Funkce $g = \sum\limits_{j=1}^{\infty}\alpha_j c_{G_j}$ je nezáporná, zdola polospojitá a

$$\int_P g\,d\mu \leq \int_P f\,d\mu + \varepsilon\,.$$

(b) Zřejmě stačí provést důkaz pro jednoduché funkce. Buď $f = \sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j c_{M_j}$ ($\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{R}_+$, $M_1, \dots, M_n \in \mathcal{S}$) μ-integrovatelná funkce (to znamená, že $\mu M_j < \infty$!). Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle lemmatu 15.3 najděme kompaktní množiny K_j $(j = 1, \dots, n)$ tak, že $K_j \subset M_j$ a

$$\mu K_j \geq \mu M_j - \frac{\varepsilon}{n\alpha_j}\,.$$

Potom funkce $h := \sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j c_{K_j}$ je shora polospojitá, má kompaktní nosič, splňuje $0 \leq h \leq f$ a

$$\int_P h\,d\mu \geq \int_P f\,d\mu - \varepsilon.$$

■

15.5. Věta. *Nechť μ je úplná Radonova míra na P. Funkce f na P je μ-integrovatelná, právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existují integrovatelné funkce $s \in \mathcal{C}_c^{\uparrow}$ a $t \in \mathcal{C}_c^{\downarrow}$ tak, že $t \leq f \leq s$ a*

$$\int_P (s - t)\, d\mu < \varepsilon\,.$$

Důkaz. Nejprve předpokládejme, že $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Najděme podle lemmatu nezáporné funkce $g \in \mathcal{C}_c^{\uparrow}$, $h \in \mathcal{C}_c^{\downarrow}$ tak, že $g \geq f^+$, $h \leq f^-$ a

$$\int_P g\, d\mu \leq \int f^+\, d\mu + \varepsilon\,, \quad \int_P h\, d\mu \geq \int_P f^-\, d\mu - \varepsilon.$$

Potom $s\colon = g - h \in \mathcal{C}_c^{\uparrow}$, $s \geq f$ a

$$\int_P s\, d\mu \leq \int f\, d\mu + 2\varepsilon.$$

Podobně můžeme najít $t \in \mathcal{C}_c^{\downarrow}$ tak, že $t \leq f$ a

$$\int_P t\, d\mu \geq \int f\, d\mu - 2\varepsilon.$$

Tím je dokázána jedna implikace.
Nyní předpokládejme, že ke každému $k \in \mathbf{N}$ existují integrovatelné funkce $s_k \in \mathcal{C}_c^{\uparrow}$ a $t_k \in \mathcal{C}_c^{\downarrow}$ tak, že $t_k \leq f \leq s_k$ a

$$\int_P (s_k - t_k)\, d\mu < \frac{1}{k}\,.$$

Přitom můžeme předpokládat, že posloupnost $\{s_k\}$ je nerostoucí (jinak ji nahradíme posloupností $\{s_1, \min(s_1, s_2), \min(s_1, s_2, s_3), \dots\}$) a posloupnost $\{t_k\}$ je neklesající. Podle Lebesgueovy věty je

$$\int_P \lim(s_k - t_k)\, d\mu = 0,$$

takže podle věty 8.16 je $\lim(s_k - t_k) = 0$ μ-skoro všude. Je tedy $\lim s_k = f$ μ-skoro všude a podle Lebesgueovy věty (majoranta $|s_1| + |t_1|$) je funkce f μ-integrovatelná. ■

15.6. Důsledek. *Nechť f je μ-integrovatelná funkce na P. Potom*

$$\int_P f\, d\mu = \inf\{\int_P s\, d\mu : s \in \mathcal{C}_c^{\uparrow}, s \geq f\}.$$

15.7. Cvičení. Konečná nezáporná míra μ na $(P, \mathcal{S})$ je Radonova, právě když pro každou $E \in \mathcal{S}$ a ke každému $\varepsilon > 0$ existuje kompaktní množina K a otevřená množina U tak, že $K \subset E \subset U$ a $\mu(U \setminus K) < \varepsilon$.

15.8. Znaménkové a komplexní Radonovy míry. *Znaménková míra* na $(P, \mathcal{S})$ je *Radonova*, jestliže její pozitivní a negativní variace jsou Radonovy míry. *Komplexní míra* na $\mathcal{S}$ je *Radonova*, jestliže její reálná a imaginární složka jsou znaménkové Radonovy míry.

Dokažte následující tvrzení: Buď P lokálně kompaktní prostor a μ komplexní míra na $(P, \mathcal{S})$. Následující výroky jsou ekvivalentní:

(i) μ je Radonova,
(ii) $|\mu|$ je Radonova,
(iii) ke každé množině $E \in \mathcal{S}$ a ke každému $\varepsilon > 0$ existuje kompaktní množina K a otevřená množina U tak, že $K \subset E \subset U$ a $|\mu A| < \varepsilon$ pro každou $\mathcal{S}$-měřitelnou množinu $A \subset U \setminus K$.

Návod. Použijte nerovnost

$$|\mu|(U \setminus K) \leq 4 \sup\{\mu A : A \in \mathcal{S},\ A \subset U \setminus K\}\,,$$

k jejímuž důkazu použijte rozklad jako v důkazu věty 6.11.

15.9. Cvičení. Buď μ Radonova míra na P. Dokažte, že sjednocení G libovolného systému otevřených množin μ-míry nula je opět otevřená množina μ-míry nula.

Návod. Buď $K \subset G$ kompaktní. Potom K lze pokrýt konečným počtem množin z uvažovaného systému a tudíž $\mu K = 0$. Z definice Radonovy míry (vlastnost (c)) plyne, že $\mu G = 0$.

15.10. Nosič Radonovy míry. Nechť μ je Radonova míra na P. Označme

$$\operatorname{supt}\mu = P \setminus \bigcup\{G : G \text{ otevřená}, \ \mu G = 0\}$$

a nazvěme tuto množinu *nosičem* míry μ. Je tedy $\operatorname{supt}\mu$ nejmenší uzavřená množina, jejíž doplněk má míru 0 (taková množina podle předchozího cvičení vždy existuje). Je-li μ znaménková nebo komplexní míra, její nosič definujeme jako nosič totální variace $|\mu|$.

(a) Buď μ nezáporná. Ukažte, že $z \in \operatorname{supt}\mu$, právě když pro každou nezápornou funkci $f \in \mathcal{C}_c(P)$ platí

$$f(z) > 0 \implies \int_P f \, d\mu > 0 \,,$$

a to je právě tehdy, když $\mu U > 0$ pro každé otevřené okolí U bodu z.

(b) Jsou-li μ_1, μ_2 Radonovy míry na P, je $\operatorname{supt}(\mu_1+\mu_2) \subset \operatorname{supt}\mu_1 \cup \operatorname{supt}\mu_2$. Jsou-li μ_1 a μ_2 dokonce nezáporné, platí rovnost.

15.11. Cvičení. Buď μ Radonova míra a E borelovská množina. Jestliže E je otevřená nebo má σ-konečnou míru, potom μ_E (viz 2.4) je Radonova míra.

15.12. Cvičení. Buď μ Radonova míra a f nezáporná μ-měřitelná funkce na P. Ukažte, že μ_f (viz 8.19) je Radonova míra v následujících případech:

(a) f je borelovská a μ_f je konečná na kompaktech,

(b) f je spojitá na P.

Návod. Použijte (a).

15.13. Cvičení. Buď μ Radonova míra a $f \in L^1(\mu)$. Ukažte, že μ_f je znaménková Radonova míra.

15.14. Cvičení. Nechť μ_0 je σ-konečná Radonova míra a $\mu = \mu_a + \mu_s$ je Lebesgueův rozklad konečné (i znaménkové či komplexní) Radonovy míry μ vzhledem k μ_0. Ukažte, že μ_a a μ_s jsou Radonovy míry.

Návod. Použijte cvičení 15.11.

15.15. Cvičení. (a) Ukažte, že tvrzení lemmatu 15.3 zůstává v platnosti, pokud množina E má pouze σ-konečnou míru (tj. je spočetným sjednocením množin konečné míry).

(b) Je-li Radonova míra μ σ-konečná, potom dokonce

$$\mu B = \sup\{\mu K\colon K \subset B, \ K \text{ kompaktní}\}$$

pro každou borelovskou množinu $B \subset P$. (Připomeňme, že na σ-kompaktním prostoru je každá Radonova míra σ-konečná. Každý lokálně kompaktní prostor se spočetnou bází otevřených množin je již metrizovatelný a σ-kompaktní.)

(c) Nechť P je kartézský součin $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_d$, kde $\mathbf{R}_d$ je $\mathbf{R}$ opatřené diskrétní topologií. Ukažte, že P je lokálně kompaktní prostor, který není σ-kompaktní.

Pro každou otevřenou množinu $G \subset P$ položme $\mu G = \sum\limits_{y \in \mathbf{R}_d} \lambda G_y$ (viz označení v 11.1) a rozšiřme μ na Radonovu míru na P.

Je-li $B := \{0\} \times \mathbf{R}_d$, je B borelovská množina, $\mu B = \infty$ a $\mu K = 0$ pro každou kompaktní množinu $K \subset P$.

15.16. Cvičení. (a) Nechť μ je Radonova míra na P, $K \subset P$ je kompakt. Potom $\{x \in K : \mu\{x\} > 0\}$ je spočetná. Speciálně, je-li μ Radonova míra na σ-kompaktním prostoru P, je $\{x \in P : \mu\{x\} > 0\}$ spočetná.

(b) Nechť μ je Radonova míra na $\mathbf{R}^n$. Potom množina $\big\{r > 0 : \mu\{x \in \mathbf{R}^n\colon |x| = r\} > 0\big\}$ je spočetná.

15.17. Cvičení. Buď μ Radonova míra na $(P, \mathcal{S})$, $p \in [1, \infty)$. Ukažte, že množina $\mathcal{C}_c(P)$ je hustá v $\mathcal{L}^p$.

Návod. S pomocí cvičení 10.10.a vidíme, že stačí aproximovat libovolnou množinu $E \in \mathcal{S}$ konečné míry funkcemi z $\mathcal{C}_K(P)$ v L^p-normě. Je-li tedy $\varepsilon > 0$, existuje otevřená množina G a kompaktní množina K (lemma 15.3) tak, že $K \subset E \subset G$ a $\mu(G \backslash K) < \varepsilon$. Nyní stačí použít Urysohnovo lemma a nalézt funkci $\varphi \in \mathcal{C}_c(P)$ tak, aby $c_K \le \varphi \le c_G$.

15.18. Cvičení. Radonovu míru μ na P nazveme *diskrétní* (někdy též *atomickou*), jestliže existuje množina $S \subset P$ tak, že $\mu(P \setminus S) = 0$ a $\mu\{x\} \ne 0$ pro každý bod $x \in S$. Dále, μ se zove *spojitá* (či *difuzní*), pokud $\mu\{x\} = 0$ pro každé $x \in P$.

(a) Ukažte, že komplexní Radonova míra μ na P je diskrétní, právě když existuje posloupnost čísel $\{c_j\}$ a body $x_j \in P$ tak, že $\sum\limits_j |c_j| < \infty$ a $\mu = \sum\limits_j c_j \varepsilon_{x_j}$. Porovnejte též se cvičením 2.10.

(b) Ukažte, že každou Radonovu míru μ lze psát jednoznačně jako součet $\mu = \mu_d + \mu_c$, kde μ_d je diskrétní a μ_s spojitá.

Návod. Položte $S := \{x \in P : \mu\{x\} > 0\}$, $\mu_d A = \mu(A \cap S)$ a $\mu_c A = \mu(A \setminus S)$ (využijte cvičení 15.16.a).

(c) Ukažte, že každou Radonovu míru μ na $\mathbf{R}^n$ lze psát jednoznačně

$$\mu = \mu_d + \mu_a + \mu_s,$$

kde μ_d je diskrétní, μ_s je spojitá, μ_a je absolutně spojitá vzhledem k Lebesgueově míře λ a μ_s a λ jsou singulární.

15.19. Cvičení. Buď μ σ-konečná Radonova míra na P, B borelovská podmnožina P.

(a) Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje otevřená množina G a uzavřená množina F tak, že $F \subset B \subset G$ a $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$. *Návod*. Nechť $B = \bigcup_j B_j$, kde množiny B_j mají konečnou míru. Nalezněte otevřené množiny $G_j \supset B_j$ tak, aby $\mu G_j < \mu B_j + \varepsilon 2^{-j}$ a položte $G = \bigcup_j G_j$. Obdobně naleznete množinu F (buď přechodem k doplňkům či využitím cvičení 15.15.b).

(b) Existuje F_σ-množina S a G_δ-množina D tak, že $S \subset B \subset D$ a $\mu(D \setminus S) = 0$. (Porovnejte též s větou 1.21.)

15.20. Historické poznámky. Podstatný krok od Lebesgueovy míry ke studiu obecnějších měr v eukleidovských prostorech učinil J. Radon [1913]. S jeho jménem je tedy svázán pojem Radonovy míry, i když, jak jsme se již zmínili, tento termín zcela nezdomácněl a mnozí autoři pro něj používají i další synonyma.

16. Rieszova věta o reprezentaci

V této kapitole se opět vrátíme ke vztahu mezi Radonovými měrami a Radonovými integrály na lokálně kompaktním prostoru P.

Nechť μ je Radonova míra na P. Potom zřejmě $\mathcal{C}_c(P) \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ a přiřazení

$$f \mapsto \int_P f \, d\mu\,, \qquad f \in \mathcal{C}_c(P)$$

je Radonův integrál na P.

Naopak, každý Radonův integrál A na P lze chápat jako integrál vzhledem k nějaké úplné Radonově míře. V kapitole 14 jsme naznačili jednu možnost, jak dokázat toto tvrzení, zde ukážeme jinou metodu a provedeme tentokrát celý důkaz. Cestou bude zapotřebí zkonstruovat Radonovu vnější míru μ_A^*, Radonovu míru μ_A a dokázat řadu pomocných tvrzení.

Symboly μ_A a μ_A^* označují tytéž objekty jako v kapitole 14, ale zatím to není vůbec zřejmé. Proto na definice z kapitoly 14 zatím "zapomeneme" a budeme se držet definic vyslovených v této kapitole.

V dalším A bude značit Radonův integrál na lokálně kompaktním prostoru P.

16.1. Radonova vnější míra. Je-li G otevřená podmnožina P, definujeme

$$\mu_A^*(G) = \sup\{Af : f \in \mathcal{C}_c(P), 0 \le f \le 1, f = 0 \text{ na } P \setminus G\}\,.$$

Hned vidíme, že množinová funkce μ_A^* je monotonní na otevřených množinách, můžeme tedy (korektně) definovat

$$\mu_A^*(E) = \inf\{\mu_A^*(G) : G \text{ otevřená}, G \supset E\}$$

pro libovolnou množinu E.

Množinovou funkci μ_A^* budeme nazývat *Radonovou vnější mírou* (příslušející Radonovu integrálu A). V následující větě dokážeme, že μ_A^* (kterou pro jednoduchost budeme značit pouze μ^*) je skutečně vnější míra, přičemž i další vlastnosti funkce μ^* jsou velmi důležité.

16.2. Věta (vlastnosti Radonovy vnější míry). *Nechť μ^* je Radonova vnější míra. Potom*

(a) $\mu^* K = \inf\{Ag\colon g \in \mathcal{C}_c(P),\ 0 \le g \le 1,\ g = 1 \text{ na } K\}$ pro každou kompaktní množinu $K \subset P$ (speciálně, vnější míra každé kompaktní množiny je konečná),

(b) $\mu^* G = \sup\{\mu^* K : K \text{ kompaktní},\ K \subset G\}$ pro každou otevřenou $G \subset P$,

(c) μ^* je vnější míra.

Důkaz. (a) Nechť $K \subset P$ je kompaktní a nechť $g \in \mathcal{C}_c(P)$, $0 \le g \le 1$, $g = 1$ na K. Volme $\varepsilon \in (0,1)$ a označme $G = \{x \in P : g(x) > 1-\varepsilon\}$. Zřejmě $K \subset G$. Je-li $f \in \mathcal{C}_c(P)$, $0 \le f \le 1$, $f = 0$ na $P \setminus G$, je $f \le \frac{1}{1-\varepsilon} g$, a tudíž $\mu^* G \le \frac{1}{1-\varepsilon} Ag$. Tedy

$$Ag \ge (1-\varepsilon)\mu^* G \ge (1-\varepsilon)\mu^* K$$

a vidíme, že $Ag \ge \mu^* K$. Tudíž

$$\mu^* K \le \inf\{Ag : g \in \mathcal{C}_c(P), 0 \le g \le 1, g = 1 \text{ na } K\}\,.$$

Opačná nerovnost však platí také - je-li totiž $G \supset K$ otevřená množina, existuje podle Urysohnova lemmatu funkce $g \in \mathcal{C}_c(P)$, $0 \le g \le 1$, $g = 0$ na $P \setminus G$ a $g = 1$ na K. Pro tuto funkci pak platí $Ag \le \mu^* G$ a závěr důkazu je nasnadě.

(b) Nechť $G \subset P$ je otevřená. Buď $f \in \mathcal{C}_c(P)$, $0 \le f \le 1$, $f = 0$ na $P \setminus G$ a zvolme $\varepsilon > 0$. Protože $f_k = \min(f, \frac{1}{k}) \searrow 0$, existuje podle Daniellovy vlastnosti $n \in \mathbf{N}$ tak, že $Af_n < \varepsilon$. Je-li $K = \{x \in P : f(x) \ge \frac{1}{n}\}$, je K kompaktní podmnožina P a podle (a) existuje funkce $g \in \mathcal{C}_c(P)$ tak, že $0 \le g \le 1$, $g = 1$ na K a $Ag \le \mu^* K + \varepsilon$. Protože $f - f_n \le g$ (odůvodněte!) dostáváme

$$Af \le Af_n + Ag \le \mu^* K + 2\varepsilon,$$

odkud již snadno plyne dokazovaná rovnost.

(c) Zřejmě $\mu^* \emptyset = 0$ a $\mu^* S \le \mu^* T$, kdykoliv $S \subset T$. Důkaz subaditivity (a posléze i σ-subaditivity) provedeme v několika krocích.

Nejprve uvažujme kompaktní množiny K_1, $K_2 \subset P$ a jejich sjednocení K. Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle věty 16.2.a najdeme funkce $f_j \in \mathcal{C}_c(P)$, $j = 1, 2$, tak, že $f_j = 1$ na K_j a $Af_j \le \mu^* K_j + \varepsilon$. Potom $\mu^* K \le A(f_1 + f_2) = Af_1 + Af_2 \le \mu^* K_1 + \mu^* K_2 = 2\varepsilon$. Na kompaktních množinách je tedy μ^* subaditivní.

Buďte nyní $G_1, G_2 \subset P$ otevřené a G jejich sjednocení. Zvolme kompaktní množinu $K \subset G$. Ke každému bodu $x \in K$ najdeme jeho okolí V, které leží i s uzávěrem v jedné z množin G_1, G_2. Z kompaktnosti K dostáváme, že existují konečné systémy otevřených množin $\{V_i^1\}_i$, $\{V_i^2\}_i$ tak, že $\overline{V}_i^j \subset G_j$ a $\bigcup\limits_i V_i^1 \cup \bigcup\limits_i V_i^2 \supset K$. Položme $K_j = K \cap \bigcup\limits_i \overline{V}_i^j$, $j = 1, 2$. Potom K_j jsou kompaktní množiny, $K_j \subset G_j$ a $K = K_1 \cup K_2$. Je tedy $\mu^* K \le \mu^* K_1 + \mu^* K_2 \le \mu^* G_1 + \mu^* G_2$ a přechodem k supremu přes K dostaneme subaditivitu μ^* na otevřených množinách.

Buď nyní $\{G_n\}$ posloupnost otevřených množin. Zvolme $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} G_i$ kompaktní. Potom $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_i$ pro vhodné $n \in \mathbf{N}$, a tedy

$$\mu^* K \le \mu^*(\bigcup_{i=1}^{n} G_i) \le \sum_{i=1}^{n} \mu^* G_i \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu^* G_i.$$

Podle (b) dostáváme, že $\mu^*(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} G_i) \le \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu^* G_i$.

Buďte konečně $E_n \subset P$ libovolné; chceme ukázat, že $\mu^*(\bigcup E_n) \le \sum \mu^* E_n$. Tato nerovnost je zřejmá pokud $\mu^* E_n = \infty$ pro některé $k \in \mathbf{N}$. Jsou-li všechna čísla $\mu^* E_n$ konečná, nalezneme k danému $\varepsilon > 0$ otevřené množiny G_n tak, aby $E_n \subset G_n$ a $\mu^* G_n < \mu^* E_n + 2^{-n}\varepsilon$. Potom

$$\mu^*(\bigcup E_n) \le \mu^*(\bigcup G_n) \le \sum \mu^* E_n + \varepsilon.$$

■

16.3. Věta. *Každá borelovská podmnožina P je (carathéodoryovsky) μ^*-měřitelná.*

Důkaz. Stačí dokázat měřitelnost otevřených množin (proč ?). Uvědomme si nejprve, že $\mu^*(G_1 \cup G_2) = \mu^* G_1 + \mu^* G_2$, jsou-li G_1, G_2 disjunktní otevřené množiny. Skutečně, jedna nerovnost plyne ihned z věty 16.2.c, druhá je snadným důsledkem definice. Zvolme otevřenou množinu $G \subset P$, testovací množinu $T \subset P$, pro niž $\mu^* T < \infty$ a $\varepsilon > 0$. (Doporučujeme kreslit obrázek.) Najdeme postupně otevřené množiny V a H tak, že $V \supset T$, $\mu^* V < \mu^* T + \varepsilon$ a $H \supset V \setminus G$, $\mu^* H < \mu^*(V \setminus G) + \varepsilon$. Dále najdeme kompaktní množinu $K \subset V \cap G$ tak, že $\mu^* K + \varepsilon > \mu^*(V \cap G)$ a otevřenou množinu W s kompaktním uzávěrem tak, aby $K \subset W \subset \overline{W} \subset V \cap G$. Položme $W_0 = V \cap H \setminus \overline{W}$. Potom W_0 je otevřená množina, $W \cap W_0 = \emptyset$, $W \cup W_0 \subset V$, $V \setminus G \subset W_0$ a $\mu^* W + \varepsilon > \mu^*(V \cap G)$. Tedy

$$\begin{aligned}\mu^*(T \cap G) + \mu^*(T \setminus G) &\le \mu^*(V \cap G) + \mu^*(V \setminus G) < \mu^* W + \varepsilon + \mu^* W_0 \\ &= \mu^*(W \cup W_0) + \varepsilon \le \mu^* V + \varepsilon < \mu^* T + 2\varepsilon\,.\end{aligned}$$

(Myšlenka důkazu je vlastně jednoduchá – spočívá v náhradě množin $T \cap G$ a $T \setminus G$ blízkými disjunktními otevřenými množinami.) ∎

16.4. Míra μ_A. Každému Radonovu integrálu A na lokálně kompaktním prostoru P jsme přiřadili Radonovu vnější míru μ^*_A. Carathéodoryova konstrukce nám dává σ-algebru $\mathfrak{M}_A$, na níž se μ^*_A chová jako úplná míra. Restrikci μ^*_A na $\mathfrak{M}_A$ budeme značit μ_A. Z předchozích výsledků plyne, že μ_A je úplná Radonova míra na $\mathfrak{M}_A$.

Následující věta podává odpověď na základní otázku kapitoly. Nazývá se *Rieszova věta o reprezentaci*, poznamenejme ovšem, že i další věty o reprezentaci nesou Rieszovo jméno.

16.5. Rieszova věta. *Buď A Radonův integrál na P. Potom existuje právě jedna úplná Radonova míra μ na P tak, že $\mathcal{C}_c(P) \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ a $Af = \int_P f\,d\mu$ pro každou funkci $f \in \mathcal{C}_c(P)$.*

Důkaz existence. Buď $\mu = \mu_A$. Potom μ je úplná Radonova míra. Je však třeba ještě dokázat, že

$$A\,f = \int_P f\,d\mu\,, \quad f \in \mathcal{C}_c(P)\,.$$

Není těžké si rozmyslet, že $\mathcal{C}_K(P) \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ a stačí tedy ověřit požadovanou rovnost – míra μ bude hledanou mírou.

Volme $f \in \mathcal{C}_K(P)$. Stačí se omezit na případ, kdy $0 \le f \le 1$. Buď ještě $n \in \mathbf{N}$ a označme

$$f_k := \min(f, \frac{k}{n}) \quad , \quad G_k := \{x \in P : f(x) > \frac{k}{n}\} \quad , \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Potom podle definice $\mu^* G$ a vlastností integrálu dostáváme (pro $k = 0, 1, \dots, n$)

$$\frac{1}{n}\mu G_k \le A(f_k - f_{k-1}) \le \frac{1}{n}\mu G_{k-1}$$

a také

$$\frac{1}{n}\mu G_k \le \int_P (f_k - f_{k-1}) \le \frac{1}{n}\mu G_{k-1}\,.$$

Tedy

$$\begin{aligned}|Af - \int_P f d\mu| &= |\sum_{k=1}^{n}(A(f_k - f_{k-1}) - \int_P (f_k - f_{k-1})d\mu)| \\ &\le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}(\mu G_{k-1} - \mu G_k) = \frac{1}{n}\mu G_0 = \frac{1}{n}\mu\{x \in P : f(x) > 0\}\,.\end{aligned}$$

Protože však $\mu\{x \in P : f(x) > 0\} < +\infty$, dostáváme $Af = \int_P f d\mu$.

Důkaz jednoznačnosti. Nechť μ je úplná Radonova míra na P uvedených vlastností. Je-li $G \subset P$ otevřená množina a $f \in \mathcal{C}_K(P)$ funkce splňující $0 \leq f \leq 1$, $f = 0$ na $P \setminus G$, máme

$$Af = \int_P f d\mu \leq \int_P c_G \, d\mu = \mu G.$$

Tedy $\mu_A G = \mu_A^* G \leq \mu G$. Podobně z věty 16.2.a plyne, že $\mu_A K \geq \mu K$ pro každou kompaktní množinu. Z regularity měr μ a μ_A tedy ihned plyne, že μ a μ_A splývají na otevřených podmnožinách P. Tudíž $\mu = \mu_A$ na systému všech borelovských množin a zúplnění borelovské Radonovy míry je již jednoznačné. ∎

16.6. Poznámka. Vraťme se k definici ekvivalence na systému Radonových měr, zavedené v poznámce 15.2. Předchozí věta (spolu s úvodním pozorováním této kapitoly) nám vlastně zaručuje vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi Radonovými integrály a třídami ekvivalentních Radonových měr, které můžeme reprezentovat úplnými Radonovými měrami na P (jako ve formulaci předchozí věty) nebo Radonovými měrami na $\mathcal{B}(P)$. V předchozí větě můžeme tedy nahradit úsek "právě jedna úplná Radonova míra na P" variantou "právě jedna Radonova míra na $\mathcal{B}(P)$".

16.7. Jiné prostory spojitých funkcí. Symbolem $\mathcal{C}_b(P)$ značíme Banachův prostor všech omezených spojitých funkcí na P s normou

$$\|f\| = \sup_{x \in P} |f(x)| \, .$$

Prostor

$$\mathcal{C}_0(P) := \{f \in \mathcal{C}(P) : \text{ ke každému } \varepsilon > 0 \text{ existuje kompaktní množina } K_\varepsilon \subset P \text{ tak, že } |f(x)| < \varepsilon \text{ pro všechna } x \text{ vně } K_\varepsilon\}$$

je uzávěrem množiny $\mathcal{C}_c(P)$ v $\mathcal{C}_b(P)$. Názorně si jej představujeme jako prostor všech spojitých funkcí na P "anulujících" se v "nekonečnu". Je-li μ konečná Radonova míra na P, potom zřejmě

$$f \mapsto \int_P f \, d\mu$$

je nezáporný lineární funkcionál na $\mathcal{C}_b(P)$ (a tudíž i na $\mathcal{C}_0(P)$). Opačné tvrzení platí pro prostor $\mathcal{C}_0(P)$ a je snadným důsledkem věty 16.5 (rozmyslete si, jakým způsobem je dostaneme):

Nechť A je nezáporný lineární funkcionál na $\mathcal{C}_0(P)$. Potom existuje právě jedna konečná úplná Radonova míra μ na P tak, že $\mathcal{C}_0(P) \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ a $Af = \int_P f \, d\mu$ pro každou funkci $f \in \mathcal{C}_0(P)$.

16.8. Cvičení. Buďte P, Q lokálně kompaktní prostory, h spojité zobrazení P na Q a μ Radonova míra na $(P, \mathcal{B}(P))$.

(a) Ukažte, že $f \circ h \in \mathcal{L}^1(\mu)$ pro každou funkci $f \in \mathcal{C}_c(Q)$, pokud kupř. $\mu P < +\infty$ anebo $h^{-1}(F)$ je kompakt pro každý kompakt $F \subset Q$.

(b) Ukažte, že zobrazení $A : f \mapsto \int_P f \circ h \, d\mu$, $f \in \mathcal{C}_c(Q)$, je Radonův integrál na Q.

(c) Podle Rieszovy věty existuje právě jedna Radonova míra μ' na $(Q, \mathcal{B}(Q))$ reprezentující A. Dokažte, že $\mu' = h(\mu)$ (značení zavedeno ve cvičení 8.23).

Návod. Ukažte, že $\mu'(K) = f(\mu)(K)$ pro každou kompaktní množinu K.

16.9. Součin Radonových měr. Uvažujme dva lokálně kompaktní topologické prostory P_1 a P_2. Jejich kartézský součin $P_1 \times P_2$ je opět lokálně kompaktní prostor, přičemž mají-li P_1 i P_2 spočetné báze (a jsou tedy metrizovatelné a separabilní), má i jejich součin $P_1 \times P_2$ spočetnou bázi.

Zajímá nás nyní součin dvou Radonových měr. V podstatě se můžeme setkat se dvěma problémy:

(1) obecně Radonova míra nemusí být σ-konečná a nelze tedy mluvit o součinu měr ve smyslu 11. kapitoly,

(2) vždy máme $\mathcal{B}(P_1) \otimes \mathcal{B}(P_2) \subset \mathcal{B}(P_1 \times P_2)$, ovšem obecně rovnost nemusí nastávat; tedy, i když původní Radonovy míry na P_1 a P_2 jsou σ-konečné, jejich součin nemusí být vůbec definován na $\mathcal{B}(P_1 \times P_2)$ a nelze tudíž mluvit o tom, že by byl Radonovou mírou.

V dalším ukážeme některé vztahy a naznačíme možnost, jak definovat (kartézský) součin Radonových měr.

(a) Nechť P_1, P_2 jsou lokálně kompaktní prostory se spočetnou bází (a tudíž automaticky metrizovatelné). Potom $\mathcal{B}(P_1 \times P_2) = \mathcal{B}(P_1) \otimes \mathcal{B}(P_2)$ a jsou-li μ_1, μ_2 Radonovy míry na $(P_1, \mathcal{B}(P_1))$, $(P_2, \mathcal{B}(P_2))$, je $\mu_1 \otimes \mu_2$ Radonova míra na $(P_1 \times P_2, \mathcal{B}(P_1 \times P_2))$.

Návod. Protože v tomto případě, jak zjistíme, $\mathcal{B}(P_1) \otimes \mathcal{B}(P_2) = \mathcal{B}(P_1 \times P_2)$, je $\mu_1 \otimes \mu_2$ definovaná na $\mathcal{B}(P_1 \times P_2)$. Jelikož $P_1 \times P_2$ má spočetnou bázi, stačí ověřit, že $\mu_1 \otimes \mu_2$ je konečná na kompaktech. Je-li však $K \subset P_1 \times P_2$ kompakt a jsou-li K_i projekce K na P_i, jsou K_1 a K_2 opět kompakty (spojitý obraz kompaktu je kompakt!) a $K \subset K_1 \times K_2$. Potom tedy

$$\mu_1 \otimes \mu_2 \,(K) \le \mu_1 \otimes \mu_2 \,(K_1 \times K_2) = \mu_1 K_1 \; \mu_2 K_2 < +\infty .$$

(b) Uvažujme nyní obecný případ, kdy P_1 a P_2 nemusí mít spočetnou bázi. Podle cvičení 14.13 najdeme Radonův integrál A na $P_1 \times P_2$ tak, že

$$A(f) = A_1 f_1 \cdot A_2 f_2$$

kdykoliv $f_1 \in \mathcal{C}_c(P_1)$, $f_2 \in \mathcal{C}_c(P_2)$ a $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2)$, $x_1 \in P_1$, $x_2 \in P_2$. Ukažte, že μ_A je jediná Radonova míra μ na $\mathcal{B}(P_1 \times P_2)$ splňující

$$\mu(E_1 \times E_2) = \mu_1 E_1 \, \mu_2 E_2 \,,$$

kdykoliv $E_1 \in \mathcal{B}(P_1)$ a $E_2 \in \mathcal{B}(P_2)$. Pokud navíc míry μ_1 a μ_2 jsou σ-konečné, ukažte, že

$$\mu_A(E) = (\mu_1 \otimes \mu_2) E$$

pro každou množinu $E \in \mathcal{B}(P_1) \otimes \mathcal{B}(P_2)$.

(c) S přihlédnutím k následujícímu odstavci 16.10 lze definovat bez problémů i součin dvou komplexních Radonových měr.

16.10. Reprezentace znaménkových a komplexních Radonových integrálů. (a) Nechť ν je Radonova míra na P a a je omezená borelovská funkce na P. Potom zobrazení

$$A : \; f \mapsto \int_P af \, d\nu$$

je komplexní Radonův integrál. Je-li navíc $\nu P < +\infty$, je A spojitý lineární funkcionál na prostoru $\mathcal{C}_0(P)$.

(b) Nechť μ je konečná znaménková, resp. komplexní Radonova míra na P. Potom zobrazení

$$A : \; f \mapsto \int_P f \, d\nu$$

je spojitý lineární funkcionál na prostoru $\mathcal{C}_0(P)$.

(c) Nechť A je komplexní Radonův integrál na P (znaménkové Radonovy integrály jsou zahrnuty jako zvláštní případ). Buď $\mu = \mu_B$, kde $B = |A|$ (viz 14.11). Potom existuje omezená borelovská funkce a (určená jednoznačně jako prvek $L^\infty(P, \mu)$) tak, že pro každou funkci $f \in \mathcal{C}_c(P)$ je $Af = \int_P af \, d\mu$. Navíc $|a| = 1$ μ-skoro všude.

Návod. Funkci a lze definovat lokálně, čímž převedeme úlohu na případ, že prostor P je kompaktní. Budeme postupovat analogicky jako v Radon-Nikodýmově větě: Funkcionál $F : u \mapsto Au$ je stejnoměrně spojitý na $\mathcal{C}(P)$ vzhledem k normě Hilbertova prostoru $L^2(P, \mu)$, lze jej tedy spojitě rozšířit na celý prostor L^2 a Rieszova věta o reprezentaci spojitých lineárních funkcionálů na Hilbertově prostoru dává existenci $a \in L^2$ tak, že $F(u) = \int au \, d\mu$ pro všechna $u \in L^2$. Trochu práce dá důkaz, že $a = 1$ skoro všude, viz např. knihu G.K. Pedersen [*1989].

(d) Nechť A je spojitý lineární funkcionál na $\mathcal{C}_0(P)$. Potom existuje právě jedna úplná konečná znaménková (resp. komplexní, podle toho, nad kterým tělesem uvažujeme prostor $\mathcal{C}_0(P)$) míra μ na P tak, že $\mathcal{C}_0(P) \subset \mathcal{L}^1(|\mu|)$ a $Af = \int_P f \, d\mu$ pro každou funkci $f \in \mathcal{C}_0(P)$.

16.11. Historické poznámky. Slavná věta 16.5 o reprezentaci byla dokázána v případě $P = [0, 1]$ F. Rieszem [1909b], spojité lineární funkcionály na prostoru $\mathcal{C}([0, 1])$ byly však reprezentovány funkcemi s konečnou variací pomocí Riemann-Stieltjesových integrálů. Další věty tohoto typu pak byly dokázány J. Radonem [1913] (pro případ kompaktních podmnožin $\mathbf{R}^n$), S. Banachem v dodatku k Saksově monografii [*1937] a S. Saksem [1938] (pro kompaktní metrické prostory), S. Kakutanim [1941]. Rieszova věta pro kompaktní prostory a metoda konstrukce Radonovy míry přímo z Radonova integrálu náleží J. von Neumannovi [1934] a pro lokálně kompaktní prostory byla známa i A. Weilovi [*1940]. Nicméně verze pro lokálně kompaktní prostory byla vypracována teprve skupinou Bourbaki (jejímž členem byl i A. Weil) ve 40. letech a objevila se v [*1952].

17. Konvergence posloupnosti měr

Symbolem $\mathcal{M}(P)$ budeme značit lineární prostor všech znaménkových Radonových integrálů na lokálně kompaktním prostoru P. Jeho podmnožinou je systém $\mathcal{M}^+(P)$ všech (nezáporných) Radonových integrálů na P. Pokud nebude hrozit nedorozumění, nebudeme příliš rozlišovat mezi Radonovým integrálem A a Radonovou mírou μ_A, tedy pro $\mu \in \mathcal{M}^+(P)$ budeme psát $\mu(f)$ ($f \in \mathcal{C}_c(P)$) i μE ($E \subset P$ μ-měřitelná).

Tato kapitola je spíše informativní, důkazy budeme uvádět pouze u vybraných tvrzení.

17.1. Slabé a silná konvergence. Nechť $\mathcal{F}$ je lineární podprostor prostoru $\mathcal{C}(P)$ všech spojitých funkcí na P obsahující $\mathcal{C}_c(P)$. Řekneme, že posloupnost μ_j Radonových integrálů na P konverguje *$\mathcal{F}$-slabě* k Radonovu integrálu μ, jestliže pro každou funkci $f \in \mathcal{F}$ konverguje $\int_P f\,d\mu$ a je limitou konvergentních integrálů $\int_P f\,d\mu_j$. $\mathcal{F}$-slabá limita, existuje-li, je určena jednoznačně.

Nejdůležitějším případem je $\mathcal{C}_c(P)$-slabá konvergence, kterou nazýváme *vágní* konvergence. Situaci, kdy μ je vágní limitou μ_j, značíme $\mu_j \xrightarrow{v} \mu$.

Z hlediska funkcionální analýzy by se mělo, striktně vzato, hovořit o slabé* konvergenci, ovšem v případě prostorů měr bývá zvykem hvězdičku neuvádět. Situace je totiž taková, že různé prostory měr jsou duály k různým prostorům spojitých funkcí. Je-li takovýto prostor $\mathcal{F}$ vybaven normou (či obecněji lokálně konvexní topologií), lze zavést na jeho duálu $\mathcal{F}^*$ *$\mathcal{F}$-slabou* topologii tak, že $\mathcal{F}$-slabá konvergence měr je vlastně konvergence v této ($\mathcal{F}$-slabé) topologii.

Ovšem prostor $\mathcal{F}^*$ až na málo zajímavé výjimky není metrizovatelný, takže nelze říci, že by $\mathcal{F}$-slabá topologie byla popsána pomocí konvergence posloupností a obecně bychom museli uvažovat k jejímu popisu zobecněné posloupnosti neboli nety.

Množina $\mathcal{M}^+(P)$ je metrizovatelná v $\mathcal{C}(P)$-slabé topologii kupříkladu v případě, že P je metrický kompakt.

Funkcionální analýza nabízí také tzv. *silnou konvergenci* měr.

Nejdůležitějším případem konvergence silného typu je konvergence $\|\mu_j - \mu\| \to 0$ na prostoru $\mathcal{M}_b(P)$ všech konečných znaménkových (resp. komplexních) Radonových měr. Norma $\|\mu\|$ definovaná jako $|\mu|(P)$ (podobně jako v 6.17) je vlastně duální norma k prostoru $\mathcal{C}_0(P)$ a $\mathcal{M}_b(P)$ s touto normou je Banachův prostor.

17.2. Srovnání slabých konvergencí. V této poznámce se budeme věnovat otázce, kdy z vágní konvergence $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$ plyne $\mathcal{F}$-slabá konvergence pro širší prostor “testovacích” funkcí. Důkazy uvedených tvrzení využívají hlubší Banach-Steinhausovu větu z funkcionální analýzy.

(a) Posloupnost μ_n konverguje $\mathcal{C}_0(P)$-slabě k μ, právě když $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$ a posloupnost $\{\|\mu_n\|\}$ je omezená.

(b) *Slabou* konvergencí se většinou míní $\mathcal{C}_b(P)$-slabá konvergence, kde $\mathcal{C}_b(P)$ značí množinu všech spojitých a omezených funkcí na P. Posloupnost μ_n komplexních měr z $\mathcal{M}_b(P)$ konverguje slabě k míře $\mu \in \mathcal{M}_b(P)$, právě když $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$ a pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $K \subset P$ kompaktní tak, že $|\mu_j|(P \setminus K) < \varepsilon$ pro všechna j.

Posloupnost μ_n nezáporných měr z $\mathcal{M}_b^+(P)$ konverguje slabě k míře $\mu \in \mathcal{M}_b^+(P)$, právě když $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$ a $||\mu_n|| \to ||\mu||$.

(c) Uvědomte si, že ze slabé konvergence plyne $\mathcal{C}_0(P)$-konvergence, a z té zas vágní konvergence. Je-li prostor P kompaktní, je $\mathcal{C}_b(P) = \mathcal{C}_c(P) = \mathcal{C}(P)$, a tudíž není mezi těmito druhy slabé konvergence žádný rozdíl.

17.3. Příklady.

(a) Nechť $x_n \to x$. Potom $\varepsilon_{x_n} \xrightarrow{v} \varepsilon_x$.

(b) Nechť x_n je posloupnost, z níž nelze vybrat konvergentní (např. si představme $P = \mathbf{R}$ a $x_n = n$), a α_n je posloupnost reálných čísel. Potom posloupnost $\{\alpha_n \varepsilon_{x_n}\}$ konverguje vágně k nulové míře. Tato posloupnost konverguje (k nulové míře) $\mathcal{C}_0(P)$-slabě, právě když α_n je omezená posloupnost, a slabě, právě když $\alpha_n \to 0$.

(c) Nechť $x_n \to z$, $y_n \to z$, $x_n \neq y_n$. Potom $\varepsilon_{x_n} - \varepsilon_{y_n} \xrightarrow{v} 0$, ačkoli $\|\varepsilon_{x_n} - \varepsilon_{y_n}\| \to 2 \neq 0$.

(d) Je-li f spojitá funkce na intervalu $[0,1]$, pak

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} f(\frac{i}{k}),$$

což je jedna z možných variant definice Riemannova integrálu (kterou však nelze použít pro definici třídy riemannovsky integrovatelných funkcí). Uvedenou rovnost můžeme interpretovat v jazyce slabé konvergence měr

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_{\frac{i}{k}} \xrightarrow{v} \lambda_{[0,1]}.$$

Z uvedených příkladů je vidět, že ze slabé či vágní konvergence (na rozdíl od silné konvergence – srov. cvičení 6.18) μ_n k μ neplyne $\mu_n(A) \to \mu(A)$ pro všechny (borelovské) množiny. Platí však následující věta. Pro jednoduchost ji uvádíme na kompaktním prostoru, ale různé její varianty platí i na lokálně kompaktních prostorech.

17.4. Věta. *Nechť P je kompaktní prostor, $\mu_n, \mu \in \mathcal{M}^+(P)$, $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$.*

(a) Pro každou zdola polospojitou zdola konečnou funkci u na P je

$$\int_P u\,d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_P u\,d\mu_n\,.$$

(b) Je-li f omezená borelovská funkce na P spojitá μ-skoro všude, potom

$$\int_P f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_P f\,d\mu_n\,.$$

(c) Pro každou otevřenou množinu $G \subset P$ je $\liminf \mu_n(G) \ge \mu(G)$.

(d) Pro každou kompaktní množinu $K \subset P$ je $\limsup \mu_n(K) \le \mu(K)$.

(e) Je-li A borelovská množina, pro niž $\mu(\partial A) = 0$, pak $\mu_n(A) \to \mu(A)$.

Důkaz. (a) je snadný důsledek definice.

(b) Definujme funkce f^*, f_* jako v 7.9.b. Jestliže $f^* = f_*$ μ-skoro všude, pak f je μ-měřitelná a

$$\int_P f\,d\mu = \int_P f_*\,d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_P f_*\,d\mu_n \le \liminf_{n\to\infty} \int_P f\,d\mu_n$$
$$\le \limsup_{n\to\infty} \int_P f\,d\mu_n \le \limsup_{n\to\infty} \int_P f^*\,d\mu_n \le \int_P f^*\,d\mu \le \int f\,d\mu\,.$$

(c),(d) a (e) dostaneme z (a) a (b), aplikujeme-li je na charakteristické funkce. ■

17.5. Poznámka. Srovnejte větu 17.4 se známým výsledkem, podle něhož je omezená funkce f riemannovsky integrovatelná, právě když množina jejích bodů nespojitosti má míru nula (viz 7.9.d). Lze dokázat, že omezená borelovská funkce f je riemannovsky integrovatelná na $[0,1]$, právě když pro každou posloupnost μ_j nezáporných měr konvergující slabě k λ na $[0,1]$ je $\int_{[0,1]} f\,d\mu_j \to \int_0^1 f\,d\lambda$.

17.6. Cvičení. Nechť $\mu_n, \mu \in \mathcal{M}^+(P)$. Potom $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$, právě když

(a) $\limsup \mu_n(K) \le \mu(K)$ pro každou kompaktní množinu $K \subset P$

a

(b) $\liminf \mu_n(G) \ge \mu(G)$ pro každou otevřenou množinu $G \subset P$.

17.7. Molekulární míry. Řekneme, že Radonova míra ν je *molekulární*, existují-li body $x_1, ..., x_k \in P$ a nezáporná čísla $\alpha_1, ..., \alpha_k$ tak, že $\nu = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \varepsilon_{x_i}$. Jak jsme viděli, zavedení Riemannova integrálu úzce souvisí se slabou aproximací "spojité" Lebesgueovy míry pomocí "diskrétních" molekulárních měr. Podobně lze slabě aproximovat i obecnější míry.

17.8. Věta. *Nechť μ je (nezáporná) Radonova míra na metrickém kompaktu P. Potom existuje posloupnost molekulárních měr $\{\mu_n\}$ tak, že $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$.*

Důkaz. Důkaz jen naznačíme. Použijeme kompaktnost P a ke každému $k \in \mathbf{N}$ najdeme konečný systém $\{M_k^i\}$ neprázdných po dvou disjunktních množin tak, aby jejich sjednocení bylo P a $\operatorname{diam} M_k^i \le 2^{-k}$. Zvolme body $x_k^i \in M_k^i$ a položme

$$\mu_k = \sum_i \mu(M_k^i)\varepsilon_{x_k^i}\,.$$

■

17.9. Poznámka. Důkaz předchozí věty lze vést jako pěknou aplikaci Krejn-Milmanovy věty či věty o bipoláře. Obě věty však již patří mezi hlubší věty funkcionální analýzy.

Také následující věta má interpretaci v řeči funkcionální analýzy: Uvažujeme-li na duálu slabou* topologii, je každá omezená množina sekvenciálně relativně kompaktní.

17.10. Věta. *Nechť P je metrický kompakt a $\{\mu_n\}$ je posloupnost komplexních Radonových měr na P. Jestliže $\sup_n \|\mu_n\| < +\infty$, pak existuje slabě konvergentní posloupnost vybraná z $\{\mu_n\}$.*

Důkaz. Použijeme tzv. diagonální metodu. Víme, že prostor $\mathcal{C}(P)$ je separabilní, tedy uvažujme posloupnost $\{f_k\}$ funkcí z $\mathcal{C}(P)$, která je v tomto prostoru hustá. Nyní konstruujeme postupně posloupnost posloupností měr μ_n^k tak, že $\mu_n^0 = \mu_n$ a každá $\{\mu_n^k\}_n$ ($k \geq 1$) je vybraná z posloupnosti $\{\mu_n^{k-1}\}_n$ tak, aby číselná posloupnost $\{\mu_n^k(f_k)\}_n$ byla konvergentní. To nám umožňuje Bolzano-Weierstrassova věta, neboť číselná posloupnost $\{\mu_n^{k-1}(f_k)\}_n$ je omezená. Položme $\nu_n = \mu_n^n$. Posloupnost $\{\nu_n\}$ je vybraná z posloupnosti μ_n a navíc pro každé k je posloupnost $\{\nu_n\}_{n\geq k}$ vybraná z posloupnosti $\{\mu_n^k\}_n$, takže posloupnosti $\{\nu_n(f_k)\}_n$ jsou konvergentní. Zvolme $f \in \mathcal{C}(P)$ a $\varepsilon > 0$. Najděme $g \in \{f_k\}$ tak, že $\|f - g\| \leq \varepsilon$ a n_0 tak, že pro všechna $i, j \geq n_0$ je $|\nu_i(g) - \nu_j(g)| < \varepsilon$. Potom pro všechna $i, j \geq n_0$ dostáváme z trojúhelníkové nerovnosti

$$|\nu_i(f) - \nu_j(f)| \leq (1 + 2\sup_n \|\mu_n\|)\,\varepsilon\,.$$

Posloupnost $\{\nu_n(f)\}$ je tedy cauchyovská a tudíž konvergentní. Definujme funkcionál μ na $\mathcal{C}(P)$ předpisem

$$\mu f = \lim_{n\to\infty} \nu_n(f)\,.$$

Rutinním výpočtem ověříme, že μ je Radonův integrál na P a μ je slabou limitou ν_n. ∎

17.11. Cvičení. Nechť P je metrický kompakt. Jestliže μ_n konvergují slabě k μ, potom

$$||\mu|| \leq \liminf ||\mu_n||$$

(v řeči funkcionální analýzy, norma je slabě polospojitá funkce na P).

17.12. Historické poznámky. Teorie slabé konvergence pravděpodobnostních měr byla motivována z teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky (viz třeba P. Billingsley [*1968]) a vedla samozřejmě ke studiu slabých topologií na různých podprostorech Radonových měr. Ve funkcionální analýze se setkáváme jak s aplikacemi slabé konvergence, tak i s dalšími zobecněními. Jedním z nich je i pojem vágní konvergence, který, zdá se, byl poprvé systematicky studován bourbakisty (viz druhé vydání jejich monografie). Vágní konvergence opět není nic jiného než slabá topologie na prostoru měr určená induktivní topologií na prostoru $\mathcal{C}_c(P)$. Věta 17.10 je pak speciálním případem obecné Alaoglu–Bourbakiho věty.

18. Luzinova věta

V případě, kdy na prostoru s mírou je zadána také metrická (či obecněji topologická) struktura, vzniká přirozená otázka, zda existuje nějaký bližší vztah mezi měřitelností a spojitostí funkcí. O tom, že tomu tak vskutku je v případě úplné Radonovy míry μ na lokálně kompaktním topologickém prostoru P, svědčí následující věty.

18.1. Věta. *Nechť f je μ-skoro všude konečná funkce na P. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) *f je μ-měřitelná,*
(ii) *ke každému $\varepsilon > 0$ a každé kompaktní množině $K \subset P$ lze najít (dokonce otevřenou) množinu G tak, že $\mu G < \varepsilon$ a $f_{|K\setminus G}$ je spojitá,*
(iii) *ke každému $\varepsilon > 0$ a každé kompaktní množině $K \subset P$ existuje spojitá funkce φ na P tak, že*
$$\mu\{x \in K : f(x) \neq \varphi(x)\} < \varepsilon\,,$$
(iv) *pro každou kompaktní množinu $K \subset P$ existuje posloupnost $\{\varphi_n\}$ spojitých funkcí na P tak, že*
$$\varphi_n \to f \qquad \mu\text{-skoro všude na } K\,.$$

Důkaz. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Buď $\{U_j\}$ spočetná báze topologie na $\mathbf{R}$ (například posloupnost všech intervalů s racionálními konci). Zvolme $\varepsilon > 0$ a kompaktní množinu $K \subset P$. Existují otevřené množiny $G_j \subset P$ a kompaktní množiny $F_j \subset P$ tak, že

$$F_j \subset K \cap f^{-1}(U_j) \subset G_j \quad \text{a} \quad \mu(G_j \setminus F_j) < 2^{-j}\varepsilon\,.$$

Položme $G = \bigcup(G_j \setminus F_j)$. Zřejmě množina G je otevřená a $\mu G < \varepsilon$. Označme $Y = K \setminus G$ a zvolme index j pevně. Potom $Y \cap G_j = Y \cap F_j$, tedy

$$Y \cap f^{-1}(U_j) = Y \cap G_j \,,$$

což je otevřená podmnožina Y. Tedy funkce $f_{|Y}$ je spojitá.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Volme opět $\varepsilon > 0$ a nalezněme otevřenou množinu $G \subset P$ pro niž $\mu G < \varepsilon$ a funkce $f_{|K\setminus G}$ je spojitá. Podle Tietzeovy věty existuje spojitá funkce φ na P taková, že $f = \varphi$ na $K \setminus G$.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv): Nalezněme spojité funkce φ_k na P tak, aby $\mu E_k < 2^{-k}$, kde $E_k = \{x \in K : f(x) \neq \varphi_k(x)\}$. Je-li nyní

$$E := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k \quad (= \limsup E_k)\,,$$

je $\mu E = 0$ (obvyklý trik – Borel-Cantelliovo lemma 2.14). Pokud je nyní $x \in K \setminus E$, existuje n_0 tak, že $x \notin E_n$ pro $n \geq n_0$. Tudíž $\varphi_n(x) \to f(x)$ pro $x \in K \setminus E$.

Důkaz zbývající implikace (iv) $\Longrightarrow$ (i) je zřejmý. ■

V "rozumných" lokálně kompaktních prostorech máme následující větu.

18.2. Věta. *Předpokládejme, že lokálně kompaktní prostor P je σ-kompaktní (sjednocení spočetně mnoha kompaktních množin). Nechť f je μ-skoro všude konečná funkce na P. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) *f je μ-měřitelná,*

(ii) *ke každému $\varepsilon > 0$ lze najít (dokonce otevřenou) množinu G tak, že $\mu G < \varepsilon$ a $f_{|P\setminus G}$ je spojitá,*

(iii) *ke každému $\varepsilon > 0$ existuje spojitá funkce φ na P a otevřená množina G tak, že $\mu G < \varepsilon$ a $f = g$ na $P \setminus G$,*

(iv) *existuje posloupnost $\{\varphi_n\}$ spojitých funkcí na P tak, že*

$$\varphi_n \to f \qquad \mu\text{-skoro všude na } P\,.$$

Důkaz. Tato věta je snadným důsledkem předchozí. ■

18.3. Poznámky. 1. Ekvivalence (i)$\Leftrightarrow$(ii) bývá nazývána *Luzinova věta*.

2. Uvědomte si, že měřitelná funkce nemusí být spojitá v *žádném bodě*(!) (uvažujte kupř. Dirichletovu funkci na $\mathbf{R}$), v Luzinově větě jde řeč o spojitosti *restringované* funkce, vynecháme-li "malou" množinu. Co se týče spojitosti ve všech bodech až na množinu míry nula, charakterizaci této situace ve speciálním případě intervalu $[0,1]$ jsme popsali v 7.9 a 17.5.

3. Obecně neplatí, že měřitelná funkce by musela být "spojitá", vynecháme-li pouze množinu míry nula. Uvažujte např. charakteristickou funkci "diskontinua kladné míry" (viz 1.13).

4. Další zajímavou charakteristiku měřitelných funkcí v případě Lebesgueovy míry na $\mathbf{R}^n$ podává Denjoyova věta 29.9.

5. Každá (lebesgueovsky) měřitelná funkce na $\mathbf{R}$ je podle věty 18.2 limitou posloupnosti spojitých funkcí ve smyslu konvergence skoro všude. V tomto tvrzení nelze nahradit konvergenci skoro všude bodovou konvergencí všude. Systém funkcí, které lze získat jako bodové limity spojitých funkcí (tzv. funkce *první Baireovy třídy*) není příliš široký, např. již Dirichletova funkce z 7.5 v něm neleží (rozmyslete si, proč).

18.4. Cvičení. Ukažte, že μ-skoro všude konečná funkce f na P je μ-měřitelná, právě když ke každému kompaktu $K \subset P$ existují kompaktní množiny $K_n \subset K$ a μ-nulová množina E tak, že $K = E \cup \bigcup K_n$ a $f_{|K_n}$ jsou spojité.

18.5. Cvičení. Podejte alternativní důkaz hustoty $\mathcal{C}_c(P)$ v $\mathcal{L}^p$ (viz cvičení 15.17) pomocí Luzinovy věty.

Návod. Aproximujte nejprve funkci z $\mathcal{L}^p$ omezenou měřitelnou funkcí s kompaktním nosičem a pak použijte Luzinovu větu.

18.6. Historické poznámky. Luzinova věta byla dokázána v klasickém případě Lebesgueovy míry N.N. Luzinem [1912].

19. Míry na topologických grupách

19.1. Speciální případ. Jednou ze základních vlastností Lebesgueovy míry λ na reálné ose je její "translační invariance": Je-li $x \in \mathbf{R}$ a $A \subset \mathbf{R}$ je měřitelná, potom $\lambda(x+A) = \lambda A$. Tímto požadavkem je v podstatě Lebesgueova míra jednoznačně určena. Platí totiž následující věta (viz cvičení 26.6):

Nechť μ je Radonova míra na $\mathbf{R}$. Jestliže $\mu([0,1] = 1$ a $\mu(x+A) = \mu A$ pro každé $x \in \mathbf{R}$ a $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$, potom $\mu = \lambda$ na $\mathcal{B}(\mathbf{R})$.

V tomto odstavci se podíváme na tento problém z poněkud obecnějšího hlediska. Nelze však zacházet příliš do detailů, celá problematika patří do základů tzv. harmonické analýzy a lze se o ní dočíst v mnoha učebnicích, doporučujeme třeba G. Bachman [*1964] či E. Hewitt and K. Ross [*1963].

19.2. Topologická grupa. Začněme se základními pojmy. *Topologickou grupou* rozumíme každou grupu G opatřenou takovou topologií, pro niž jsou základní grupové operace $(x,y) \mapsto xy$ a $x \mapsto x^{-1}$ spojité (jakožto funkce z $G \times G$ a G do G).

V dalším G bude znamenat topologickou grupu, jejíž topologie je lokálně kompaktní. Jednotkový prvek grupy G budeme značit $\mathbf{e}$ a σ-algebru všech borelovských podmnožin G již tradičně označíme $\mathcal{B}(G)$. Symbolem $\mathcal{S}$ budeme označovat σ-algebry vyskytující se jako definiční obory vyšetřovaných měr.

Je-li $x \in G$ a $A \subset G$, položme

$$xA = \{xy : y \in A\}\,, \qquad Ax = \{yx : y \in A\}\,, \qquad A^{-1} = \{x^{-1} : x \in A\}\,.$$

19.3. Haarova míra. *Levou Haarovou mírou* na G rozumíme každou nenulovou Radonovu míru μ na $(G, \mathcal{S})$ splňující $\mu(xA) = \mu A$ pro každé $x \in G$ a $A \in \mathcal{S}$. Obdobně definujeme *pravou Haarovu míru.* Míře, která je současně levou i pravou Haarovou mírou říkejme krátce *Haarova míra.*

19.4. Příklady. (a) *Lebesgueova míra* je (typickým) příkladem Haarovy míry na $\mathbf{R}^n$ (kde grupovou operací je sčítání).

(b) *Aritmetická míra* je Haarovou mírou na jakékoliv grupě opatřené diskrétní topologií.

(c) Buď $G = (0, +\infty)$ multiplikativní grupa kladných reálných čísel (s eukleidovskou topologií). Položíme-li

$$\mu A := \int\limits_A \frac{dx}{x}$$

(A borelovská), je μ Haarova míra na G.

(d) Buď $G = \mathbf{C} \setminus [0,0]$ multiplikativní grupa nenulových komplexních čísel (s obvyklou topologií). Pro $A \in \mathcal{B}(G)$ položme

$$\mu A = \int\limits_A \frac{1}{|z|^2} d\lambda(z).$$

Ukažte, že μ je Haarova míra na G.

19.5. Příklad. Buď G multiplikativní grupa všech 2×2-matic typu

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

kde $a \in (0, +\infty)$, $b \in \mathbf{R}$. Existuje prosté zobrazení G na $(0, +\infty) \times \mathbf{R}$ dané předpisem

$$F : \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to (a, b).$$

Na G uvažujme (lokálně kompaktní) topologii určenou z $\mathbf{R}^2$ pomocí zobrazení F (upřesněte!). Pro $A \in \mathcal{B}(G)$ položme

$$\mu A = \int\limits_A \frac{1}{x^2} dx dy\,, \quad \nu A = \int\limits_A \frac{1}{x} dx dy.$$

(a) Ukažte, že μ je levá a ν pravá Haarova míra na G.

(b) Dále ukažte, že $\nu A = \mu(A^{-1})$.

(c) Nalezněte množinu $A \in \mathcal{B}(G)$, pro niž $\mu A < \infty$ a $\nu A = +\infty$.

(Grupu G si také můžete představit jako grupu všech afinních transformací $\mathbf{R}$ na $\mathbf{R}$ tvaru $t \mapsto at + b$, $a > 0$, $b \in \mathbf{R}$.)

19.6. Poznámka. Je-li μ levá Haarova míra na G a definujeme-li míru $\overline{\mu}$ předpisem $\overline{\mu}E := \mu(E^{-1})$ (opět $E^{-1} \in \mathcal{B}(G)$, pokud $E \in \mathcal{B}(G)$!), potom $\overline{\mu}$ je pravá Haarova míra na G. (Pozor – v této kapitole nemá $\overline{\mu}$ nic společného se zúplněním míry μ !) Obdobně lze přejít od pravé k levé Haarově míře, proto se v dalším omezíme pouze na vyšetřování levé Haarovy míry. Základní vlastnosti jsou obsaženy v následující větě.

19.7. Věta (existence a jednoznačnost levé Haarovy míry). *(a) Na každé lokálně kompaktní grupě existuje levá Haarova míra.*

(b) Jsou-li μ a ν úplné levé Haarovy míry na G, potom existuje takové $c > 0$, že $\mu = c\nu$.

Důkaz této věty je netriviální a vyžaduje poměrně mnoho úsilí. Existují různé existenční důkazy, některé z nich jako aplikace hlubších vět funkcionální analýzy (v případě kompaktní grupy lze použít třeba netriviálních vět o pevných bodech). Zde naznačíme (velice hrubou) myšlenku "elementárního" existenčního důkazu.

Nechť V je otevřené okolí jednotkového prvku $\mathbf{e}$ grupy G. Pro každou kompaktní množinu $E \subset G$ označme $H_V(E)$ nejmenší přirozené číslo n, pro něž existují $x_1, \dots, x_n \in G$ tak, že $E \subset \bigcup_{j=1}^{n} x_j V$ (existence konečného pokrytí vyplývá z kompaktnosti E). Buď dále K pevná kompaktní množina s neprázdným vnitřkem. Hledanou Haarovu míru pak získáme jistým limitním přechodem (pro "$V \to \{\mathbf{e}\}$") a rozšířením z množinových funkcí

$$E \mapsto \frac{H_V(E)}{H_V(K)}, \qquad E \text{ kompaktní.}$$

Poctivá a podrobná rekonstrukce celého procesu není snadná. Druhou část věty ("jednoznačnost" obsaženou v (b)) dokážeme za omezujícího předpokladu, a sice v případě, kdy μ je dokonce Haarova míra (obecný případ je myšlenkově podobný, pouze technicky náročnější). Především, existuje nezáporná funkce $h \in \mathcal{C}_c(G)$ tak, že $h(\mathbf{e}) \neq 0$ a $h(x) = h(x^{-1})$ pro $x \in G$ (je-li $g \in \mathcal{C}_c(G)$, $g(\mathbf{e}) \neq 0$, $g \geq 0$, položte $h(x) = g(x) + g(x^{-1})$). Potom $\int_G h\,d\mu > 0$ (viz cvičení 19.14.b) a pro libovolnou funkci $f \in \mathcal{C}_c(G)$ máme po chvilce počítání

$$\begin{aligned}
\int_G h\,d\nu \int_G f\,d\mu &= \int_G h(y)\Big(\int_G f(xy)\,d\mu(x)\Big)\,d\nu(y) = \int_{G\times G} h(y)f(xy)\,d\mu{\otimes}\nu\,(x,y) \\
&= \int_{G\times G} h(x^{-1}z)f(z)\,d\mu{\otimes}\nu\,(x,z) = \int_G \Big(\int_G h(x^{-1}z)f(z)\,d\nu(z)\Big)\,d\mu(x) \\
&= \int_G f(z)\,\Big(\int_G h(z^{-1}x)\,d\mu(x)\Big)\,d\nu(z) = \int_G h\,d\mu \int_G f\,d\nu.
\end{aligned}$$

Stačí tedy položit $c := \frac{\int_G h\,d\mu}{\int_G h\,d\nu}$ a jednotlivé kroky pečlivě odůvodnit (při použití Fubiniovy věty si uvědomte, že f a g mají kompaktní nosiče a μ, ν jsou Radonovy míry). ■

Haarovy míry mají řadu zajímavých vlastností. Uveďme některé z nich.

19.8. Věta. *Buď μ levá Haarova míra na lokálně kompaktní grupě G. Potom*

(a) $\mu U > 0$ *pro každou otevřenou neprázdnou* $U \subset G$,

(b) $\mu G < +\infty$, *právě když grupa G je kompaktní.*

Důkaz. (a) Existuje kompaktní množina $K \subset G$ splňující $\mu K > 0$ (proč ?). Lze předpokládat, že $\mathbf{e} \in U$ ($\mathbf{e}$ je jednotka G). Potom $K \subset \bigcup_{x\in K} xU$ a z kompaktnosti K existují $x_1, \dots, x_n \in K$ tak, že $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} x_i U$. Potom

$$0 < \mu K \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(x_i U) = n\mu(U)\,.$$

(b) Nechť $\mu G < +\infty$. Buď $K \subset G$ kompaktní množina kladné míry. Ukažte, že existují $x_1, \ldots, x_n \in G$ tak, že množiny $x_i K$, $i = 1, \ldots, n$, jsou po dvou disjunktní, ale pro všechna ("další") $x \in G$ je $xK \cap (\bigcup_{i=1}^{n} x_i K) \neq \emptyset$. (Vskutku – uvažujte ty konečné posloupnosti $x_1, \ldots, x_n$, pro něž jsou množiny $x_1 K, \ldots, x_n K$ po dvou disjunktní. Jejich počet členů je omezen např. číslem $\frac{\mu G}{\mu K}$.) Odtud plyne, že $G = (\bigcup_{i=1}^{n} x_i K) K^{-1}$ je kompakt (je-li totiž $x \in G$, je $xK \cap (\bigcup_{i=1}^{n} x_i K) \neq \emptyset$!). ■

19.9. Modulární funkce. Buď nyní μ levá Haarova míra na lokálně kompaktní grupě G. Je-li $x \in G$ a $\mu_x A := \mu(Ax)$ pro $A \in \mathcal{B}(G)$, potom (zřejmě) je μ_x opět levá Haarova míra. Podle věty o jednoznačnosti existuje $\Delta(x) > 0$ tak, že $\mu_x = \Delta(x)\mu$. Lehko se zjistí (opět použitím věty o jednoznačnosti), že $\Delta(x)$ je nezávislé na volbě levé Haarovy míry na G. Funkce $\Delta \colon G \to (0, +\infty)$ se pak nazývá *modulární funkce* na G.

19.10. Věta. *Buď Δ modulární funkce na G. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *každá levá Haarova míra na G je také pravá Haarova míra,*
(ii) *$\Delta = 1$ na G.*

Důkaz je velice snadný. ■

19.11. Unimodulární grupa. Lokálně kompaktní grupa G se zove *unimodulární*, jestliže modulární funkce Δ je identicky rovna 1 na G. Jinými slovy, jestliže třídy levých a pravých Haarových měr na G splývají. Samozřejmě, každá abelovská (tj. komutativní) grupa je unimodulární. Existují však i příklady nekomutativních unimodulárních grup, což je třeba obsaženo i v následující větě.

19.12. Věta. *Každá abelovská, diskrétní nebo kompaktní grupa je unimodulární.*

Důkaz. V případě abelovské grupy je tvrzení zřejmé. Je-li G diskrétní, je každá levá Haarova míra násobkem aritmetické míry, a je tudíž i "zprava invariantní". Je-li μ levá Haarova míra na kompaktní grupě G a $x \in G$, je $G = Gx$ a $\mu G = \mu(Gx) = \Delta(x)\mu G$. Protože však $0 < \mu G < \infty$, je $\Delta(x) = 1$. ■

Je-li tedy G kompaktní grupa, je každá levá Haarova míra na G Haarovou mírou a můžeme vše shrnout do následující věty.

19.13. Věta. *Na každé kompaktní topologické grupě G existuje právě jedna úplná Haarova míra μ splňující $\mu G = 1$. Navíc $\mu E = \mu E^{-1}$ pro každou $E \in \mathcal{B}(G)$.*

19.14. Cvičení. Buď μ levá Haarova míra.

(a) Je-li $f \in \mathcal{C}_c(G)$ a $y \in G$, potom $\int_G f\, d\mu = \int_G f(yx)\, d\mu(x)$ (tento vztah platí, i když f je pouze nezáporná měřitelná nebo $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$).

(b) Je-li $f \in \mathcal{C}_c(G)$ nezáporná a $f(\mathbf{e}) > 0$, potom $\int_G f\, d\mu > 0$.

(c) Míra μ je σ-konečná, právě když G je σ-kompaktní.

(d) Topologie na G je diskrétní, právě když $\mu\{x\} \neq 0$ pro nějaké (a tudíž pro všechna) $x \in G$.

19.15. Cvičení. Spočtěte modulární funkci grupy z příkladu 19.5. (Vychází $\Delta \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{a}$).

19.16. Cvičení (vlastnosti modulární funkce). Buď Δ modulární funkce na lokálně kompaktní grupě G. Potom

(a) Δ je spojitá,

(b) $\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$ pro všechna $x, y \in G$,

(c) $\Delta(\mathbf{e}) = 1$.

19.17. Cvičení. Buď μ levá Haarova míra na G. Potom množinová funkce $\overline{\mu}$ ($\overline{\mu}E := \mu E^{-1}$) je pravá Haarova míra a $\int_G f(x)\Delta(x^{-1})\, d\mu = \int_G f\, d\overline{\mu}$ pro každou $f \in \mathcal{C}_c(G)$. Jinak řečeno: Radon-Nikodýmova derivace $\frac{d\overline{\mu}}{d\mu}$ je rovna $\Delta(x^{-1})$.

Návod. Ukažte, že funkce ν na $\mathcal{B}(G)$ definovaná $\nu A := \int_A \Delta(x^{-1})\, d\mu$ je pravá Haarova míra. Tedy $\nu = K\overline{\mu}$ pro vhodnou konstantu K. Nyní využijte toho, že Δ je spojitá funkce nabývající hodnoty 1 v jednotce $\mathbf{e}$.

19.18. Cvičení. Levé a pravé Haarovy míry na G jsou navzájem absolutně spojité.

Návod. Použijte cvičení 19.17.

19.19. Konvoluce funkcí. V následující cvičeních buď χ pevně zvolená pravá Haarova míra na $(G, \mathcal{B}(G))$. Jsou-li $f,\ g \in \mathcal{L}^1(\chi)$, definujeme *konvoluci* f a g v bodě x vztahem

$$f{*}g\,(x) = \int_G f(xy^{-1})g(y)d\chi(y)\,,$$

pokud integrál vpravo existuje.

19.20. Cvičení. Jsou-li $f,\ g \in \mathcal{L}^1(\chi)$, je ve skoro všech bodech $x \in G$ definována hodnota konvoluce $f{*}g\,(x)$, funkce $f{*}g$ je v $\mathcal{L}^1(\chi)$ a $\|f * g\|_1 \le \|f\|_1\|g\|_1$. Je tedy $L^1(\chi)$ s právě definovanou operací konvoluce Banachova algebra.

19.21. Cvičení. Konvoluce je komutativní, právě když grupa G je komutativní.

19.22. Cvičení. Banachova algebra $(L^1(\chi), *)$ má jednotku, právě když G má diskrétní topologii. (Jako příklad Banachovy algebry s jednotkou uvažujte $(L^1(\chi), *)$ v případě grupy $G = \mathbf{Z}$ celých čísel s diskrétní topologií a aritmetickou mírou.)

19.23. Involuce. Definujeme-li $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}(\Delta(x))^{-1}$, je zobrazení $f \mapsto f^*$ prostoru $L^1(\chi)$ na sebe, které nazýváme *involuce*, izometrické. (Trochu počítání dá, že $\int_G |f(x^{-1}|(\Delta(x))^{-1}\,d\chi = \int_G |f(x)|\,d\chi$ pro $f \in \mathcal{C}_c(G)$; odtud plyne $\|f\| = \|f^*\|$ i pokud f je v $\mathcal{L}^1(\chi)$.) Involuce je analogická tvoření komplexně sdružených čísel či transponovaných matic.

19.24. Konvoluce měr. Buď i nadále G lokálně kompaktní topologická grupa. Symbolem $\mathcal{M}_b(G)$ budeme značit množinu všech komplexních Radonových měr na $(G, \mathcal{B}(G))$. Víme, že $\mathcal{M}_b(G)$ s normou $\|\mu\| := |\mu|(G)$ je Banachův prostor (viz 17.1).

Obdobou konvoluce funkcí je *konvoluce měr* na $\mathcal{M}_b(G)$. Položme

$$\mu{*}\nu\,(E) := \tau\,\{(x,y) \in G \times G : xy \in E\}$$

pro libovolné $\mu,\ \nu \in \mathcal{M}_b(G)$ a libovolnou borelovskou množinu $E \subset G$ (zde τ je součin komplexních Radonových měr μ a ν, viz 16.9.c; ověřte, že $\{(x,y) \in G \times G : xy \in E\}$ je borelovská podmnožina v $G \times G$!).

19.25. Cvičení. Dokažte, že $\mu{*}\nu$ je komplexní míra na $\mathcal{B}(G)$, $\mu{*}\nu \in \mathcal{M}_b(G)$ a platí nerovnost $\|\mu{*}\nu\| \le \|\mu\|\,\|\nu\|$.

19.26. Cvičení. (a) Ukažte, že operace konvoluce měr je asociativní.

(b) Konvoluce měr na G je komutativní, právě když G je komutativní.

19.27. Cvičení. Je-li $\mathbf{e}$ jednotkový prvek grupy G, je Diracova míra $\varepsilon_{\mathbf{e}}$ jednotkový prvek $(\mathcal{M}_b(G), *)$.

19.28. Poznámka. Nyní nás bude zajímat vztah mezi konvolucí měr a konvolucí funkcí. Je-li $f \in \mathcal{L}^1(\chi)$ (komplexní), budeme značit χ_f komplexní Radonovu míru danou předpisem $\chi_f(E) = \int_E f\,d\chi$. Přepíšeme-li definici konvoluce měr $\mu,\ \nu \in \mathcal{M}_b(G)$, dostáváme

$$\mu{*}\nu\,(E) = \int_G c_E(xy)\,d\mu{\otimes}\nu\,.$$

Dále, je-li h omezená borelovská funkce na G, potom

$$\int_G h\,d\mu{*}\nu = \int_{G\times G} h(xy)\,d\mu{\otimes}\nu\,.$$

Odtud již máme pro $f,\ g \in \mathcal{L}^1(\chi)$

$$f * g = \frac{d(\chi_f * \chi_g)}{d\chi})\,,$$

tedy "nová" definice konvoluce funkcí (předchozí řádek) souhlasí se "starou definicí".

19.29. Cvičení. Zformulujte definici konvoluce funkce $f \in \mathcal{L}^1(\chi)$ (komplexní) s komplexní Radonovou mírou $\mu \in \mathcal{M}_b(G)$. Dokažte, že $f * \mu \in \mathcal{L}^1(\chi)$ a $\|f * \mu\|_1 \le \|f\|_1\|\mu\|$ – je tedy vlastně $L^1(\chi)$ nejen podalgebra $\mathcal{M}_b(G)$ vzhledem ke konvoluci, ale dokonce i ideál.

19.30. Historické poznámky. Translačně invariantní míry (či integrály) na kompaktních Lieových grupách byly studovány F. Peterem a H. Weylem [1927]. Podstatný pokrok důkazem existence levé Haarovy míry byl učiněn A. Haarem [1933] pro separabilní lokálně kompaktní grupy a J. von Neumannem v [1934] (existence i jednoznačnost) pro libovolné kompaktní grupy a v [1936] (jednoznačnost) pro případ separabilních lokálně kompaktních grup, a také A. Weilem zejména v [*1940]. Jejich důkazy využívaly v té či oné formě axiom výběru. H.Cartan [1940] a G.E. Bredon [1963] pak podali důkaz bez použití axiomu výběru. Relativně krátký důkaz jednoznačnosti lze nalézt u S. Kakutaniho [1948]. Detailnější historické poznámky podávají E. Hewitt a K.A. Ross v [*1963]. Traduje se, že příklad 19.5 pochází od J. von Neumanna [1936].

D. INTEGRÁL V R

20. Souvislost integrálu a derivace

V této kapitole dokážeme nerovnost mezi mírou obrazu množiny a integrálem z derivace. Jako speciální případ dostaneme Sardovu větu na přímce.

Nechť K je kladné reálné číslo. Řekneme, že reálná funkce f je K*-lipschitzovská* na množině $E \subset \mathbf{R}$, jestliže pro všechna $x, y \in E$ je splněna nerovnost

$$|f(x) - f(y)| \le K|x - y|.$$

Pokud funkce f je K-lipschitzovská na E pro některé K, říkáme, že je lipschitzovská na E.

20.1. Lemma. *Nechť f je K-lipschitzovská funkce na množině $E \subset \mathbf{R}$. Potom $\lambda^* f(E) \le K\,\lambda^* E$.*

Důkaz. Tvrzení je zřejmé v případě $\lambda^* E = +\infty$. Je-li $\lambda^* E < +\infty$, volme $\varepsilon > 0$ a nalezněme posloupnost otevřených intervalů (a_j, b_j) tak, že $E \subset \bigcup_j (a_j, b_j)$ a $\sum_j (b_j - a_j) \le \lambda^* E + \varepsilon$. Na základě předpokladů najdeme intervaly $[\alpha_j, \beta_j]$ tak, že $f(E \cap (a_j, b_j)) \subset [\alpha_j, \beta_j]$ a přitom $\beta_j - \alpha_j \le K\,(b_j - a_j)$. Tedy $f(E) \subset \bigcup_j [\alpha_j, \beta_j]$ a

$$\lambda^* f(E) \le \sum_j (\beta_j - \alpha_j) \le K \sum_j (b_j - a_j) \le K(\lambda^* E + \varepsilon).$$

Přechodem $\varepsilon \searrow 0$ je tvrzení dokázáno. ■

20.2. Lemma. *Buď f reálná funkce na intervalu I a $E \subset I$. Jestliže existuje $K > 0$ tak, že $|f'| \le K$ na E, potom*

$$\lambda^* f(E) \le K\,\lambda^* E.$$

Důkaz. Zvolme $K' > K$. Označme

$$E_k = \{x \in E : |f(y) - f(x)| \le K' \text{ pro všechna } y \in E \cap (x - \tfrac{1}{k},\, x + \tfrac{1}{k})\}.$$

Potom $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ a $E = \bigcup_k E_k$. Buď J interval délky menší než $\frac{1}{k}$. Potom podle předchozího lemmatu je

$$\lambda^* f(J \cap E_k) \le K'\,\lambda^*(J \cap E_k)\,.$$

Rozdělením I na takové intervaly a opětovným složením dostaneme $\lambda^* f(E_k) \le K'\,\lambda^*(E_k)$. Podle cvičení 4.7 je $\lambda^* f(E) \le K'\,\lambda^*(E)$. Přechodem $K' \searrow K$ dostáváme dokazované tvrzení. ■

Jako důsledek uveďme jednorozměrnou verzi známé Sardovy věty. Porovnejte její znění také s následující větou 20.4.

20.3. Důsledek. *Nechť f je reálná funkce na intervalu $I \subset \mathbf{R}$ a $E \subset I$. Jestliže $f' = 0$ na E, potom $\lambda f(E) = 0$.*

20.4. Věta. *Nechť f je reálná funkce na intervalu I a $E \subset I$ je měřitelná množina. Nechť v každém bodě $x \in E$ existuje vlastní derivace $f'(x)$. Potom f' je měřitelná na E a*

$$\lambda^* f(E) \le \int_E |f'| \,.$$

Důkaz. Nejprve dokážeme měřitelnost f' na E. Zvolme $c \in \mathbf{R}$. Pro každé $k \in \mathbf{N}$ je množina

$$\begin{aligned} G_k : = \{x \in I : \ & \text{existují } y, z \in I \text{ tak, že} \\ & x - \frac{1}{k} < y < x < z < x + \frac{1}{k} \text{ a } f(z) - f(y) > c(z-y)\} \end{aligned}$$

otevřená, tedy množina

$$\{x \in E : f'(x) > c\} = E \cap \big(\bigcap_k G_k\big)$$

je měřitelná.

Nyní k dokazované nerovnosti. Můžeme předpokládat, že množina E je omezená. Zvolme $\varepsilon > 0$ a označme

$$E_k = \{x \in E : (k-1)\varepsilon \le |f'(x)| < k\varepsilon\}.$$

Potom E_k jsou měřitelné po dvou disjunktní množiny, $E = \bigcup_k E_k$ a aplikací lemmatu 20.2 dostáváme

$$\begin{aligned} \lambda^* f(E) &\le \sum_k \lambda^* f(E_k) \le \sum_k k\varepsilon\lambda E_k \le \sum_k \left(\int_{E_k} |f'| + \varepsilon\lambda E_k \right) \\ &= \int_E |f'| + \varepsilon\lambda E. \end{aligned}$$

■

20.5. Cvičení. Dokažte, že za předpokladů věty 20.4 je $f(E)$ měřitelná množina.

Návod. Použijte následující cvičení a fakt (věta 1.21), že $E = N \cup \bigcup_n K_n$, kde $\lambda N = 0$ a K_n jsou kompaktní.

20.6. Cvičení. Nechť f je reálná funkce na intervalu $I \subset \mathbf{R}$ mající vlastní derivaci v každém bodě (lebesgueovsky) nulové množiny $E \subset I$. Potom $\lambda f(E) = 0$.

Návod. Použijte buďto větu 20.4 anebo lemma 20.2 (uvědomte si, že $E = \bigcup_n \{x \in E : |f'(x)| < n\}$) .

20.7. Luzinova vlastnost (N). V 3.18 jsme viděli, že spojitý obraz (lebesgueovsky) měřitelné množiny nemusí být měřitelný, zatímco za předpokladu diferencovatelnosti cvičení 20.5 již dává kladný výsledek. Trochu jasno do této problematiky přináší následující pojem.

Řekneme, že funkce f má na intervalu $I \subset \mathbf{R}$ *Luzinovu vlastnost (N)*, jestliže obraz $f(N)$ každé (lebesgueovsky) nulové množiny $N \subset I$ má míru nula.

(a) (Rademacher) Nechť f je spojitá funkce na intervalu I. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) f má na I Luzinovu vlastnost (N),

(ii) $f(M)$ je měřitelná, kdykoliv $M \subset I$ je měřitelná.

Návod. Uvažte, že (lebesgueovsky) měřitelná množina je spočetným sjednocením kompaktních množin a nulové množiny (vpodstatě věta 1.21). Na druhé straně použijte poznámku 1.9.2, podle níž každá množina kladné míry obsahuje neměřitelnou podmnožinu.

(b) Ukažte, že tvrzení v (a) zůstane v platnosti, předpokládáme-li o f pouze, že je měřitelná (při důkazu použijte ještě Luzinovu větu 18.2). Rovněž tak definici Luzinovy vlastnosti (N) a další úvahy lze zobecnit na případ, kdy I je pouze měřitelná podmnožina $\mathbf{R}^n$.

(c) Každá funkce, mající na intervalu I všude vlastní derivaci, má Luzinovu vlastnost (N).

Návod. Cvičení 20.6.

(d) Každá lipschitzovská (stačí lokálně lipschitzovská) funkce na měřitelné množině M má Luzinovu vlastnost (N).

20.8. Cvičení. Nechť f je libovolná funkce na intervalu $I \subset \mathbf{R}$. Je-li D množina bodů, kde f má vlastní derivaci, je D borelovská množina a funkce $x \to f'(x)$ je borelovská na D.

20.9. Historické poznámky. Luzinova vlastnost (N) byla zavedena Luzinem v jeho práci [*1915]. Důsledek 20.3, který jsme pracovně nazvali jednorozměrnou verzí Sardovy věty, bývá mnoha autory nazýván Luzinovou větou.

21. Funkce s konečnou variací a funkce absolutně spojité

Tato kapitola má přípravný charakter a porovnává systémy funkcí bez použití teorie míry. Proto podstatné výsledky o absolutně spojitých funkcích a funkcích s konečnou variací přinesou až další kapitoly.

21.1. Funkce konečné variace. Nechť f je reálná funkce na intervalu I. Pro každý podinterval $[a,b]\subset I$ a každé dělení $D : a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ intervalu $[a,b]$ označme

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f,D)=\sum_{j=1}^{m}|f(x_j)-f(x_{j-1})|\,.$$

Číslo

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\,f := \sup\{\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f,D) : D \text{ je dělení intervalu } [a,b]\}$$

nazýváme *variací* funce f na $[a,b]$. Je-li $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\,f<\infty$ pro každý interval $[a,b]\subset I$, řekneme, že f je *funkce s konečnou variací*. V tom případě zřejmě existuje funkce v na I tak, že pro každý interval $[a,b]\subset I$ je

$$v(b)-v(a)=\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\,f\,.$$

Taková funkce v je ovšem jednoznačná až na aditivní konstantu; budeme ji nazývat *(neurčitou) variací* funkce f.

Snadno nahlédneme, že funkce s konečnou variací na intervalu I tvoří vektorový prostor.

Je-li dokonce

$$\sup\{\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\,f : [a,b]\subset I\}<+\infty\,,$$

řekneme, že funkce f má *omezenou variaci* na I. Na kompaktním intervalu $[a,b]$ ovšem pojmy konečné variace a omezené variace splývají a lze je charakterizovat prostou nerovností $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\,f<\infty$. V případě obecného intervalu I bychom místo “konečné variace” mohli mluvit o “lokálně omezené variaci”, totiž funkce má konečnou variaci na I, právě když má omezenou variaci na každém kompaktním podintervalu I. (Podobně budeme v dalším “lokalizovat” pojmy absolutní spojitosti a integrovatelnosti.)

Základní charakterizaci funkcí s konečnou variací podává následující věta.

21.2. Věta. *Funkce f má konečnou variaci na I, právě když je rozdílem dvou neklesajících funkcí.*

Důkaz. Je-li funkce g neklesající, potom pro každý interval $[a,b]\subset I$ je zřejmě

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\,g=g(b)-g(a)<\infty.$$

Tedy neklesající funkce (a tím i rozdíly neklesajících funkcí) mají konečnou variaci. Naopak, je-li f funkce s konečnou variací a v je její neurčitá variace, potom funkce v, $v-f$ jsou zřejmě neklesající a funkce f je jejich rozdíl. ■

21.3. Absolutně spojité funkce. Řekneme, že reálná funkce f je *absolutně spojitá* na intervalu I, jestliže ke každému $\varepsilon>0$ lze nalézt $\delta>0$ tak, že

$$\sum_{j=1}^{m}|f(b_j)-f(a_j)|<\varepsilon\,,$$

kdykoliv $a_1<b_1\le a_2<b_2\le\ldots\le a_m<b_m$ jsou body intervalu I splňující $\sum_{j=1}^{m}(b_j-a_j)<\delta$. Systém všech absolutně spojitých funkcí na intervalu I tvoří lineární prostor. Jako příklad absolutně spojitých funkcí slouží všechny lipschitzovské funkce, ale i např. funkce $f(x)=\sqrt{x}$ na intervalu $[0,1]$.

Říkáme, že funkce f je *lokálně absolutně spojitá* na intervalu I, jestliže f je absolutně spojitá na každém kompaktním podintervalu I.

Zřejmě každá lokálně absolutně spojitá funkce je spojitá a má konečnou variaci (a tím i podle následující kapitoly vlastní derivaci skoro všude). Dokonce platí následující tvrzení.

21.4. Věta. *Každá absolutně spojitá funkce f na I je rozdílem dvou neklesajících absolutně spojitých funkcí.*

Důkaz. Stačí dokázat, že variace v funkce f je absolutně spojitá. Zvolme $\varepsilon > 0$. Najděme $\delta > 0$ tak, že

$$\sum_{j=1}^{m} |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon\,,$$

kdykoliv $a_1 < b_1 \le a_2 < b_2 \le \cdots \le a_m < b_m$ jsou body intervalu I splňující $\sum_{j=1}^{m}(b_j - a_j) < \delta$.

Nechť $A_1 < B_1 \le A_2 < B_2 \le \cdots \le A_p < B_p$ jsou body intervalu I splňující $\sum_{j=1}^{p}(B_j - A_j) < \delta$.
Najděme dělení

$$A_j = a_j^0 < b_j^0 = a_j^1 < \cdots < b_j^{m_j} = B_j$$

intervalů $[A_j, B_j]$ tak, že

$$v(B_j) - v(A_j) < \sum_{i=1}^{m_j} |f(b_j^i) - f(a_j^i)| + \frac{1}{p}\varepsilon.$$

Jelikož $\sum_{j,i}(b_j^i - a_j^i) < \delta$, dostáváme

$$\sum_{j} |v(B_j) - v(A_j)| < \sum_{j,i} |f(b_j^i - f(a_j^i)| + \varepsilon < 2\varepsilon.$$

■

21.5. Cvičení. Ukažte, že součin dvou absolutně spojitých funkcí (resp. funkcí s konečnou variací) na omezeném intervalu je opět funkce absolutně spojitá (resp. s konečnou variací).

21.6. Cvičení. Dokažte, že každá absolutně spojitá funkce má Luzinovu vlastnost (N).

Návod. Je-li N nulová množina, nalezněte otevřenou nadmnožinu N malé míry a použijte definici absolutní spojitosti.

21.7. Historické poznámky. C. Jordan definoval funkce s konečnou variací v [1881] a dokázal větu 21.2 o rozkladu. Vět tohoto typu je dnes mnohem více, většinou nesou Jordanovo jméno na jeho počest.

22. Věty o existenci derivace skoro všude

V této kapitole dokážeme, že každá funkce $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ s konečnou variací (speciálně každá monotonní nebo lipschitzovská funkce) má vlastní derivaci f' skoro všude. Tato hluboká věta se často dokazuje pomocí Vitaliovy věty o pokrytí. Zde uvedeme relativně elementární důkaz. Začněme s jednoduchým lemmatem, pocházejícím od F. Riesze.

22.1. Lemma. *Buď h spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Označme*

$$E = \{x \in (a, b) : \ \textit{existuje } \xi \in (x, b) \ \textit{tak, že } h(\xi) > h(x)\}.$$

Potom E je sjednocení posloupnosti (a_j, b_j) po dvou disjunktních otevřených intervalů splňujících

$$h(a_j) \le h(b_j).$$

Důkaz. Zřejmě E je otevřená množina, tudíž ji lze napsat jako sjednocení posloupnosti po dvou disjunktních maximálních otevřených intervalů obsažených v E. Buď (α, β) takový interval a $x \in (\alpha, \beta)$. Označme

$$M = \{\xi \in (x, \beta) : h(\xi) \ge h(x)\}.$$

Jelikož $\beta \notin E$, je $h \le h(\beta)$ v intervalu $[\beta, b)$. Tudíž podle předpokladů je $M \neq \emptyset$ a $\sup M = \beta$. Tedy $h(x) \le h(\beta)$ a limitní přechod $x \to \alpha+$ dává tvrzení. ■

22.2. Poznámky. 1. Je-li (α, β) maximální otevřený interval množiny E a $\alpha > a$, potom dokonce $h(\alpha) = h(\beta)$. (Proč ?)

2. Zrcadlová verze lemmatu: Buď h spojitá funkce na intervalu $[a, b]$ a

$$E = \{x \in (a, b) : \text{ existuje } \xi \in (a, x) \text{ tak, že } h(\xi) > h(x)\}.$$

Potom E je sjednocení posloupnosti (a_j, b_j) po dvou disjunktních otevřených intervalů splňujících

$$h(a_j) \ge h(b_j).$$

22.3. Extremální derivace. Nechť f je funkce definovaná na okolí bodu $x \in \mathbf{R}$. Označme

$$D^+ f(x) = \limsup_{t \to 0+} \frac{1}{t}(f(x+t) - f(x)),$$
$$D_+ f(x) = \liminf_{t \to 0+} \frac{1}{t}(f(x+t) - f(x))$$

a obdobně $D^- f(x)$ a $D_- f(x)$ pro $t \to 0-$ (tato čísla se nazývají *Diniho derivace* funkce f v bodě x). Funkce f má v bodě x derivaci, právě když všechny Diniho derivace v bodě x splývají.

Dále definujme

$$\overline{D} f(x) = \limsup_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x+t) - f(x)).$$

Funkci $\overline{D} f$ nazveme *horní derivací* funkce f. Obdobně zavádíme i dolní derivaci $\underline{D} f$.

22.4. Lemma. *Každá neklesající lipschitzovská funkce f na intervalu $[a, b]$ má konečnou derivaci ve skoro všech bodech tohoto intervalu.*

Důkaz. Můžeme předpokládat, že funkce f je 1-lipschitzovská. Lipschitzovská funkce nemůže mít nekonečnou derivaci. Dokážeme-li, že $D^+ f \le D_- f$ skoro všude, potom (protože obdobně $D^- f \le D_+ f$ skoro všude) bude

$$0 \le D^+ f \le D_- f \le D^- f \le D_+ f \le D^+ f \le 1$$

skoro všude, a to je vlastně vše, co máme dokázat. Buďte $0 < p < q < 1$ a uvažujme množinu

$$M_{p,q} : = \{x \in (a, b) : D_- f(x) < p < q < D^+ f(x)\}.$$

Podle zrcadlové verze lemmatu (poznámka 22.2.2) najdeme posloupnost po dvou disjunktních intervalů (a_j, b_j) tak, že

$$\begin{aligned}\{x \in (a, b) : D_- f(x) < p\} &\subset \{x \in (a, b) : \text{ existuje } \xi \in (a, x) \text{ tak, že } f(\xi) - p\xi > f(x) - px\} \\ &= \bigcup_j (a_j, b_j)\end{aligned}$$

a

$$f(b_j) - pb_j \le f(a_j) - pa_j.$$

Nyní aplikujme Rieszovo lemma 22.1 na funkci $f(x) - qx$ v každém intervalu $[a_k, b_k]$. Najdeme po dvou disjunktní intervaly $(a_{k,j}, b_{k,j}) \subset (a_k, b_k)$ tak, že

$$\begin{aligned}\{x \in (a, b) : D^+ f(x) > q\} &\subset \bigcup_k \{x \in (a_k, b_k) \colon \text{existuje } \xi \in (a_k, x) \text{ tak, že } f(\xi) - q\xi < f(x) - qx\} \\ &= \bigcup_{k,j} (a_{k,j}, b_{k,j})\end{aligned}$$

a

$$f(b_{k,j}) - qb_{k,j} \geq f(a_{k,j}) - qa_{k,j}.$$

Odtud

$$\begin{aligned}\sum_{k,j}(b_{k,j} - a_{k,j}) &\leq \frac{1}{q}\sum_{k,j}\big(f(b_{k,j}) - f(a_{k,j})\big) \leq \frac{1}{q}\sum_k\big(f(b_k) - f(a_k)\big)\\ &\leq \frac{p}{q}\sum_k(b_k - a_k) \leq \frac{p}{q}(b-a).\end{aligned}$$

Pokračujíce induktivně v tomto procesu dostáváme posloupnosti do sebe zařazených systémů intervalů; v $2n$-tém kroku tedy dostaneme systém intervalů $\{(A_s, B_s)\}$ tak, že

$$\bigcup_s (A_s, B_s) \supset M_{p,q} \quad \text{a} \quad \sum_s (B_s - A_s) \leq \left(\frac{p}{q}\right)^n (b-a).$$

Odtud již vyplývá, že $M_{p,q}$ je míry nula. Tvrzení nyní plyne ze vztahu

$$\{x \in (a,b) : D_-f(x) < D^+f(x)\} \subset \bigcup_{p,q\in(0,1)\cap\mathbf{Q}} M_{p,q}\,.$$

■

Nyní dokážeme, že stejnou vlastnost – diferencovatelnost skoro všude – mají i všechny monotonní funkce. Zde je situace trochu složitější, neboť monotonní funkce může být i nespojitá. Nechť f je neklesající funkce. Přejdeme-li k funkci $x \mapsto x + f(x)$, potom inverzní funkci, jejíž definiční obor může být nesouvislý, lze snadno rozšířit na lipschitzovskou neklesající funkci na intervalu. Toho využijeme v důkazu následující věty.

22.5. Věta (Lebesgue). *Každá monotonní funkce f na intervalu I má konečnou derivaci ve skoro všech bodech tohoto intervalu.*

Důkaz. Lze předpokládat, že $I = [a,b]$. Snadno najdeme interval $[A,B]$ a funkci g na $[A,B]$ tak, že g je lipschitzovská a neklesající, pro všechna $x \in [a,b]$ je $x + f(x) \in [A,B]$ a $g(x + f(x)) = x$. (Je-li f spojitá, je g prostě inverzní funkce k $x + f(x)$.) Nyní lehce nahlédneme, že

$$\{x \in (a,b) : f'(x) \text{ neexistuje }\} \subset g(E) \cup g(N),$$

kde

$$E = \{y \in (A,B) : g'(x) \text{ neexistuje }\}$$

a

$$N = \{y \in (A,B) : g'(x) = 0\}.$$

Podle předchozího lemmatu je $\lambda E = 0$, tudíž podle lemmatu 20.1 je $\lambda g(E) = 0$. Podle Sardovy věty (důsledek 20.3) je též $\lambda g(N) = 0$. Tím je důkaz ukončen. ■

22.6. Důsledek. *Každá funkce s konečnou variací má konečnou derivaci skoro všude.*

Tuto kapitolu završíme důležitou nerovností.

22.7. Věta. *Buď f neklesající funkce v intervalu $[a,b]$. Potom $f' \in \mathcal{L}^1([a,b])$ a*

$$\int_a^b f' \leq f(b) - f(a).$$

Důkaz. Pro $x > b$ položme $f(x) = f(b)$ a definujme posloupnost funkcí

$$f_k(x) = k\left(f(x + \frac{1}{k}) - f(x)\right)$$

pro $x \in [a,b]$. Potom $\{f_k\}$ je posloupnost nezáporných a měřitelných funkcí na $[a,b]$ (f je měřitelná !) a $\lim f_k = f'$ skoro všude. Tudíž f' je měřitelná a nezáporná skoro všude. Z Fatouova lemmatu 8.15 vyplývá po jednoduchých výpočtech

$$\begin{aligned}\int_a^b f' &\le \liminf \int_a^b f_k = \liminf k\left(\int_{a+\frac{1}{k}}^{b+\frac{1}{k}} f - \int_a^b f\right)\\ &= \liminf \left(\int_b^{b+\frac{1}{k}} f - \int_a^{a+\frac{1}{k}} f\right) \le \liminf k\left(\frac{1}{k}f(b) - \frac{1}{k}f(a)\right)\\ &= f(b) - f(a).\end{aligned}$$

■

22.8. Historické poznámky. Věta 22.5 o derivaci monotonní funkce byla dokázána H. Lebesguem v [*1904] za dodatečného předpokladu spojitosti derivované funkce. V plné obecnosti byla věta dokázána nezávisle G. Faberem [1910] a G.C. Youngem a W.H. Youngem [1911]. Tvrzení z 22.1 se někdy nazývá "lemma vycházejícího slunce" a, stejně jako uvedený důkaz Lebesgueovy věty využívající z teorie míry pouze pojmu nulových množin, pochází od F.Riesze [1930-32].

23. Neurčitý Lebesgueův integrál a absolutní spojitost

V této kapitole se budeme zabývat otázkami souvisejícími se vzorcem

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f' \ ,$$

kde integrál chápeme jako Lebesgueův a derivaci ve smyslu "skoro všude". Nejprve si uvedeme příklad, kdy tento vzorec neplatí, ačkoli funkce f je monotonní a má tudíž podle věty 22.7 integrovatelnou derivaci.

23.1. Cantorova singulární funkce. Definujme Cantorovu funkci $f : [0,1] \to [0,1]$ následujícím způsobem: Položme $f(0) = 0,\ f(1) = 1$. Pro $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ klademe $f(x) = \frac{1}{2}$. Dále položme $f(x) = \frac{1}{4}$ pro $x \in [\frac{1}{9}, \frac{2}{9}]$ a $f(x) = \frac{3}{4}$ pro $x \in [\frac{7}{9}, \frac{8}{9}]$. V obecném kroku každý maximální interval (a,b), v jehož žádném bodě není f dosud definována, rozdělíme na třetiny, v prostřední uzavřené třetině definujeme funkční hodnotu jako aritmetický průměr $f(a)$ a $f(b)$ a zbytek "ponecháme zatím prázdný". Po ukončení této procedury je funkce definovaná a stejnoměrně spojitá na husté podmnožině intervalu $[0,1]$. Posledním krokem definice je spojité rozšíření funkce f na celý interval $[0,1]$. Také můžeme podat aritmetickou definici. Nechť číslo $x \in [0,1]$ je zapsané ve tvaru

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} 3^{-j} x_j \ ,$$

kde $x_j \in \{0,1,2\}$. Potom

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} x_j \ ,$$

pokud žádné x_j není 1; v opačném případě položme $m = \min\{j \in \mathbf{N} : x_j = 1\}$ a

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{m} 2^{-j} x_j + 2^{-m}\right).$$

Vyjmeme-li z intervalu $[0,1]$ všechny otevřené intervaly, na nichž je funkce f konstantní, dostaneme Cantorovo diskontinuum C (viz 1.12), která má míru nula. Funkce f má tedy derivaci 0 skoro všude a je

$$f(1) - f(0) = 1 \ne 0 = \int_0^1 f' \ .$$

Tato situace nemůže nastat u absolutně spojitých funkcí, což nám zaručuje následující věta.

23.2. Věta. *Nechť f je absolutně spojitá funkce na intervalu $I = [a,b]$. Potom $f' \in \mathcal{L}^1(I)$ a*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f' .$$

Důkaz. Jelikož každá absolutně spojitá funkce je rozdílem dvou monotonních absolutně spojitých funkcí, stačí uvažovat případ, kdy f je neklesající. Samozřejmě, $f' \geq 0$ skoro všude a $\int_a^b f' \leq f(b) - f(a)$ podle věty 22.7. Zbývá dokázat , že $\int_a^b f' \geq f(b) - f(a)$. Zvolme $\varepsilon > 0$ a najděme příslušné δ z definice absolutní spojitosti funkce f. Existuje otevřená množina G míry menší než δ obsahující všechny body neexistence derivace f'. Napišme G ve tvaru sjednocení po dvou disjunktních intervalů (a_j, b_j). Potom pro všechna $k \in \mathbf{N}$ máme z definice absolutní spojitosti $\sum_{j=1}^k (f(b_j) - f(a_j)) < \varepsilon$, tedy $\lambda f(G) \leq \varepsilon$. Podle věty 20.4 je

$$\lambda^* f(I \setminus G) \leq \int_{I \setminus G} f' \leq \int_I f' .$$

Tedy

$$f(b) - f(a) = \lambda f(I) \leq \lambda^* f(I \setminus G) + \lambda f(G) \leq \int_I f' + \varepsilon.$$

■

23.3. Neurčitý Lebesgueův integrál. Funkce φ na intervalu $I \subset \mathbf{R}$ se nazývá *lokálně integrovatelná*, jestliže je integrovatelná na každém kompaktním podintervalu I. Funkci f říkáme *neurčitý Lebesgueův integrál* funkce φ na I, jestliže pro každý interval $[a,b] \subset I$ platí

$$f(b) - f(a) = \int_a^b \varphi .$$

Zvolme $c \in I$. Položme

$$\Phi(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_c^x f, & x \geq c, \\ \displaystyle -\int_x^c f, & x < c. \end{cases}$$

Potom zřejmě Φ je neurčitý Lebesgueův integrál funkce φ a každý další neurčitý integrál se od Φ liší jen aditivní konstantou. Je-li funkce φ navíc nezáporná, je Φ neklesající. Tedy pro obecnou lokálně integrovatelnou funkci φ je neurčitý integrál funkce s konečnou variací – dostaneme jej jako rozdíl neurčitých integrálů funkcí φ^+ a φ^- – a podle důsledku 22.6 má tedy konečnou derivaci skoro všude. Z Lebesgueovy věty o majorizované konvergenci také lehko plyne, že neurčitý Lebesgueův integrál je vždy funkcí spojitou (podrobnosti netřeba uvádět – dokážeme brzy daleko víc).

23.4. Věta. *Nechť $\varphi \in \mathcal{L}^1(I)$ a f je neurčitý Lebesgueův integrál funkce φ na I. Potom funkce f je absolutně spojitá a $f' = \varphi$ skoro všude.*

Důkaz. Protože $|f(y) - f(x)| \leq \int_x^y |f|$ pro $[x,y] \subset I$, plyne absolutní spojitost ze cvičení 8.22.b. Dále chceme ukázat, že $f' = \varphi$ skoro všude. Jelikož funkce f je absolutně spojitá, víme, že f' existuje skoro všude, $f' \in \mathcal{L}^1(I)$ a pro každý interval $[a,b] \subset I$ máme

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a) = \int_a^b \varphi .$$

Tudíž i

$$\int_E f' = \int_E \varphi$$

pro každou otevřenou množinu E, čili i pro každou měřitelnou množinu E. Odtud již plyne tvrzení podle věty 8.17. ■

23.5. Důsledek. *Následující vlastnosti jsou ekvivalentní pro reálnou funkci f na intervalu $[a, b]$:*

(i) f je absolutně spojitá na $[a, b]$,

(ii) existuje $\varphi \in \mathcal{L}^1([a, b])$ tak, že $f(x) = f(a) + \int_a^x \varphi$ pro všechna $x \in [a, b]$,

(iii) f je diferencovatelná skoro všude, $f' \in \mathcal{L}^1([a, b])$ a $f(x) = f(a) + \int_a^x f'$ pro všechna $x \in [a, b]$.

23.6. Důsledek. *Nechť f je absolutně spojitá funkce na $[a, b]$. Jestliže $f' = 0$ skoro všude, potom f je konstantní funkce.*

23.7. Poznámka. Nechť φ je reálná funkce na intervalu $[a, b]$. Připomeňme, že Newtonův integrál funkce φ definujeme jako přírůstek $f(b) - f(a)$ primitivní funkce f k φ na intervalu $[a, b]$. Tuto definici je možno zobecnit tak, že pozměníme pojem "primitivní funkce" - například tak, že připustíme existenci spočetné množiny, v níž f nemá vlastní derivaci. Aby tato definice byla smysluplná, je třeba přidat požadavek spojitosti funkce f. Je totiž nutné zaručit, aby všechny "zobecněné primitivní funkce" měly stejný přírůstek na $[a, b]$. Analogická situace nastává, když se zabýváme přírůstkem funkce f za předpokladu,že $f' = \varphi$ skoro všude. Příklad Cantorovy funkce nám ukazuje, že pouhá spojitost není dostatečnou zárukou, že přírůstek nebude záviset na volbě "zobecněné primitivní funkce". Je však možno podat alternativní definici Lebesgueova integrálu funkce φ jako přírůstku $f(b) - f(a)$ *absolutně spojité* funkce funkce f na $[a, b]$, splňující $f' = \varphi$ skoro všude. (Toto už není vlastně zobecnění v pravém smyslu – některé primitivní funkce nejsou totiž absolutně spojité, viz příklad 25.1). Definicím různých pojmů integrálu, založených na myšlence (tak či onak) zobecněné primitivní funkce, se říká *deskriptivní*. Poznamenejme, že zobecňování se nemusí ubírat pouze směrech vynechávání "malých množin"; je možno též uvažovat různé "zobecněné derivace". Navíc v kapitole 25 se zmíníme o perronovské metodě, kterou lze také řadit mezi deskriptivní metody.

23.8. Lebesgueovské body. Nechť F je neurčitý Lebesgueův integrál lokálně integrovatelné funkce f na intervalu I a $x \in I$ je bod, v němž $F'(x) = f(x)$ (a to platí, jak víme, ve skoro všech bodech intervalu I). Po snadné úpravě vidíme, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} (f(x+t) - f(x))\, dt = 0\,.$$

Řekneme, že $x \in I$ je *lebesgueovský bod* funkce f, jestliže dokonce

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} |f(x+t) - f(x)|\, dt = 0\,.$$

Zřejmě $F' = f$ v každém lebesgueovském bodě funkce f; bod, v němž $F' = f$, však ještě nemusí být lebesgueovský, takže zatím není jasné, kolik lebesgueovských bodů existuje. Odpověď dává následující věta.

23.9. Věta (Lebesgue). *Nechť f je lokálně integrovatelná funkce na intervalu I. Potom skoro každý bod intervalu I je lebesgueovským bodem funkce f.*

Důkaz. Pro $r \in \mathbf{R}$ je funkce $|f(x) - r|$ lokálně integrovatelná (odůvodněte !). Podle věty 23.4 existuje množina $E_r \subset I$ Lebesgueovy míry nula tak, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} |f(x+t) - r|\, dt = |f(x) - r|$$

pro každé $x \in I \setminus E_r$. Položíme-li $E = \bigcup_{r \in \mathbf{Q}} E_r$, je $\lambda E = 0$. Buď $x \in I \setminus E$ a volme $\varepsilon > 0$. Existuje $r \in \mathbf{Q}$ tak, že $|f(x) - r| < \varepsilon$, tudíž

$$|f(x+t) - f(x)| \le |f(x+t) - r| + \varepsilon$$

a

$$\limsup_{h \to 0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} |f(x+t) - f(x)|\, dt \le |f(x) - r| + \varepsilon \le 2\varepsilon.$$

■

23.10. Poznámka. Sami si rozmyslete, že každý bod spojitosti funkce f je jejím lebesgueovským bodem. Zajímavý vztah mezi lebesgueovskými body a aproximativní spojitostí podáme ve cvičení 29.11.

23.11. Banach-Zareckého věta. Buď f reálná funkce na intervalu $[a,b]$. Ukažte ekvivalenci následujících výroků:

(i) f je absolutně spojitá na $[a,b]$,

(iv) f je spojitá na $[a,b]$, má tam konečnou variaci a Luzinovu vlastnost (N).

Návod. Pro důkaz $(iv) \Rightarrow (i)$ nechť D značí množinu, kde f má vlastní derivaci. Podle cvičení 20.8 je D měřitelná. Použijeme-li předpokladu, že $\lambda f([a,b] \setminus D) = 0$ a větu 20.4, dostáváme

$$|f(s) - f(t)| \leq \int_s^t |f'(\xi)| \, d\xi$$

pro každý interval $[s,t] \subset [a,b]$. Nyní si stačí uvědomit, že funkce $x \to \int_a^x |f'|$ je absolutně spojitá.

23.12. Charakteristiky lipschitzovských funkcí. Ukažte, že pro reálnou funkci f na intervalu $[a,b]$ jsou následující podmínky ekvivalentní (porovnejte také s příslušnými podmínkami pro absolutně spojité funkce):

(i) f je lipschitzovská na $[a,b]$,

(ii) ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každý konečný systém intervalů $[a_j, b_j] \subset [a,b]$ splňující $\sum_j (b_j - a_j) < \delta$ platí $\sum_j (f(b_j) - f(a_j)) < \varepsilon$,

(iii) f je absolutně spojitá na $[a,b]$ a f' je omezená na $[a,b] \setminus N$, kde $\lambda N = 0$.

Návod. Pro důkaz ekvivalence s (ii) lze konzultovat [Problémy]. Zbytek je snadný.

23.13. Per partes pro Lebesgueův integrál. Nechť f, g jsou absolutně spojité funkce na intervalu $[a,b]$. Potom

$$\int_a^b fg' = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'g \, .$$

Porovnejte s analogickou větou pro Newtonův integrál.

23.14. Historické poznámky. Základní věta 23.5 "kalkulu Lebesgueova integrálu" byla dokázána H. Lebesguem v [*1904]. Implikace (iv)⇒(i) ve větě 23.11 byla dokázána S. Banachem v [1925].

24. Radonovy míry na přímce a distribuční funkce

24.1. Distribuční funkce. Buď ν Radonova míra na **R**. Definujeme-li funkci F_ν předpisem

$$F_\nu(x) := \begin{cases} \nu(0,x] & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ -\nu(x,0] & \text{pro } x < 0, \end{cases}$$

je F_ν neklesající (to je skoro zřejmé) a zprava spojitá v každém bodě (snadno nahlédneme takto – je-li $x_n \searrow x$, plyne z vlastností míry ν, že $F_\nu(x_n) \to F_\nu(x)$).

Poznamenejme, že $\nu(a,b] = F_\nu(b) - F_\nu(a)$ pro každý interval $(a,b] \subset \mathbf{R}$, a že $F_\nu(0) = 0$.

Je-li míra ν dokonce konečná a položíme-li opět $G_\nu(x) = \nu(-\infty, x]$, je opět G_ν neklesající a zprava spojitá, přičemž F_ν a G_ν se liší na **R** pouze o konstantu (vše zdůvodněte!). Vidíme opět, že $\nu(a,b] = G_\nu(b) - G_\nu(a)$ pro každý interval $(a,b]$. V případě funkce G_ν nemusí být $G_\nu(0) = 0$, ale vždy $\lim\limits_{x \to -\infty} G_\nu(x) = 0$. Funkce F_ν i G_ν jsou příklady distribučních funkcí příslušných k míře ν.

Obecně, *distribuční funkce* příslušné k Radonově míře ν na **R** je každá neklesající a zprava spojitá funkce F na **R** taková, že $F(b) - F(a) = \nu(a,b]$ pro každý $(a,b] \subset \mathbf{R}$.

24.2. Věta. *Buď F neklesající a zprava spojitá na* **R**. *Potom existuje právě jedna (tj. jednoznačně určená na borelovských množinách) Radonova míra ν_F na* **R** *tak, že F je distribuční funkce příslušná k ν_F.*

Důkaz. Jednoznačnost je téměř jasná – jakékoliv dvě takovéto míry se totiž shodují na všech otevřených (či všech kompaktních) množinách v **R**. Existenci lze dokázat různě, podle toho, jaké obecné věty chceme použít. Můžeme třeba

(a) vyjít z pokrývacího systému $\{(a,b] : a < b, a, b \in \mathbf{R}\}$ a množinové funkce $\nu_F(a,b] := F(b) - F(a)$, vytvořit příslušnou vnější míru a pak její restrikci na měřitelné množiny,

anebo

(b) použít obecnou (Hopfovu) větu o rozšiřování míry (či pramíry).

V každém případě však je nutné dokázat následující vlastnost: Je-li $(a,b] \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n]$, potom $F(b) - F(a) \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} (F(b_n) - F(a_n))$. To však již není těžké, pouze technicky nepříjemné. Volte tedy $\varepsilon > 0$ a nalezněte $\delta_n > 0$, $\delta > 0$ tak, aby $F(b_n + \delta_n) < F(b_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$, $F(a+\delta) < F(a) + \varepsilon$ a uvažujte pokrytí $\{(a_n, b_n + \delta_n)\}$ intervalu $[a+\delta, b]$. ■

Shrňme tedy závěrem charakteristiku “rozumných” měr na reálné ose do následující věty.

24.3. Věta. *Nechť ν je míra definovaná na $\mathcal{B}(\mathbf{R})$. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) *ν je Radonova míra,*

(ii) *existuje distribuční funkce F tak, že $\nu(a,b] = F(b) - F(a)$ pro každý omezený interval $(a,b]$,*

(iii) *existuje neklesající funkce φ na $\mathbf{R}$ tak, že ν je Lebesgue-Stieltjesova míra λ_φ (viz příklad* 14.8.b*).*

Důkaz. Proveďte sami, použijte předchozí výsledky a Rieszovu větu o reprezentaci 16.5. ■

24.4. Poznámky. 1. Víme (poznámka 15.2), že každá konečná míra na $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ je již Radonova. Existují však σ-konečné míry na $\mathcal{B}(\mathbf{R})$, které nejsou Radonovy a nevzniknou tedy z žádné neklesající funkce φ jako Lebesgue–Stieltjesova míra.

2. Funkce φ z poslední věty nemusí být zprava spojitá. Jakožto monotonní funkce má však v každém bodě limity zprava, definujeme-li $\tilde{\varphi}(x) := \lim_{t\to x+} \varphi(t)$, je již $\tilde{\varphi}$ distribuční funkce příslušná k ν (určující stejnou Lebesgue-Stieltjesovu míru jako funkce φ), a liší se tedy od funkce F z (ii) pouze o konstantu (viz následující cvičení 24.6).

24.5. Cvičení. Buď F distribuční funkce příslušná k Radonově míře μ na $\mathbf{R}$. Je-li μ_F míra z věty 24.2, potom $\mu = \mu_F$ na $\mathcal{B}(\mathbf{R})$.

24.6. Cvičení. Ukažte, že libovolné dvě distribuční funkce se liší o konstantu.

24.7. Cvičení. Buď F distribuční funkce příslušná k Radonově míře μ.

(a) Ukažte, že F je absolutně spojitá na každém kompaktním intervalu, právě když μ je absolutně spojitá vzhledem k Lebesgueově míře λ.

V tomto případě F' je Radon-Nikodýmova derivace $\dfrac{d\mu}{d\lambda}$.

(b) Míry μ a λ jsou navzájem singulární ($\lambda \perp \mu$), právě když $F' = 0$ skoro všude.

(c) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ máme $\mu(\{x\}) = F(x) - \lim\limits_{t\to x-} F(t)$. Speciálně, F je spojitá v bodě x, právě když $\mu(\{x\}) = 0$.

(d) Ukažte, že $z \in \operatorname{supt}\mu$, právě když $F(z-\varepsilon) < F(z+\varepsilon)$ pro každé $\varepsilon > 0$.

(e) Buď $\mu = \mu_d + \mu_a + \mu_s$ rozklad μ na diskrétní, absolutně spojitou a singulární část podle cvičení 15.18.c. Jsou-li F_d, F_a, F_s distribuční funkce příslušné po řadě k μ_d, μ_a, μ_s, je F_a absolutně spojitá na každém kompaktním intervalu, F_s je spojitá, $F_s' = 0$ skoro všude a F_d je tzv. *funkce skoků*. Přitom

$$F = F_d + F_a + F_s.$$

24.8. Cvičení. (a) Definujme funkci φ na $\mathbf{R}$ tak, že φ je rovno Cantorově funkci (příklad 23.1) na $[0,1]$ a $\varphi = c_{(0,\infty)}$ jinde. Spočtěte $\lambda_\varphi C$, kde C je Cantorovo diskontinuum. Ukažte, že λ_φ je spojitá míra (viz cvičení 15.18) a $\operatorname{supt}\lambda_\varphi = C$ (viz cvičení 15.10).

(b) Buď $\varepsilon \in [0,1]$. Existuje neklesající funkce ψ tak, aby $\psi(0) = 0$, $\psi(1) = 1$ a $\lambda_\psi C = \varepsilon$?

Návod. Položte $\psi(x) = \varepsilon\varphi(x) + (1-\varepsilon)x$, kde φ je definována jako v (a).

24.9. Cvičení. Buď F distribuční funkce příslušná k Radonově míře μ. Předpokládejme, že funkce F je lokálně absolutně spojitá na $\mathbf{R}$. Potom pro každou funkci $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ je

$$\int_{\mathbf{R}} g\, d\mu = \int_{\mathbf{R}} gF' \,.$$

24.10. Fubiniovo lemma. Nechť f_n je posloupnost neklesajících funkcí na intervalu $I \subset \mathbf{R}$. Předpokládejme, že $\sum f_n$ má na I konečný součet f. Potom $f' = \sum f_n'$ skoro všude na I.

Návod. Dokažte nejprve $\lambda_f = \sum \lambda_{f_n}$ (značení jako v 14.8). K dokončení důkazu použijte Lebesgueovy rozklady těchto měr na absolutně spojité a singulární části.

24.11. Historické poznámky. Distribuční funkce hrají důležitou roli v teorii pravděpodobnosti a těžko říci, kdo je zavedl. V různé podobě byly zkoumány již Jacobem Bernoullim, P.S. de Laplacem a dalšími. Lemma 24.10 přísluší G. Fubinimu [1915].

25. Kurzweilův integrál

Lebesgueův integrál má v jistém smyslu nejlepší vlastnosti ze všech integrálů, které lze zavést na každém prostoru s mírou. Jeho univerzálnost se však může projevit i jako nedostatek. Budeme-li se zabývat integrováním funkcí jedné reálné proměnné (i více reálných proměnných, zde se však pro jednoduchost omezíme na přímku), zjistíme, že existují bohatší systémy funkcí, na nichž lze zavést rozumný pojem integrálu. Přerušme na chvíli výklad ilustrativním příkladem.

25.1. Příklad. Funkce

$$f(x) = \begin{cases} (x^2 \cos^2 \frac{1}{x^2})' & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

není lebesgueovsky integrovatelná na $[-1, 1]$. Pro $a_j = \dfrac{1}{\sqrt{(j+\frac{1}{2})\pi}}$, $b_j = \dfrac{1}{\sqrt{j\pi}}$ máme

$$\int_{a_j}^{b_j} |f(x)|\, dx = \int_{a_j}^{b_j} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi j},$$

takže

$$\int_0^1 |f(x)|\, dx = +\infty.$$

Přitom tato funkce má na **R** primitivní funkci, existuje tudíž v daných mezích její Newtonův integrál.

Na druhé straně máme také jednoduché příklady funkcí, které mají Lebesgueův, ale nemají Newtonův integrál (například funkce sign x na intervalu $[-1, 1]$). Společným zobecněním Newtonova a Lebesgueova integrálu je neabsolutně konvergentní integrál, který lze zavést několika ekvivalentními způsoby. Zde použijeme Kurzweilovu definici; v Jarníkově [JII] můžete studovat Perronovu definici (její náčrt je v 25.10).

25.2. Definice Kurzweilova integrálu. V tomto textu se omezíme pro jednoduchost na omezené intervaly, na neomezených intervalech lze získat pojem neabsolutně konvergentního integrálu limitním přechodem. Pro začátek mějme pevný interval $[a, b]$ a označme Δ množinu všech kladných funkcí na $[a, b]$. Pro účely Kurzweilova integrálu přehodnotíme pojem dělení intervalu: *Dělení* pro nás bude libovolný konečný systém intervalů s vyznačenými body $D = ([a_j, b_j], \xi_j)_{j=1}^m$, kde

$$a = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = a_3 < \cdots < b_{m-1} = a_m < b_m = b$$

a

$$\xi_j \in [a_j, b_j].$$

Řekneme, že dělení D je *podřízené* funkci $\delta \in \Delta$, jestliže pro všechna $j = 1, \ldots, m$ je $b_j - a_j < \delta(\xi_j)$. Další výklad je založený na následujícím tvrzení

Cousinovo lemma. *Nechť δ je kladná funkce na $[a, b]$. Potom existuje dělení D podřízené funkci δ. Navíc, máme-li daný konečný systém po dvou nepřekrývajících se intervalů $[a_i, b_i]$ obsahujících body ξ_i tak, že $b_i - a_i < \delta(\xi_i)$, můžeme tento systém doplnit na dělení podřízené δ, indexy ovšem nemusí v tom případě zůstat zachovány.*

Důkaz lemmatu není příliš těžký, využívá hlavně kompaktnosti intervalu $[a, b]$.

Nechť f je reálná funkce na $[a, b]$. Potom každému dělení $D = ([a_j, b_j], \xi_j)_{j=1}^m$ intervalu $[a, b]$ přiřazujeme součet

$$s(f, D) = \sum_{j=1}^m f(\xi_j)(b_j - a_j)\,.$$

Řekneme, že funkce f má na intervalu $[a, b]$ *Kurzweilův integrál* K, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta \in \Delta$ tak, že kdykoli máme dělení D intervalu $[a, b]$ podřízené δ, platí

$$|K - s(f, D)| < \varepsilon.$$

Tato definice silně připomíná zavedení Riemannova integrálu; liší se "pouze" tím, že tam, kde u Riemannova integrálu vystačíme s konstantami δ, v Kurzweilově definici vystupuje *funkce* δ.

Následující pozorování jsou snadná: Pokud má funkce f Kurzweilův integrál na $[a,b]$, je tento určen jednoznačně. Množina všech kurzweilovsky integrovatelných funkcí tvoří lineární prostor, na němž je Kurzweilův integrál lineární a monotonní funkcionál.

Nebudeme se zde podrobně zabývat teorií neabsolutně konvergentního integrálu, zaměříme se pouze na vztah k Newtonovu a Lebesgueovu integrálu.

25.3. Věta. *Nechť F je spojitá funkce na $[a,b]$, $F' = f$ na (a,b). Potom Kurzweilův integrál funkce f na $[a,b]$ je roven $F(b) - F(a)$.*

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. Ke každému $x \in (a,b)$ najděme $\delta(x) > 0$ tak, že je-li $y \in [a,b]$, $0 < |y-x| < \delta(x)$, potom

$$\left|\frac{F(y)-F(x)}{y-x} - f(x)\right| < \varepsilon.$$

Dále najděme ke každému krajnímu bodu $z \in \{a,b\}$ číslo $\delta(z) > 0$ tak, že $|f(z)\delta(z)| < \varepsilon$ a pro všechna $y \in [a,b] \cap (z-\delta(z), z+\delta(z))$ je $|F(y) - F(z)| < \varepsilon$. Mějme dělení $D = ([a_j,b_j],\xi_j)_{j=1}^m$ podřízené právě definované funkci δ. Potom pro každé $j \in \{1,\dots,m\}$ je

$$\begin{gathered}|F(b_j) - F(a_j) - f(\xi_j)(b_j - a_j)| \le \\ |F(b_j) - F(\xi_j) - f(\xi_j)(b_j - \xi_j)| + |F(\xi_j) - F(a_j) - f(\xi_j)(\xi_j - a_j)| \\ < \varepsilon(|b_j - \xi_j| + |\xi_j - a_j|) = \varepsilon(b_j - a_j)\,,\end{gathered}$$

pokud $\xi_j \in (a,b)$ a

$$|F(b_j) - F(a_j) - f(\xi_j)(b_j - a_j)| \le |F(b_j) - F(a_j)| + |f(\xi_j)(b_j - a_j)| < 2\varepsilon\,,$$

pokud $\xi_j \in \{a,b\}$. Sečtením přes všechna j dostaneme odhad

$$|F(b) - F(a) - s(f,D)| < 4\varepsilon + (b-a)\varepsilon.$$

■

25.4. Věta. *Nechť funkce f má konečný Lebesgueův integrál L. Potom f má též Kurzweilův integrál K a $K = L$.*

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. Najděme zdola polospojitou funkci $s > f$ a shora polospojitou funkci $t < f$ tak, že s, $t \in \mathcal{L}^1([a,b])$ a

$$\int_a^b (s-t) \; < \varepsilon$$

(viz věta 15.5; z neostrých nerovností dostaneme ostré přičtením malých konstant). Ke každému $x \in [a,b]$ najděme $\delta(x) > 0$ tak, že $t < f(x) < s$ na $(x-\delta(x), x+\delta(x)) \cap [a,b]$. Buď $D = ([a_j,b_j],\xi_j)_{j=1}^m$ dělení intervalu $[a,b]$ podřízené funkci δ. Potom pro každé $j \in \{1,\dots,m\}$ je

$$\int_{a_j}^{b_j} t \le f(\xi_j)(b_j - a_j) \le \int_{a_j}^{b_j} s\ .$$

Sečtením dostáváme

$$\int_a^b t \le s(f,D) \le \int_a^b s\ .$$

Samozřejmě také platí

$$\int_a^b t \le L \le \int_a^b s\ ,$$

takže

$$|s(f,D) - L| < 2\varepsilon.$$

■

25.5. Neurčitý Kurzweilův integrál. Nyní se budeme zabývat Kurzweilovým integrálem o proměnných mezích, který budeme ve zbytku kapitoly značit obvyklým symbolem integrálu. V dalším bude pevný interval značen $[a_0, b_0]$ a Δ bude množina všech kladných funkcí na $[a_0, b_0]$. Uvažujme funkci f, která má Kurzweilův integrál na intervalu $[a_0, b_0]$. Jestliže $[a, b] \subset [a_0, b_0]$, potom f má též Kurzweilův integrál na intervalu $[a, b]$. Přitom platí vzorec

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f,$$

kdykoli $a_0 \leq a < c < b \leq b_0$. Můžeme se tedy zabývat *neurčitým Kurzweilovým integrálem* reálné funkce f na $[a_0, b_0]$. Ten budeme definovat jako takovou funkci F na $[a_0, b_0]$, která splňuje rovnost

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

pro každý interval $[a, b] \subset [a_0, b_0]$. Samozřejmě, neurčitý Kurzweilův integrál, pokud existuje, je určen jednoznačně až na aditivní konstantu.

25.6. Saks-Henstockovo lemma. *Nechť F je neurčitý Kurzweilův integrál funkce f na intervalu $[a_0, b_0]$. Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta \in \Delta$ tak, že kdykoli máme dělení $D = ([a_j, b_j], \xi_j)_{j=1}^m$ intervalu $[a_0, b_0]$ podřízené δ a množinu $M \subset \{1, \dots, m\}$, platí*

$$\Big|\sum_{j\in M} F(b_j) - F(a_j) - f(\xi_j)(b_j - a_j)\Big| < \varepsilon.$$

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. Najděme $\delta \in \Delta$ tak, že kdykoli máme dáno dělení $D = ([a_j, b_j], \xi_j)_{j=1}^m$ intervalu $[a_0, b_0]$ podřízené δ, potom

$$|F(b_0) - F(a_0) - s(f, D)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zvolme takové dělení D a množinu $M \subset \{1, \dots, m\}$. Z definice integrálu na intervalu $[a_j, b_j]$ je zřejmé, že ke každému $j = 1, \dots, m$ najdeme dělení $D_j = ([a_j^i, b_j^i], \xi_j^i)_{i=1}^{m_j}$ intervalu $[a_j, b_j]$ podřízené restrikci δ na $[a_j, b_j]$ tak, že

$$|F(b_j) - F(a_j) - s(f, D_j)| < \frac{\varepsilon}{2m}.$$

Utvořme nové dělení $D^* = ([a_k^*, b_k^*], \xi_k^*)_{k=1}^p$ intervalu $[a_0, b_0]$ tak, že každá trojice (a_k^*, b_k^*, ξ_k^*) je buď některá z trojic (a_j^i, b_j^i, ξ_j^i), kde $j \notin M$, $i \in \{1, \dots, m_j\}$, nebo některá z trojic (a_j, b_j, ξ_j), kde $j \in M$. Toto dělení je podřízené δ a tudíž

$$|F(b_0) - F(a_0) - s(f, D^*)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Porovnáním získaných nerovností dostáváme

$$\Big|\sum_{j\in M} F(b_j) - F(a_j) - f(\xi_j)(b_j - a_j)\Big| < \varepsilon.$$

■

25.7. Věta. *Nechť F je neurčitý Kurzweilův integrál funkce f na $[a_0, b_0]$. Potom funkce F je spojitá v $[a_0, b_0]$.*

Důkaz. Zvolme $z \in [a_0, b_0]$ a $\varepsilon > 0$. Najděme podle předchozího lemmatu $\delta \in \Delta$ tak, že kdykoli máme dělení $D = ([a_j, b_j], \xi_j)_{j=1}^m$ intervalu $[a_0, b_0]$ podřízené δ a množinu $M \subset \{1, \dots, m\}$, platí

$$\Big|\sum_{j \in M} F(b_j) - F(a_j) - f(\xi_j)(b_j - a_j)\Big| < \varepsilon.$$

Nechť $x \in [a_0, b_0]$, $|x - z| < \delta(z)$. Najděme dělení $D = ([a_j, b_j], \xi_j)_{j=1}^m$ intervalu $[a_0, b_0]$ podřízené δ tak, že pro některé $k \in \{1, \dots, m\}$ je $\xi_k = z$ a krajní body intervalu $[a_k, b_k]$ jsou až na pořadí x a z. Použijeme-li vlastnost dělení pro $M = \{k\}$, dostaneme

$$|F(x) - F(z)| < \varepsilon + |f(z)||x - z|.$$

■

Následující věta byla (na základě Kurzweilovy definice neabsolutně konvergentního integrálu, dokonce i ve vyšší dimenzi) dokázána J. Králem [1985].

25.8. Věta. *Nechť funkce f má na $[a_0, b_0]$ Kurzweilův integrál a F je její neurčitý Kurzweilův integrál. Potom f je měřitelná funkce, ve skoro všech bodech intervalu (a_0, b_0) existuje derivace F' a platí $F' = f$ skoro všude.*

Důkaz. Ze spojitosti funkce F (věta 25.7) snadno dostaneme, že funkce $\overline{D}F$ je měřitelná (dokonce borelovská) – totiž

$$\overline{D}F(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} f_{n,k}\,,$$

kde funkce $f_{n,k}$ zadané předpisem

$$f_{n,k}(x) = \sup\Big\{\frac{F(y) - F(x)}{y - x} : y \in [a, b], \frac{1}{n+k} \le |y - x| \le \frac{1}{n}\Big\}$$

jsou zřejmě spojité. Nyní dokážeme, že $\underline{D}F = \overline{D}F$ skoro všude, čímž dostaneme existenci derivace skoro všude i její měřitelnost.

Stačí ověřit, že pro každé $n \in \mathbf{N}$ mají množiny

$$L_n = \{x \in [a_0, b_0] : \underline{D}F(x) < f(x) - \frac{1}{n}\}$$

a

$$U_n = \{x \in [a_0, b_0] : \overline{D}F(x) > f(x) + \frac{1}{n}\}$$

míru nula. Vzhledem k symetrii stačí, když se budeme zabývat množinami L_n. Nechť tedy $n \in \mathbf{N}$ je pevné, budeme odhadovat (vnější) míru množiny $L := L_n$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Najděme podle lemmatu 25.6 funkci $\delta \in \Delta$ tak, že kdykoli máme dělení $D = ([a_j, b_j], \xi_j)_{j=1}^m$ intervalu $[a_0, b_0]$ podřízené δ a množinu $M \subset \{1, \dots, m\}$, platí

$$\Big|\sum_{j \in M} F(b_j) - F(a_j) - f(\xi_j)(b_j - a_j)\Big| < \varepsilon.$$

Nechť $\mathcal{V}$ je množina všech intervalů $[a, b]$, k nimž existuje $x \in [a, b] \cap L$ tak, že $b - a < \delta(x)$ a

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} < f(x) - \frac{1}{n}\,.$$

Potom $\mathcal{V}$ je vitaliovské pokrytí množiny L, tedy podle Vitaliovy věty (důsledek 27.3) existuje konečný systém po dvou disjunktních intervalů $[a_i, b_i]$, obsahující výše popsaným způsobem body ξ_i, tak, že

$$\lambda^*(L \setminus \bigcup_i [a_i, b_i]) < \varepsilon.$$

Doplňme systém $([a_i,b_i],\xi_i)_i$ na dělení $([a_j^*,b_j^*],\xi_j^*)$ podřízené δ a použijme způsob určení δ pro $M=\{j:\text{existuje } i \text{ tak, že } [a_j^*,b_j^*]=[a_i,b_i]\}$. Dostáváme

$$\sum_i \Big(f(\xi_i)(b_i-a_i) - \big(F(b_i)-F(a_i)\big)\Big) < \varepsilon,$$

ačkoli z definice $\mathcal{V}$ je

$$\sum_i \Big(f(\xi_i)(b_i-a_i) - \big(F(b_i)-F(a_i)\big)\Big) > \frac{1}{n}\sum_i (b_i-a_i).$$

Je tedy

$$\sum_i (b_i-a_i) < n\varepsilon$$

a

$$\lambda^*(L) \le n\varepsilon + \lambda^*(L\setminus \bigcup_i [a_i,b_i]) < (n+1)\varepsilon.$$

■

Jako důsledek dostáváme následující tvrzení, dokreslující vztah mezi Kurzweilovým a Lebesgueovým integrálem – jejich ekvivalenci pro *nezáporné* funkce.

25.9. Věta. *Nechť funkce $f \ge 0$ má Kurzweilův integrál K na intervalu $[a,b]$. Potom f má též Lebesgueův integrál L na $[a,b]$ a $L=K$.*

Důkaz. Podle věty 25.6 je funkce f měřitelná, tudíž Lebesgueův integrál L funkce f má smysl. Zbývá tedy ukázat, že $L<\infty$, neboť pak lze použít větu 25.4 k závěru, že $L=K$. Jelikož $f\ge 0$, je neurčitý Kurzweilův integrál F z funkce f neklesající na $[a,b]$, a tudíž podle vět 22.7 a 25.8 dostáváme $(L)\int_a^b f = (L)\int_a^b F' \le F(b)-F(a) < +\infty$. ■

25.10. Perronův integrál. Existují i další možnosti jak zavést integrál, který by byl ekvivalentní s Kurzweilovým (tj. který by dával stejně širokou třídu "integrovatelných" funkcí a na níž by se shodoval s Kurzweilovým integrálem). Popíšeme zde stručně *Perronovu metodu obálek*. Začněme se dvěma poznámkami:

(a) Při definici Newtonova integrálu funkce f požadujeme existenci primitivní funkce F, tj. takové funkce F, pro niž $F'=f$. Toto je velice silná podmínka a zužuje třídu funkcí, které mohou mít Newtonův integrál (mimo jiné z této podmínky plyne, že f musí mít Darbouxovu vlastnost a být první Baireovy třídy). V deskriptivní definici Lebesgueova integrálu se již vyžaduje existence absolutně spojité funkce F tak, aby $F'=f$ pouze skoro všude.

(b) Připomeňme také následující speciální případ věty 15.5 (známý jako Vitali-Caratheodoryova věta): Funkce f je lebesgueovsky integrovatelná na intervalu I, jestliže ke každému $\varepsilon>0$ existuje shora polospojitá funkce g a zdola polospojitá funkce h tak, že $g\le f\le h$ na I a $\int_I (h-g)<\varepsilon$.

Nechť tedy f je funkce na intervalu $[a,b]$. Funkce M se zove *majorantou* k f , jestliže $f(x)\le \underline{D}M(x)\ne -\infty$ pro každé $x\in[a,b]$. Pokud $f\ge \overline{D}m \ne +\infty$, řekneme, že m je *minorantou* k f.

Funkce f se nazve *perronovsky integrovatelná* na intervalu $[a,b]$, jestliže ke každému $\varepsilon>0$ existuje majoranta M a minoranta m tak, že

$$M(b)-M(a)-(m(b)-m(a)) < \varepsilon.$$

Protože $\underline{D}(M-m)\ge \underline{D}M-\overline{D}m \ge 0$ (a každá funkce, jejíž dolní derivace je nezáporná, je neklesající, viz [Problémy]), můžeme pak definovat *Perronův integrál* funkce f

$$(\mathcal{P})\int_a^b f = \inf\{M(b)-M(a): M \text{ je majoranta k } f\} = \sup\{m(b)-m(a): m \text{ je minoranta k } f\}.$$

(Také jsme mohli definovat horní a dolní Perronův integrál.) Bližší podrobnosti lze nalézt v [JII].

25.11. Poznámka. Následující charakteristika lebesgueovsky integrovatelných funkcí se dokazuje v deskriptivní teorii:

Funkce f na intervalu $[a,b]$ je *lebesgueovsky* integrovatelná, právě když ke každému $\varepsilon>0$ existuje majoranta M a minoranta m, obě *absolutně spojité*, tak, že

$$M(b)-M(a)-(m(b)-m(a)) < \varepsilon.$$

Pro důkaz tohoto tvrzení lze opět využít Vitali-Caratheodoryho charakteristiku z věty 15.5 a za uvedené majoranty a minoranty vzít neurčité integrály z oněch polospojitých funkcí.

Je zajímavé, že v definici Perronova integrálu se lze omezit na spojité majoranty:

Funkce f na intervalu $[a, b]$ je *perronovsky* integrovatelná, právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje majoranta M a minoranta m, obě *spojité*, tak, že

$$M(b) - M(a) - (m(b) - m(a)) < \varepsilon.$$

A konečně i riemannovsky integrovatelné funkce lze obdobně charakterizovat:

Funkce f na intervalu $[a, b]$ je *riemannovsky* integrovatelná, právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje majoranta M a minoranta m, obě *spojitě diferencovatelné*, tak, že

$$M(b) - M(a) - (m(b) - m(a)) < \varepsilon.$$

25.12. Cvičení. Rozmyslete, případně vyčtěte z důkazů této kapitoly, jak naleznete funkci δ z definice Kurzweilova integrálu v případech, kdy funkce f je :

(a) newtonovsky integrovatelná,

(b) lebesgueovsky integrovatelná,

(c) charakteristická funkce otevřené množiny,

(d) charakteristická funkce množiny míry 0.

25.13. Cvičení. Ukažte na příkladě, že neurčitý Kurzweilův integrál nemusí být funkce absolutně spojitá.

25.14. Historické poznámky. Již H. Lebesgueovi bylo známo, že jeho integrál na přímce nemusí integrovat derivace. Snahou tedy bylo najít širší třídu "integrovatelných funkcí" zahrnující lebesgueovsky i newtonovsky integrovatelné funkce. Problém řešil A. Denjoy [1912], který použil konstruktivní metodu založenou na transfinitním postupu, a N. N. Luzin [1912] pomocí deskriptivní definice užívající dalšího zobecnění pojmu absolutní spojitosti. Další metoda obálek byla rozvinuta O. Perronem [1914], přičemž bylo dokázáno, že jeho integrál je ekvivalentní Denjoyovu. Dnes se obyčejně mluví o *Denjoy-Perronově integrálu* anebo také o *užším Denjoyově integrálu*. Čtvrtý přístup byl rozpracován nezávisle R. Henstockem [1961] a J. Kurzweilem [1957], kteří se vrátili k definici riemannovského typu, často se mluví o *úplném riemannovském* či o *Henstock-Kurzweilově integrálu*. I když tedy pojem tohoto integrálu byl zaveden počátkem století, jeho studium bylo obtížné pro značně nepřehledné definice. Teprve Henstockovo a Kurzweilovo pojetí svou jednoduchou definicí a následně i snadnými důkazy opět obrátilo pozornost k hlubšímu studiu Kurzweilova integrálu a k vcelku nečekaným aplikacím. Z nedávných publikací upozorněme na R.Henstock [*1988], Peng Yee Lee [*1989] a Š. Schwabik [*1992]. V češtině existuje samizdatový svazek "Určitý integrál" od D. Preisse a Š. Schwabika z roku 1979.

E. INTEGRÁL V $\mathbf{R}^n$

26. Lebesgueova míra a integrál v $\mathbf{R}^n$

V této kapitole shrneme některé výsledky o Lebesgueově míře a integrálu v $\mathbf{R}^n$, přičemž dodáme i další výsledky.

Připomeňme, že Lebesgueova vnější míra λ_n^* je definována předpisem

$$\lambda_n^* A := \inf\{\sum \operatorname{vol} I_k \colon \bigcup I_k \supset A, I_k \text{ je otevřený interval}\}.$$

Systém $\mathfrak{M}_n = \mathfrak{M}_n(\lambda_n^*)$ všech lebesgueovsky měřitelných množin obsahuje všechny borelovské množiny $\mathcal{B}_n$, přičemž $M \in \mathfrak{M}_n$, právě když existují borelovské množiny B_i, B_e tak, že $B_i \subset M \subset B_e$ a $\lambda_n^*(B_e \setminus B_i) = 0$ (věta 1.21). Vnější Lebesgueova míra λ_n^* je na systému $\mathfrak{M}_n$ úplnou mírou, značme ji tentokrát symbolem λ_n (později, nebude-li hrozit nedorozumění, budeme index vynechávat). Neškodí si připomenout, že λ_n je Radonovou mírou (to dostaneme snadno použitím poznámky 15.2.4).

26.1. Věta. *Lebesgueova míra λ_n na $\mathfrak{M}_n$ je zúplněním λ_n uvažované na $\mathcal{B}_n$.*

Důkaz. Označme $(\overline{\mathcal{B}_n}, \overline{\lambda}_n)$ zúplnění $(\mathcal{B}_n, \lambda_n)$. Protože každá množina $M \in \mathfrak{M}_n$ má podle předešlého tvar $M = B \cup N$, kde $B \in \mathcal{B}_n$ a N je podmnožina borelovské množiny míry nula, máme $\mathfrak{M}_n \subset \overline{\mathcal{B}_n}$ a $\lambda_n = \overline{\lambda}_n$ na $\mathfrak{M}_n$. Na druhé straně, je-li $H \in \overline{\mathcal{B}_n}$, je H podle definice tvaru $B \cup N$, kde B je borelovská a $N \subset B^* \in \mathcal{B}_n$, $\lambda_n B^* = 0$. Opět vidíme, že $H \in \mathfrak{M}_n$. (Věta plyne ostatně už ze samotného faktu, že λ_n je úplná Radonova míra.) ∎

26.2. Věta. *Lebesgueova míra λ_{n+k} na $\mathfrak{M}_{n+k}$ je zúplněním součinové míry $\lambda_n \otimes \lambda_k$ na $\mathfrak{M}_n \otimes \mathfrak{M}_k$.*

Důkaz. Celý důkaz rozdělíme do několika kroků.

1. Především ukážeme, že $\mathfrak{M}_n \otimes \mathfrak{M}_k \subset \mathfrak{M}_{n+k}$. K tomu stačí ukázat, že libovolný měřitelný obdélník $A \times B$, kde $A \in \mathfrak{M}_n$, $B \in \mathfrak{M}_k$ leží v $\mathfrak{M}_{n+k}$. Rozmyslete si , že $A \times B = D \setminus N$, kde D je množina typu G_δ v $\mathbf{R}^{n+k}$ a $\lambda_{n+k} N = 0$ (využijte charakteristiku měřitelných množin uvedenou ve větě 1.21 a uvědomte si, že kartézský součin dvou G_δ-množin je G_δ-množina), což nám již stačí, vzhledem k právě citované větě, k dokončení důkazu.

2. Označme na chvilku $(\mathfrak{M}, \lambda)$ zúplnění $(\mathfrak{M}_{n+k}, \lambda_{n+k})$. Jelikož každý otevřený interval v $\mathbf{R}^{n+k}$ leží v $\mathfrak{M}_n \otimes \mathfrak{M}_k \subset \mathfrak{M}$, obsahuje $\mathfrak{M}$ všechny borelovské množiny z $\mathcal{B}_{n+k}$. Tedy, shrneme-li, je

$$\mathcal{B}_{n+k} \subset \mathfrak{M}_n \otimes \mathfrak{M}_k \subset \mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_{n+k},$$

odkud z věty 26.1 plyne, že $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{n+k}$.

3. Jelikož $\lambda = \lambda_n \otimes \lambda_k = \lambda_{n+k}$ na všech otevřených intervalech v $\mathbf{R}^{n+k}$, plyne z vět o jednoznačnosti (kupř. cvičení 26.4) a z konstrukce zúplněné míry, že $\lambda = \lambda_{n+k}$ na $\mathfrak{M}_{n+k}$. ∎

26.3. Poznámka. Není příliš těžké dokázat, že pro systémy borelovských množin v eukleidovských prostorech platí $\mathcal{B}_n \otimes \mathcal{B}_k = \mathcal{B}_{n+k}$. Pro měřitelné množiny je situace daleko komplikovanější. Platí totiž, že

$$\mathcal{B}_{n+k} \subset \mathfrak{M}_n \otimes \mathfrak{M}_k \subset \mathfrak{M}_{n+k}\,, \quad \text{přičemž} \quad \mathcal{B}_{n+k} \neq \mathfrak{M}_n \otimes \mathfrak{M}_k \neq \mathfrak{M}_{n+k}.$$

Pro první protipříklad stačí uvažovat kartézský součin $H \times H$, kde H je měřitelná neborelovská podmnožina $\mathbf{R}$ (cvičení 1.14.b) a vzít v úvahu lemma 11.2. Druhý příklad se skrývá v poznámce 11.10.

26.4. Cvičení. Lebesgueova míra je jedinou úplnou Radonovou mírou na $\mathbf{R}^n$, která přiřazuje (otevřeným) intervalům jejich objem.

26.5. Cvičení. Lebesgueova míra je translačně invariantní: Je-li $A \in \mathfrak{M}_n$ a $x \in \mathbf{R}^n$, potom $x + A \in \mathfrak{M}_n$ a $\lambda_n(x+A) = \lambda_n A$.

26.6. Cvičení. Nechť ν je translačně invariantní úplná Radonova míra na $\mathbf{R}^n$. Potom existuje $c > 0$ tak, že $\nu = c\lambda_n$.

Návod. Položte c rovno objemu jednotkového intervalu $(0,1)^n$, spočtěte objem libovolného intervalu a použijte cvičení 26.4.

26.7. Lebesgueovsky měřitelné funkce. Protože $\mathfrak{M}_n$ obsahuje systém všech borelovských množin, je každá borelovská (speciálně, každá spojitá) funkce (na $\mathbf{R}^n$) měřitelná. Hlubší (a úplnou) charakteristiku měřitelných funkcí (kupř. na otevřených či uzavřených podmnožinách $\mathbf{R}^n$) podává Luzinova věta 18.2.

Základními prostředky integrálního kalkulu funkcí více proměnných jsou věta o substituci a Fubiniova věta, umožňující postupným použitím převedení vícerozměrných integrálů až na jednorozměrné.

26.8. Úvod k Fubiniově větě. Nechť $M \subset \mathbf{R}^{n+k}$ je měřitelná množina. Podobně jako v 8.3. budeme značit $\mathcal{L}^*(M)$ množinu všech funkcí f, které mají (konečný nebo nekonečný) integrál $\int_M f\,d\lambda_{n+k}$, kterýžto značíme též tradičně $\int_M f(x,y)\,dx\,dy$. Nechť $x \in \mathbf{R}^n$. Připomeňme, že symbolem M^x značíme množinu $\{y \in \mathbf{R}^k : [x,y] \in M\}$.

26.9. Fubiniova věta. *Nechť $M \subset \mathbf{R}^{n+k}$ je měřitelná množina a $f \in \mathcal{L}^*(M)$. Potom pro skoro všechna $x \in \mathbf{R}^n$ má smysl integrál*

$$g(x) := \int_{M^x} f(x,.)\,d\lambda_k$$

a platí

$$\int_M f\,d\lambda_{n+k} = \int_{\mathbf{R}^n} g\,d\lambda_n\,,$$

neboli

$$\int_M f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbf{R}^n} \Big(\int_{M^x} f(x,y)\,dy \Big)\,dx\,.$$

Důkaz. Plyne ihned z vět 11.11 a 26.2. ■

26.10. Poznámky. 1. Předpoklad $f \in \mathcal{L}^*(M)$ je například splněn, když $f \in \mathcal{L}^1(M)$ (Tonelliho věta) nebo když funkce f je nezáporná a měřitelná (Fubiniova věta v užším smyslu). V praktických výpočtech často dochází ke kombinovanému ověření předpokladů: Nejprve pomocí Fubiniovy věty zjistíme integrovatelnost $|f|$ a pak použijeme Tonelliho větu.

2. Nechť πM značí projekci M na $\mathbf{R}^n$, neboli množinu všech bodů x, pro něž je M^x neprázdná. Potom samozřejmě

$$\int_M f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\pi M} \Big(\int_{M^x} f(x,y)\,dy \Big)\,dx\,,$$

pokud množina πM je měřitelná. Tato podoba Fubiniovy věty se nejčastěji vyskytuje v konkrétních příkladech. Obecně však z pouhé měřitelnosti množiny M neplyne měřitelnost πM. Ihned je vidět, že πM je měřitelná, je-li M otevřená (potom πM je také otevřená), nebo kompaktní (potom πM je kompaktní), nebo aspoň sjednocení spočetně mnoha kompaktních množin, např. uzavřená. Je pravda, že i průměty borelovských množin jsou měřitelné, důkaz je však mnohem těžší. Studium průmětů borelovských množin vedlo k zavedení pojmu *analytické množiny* (viz [Mar]).

3. Příklady na užití Fubiniovy věty lze nalézt v hojné míře v [L-Př]. Zde uvedeme jen jeden.

26.11. Příklad. Počítejme integrál $\int_B f(z)\,dz$, kde f je integrovatelná funkce na kouli $B := \{z \in \mathbf{R}^3 : |z| < 1\}$. Pišme z ve tvaru $[x,y]$, kde $x = [z_1, z_2] \in \mathbf{R}^2$ a $y = z_3 \in \mathbf{R}$. Potom $B^x = \{y \in \mathbf{R} : |y| < \sqrt{1-|x|^2}\}$ a $\pi B = \{x \in \mathbf{R}^2 : |x| < 1\}$. Máme

$$\begin{aligned}\int_B f(z)\,dz &= \int_{\pi B} \Big(\int_{-\sqrt{1-|x|^2}}^{\sqrt{1-|x|^2}} f(x,y)\,dy \Big)\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} \Big(\int_{-\sqrt{1-z_1^2}}^{\sqrt{1-z_1^2}} \Big(\int_{-\sqrt{1-z_1^2-z_2^2}}^{\sqrt{1-z_1^2-z_2^2}} f(z_1,z_2,z_3)\,dz_3 \Big)\,dz_2 \Big)\,dz_1\,.\end{aligned}$$

26.12. Jakobián a derivace. Nechť $G \subset \mathbf{R}^k$ je otevřená množina a $\varphi = [\varphi_1, \dots \varphi_n] : G \to \mathbf{R}^n$ má v bodě $z \in G$ všechny parciální derivace. Potom *Jacobiho matici* $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(z)\right)_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,k}}$ zobrazení φ v bodě z budeme značit $\nabla\varphi(z)$.

Existuje-li lineární zobrazení $L : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ tak, že

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(z+h) - \varphi(z) - L(h)}{|h|} = 0\,,$$

řekneme, že φ má v bodě z *(Fréchetovu) derivaci*. V tomto případě je L reprezentováno maticí $\nabla\varphi(z)$, nazývá se derivací φ v bodě z a značí se $\varphi'(z)$.

Zobrazení φ má derivaci v bodě z, právě když všechny jeho složky $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ mají derivaci v z. Spojitost parciálních derivací zaručuje existenci derivace. Zobrazení, jehož všechny parciální derivace až do řádu ℓ jsou spojité, nazveme $\mathcal{C}^\ell$*-zobrazením*, nebo zobrazením *třídy* $\mathcal{C}^\ell$.

V případě $k = n$ je Jacobiho matice $\nabla\varphi(z)$ čtvercová a její determinant $J_\varphi(z)$ nazveme *Jakobiánem* φ v bodě z.

Následující větu uvedeme zatím bez důkazu, později dokážeme obecnější větu 34.18.

26.13. Věta o substituci. *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina a $\varphi : G \to \mathbf{R}^n$ je prosté $\mathcal{C}^1$-zobrazení, $J_\varphi(z) \neq 0$ pro všechna $z \in G$. Nechť f je funkce na $\varphi(G)$. Potom*

$$\int_{\varphi(G)} f(x)\,dx = \int_G f(\varphi(t))|J_\varphi(t)|\,dt\,,$$

pokud některý z těchto integrálů má smysl.

26.14. Polární souřadnice. Definujme zobrazení $\varphi : [r,t] \mapsto [r\,\cos t,\ r\,\sin t]$. Potom φ je zajisté třídy $\mathcal{C}^\infty$ v $\mathbf{R}^2$,

$$\varphi'(r,t) = \begin{pmatrix} \cos t\,, & -r\,\sin t \\ \sin t\,, & r\,\cos t \end{pmatrix}$$

a $J_\varphi(r,t) = r$. Zobrazení φ není prosté. Pro výpočty mnohých integrálů se hodí záměna proměnných $x = \varphi(r,t)$, kde $[r,t]$ probíhá vhodnou množinu G, zpravidla $G \subset G_0 := (0,\infty) \times (0, 2\pi)$. V této situaci jsou již splněny předpoklady věty o substituci, ale je dobré si uvědomit, že obrazem G_0 není celé $\mathbf{R}^2$. Při použití je často nutno využít úvahu, že $\lambda(\mathbf{R}^2 \setminus \varphi(G_0)) = 0$.

26.15. Lemniskata. Jako ukázku spočteme plochu množiny M omezené lemniskatou:

$$M := \{[x,y] \in \mathbf{R}^2 : (x^2+y^2)^2 < 2a^2(x^2-y^2)\}\,.$$

Z důvodů symetrie se lze omezit na první kvadrant I. Zavedeme-li zobrazení φ pomocí polárních souřadnic z předchozího odstavce a označíme-li

$$L = \{[r,t] \in \mathbf{R}^2 : r \in (0, \sqrt{2a^2\cos 2t})\,, t \in (0, \frac{\pi}{4})\}\,,$$

je $\varphi(L) = M \cap I$. Podle věty o substituci dostáváme

$$\lambda_2(M) = 4\int_L r\,drdt = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t\,dt = 2a^2.$$

Kromě pořádného odůvodnění uvedeného postupu je největším problémem nalezení množiny L. To se lze naučit jen důkladným spočítáním mnoha příkladů.

26.16. Sférické souřadnice. Uvažujme zobrazení $\varphi = [x,y,z]$, kde

$$x(r,t,\theta) = r\cos\theta\,\cos t\,, \quad y(r,t,\theta) = r\cos\theta\,\sin t\,, \quad z(r,t,\theta) = r\sin\theta$$

a $[r,t,\theta] \in G_0 := (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \times (-\frac{1}{2}\pi,\ \frac{1}{2}\pi)$. Máme

$$\varphi'(r,t,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta\,\cos t, & -r\sin t\cos\theta, & -r\cos t\sin\theta \\ \cos\theta\,\sin t, & r\cos t\cos\theta, & -r\sin t\sin\theta \\ \sin\theta, & 0, & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Tudíž $J_\varphi(r,t,\theta) = r^2\,\cos\theta$. Podobně jako u polárních souřadnic, $\varphi(G_0)$ není celé $\mathbf{R}^3$. Množina $\mathbf{R}^3 \setminus \varphi(G_0) = \{x \in \mathbf{R}^3 \colon x_2 = 0 \text{ a } x_3 \geq 0\}$ má míru nula.

26.17. Cvičení. Nechť κ_n je objem n-rozměrné jednotkové koule. Nechť φ je nezáporná měřitelná funkce na intervalu $(0,R)$. Potom

$$\int_{B(0,R)} \varphi(|x|)\,dx = n\kappa_n \int_0^R r^{n-1}\varphi(r)\,dr\,.$$

Návod. Nejprve se soustřeďte na případ, kdy φ je po částech konstantní, a pak použijte limitní přechody.

26.18. Konvoluce funkcí a měr. Nechť f, g jsou měřitelné funkce na $\mathbf{R}^n$. Pokud má pro skoro všechna $x \in \mathbf{R}^n$ smysl výraz $f * g\,(x) := \int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy$, nazývá se funkce $f * g$ *konvolucí* funkcí f a g.

Nechť f je funkce na $\mathbf{R}^n$ a μ je (znaménková) Radonova míra tamtéž. Pokud má pro skoro všechna $x \in \mathbf{R}^n$ smysl výraz $f * \mu\,(x) := \int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)\,d\mu(y)$, nazývá se funkce $f * \mu$ *konvolucí* funkce f s mírou μ.

26.19. Věta. *Buďte $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$. Potom pro skoro všechna $x \in \mathbf{R}^n$ funkce $y \mapsto f(x-y)g(y)$ leží v $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$, je $f * g \in \mathcal{L}^1$ a $||f * g||_1 \leq ||f||_1\,||g||_1$.*

Důkaz. Nejdříve je třeba ukázat, že funkce $[x,y] \mapsto f(x-y)g(y)$ je měřitelná v $\mathbf{R}^{2n}$. Samozřejmě, funkce $[x,y] \mapsto g(y)$ je v $\mathbf{R}^{2n}$ měřitelná. Je třeba dokázat měřitelnost funkce $[x,y] \mapsto f(x-y)$. K tomu stačí nahlédnout, že pro každou měřitelnou množinu $E \subset \mathbf{R}^n$ je i množina $\{[x,y] \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n : x - y \in E\}$ měřitelná. To je pravda, protože při vhodné volbě souřadnicového systému v $\mathbf{R}^{2n}$ má taková množina tvar $E \times \mathbf{R}^n$. Nyní použijeme Fubiniovu větu 26.10 (v užším smyslu) a dostaneme

$$\int_{\mathbf{R}^{2n}} |f(x-y)g(y)|\,dxdy = \int_{\mathbf{R}^n} |g(y)| \Big(\int_{\mathbf{R}^n} |f(x-y)|\,dx \Big)\,dy = ||f||_1\,||g||_1 < \infty.$$

Nyní použijeme opět Fubiniovu (vlastně Tonelliho) větu a dostaneme již lehko všechna zbývající tvrzení. ∎

26.20. Zobecněná Youngova nerovnost. *Nechť $1 \leq p, q, r \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Je-li $f \in \mathcal{L}^p$, $g \in \mathcal{L}^q$, je $f * g = g * f$ definována skoro všude, je prvkem $\mathcal{L}^r$ a $||f * g||_r \leq ||f||_p\,||g||_q$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $p, q, r < \infty$ (jinak jde o snažší případy, které přenecháváme čtenáři; příklad diskuse různých možností uvedeme v důkazu věty 26.21). Označme $\tilde{f} = |f|^p$, $\tilde{g} = |g|^q$. Potom funkce $\tilde{f}$ a $\tilde{g}$ leží v $\mathcal{L}^1$. Podle předchozí věty je konvoluce $\tilde{f} * \tilde{g}$ definována skoro všude a leží v $\mathcal{L}^1$. Pro pevné x dostaneme použitím Hölderovy nerovnosti

$$\begin{aligned}
\Big| \int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy \Big| &\leq \int_{\mathbf{R}^n} |f(x-y)|^{\frac{r-p}{r}} |g(y)|^{\frac{r-q}{r}} \Big(|f(x-y)|^{\frac{p}{r}} |g(y)^{\frac{q}{r}} \Big) \\
&\leq \Big(\int_{\mathbf{R}^n} |f(x-y)|^p \Big)^{\frac{r-p}{pr}} \Big(\int_{\mathbf{R}^n} |g(y)|^q \Big)^{\frac{r-q}{qr}} \Big(\int_{\mathbf{R}^n} |f(x-y)|^p |g(y)|^q \Big)^{\frac{1}{r}} \\
&= \|f\|_p^{\frac{r-p}{r}} \|g\|_q^{\frac{r-q}{r}} ((\tilde{f} * \tilde{g})(x))^{\frac{1}{r}}\,.
\end{aligned}$$

Fubiniova věta dává

$$\int_{\mathbf{R}^n} \tilde{f} * \tilde{g} = \int_{\mathbf{R}^n} \big(\int_{\mathbf{R}^n} \tilde{f}(x-y)\tilde{g}(y)\,dy \big)\,dx = \int_{\mathbf{R}^n} \big(\int_{\mathbf{R}^n} \tilde{f}(x-y)\tilde{g}(y)\,dx \big)\,dy = \|f\|_p^p \|g\|_q^q\,.$$

Tedy

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_r^r &= \int_{\mathbf{R}^n} \Big| \int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy \Big|^r dx \leq \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \int_{\mathbf{R}^n} ((\tilde{f} * \tilde{g})(x))\,dx \\
&\leq \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \|f\|_p^p \|g\|_q^q = \|f\|_p^r \|g\|_q^r
\end{aligned}$$

∎

26.21. Věta. *Je-li $f \in \mathcal{L}^p$, $1 \leq p \leq \infty$, a μ je konečná znaménková Radonova míra na $\mathbf{R}^n$, potom $f * \mu \in \mathcal{L}^p$ a*

$$||f * \mu||_p \leq ||f||_p\,|\mu|(\mathbf{R}^n).$$

Důkaz. (a) $1 < p < +\infty$. Hölderova nerovnost dává pro pevné x

$$\Big| \int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)\,d\mu(y) \Big| \leq \Big(\int_{\mathbf{R}^n} |f(x-y)|^p\,d|\mu|(y) \Big)^{\frac{1}{p}} \big(|\mu|(\mathbf{R}^n) \big)^{\frac{p-1}{p}}\,.$$

Tedy (s pomocí Fubiniovy věty)

$$\int_{\mathbf{R}^n} |f*\mu|^p\,dx \le \big(|\mu|(\mathbf{R}^n)\big)^{p-1}\int\Big(\int |f(x-y)|^p\,dx\Big)d|\mu|(y) = |\mu|(\mathbf{R}^n)^p\|f\|_p^p\,.$$

(b) $p=1$. Použijeme hned Fubiniovu větu:

$$\int_{\mathbf{R}^n} |f*\mu|\,dx \le \int\Big(\int |f(x-y)|\,dx\Big)d|\mu|(y) = |\mu|(\mathbf{R}^n)\|f\|_1\,.$$

(c) $p=+\infty$. Pro skoro všechna $x\in\mathbf{R}^n$ máme

$$|f*\mu(x)| \le \int_{\mathbf{R}^n} |f(x-y)|\,d|\mu|(y) \le \|f\|_\infty|\mu|(\mathbf{R}^n)\,.$$

■

26.22. Poznámka. Nechť $1\le p\le\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Nechť $f\in\mathcal{L}^p$ a $g\in\mathcal{L}^q$. Potom podle 26.20 je $f*g\in\mathcal{L}^\infty$ a $\|f*g\|_\infty\le\|f\|_p\,\|g\|_q$. Lze však říci ještě víc. Konvoluce $f*g$ je stejnoměrně spojitá na $\mathbf{R}^n$ a je-li $1<p<\infty$, je dokonce $f*g\in\mathcal{C}_0(\mathbf{R}^n)$. Tyto vlastnosti se nám budou snáze dokazovat až budeme znát metody kapitoly 31 (viz cvičení 31.9).

26.23. Cvičení. Buďte $f,g,h\in\mathcal{L}^1$. Ukažte, že (skoro všude)

$$(f*g)*h = f*(g*h).$$

26.24. Cvičení. Uvedeme jednu z možností, jak zavést v eukleidovském prostoru *Jordan-Peanův objem* (srovnejte s cvičením 5.12). Nechť m je přirozené číslo a $i=[i_1,\dots,i_n]\in\mathbf{Z}^n$ je "multiindex". Označme $Q_{m,i}$ uzavřenou krychli $[(i_1-1)2^{-m},\, i_1 2^{-m}]\times\cdots\times[(i_n-1)2^{-m},\, i_n 2^{-m}]$. Je-li m pevné a i probíhá $\mathbf{Z}^n$, krychle $Q_{m,i}$ se nepřekrývají (tj. vnitřky jsou po dvou disjunktní) a vyplňují celý prostor $\mathbf{R}^n$. Je-li $E\subset\mathbf{R}^n$, nechť $\mathcal{J}^*(E,m)$ značí 2^{-mn}-násobek počtu prvků množiny $\{i\colon E\cap Q_{m,i}\ne\emptyset\}$, $\mathcal{J}_*(E,m)$ značí 2^{-mn}-násobek počtu prvků množiny $\{i\colon Q_{m,i}\subset E\}$,

$$\mathcal{J}^*E = \inf_m \mathcal{J}^*(E,m) \quad\text{a}\quad \mathcal{J}_*E = \sup_m \mathcal{J}_*(E,m)\,.$$

(a) Pro každou množinu E je $\mathcal{J}_*E\le\lambda_*E\le\lambda^*E\le\mathcal{J}^*E$.

(b) Pro každou otevřenou množinu G je $\mathcal{J}_*G=\lambda G$.

(c) Pro každou kompaktní množinu K je $\mathcal{J}^*K=\lambda K$.

(d) Nechť E je omezená. Potom $\mathcal{J}^*E=\mathcal{J}_*E$, právě když ∂E má nulovou Lebesgueovu míru.

26.25. Cvičení. Nechť $G\subset\mathbf{R}^n$ je otevřená množina. Potom existuje disjunktní systém koulí v G, jehož sjednocení pokrývá G až na množinu míry nula.

Návod. Tvrzení je snadným důsledkem Vitaliovy věty 27.2. Zde naznačíme myšlenku elementárního důkazu. Můžeme předpokládat, že G má konečnou míru. Položme $G_0=G$. Podle cvičení 26.24 najděme uzavřené krychle $Q_1,\dots,Q_p$, jejichž vnitřky jsou po dvou disjunktní a sjednocení má míru větší než $\frac{1}{2}\lambda G$. Buď $c=2^{-n}\lambda B(0,1/2)$. Potom do vnitřku každé krychle míry a se zřejmě vejde uzavřená koule míry ca. Takto dostaneme uzavřené po dvou disjunktní koule $B_j\subset Q_j$ tak, že jejich sjednocení F_1 má míru větší než $\frac{c}{2}\lambda G$. Položme $G_1=G_0\setminus F_1$. Indukcí sestrojíme postupně v každé $G_i:=G_{i-1}\setminus F_i$ sjednocení F_{i+1} po dvou disjunktních uzavřených koulí tak, že $\lambda G_i\le(1-\frac{c}{2})\lambda G_{i-1}\le\cdots\le(1-\frac{c}{2})^i\lambda G$.

26.26. Cvičení. Nechť $E\subset\mathbf{R}^n$ je libovolná množina. Potom

$$\lambda^*E = \inf\{\sum_j \lambda U(x_j,r_j)\colon \bigcup_j U(x_j,r_j)\supset E\}\,.$$

Návod. Můžeme předpokládat, že $\lambda^*E<+\infty$. Volme $\varepsilon>0$ a najděme otevřenou množinu $G\supset E$ tak, že $\lambda G<\lambda^*E+\varepsilon$. Podle cvičení 26.25 existuje spočetný disjunktní systém $\{V_j\}$ otevřených koulí tak, že

$$\sum_j \lambda V_j = \lambda\bigcup_j V_j \le \lambda G+\varepsilon$$

a $\{V_j\}$ pokrývá G až na množinu N míry nula. Najděme otevřené intervaly I_j tak, že $\bigcup_j I_j\supset N$ a $\sum_j\lambda I_j\le\varepsilon$. Ke každému j podle cvičení 26.24 existují uzavřené krychle Q_j^m tak, že $\bigcup_m Q_j^m\supset I_j$ a $\sum_m \lambda Q_j^m<2\lambda I_j$. Ke každé krychli Q_j^m najdeme otevřenou kouli W_j^m se stejným středem a poloměrem rovným průměru krychle Q_j^m (takže W_j^m obsahuje Q_j^m). Zřejmě existuje konstanta c závisející jen na dimenzi n tak, že $\lambda W_j^m\le c\lambda Q_j^m$. Máme tedy

$$\sum_{j,m}\lambda W_j^m \le c\sum_{j,m}\lambda Q_j^m \le 2c\sum_j\lambda I_j \le 2c\varepsilon\,.$$

Důkaz snadno dokončíme sloučením systémů koulí V_j a W_j^m.

27. Pokrývací věty

Pokrývací věty patří k silným nástrojům hlubších partií teorie míry a integrálu. Zde uvedeme dvě věty Vitaliova typu (účelem je z daného pokrytí vybrat spočetný nebo konečný disjunktní podsystém tak, aby zbytek měl malou míru). Nejprve předložíme klasickou Vitaliovu větu, v jejímž znění bude užitečný následující pojem.

27.1. Vitaliovské pokrytí. Řekneme, že systém $\mathcal{V}$ uzavřených koulí tvoří *vitaliovské pokrytí* množiny $A \subset \mathbf{R}^n$ (nebo též, že má *Vitaliovu vlastnost*), jestliže pro každé $x \in A$ a $r > 0$ existuje $B \in \mathcal{V}$ tak, že $x \in B \subset B(x,r)$.

27.2. Vitaliova věta. *Nechť $\mathcal{V}$ je systém uzavřených koulí, tvořící vitaliovské pokrytí množiny $A \subset \mathbf{R}^n$. Potom existuje spočetný podsystém $\mathcal{A} \subset \mathcal{V}$ po dvou disjunktních koulí tak, že*

$$\lambda(A \setminus \bigcup \mathcal{A}) = 0.$$

Důkaz. Předpokládejme, že $A \subset H \subset \mathbf{R}^n$, kde H je otevřená množina konečné míry. (Dokážeme-li větu v tomto případě, lze jí poté aplikovat postupně pro $H = U(0,1)$, $U(0,2) \setminus B(0,1)$, $U(0,3) \setminus B(0,2), \dots$. Tím nalezneme spočetný po dvou disjunktní podsystém daného systému, který až na množinu míry nula pokrývá $A \setminus \{x \in \mathbf{R}^n : |x| \in \mathbf{N}\}$. Nyní si stačí uvědomit, že $\lambda\{x \in \mathbf{R}^n : |x| \in \mathbf{N}\} = 0$.) Dále lze předpokládat, že žádné konečné sjednocení po dvou disjunktních koulí z $\mathcal{V}$ nepokrývá A – jinak by nebylo co dokazovat. Označme

$$\mathfrak{W} = \{(x,r) : B(x,r) \in \mathcal{V}\}.$$

Nyní budeme indukcí konstruovat posloupnost $\{B_j\}$ po dvou disjunktních koulí z $\mathcal{V}$. V nultém kroku zadáme prázdný systém koulí. V k-tém kroku, $k = 1, 2, \dots$ máme vybrány koule $B_1, \dots, B_{k-1}$ z $\mathcal{V}$ a označíme

$$s_k = \sup\bigl\{r > 0 : B(x,r) \in \mathcal{V},\ B(x,r) \cap \bigl(\bigcup_{j=1}^{k-1} B_j\bigr) = \emptyset\bigr\}.$$

Potom $s_k > 0$ (vzhledem k Vitaliově vlastnosti a dodatečnému předpokladu, učiněnému na začátku důkazu) a $+\infty > s_1 \geq s_2 \geq \dots$ (množina H má konečnou míru). Nyní stačí vybrat $B_k = B(x_k, r_k) \in \mathcal{V}$ tak, že $r_k > s_k/2$ a $B_k \cap B_j = \emptyset$ pro $j < k$.

Systém koulí $\mathcal{A} := \{B_k,\ k \in \mathbf{N}\}$ je po dvou disjunktní. Ukážeme, že pokrývá A až na množinu míry nula. Zvolme libovolně $p \in \mathbf{N}$ a $x \in A \setminus \bigcup \mathcal{A}$. Z Vitaliovy vlastnosti najdeme kouli $B = B(y,s) \in \mathcal{V}$ tak, že $x \in B$ a $B \cap B_j = \emptyset$ pro $j = 1, \dots, p-1$. Potom $s \leq s_p$. Jelikož $\lambda H < \infty$, je $\sum_k r_k^n < \infty$, takže $\lim s_k = \lim r_k = 0$. Najdeme tedy $q \geq p$ tak, že $s_{q+1} < s \leq s_q$. Podle definice s_{q+1} existuje $i \leq q$ tak, že $B_i \cap B \neq \emptyset$. Označme z některý z bodů ležících v $B_i \cap B$. Potom

$$|x - x_i| \leq |x - y| + |y - z| + |z - x_i| \leq s + s + r_i \leq 2s_q + r_i \leq 2s_i + r_i \leq 5r_i,$$

neboli $x \in B(x_i, 5r_i)$. Jelikož nutně $i \geq p$, máme

$$A \setminus \bigcup \mathcal{A} \subset \bigcup_{i=p}^{\infty} B(x_i, 5r_i),$$

tedy

$$\lambda(A \setminus \bigcup \mathcal{A}) \leq \sum_{i=p}^{\infty} 5^n \lambda B(x_i, r_i)$$

a limitním přechodem pro $p \to \infty$ dostáváme $\lambda(A \setminus \bigcup \mathcal{A}) = 0$. ■

27.3. Důsledek. *Nechť $A \subset H \subset \mathbf{R}^n$, přičemž H je otevřená množina konečné míry. Mějme systém $\mathcal{V}$ uzavřených koulí v H, tvořící vitaliovské pokrytí A. Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje konečný systém po dvou disjunktních koulí $\mathcal{A}_\varepsilon \subset \mathcal{V}$ tak, že*

$$\lambda^*(A \setminus \bigcup \mathcal{A}_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Důkaz. Stačí vzít $\mathcal{A}_\varepsilon = \{B_1, \dots, B_p\}$, kde B_j jsou jako v důkazu předchozí věty a p je dostatečně velké. ■

Věta 27.2 je pro většinu aplikací postačující. Přesto uvedeme i rafinovanější pokrývací věty, které budou pro nás užitečné např. v kapitole 28.

27.4. Bezikovičova věta. *Existuje přirozené číslo N (závisející pouze na dimenzi prostoru $\mathbf{R}^n$) s následující vlastností:*

Je-li $A \subset \mathbf{R}^n$ množina a Δ omezená kladná funkce na A, potom existují spočetné množiny $D_1, \dots, D_N \subset A$ tak, že

$$A \subset \bigcup \{U(x, \Delta(x)) : x \in \bigcup_{k=1}^{N} D_k\}$$

a pro každé $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ je systém koulí

$$\{B(x, \Delta(x)) : x \in D_k\}$$

po dvou disjunktní.

Důkaz. Buď $S = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| = 1\}$. Z kompaktnosti S dostaneme existenci konečné množiny $T \subset S$ takové, že

$$S \subset \bigcup_{t \in T} U(t, \frac{1}{40}).$$

Buď ξ počet prvků množiny T a $N = 2\xi + 1$. Toto N nám vystačí pro omezené množiny. Předpokládejme tedy nejprve, že množina A je omezená. Nyní budeme konstruovat indukcí body x_j: Označme

$$s_1 = \sup\{\Delta(x) : x \in A\}$$

a najděme $x_1 \in A$ tak, že $\Delta(x_1) > \frac{7}{8} s_1$. V j-tém kroku ($j > 1$) označme

$$M_j = A \setminus \bigcup_{i<j} U(x_i, \Delta(x_i)).$$

Pokud $M_j = \emptyset$, je proces ukončen a položme $D = \{x_i : i = 1, \dots, j-1\}$. V opačném případě označme $s_j = \sup\{\Delta(x) : x \in M_j\}$, najděme $x_j \in M_j$ tak, že $\Delta(x_j) > \frac{7}{8} s_j$ a položme $D = \{x_i : i \in \mathbf{N}\}$. Nyní ukážeme, že $A \subset \bigcup_j U_j$, kde $U_j := U(x_j, \Delta(x_j))$. Toto je zřejmé, pokud je D konečná množina. V opačném případě z omezenosti A plyne, že z posloupnosti $\{x_j\}$ lze vybrat cauchyovskou podposloupnost $\{x_{j_k}\}$. Pro $i < j$ leží x_j vně kruhu $U(x_i, \Delta(x_i))$, takže $\Delta(x_i) \le |x_i - x_j|$. Dostáváme

$$\inf\{\Delta(x_i) : i \in \mathbf{N}\} \le \inf\{|x_i - x_j\| : i, j \in \mathbf{N}, i \ne j\} = 0.$$

Zvolme $x \in A$. Najdeme j tak, že $\Delta(x_j) < \frac{7}{8}\Delta(x)$. Potom $\Delta(x) > s_j$, takže $x \notin M_j$, což znamená, že

$$x \in \bigcup_{i<j} U_i.$$

Zavedeme pomocnou funkci p. Pro každé $x_j \in D$ položme

$$P_j = \big\{i \in \{1, \dots, j-1\} : B_i \cap B_j \ne \emptyset\big\},$$

(kde B_j mají stejný význam jako výše) a definujme rekurentně

$$p(x_j) = \min\{k \in \mathbf{N} : k \neq p(x_i) \text{ pro všechna } i \in P_j\}\,.$$

Položme $D_k = \{x_j : p(x_j) = k\}$. Potom zřejmě pro všechna $k \in N$ je systém koulí $\{B_j : x_j \in D_k\}$ po dvou disjunktní a zbývá dokázat, že pro všechna $x_j \in D$ je $p(x_j) \leq N$. K tomu stačí nahlédnout, že pro všechna $x_j \in D$ je počet koulí B_i, $i < j$, protínajících B_j menší než N.

Důkaz právě uvedeného tvrzení povedem sporem. Zvolme $z := x_j \in D$ pevně. Je-li počet koulí B_i, $i < j$, protínajících B_j, větší nebo roven $N = 2\xi + 1$, potom existuje $t \in S$ a tři prvky $z_1, z_2, z_3 \in D$ tak, že

$$z_k = x_{j_k} \qquad \text{pro } j_1 < j_2 < j_3 < i$$

a

$$\left| \frac{z - z_k}{|z - z_k|} - t \right| < \frac{1}{40}\,, \quad k = 1, 2, 3\,.$$

Označme (pro $k = 1, 2, 3$)

$$r = \Delta(z),\ r_k = \Delta(z_k),\ R_k = |z - z_k|\,.$$

Potom tato čísla splňují soustavu 16 nerovnic

$$\text{(I)} \qquad r > 0,$$

$$\text{(II}_k) \qquad R_k \leq r_k + r,$$

$$\text{(III}_k) \qquad r < \frac{8}{7} r_k,$$

$$\text{(IV}_1) \qquad r_3 < \frac{8}{7} r_2,$$

$$\text{(IV}_2) \qquad r_3 < \frac{8}{7} r_1,$$

$$\text{(IV}_3) \qquad r_2 < \frac{8}{7} r_1,$$

$$\text{(V}_k) \qquad r_k \leq R_k,$$

$$\text{(VI}_1) \qquad r_2 \leq |R_2 - R_3| + \frac{1}{8} r_3,$$

$$\text{(VI}_2) \qquad r_1 \leq |R_1 - R_3| + \frac{1}{8} r_3,$$

$$\text{(VI}_3) \qquad r_1 \leq |R_1 - R_2| + \frac{1}{8} r_2,$$

která nemá žádné řešení – to bude hledaný spor. Vraťme se k odvození soustavy. Nerovnice (II) vyjadřují, že koule $B(z_k, r_k)$ protínají $B(z, r)$. Nerovnice (III), (IV) dostaneme ze vztahu

$$\Delta(x_j) \leq s_i < \frac{8}{7} \Delta(x_i)\,,$$

který platí pro $i < j$. Nerovnice (V), (VI) získáme ze vztahů

$$\Delta(x_i) < |x_j - x_i|\,,$$

který také platí pro $i < j$. Např nerovnici (VI$_1$) dostaneme (pomocí definice čísla N, (II$_3$) a (III$_3$)) takto:

$$\begin{aligned} r_2 &\leq |z_2 - z_3| \leq |z_2 - z - \frac{|z_3 - z|}{|z_2 - z|}\,(z_2 - z)| + |z_3 - z - \frac{|z_3 - z|}{|z_2 - z|}\,(z_2 - z)| \\ &\leq |R_2 - R_3| + R_3 \Big| \frac{z_3 - z}{|z_3 - z|} - \frac{z_2 - z}{|z_2 - z|} \Big| \leq |R_2 - R_3| + 2R_3 \frac{1}{40} \\ &\leq |R_2 - R_3| + \frac{1}{20}(r_3 + r) \leq |R_2 - R_3| + \frac{15}{20 \cdot 7}\, r_3 \leq |R_2 - R_3| + \frac{1}{8} r_3\,. \end{aligned}$$

Nyní ukážeme že soustava (I)–(VI) skutečně nemá řešení. K tomuto účelu je vhodné rozlišit tři případy podle toho, který z výrazů $|R_2 - R_3|$, $|R_1 - R_3|$, $|R_1 - R_2|$ je součtem zbylých dvou. Všechny tři situace jsou analogické, vyšetříme například případ

$$|R_1 - R_2| = |R_1 - R_3| + |R_2 - R_3|\,.$$

Poznamenejme, že všechny neznámé jsou podle (I), (III) a (V) kladná čísla (což je ostatně patrné i z jejich geometrického smyslu). Podle (II_1), (II_2), (V_1), (V_2) a (IV_3) je

$$|R_1 - R_2| \le r + |r_1 - r_2| = r + r_1 + r_2 - 2\min(r_1, r_2) \le r + r_1 + r_2 - \frac{7}{4}r_2\,.$$

Na druhou stranu, z (VI_1) a (VI_2) dostaneme

$$|R_1 - R_3| + |R_2 - R_3| \ge r_1 - \frac{1}{8}r_3 + r_2 - \frac{1}{8}r_3\,,$$

tedy podle (III_2) a (IV_1)

$$\frac{7}{4}r_2 \le r + \frac{2}{8}r_3 \le r_2(\frac{8}{7} + \frac{2}{8}\cdot\frac{8}{7}) = \frac{10}{7}r_2\,.$$

Soustava (I)–(VI) tedy skutečně nemůže mít řešení.

Nyní předpokládejme, že množina A je neomezená. Buď K konstanta větší než $2\sup_{x\in A}\Delta(x)$. Označme

$$A_i = \{x \in A : (i-1)K \le |x| < iK\}\,.$$

Ke každému $i \in \mathbf{N}$ najděme podle předchozího příslušné $D_k^i \subset A_i$, $k = 1, \dots, N$. Položme

$$D_k = \begin{cases} \bigcup\{D_k^i : i \text{ sudé }\} & \text{pro } k \le N\,,\\ \bigcup\{D_{k-N}^i : i \text{ liché}\} & \text{pro } N < k \le 2N\,.\end{cases}$$

Požadované vlastnosti jsou tedy splněny pro dvojnásobné N. ■

27.5. Lemma. *Nechť N je konstanta odpovídající dimenzi n podle věty 27.4. Buď μ Radonova míra na $\mathbf{R}^n$. Nechť $A \subset H \subset \mathbf{R}^n$, přičemž H je otevřená množina, $\mu H < +\infty$. Mějme dánu kladnou omezenou funkci Δ na A tak, že pro všechna $x \in A$ je $B(x, \Delta(x)) \subset H$. Potom existuje otevřená množina $U \subset H$ a konečná množina bodů $F \subset A$ tak, že $A \subset U$, systém koulí $B(x, \Delta(x))_{x\in F}$ je po dvou disjunktní a*

$$\mu(U \setminus \bigcup_{x\in F} B(x, \Delta(x))) < \big(1 - \frac{1}{2N}\big)\,\mu U\,.$$

Důkaz. Podle předchozí věty najdeme spočetné množiny $D_1, \dots, D_N \subset A$ tak, že

$$A \subset \bigcup_{x\in D} B(x, \Delta(x))\,,$$

kde $D := \bigcup_{k=1}^N D_k$, a pro každé $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ je systém koulí $\{B(x, \Delta(x)) : x \in D_k\}$ po dvou disjunktní. Označme

$$E_k = \bigcup_{x\in D_k} B(x, \Delta(x))\,, \qquad U = \bigcup_{x\in D} U(x, \Delta(x))\,.$$

Potom existuje $q \in \{1, \dots N\}$ tak, že $\mu E_q \ge \frac{1}{N}\mu U$. Vybereme konečnou množinu $F \subset D_q$ tak, aby

$$\mu \bigcup_{x\in F} B(x, \Delta(x)) > \frac{1}{2N}\mu U\,.$$

Potom

$$\mu(U \setminus \bigcup_{x\in F} B(x, \Delta(x))) < \big(1 - \frac{1}{2N}\big)\mu U\,.$$

■

27.6. Vitaliova věta pro Radonovy míry. *Buď μ Radonova míra na $\mathbf{R}^n$. Nechť $A \subset H \subset \mathbf{R}^n$, přičemž H je otevřená množina konečné míry μ. Mějme systém $\mathcal{V}$ uzavřených koulí v $\mathbf{R}^n$ tak, že ke každému $x \in A$ existují $r_j \searrow 0$, pro něž $B(x, r_j) \in \mathcal{V}$ (opět Vitaliova vlastnost, ale jiná !). Potom ke každému $\varepsilon > 0$ lze nalézt otevřenou množinu $G \subset \mathbf{R}^n$ a konečný po dvou disjunktní podsystém $\mathcal{A} \subset \mathcal{V}$ tak, že $\mu G < \varepsilon$ a*

$$A \subset G \cup \bigcup \mathcal{A}\,.$$

Důkaz. Indukcí budeme konstruovat posloupnosti množin $\{G_k\}$ a $\{A_k\}$. Položme $G_0 = H$, $A_0 = A$. V k-tém kroku předpokládejme, že máme sestrojeny otevřené množiny $G_0 \supset \cdots \supset G_{k-1}$ a množiny $A_0 \supset \cdots \supset A_{k-1}$. Podle lemmatu 27.5 najdeme otevřenou množinu $U_k \subset G_{k-1}$ a uzavřenou množinu $M_k \subset G_{k-1}$ tak, že M_k je sjednocení konečného po dvou disjunktního systému koulí z $\mathcal{V}$, $A_{k-1} \subset U_k$ a

$$\mu(U_k \setminus M_k) < \big(1 - \frac{1}{2N}\big)\mu U_k\,.$$

Položme

$$A_k = A_{k-1} \setminus M_k\,, \qquad G_k = U_k \setminus M_k\,.$$

Ze způsobu konstrukce vyplývá, že v k-tém kroku je množina $A \setminus G_k$ pokryta dosud vybranými koulemi (které tvoří konečný po dvou disjunktní podsystém $\mathcal{V}$, jehož sjednocení je množina $M_1 \cup \cdots \cup M_k$), přičemž

$$\mu G_k < \big(1 - \frac{1}{2N}\big)\mu G_{k-1} \le \cdots \le \big(1 - \frac{1}{2N}\big)^k \mu G_0\,.$$

K dokončení důkazu stačí vzít dostatečně velké k. ■

27.7. Důsledek. *Buď μ Radonova míra na $\mathbf{R}^n$. Nechť $A \subset \mathbf{R}^n$. Mějme systém $\mathcal{V}$ uzavřených koulí v $\mathbf{R}^n$ tak, že ke každému $x \in A$ existují $r_j \searrow 0$, pro něž $B(x, r_j) \in \mathcal{V}$. Potom existuje spočetný po dvou disjunktní podsystém $\mathcal{A} \subset \mathcal{V}$ tak, že*

$$\mu(A \setminus \bigcup \mathcal{V}) = 0\,.$$

Důkaz. Tvrzení je zřejmým důsledkem věty 27.6, pokud množina A je omezená. Pro obecný případ použijeme podobnou myšlenku jako v důkaze věty 27.2, ale s nutnou opatrností – může se totiž stát, že $\mu\{x\colon |x| = r\} \neq 0$. Proto posloupnost poloměrů $\{1, 2, 3, \dots\}$ z důkazu 27.2 nahradíme posloupností $\{r_1, r_2, \dots\}$, kde $r_j \nearrow +\infty$ a pro každé $j \in \mathbf{N}$ bude $\mu\,\{x : |x| \in r_j\} = 0$ (viz cvičení 15.16.b). ■

27.8. Poznámka. Ve větě 27.6 a důsledku 27.7 předpokládáme, že středy daných koulí leží v pokrývané množině. Věta 27.2 a důsledek 27.3 tedy nejsou přímými důsledky věty 27.6 a důsledku 27.7. Prostě "lepší míra – lepší pokrývací věta."

27.9. Cvičení. Nechť (P, ρ) je separabilní metrický prostor, $A \subset P$ a $\tau > 1$. Mějme $\mathfrak{W} \subset P \times (0, 1]$ tak, že systém koulí $\{B(x, r) : (x, r) \in \mathfrak{W}\}$ pokrývá A. Potom existuje spočetný podsystém $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{W}$ tak, že koule $B(x, r)$, $(x, r) \in \mathfrak{S}$, jsou po dvou disjunktní a

$$A \subset \bigcup_{(x,r) \in \mathfrak{S}} U(x, (1 + 2\tau)r)\,.$$

Návod. Ke každému $k \in \mathbf{N}$ přiřaďme postupně spočetný podsystém $\mathfrak{S}_k \subset \mathfrak{W}_k$, kde

$$\mathfrak{W}_k := \big\{(x, r) \in \mathfrak{W} \colon \tau^{-k} < r \le \tau^{-k+1}, B(x, r) \cap \bigcup\{B(y, s) : (y, s) \in \mathfrak{S}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{S}_{k-1}\} = \emptyset\big\}$$

tak, aby koule $B(x, r)$, $(x, r) \in \mathfrak{S}_k$, byly po dvou disjunktní a $B(x, r) \cap \bigcup\{B(y, s)\colon (y, s) \in \mathfrak{S}_k\} \neq \emptyset$ pro všechna $(x, r) \in \mathfrak{W}_k$.

(To můžeme provést třeba takto: Buď $\{q_j\}$ posloupnost bodů P tvořící hustou množinu. Začneme s $\mathfrak{S}_k^0 = \emptyset$ a postupujeme indukcí. Buď $j \ge 1$ přirozené číslo. Pokud existuje $(x, r) \in \mathfrak{W}_k$ tak, že $q_j \in B(x, r)$ a pro všechna $(y, s) \in \mathfrak{S}_k^{j-1}$ je $B(x, r) \cap B(y, s) = \emptyset$, položme $\mathfrak{S}_k^j = \mathfrak{S}_k^{j-1} \cup \{(x, r)\}$. V opačném případě ponechme $\mathfrak{S}_k^j = \mathfrak{S}_k^{j-1}$.)

Nyní položme $\mathfrak{S} = \bigcup_{k=1}^\infty \mathfrak{S}_k$. Koule $B(x, r)$, $(x, r) \in \mathfrak{S}$ jsou zřejmě po dvou disjunktní. Zvolme bod $x \in A$. Dokážeme, že

$$x \in \bigcup_{(u,r) \in \mathfrak{S}} U(u, (1 + 2\tau)r)\,.$$

Jelikož

$$A \subset \bigcup_{(u,r)\in\mathfrak{W}} B(u,r)\,,$$

najdeme $(y,s) \in \mathfrak{W}$ tak, že $x \in B(y,s)$. Dále najděme $k \in \mathbf{N}$ tak, že

$$\tau^{-k} < s \le \tau^{-k+1}\,.$$

Potom buď (y,s) leží v $\mathfrak{S}_k$ (a potom není co dokazovat), nebo $B(y,s)$ protíná některou z "předchozích" koulí. Přesněji, existuje $z \in B(u,r) \cap B(y,s)$, kde $(u,r) \in \mathfrak{S}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{S}_k$. Zřejmě $s < \tau r$, takže

$$\rho(x,u) \le \rho(x,y) + \rho(y,z) + \rho(z,u) \le 2s + r < (2\tau+1)r\,,$$

tedy $x \in U(u,(2\tau+1)r)$.

27.10. Cvičení. Nechť $\mathcal{U}$ je systém otevřených koulí v $\mathbf{R}^n$, $M = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U$, $c < \lambda M$. Ukažte, že existují disjunktní $U_1, ..., U_k \in \mathcal{U}$ tak, že

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda U_j > \frac{c}{3^n}.$$

Návod. Existuje kompaktní množina $K \subset M$ a konečný podsystém $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ tak, že $\lambda K > c$ a $\bigcup_{U\in\mathcal{U}'} U \supset K$. Vyberme kouli $U_1 \in \mathcal{U}'$ s největším poloměrem. Mezi koulemi z $\mathcal{U}'$ neprotínající U_1 vyberme U_2 s největším poloměrem. V obecné kroku mezi koulemi z $\mathcal{U}'$ neprotínajícími žádnou z koulí $U_1, \dots, U_{j-1}$ vyberme U_j s největším poloměrem. Po konečně mnoha krocích je proces ukončen posloupností $\{U_1, \dots, U_k\}$, když další kouli podle popsaných pravidel již vybrat nelze. Je-li $x \in K$, potom $x \in U$ pro některé $U \in \mathcal{U}'$ a z konstrukce plyne, že $U \cap U_i \ne \emptyset$ pro některé i. Nechť i je nejmenší takový index. Potom U nemá větší poloměr než U_i, takže x leží v kouli, která má stejný střed jako U_i a trojnásobný poloměr. Tedy

$$c < \lambda K \le 3^n \sum_{j=1}^{k} \lambda U_j.$$

27.11. Cvičení. Dokažte Vitaliovu větu 27.2 ze cvičení 27.10 obdobným postupem, jako je věta 27.6 odvozena z lemmatu 27.5.

27.12. Historické poznámky. Nejznámější z pokrývacích vět přísluší G. Vitalimu [1908], který ji dokázal pro případ uzavřených intervalů a Lebesgueovy míry. Tato věta byla později zobecňována a dokazována mnoha autory různými směry (H. Lebesgue [1910], S. Banach [1924], C. Carathéodory (druhé vydání z r. 1927 knihy [*1918]). Další krok vpřed byl učiněn A.S. Bezikovičem [1945], [1946] a A.P. Morsem [1947]. Původ jednoduché pokrývací věty ze cvičení 27.10 je ve Wienerově článku [1939].

28. Derivování měr

28.1. Derivace míry. V dalším μ bude Radonova míra na $\mathbf{R}^n$ a λ, jako obvykle, Lebesgueova míra.

Je-li $x \in \mathbf{R}^n$, definujeme

$$\overline{D}_\mu(x) := \lim_{r\to 0+} \sup \frac{\mu B(x,r)}{\lambda B(x,r)},$$

$$\underline{D}_\mu(x) := \lim_{r\to 0+} \inf \frac{\mu B(x,r)}{\lambda B(x,r)}.$$

Pokud $\overline{D}_\mu(x) = \underline{D}_\mu(x)$, značíme tuto společnou hodnotu $D_\mu(x)$ a $D_\mu(x)$ se zove (symetrická) *derivace míry* μ (vzhledem k λ) v bodě x.

28.2. Poznámky. 1. Lze spočítat, že $\lambda B(x,r) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} r^n$.

2. Funkce $x \mapsto \underline{D}_\mu(x)$ a $x \mapsto \overline{D}_\mu(x)$ jsou borelovsky měřitelné. (To plyne z faktu, že funkce $x \mapsto \mu B(x,r)$ je shora polospojitá, funkce $x \mapsto \lambda B(x,r)$ je spojitá a při definici $\overline{D}_\mu$ se lze omezit na $r \in \mathbf{Q}$.)

Porovnejte toto tvrzení s následující překvapující větou (O.Hájek [1957]): *Je-li F libovolná funkce na intervalu $I \subset \mathbf{R}$, je funkce $\overline{D}F$ (viz 22.3) borelovská na I.* Důkaz pro případ spojité funkce F je naznačen v 25.8. (Tato věta neplatí obecně pro Diniho derivace, existují funkce, jejichž všechny čtyři Diniho derivace jsou neměřitelné.)

3. Buď μ Radonova míra na $\mathbf{R}$ a F příslušná distribuční funkce (viz 24.1). Potom $\overline{D}_\mu(x) = \overline{D}F(x)$.

Jako předehru k následujícímu lemmatu uveďme následující tvrzení: *Je-li $F'(x) \le a$ pro $x \in A$, je $\mu A \le a\lambda A$ a podobně $\mu B \ge a\lambda B$, pokud $F' \ge a$ na množině B.*

28.3. Lemma. *Buď $a > 0$ a $A \subset \mathbf{R}^n$.*

(a) *Jestliže $\underline{D}_\mu(x) \le a$ pro všechna $x \in A$, potom $\mu A \le a\lambda A$.*

(b) *Jestliže $\overline{D}_\mu(x) \ge a$ pro všechna $x \in A$, potom $\mu A \ge a\lambda A$.*

Důkaz. Tvrzení (a) je zřejmé v případě $\lambda A = \infty$. Je-li $\lambda A < +\infty$, volme $\varepsilon > 0$ a nalezněme otevřenou množinu $G \supset A$ tak, aby $\lambda G \le \lambda A + \varepsilon$. Podle Vitaliovy věty 27.6 pro Radonovy míry nalezneme nyní disjunktní uzavřené koule $B(x_i, r_i) \subset G$ tak, že

$$\mu B(x_i, r_i) \le (a+\varepsilon)\lambda B(x_i, r_i), \;\; \mu(A \setminus \bigcup_i B(x_i, r_i)) = 0.$$

(V případě, kdy míra μ je absolutně spojitá vzhledem k λ, jsme mohli koule uvedených vlastností nalézt také podle (snažší) Vitaliovy věty 27.2.) Potom

$$\mu A \le \sum_i \mu B(x_i, r_i) \le (a+\varepsilon) \sum_i \lambda B(x_i, r_i) \le (a+\varepsilon)\lambda G \le (a+\varepsilon)(\lambda A + \varepsilon),$$

odkud již plyne tvrzení (a).

Tvrzení (b) se získá obdobně, použijeme Vitaliovu větu 27.2 pro Lebesgueovu míru. ■

28.4. Věta. *Buď μ Radonova míra na $\mathbf{R}^n$. Potom derivace $D_\mu(x)$ existuje konečná pro λ-skoro všechna $x \in \mathbf{R}^n$.*

Důkaz. Stačí se omezit na kompaktní interval $I \subset \mathbf{R}^n$. Pro $k \in \mathbf{N}$ a $r, s \in \mathbf{Q}^+$, $s < r$, položme

$$A_k = \{x \in I : \overline{D}_\mu(x) \ge k\}, \quad A(r,s) = \{x \in I : \underline{D}_\mu(x) \le s < r \le \overline{D}_\mu(x)\}.$$

Podle předchozího lemmatu dostáváme

$$\begin{gathered} k\lambda A_k \le \mu A_k \le \mu I < +\infty\,, \\ r\lambda A(r,s) \le \mu A(r,s) \le s\lambda A(r,s) \le s\lambda I < +\infty. \end{gathered}$$

Odtud plyne, že $\lambda(\bigcap_k A_k) = \lim_k \lambda A_k = 0$ a $\lambda A(r,s) = 0$ (nezapomeňte, že $0 \le s < r$!). Ze vztahů

$$0 \le \underline{D}_\mu(x) \le \overline{D}_\mu \le +\infty\,, \quad \{x \in I : \overline{D}_\mu(x) = +\infty\} = \bigcap_k A_k$$

a

$$\{x \in I : \underline{D}_\mu(x) < \overline{D}_\mu(x)\} = \bigcup_{r,s \in \mathbf{Q}^+} A(r,s),$$

dostáváme již tvrzení. ■

28.5. Poznámka. Uvažujme chvilku případ, kdy F je distribuční funkce na $\mathbf{R}$ příslušná Radonově míře μ. Víme, že F má (konečnou) derivaci F' skoro všude (Lebesgueova věta 22.5), že $\int_a^b F'\,d\lambda \le F(b) - F(a)$ (věta 22.7), a že $\int_a^b F'\,d\lambda = F(b) - F(a)$ pro každý interval $[a,b]$, právě když míra μ je absolutně spojitá vzhledem k λ (důsledek 23.5 a cvičení 24.7). V posledním případě pak F' splývá s Radon–Nikodýmovou derivací $\dfrac{d\mu}{d\lambda}$. Z tohoto úhlu je tedy třeba se dívat na další tvrzení.

Důkaz následující věty je postaven na lemmatu 28.3. Jiný důkaz, založený na vcelku elementární pokrývací větě ze cvičení 27.10, lze nalézt v knize [Ru].

28.6. Věta. *(a) Pro každou borelovskou množinu $B \subset \mathbf{R}^n$ platí $\int_B D_\mu\,d\lambda \le \mu B$. Speciálně, D_μ je lokálně λ-integrovatelná.*

(b) Je-li $\mu \ll \lambda$, potom pro každou borelovskou množinu $B \subset \mathbf{R}^n$ platí $\int_B D_\mu\,d\lambda = \mu B$.

Důkaz. Buď $\beta > 1$, $k \in \mathbf{Z}$ a položme

$$B_k(\beta) = \{x \in B : \beta^k \le D_\mu(x) < \beta^{k+1}\}\,, \quad M = \bigcup_k B_k\,.$$

Podle věty 28.4 je $\lambda(B \setminus M) = 0$; je-li $\mu \ll \lambda$, pak také $\mu(B \setminus M) = 0$.

a) Použitím lemmatu 28.3.b dostáváme

$$\int_B D_\mu\, d\lambda = \int_M D_\mu\, d\lambda = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{B_k(\beta)} D_\mu\, d\lambda \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \beta^{k+1} \lambda B_k(\beta)$$
$$\leq \beta \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mu B_k(\beta) \leq \beta\, \mu B\,.$$

b) Podle 28.3.a

$$\int_B D_\mu\, d\lambda \geq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{B_k(\beta)} D_\mu\, d\lambda \geq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \beta^k \lambda B_k(\beta) \geq \beta^{-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mu B_k(\beta) = \beta^{-1}\mu M = \beta^{-1}\mu B\,.$$

Tvrzení (a) i (b) dostaneme limitním přechodem $\beta \to 1+$. ■

28.7. Věta. *Buď μ Radonova míra na $\mathbf{R}^n$. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) $\mu \ll \lambda$,
(ii) $\mu B = \int_B D_\mu\, d\lambda$ *pro každou borelovskou množinu* $B \subset \mathbf{R}^n$,
(iii) D_μ *je Radon-Nikodýmova derivace* μ *vzhledem k* λ,
(iv) $\underline{D}_\mu < +\infty$ *pro μ-skoro všechna* $x \in \mathbf{R}^n$.

Důkaz. Podle předchozí věty (i) $\implies$ (ii), tudíž ekvivalence (i)$\Leftrightarrow$(ii)$\Leftrightarrow$(iii) je zřejmá. Implikace (i) $\implies$ (iv) plyne ihned z předchozí věty 28.6. Předpokládejme tedy platnost (iv) a buď $A \subset \mathbf{R}^n$, pro niž $\lambda A = 0$. Pomocí lemmatu 28.3.a dostáváme pro každé $k \in \mathbf{N}$

$$\mu\{x \in A : \underline{D}_\mu(x) \leq k\} \leq k\,\lambda A = 0\,,$$

odkud již lehko plyne, že $\mu A = 0$. ■

28.8. Poznámky. 1. Nebylo by příliš těžké vyslovit obdobné věty i v případě, kdy μ je znaménková míra.

2. Je-li μ Radonova míra na $\mathbf{R}^n$ a $\mu = \mu_s + \mu_a$ Lebesgueův rozklad μ na singulární a absolutně spojitou část, potom D_μ je Radon-Nikodýmova derivace μ_a vzhledem k λ.

28.9. Cvičení. Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina, $f : G \to \mathbf{R}^n$ difeomorfní zobrazení. Je-li B borelovská podmnožina G, položme $\mu B := \lambda f(B)$. Ukažte, že μ je Radonova míra na G a

(a) $D_\mu(x) = |J_f(x)|$ pro každé $x \in G$,

(b) absolutní hodnota jakobiánu $|J_f|$ je Radon–Nikodýmovou derivací $\dfrac{d\mu}{d\lambda}$.

28.10. Historické poznámky. Podobně jako jsme definovali (symetrickou) derivaci míry μ v bodě x limitním postupem pomocí koulí $B(x,r)$, mohli bychom definovat kupř. derivace pomocí krychlí se středem x, jejichž délky stran by konvergovaly k nule. Lehce zjistíte, že bychom vlastně žádný nový pojem nedostali.

Pro limitní přechod bychom však mohli uvažovat mnohem obecnější posloupnosti množin “smršťujících se” vhodným způsobem k bodu x. Tak kupř. bychom mohli uvažovat všechny posloupnosti utvořené z intervalů obsahujících bod x tak, aby jejich průměry konvergovaly k nule. Podotkněme, že pro tyto obecné “derivace měr” již nemusejí věty tohoto odstavce platit. Neplatí totiž pro ně ani analogie věty 29.2 o hustotě, která je jejich přímým důsledkem. Příklad lze nalézt v M. de Guzmán [*1975], kapitola V., §2,

K problematice derivování měr existuje dost rozsáhlá literatura, uveďme třeba [Ru], M. de Guzmán [*1975].

29. Věta o hustotě a aproximativně spojité funkce

29.1. Body hustoty. Uvažujme (lebesgueovsky) měřitelnou množinu $M \subset \mathbf{R}^n$ a bod $x \in \mathbf{R}^n$ (ne nutně ležící v M). Podívejme se na “průměrnou hustotu” množiny M v kouli $U(x,r)$ – ta je dána podílem $\dfrac{\lambda(M \cap U(x,r))}{\lambda U(x,r)}$. Zřejmě $0 \leq \dfrac{\lambda(M \cap U(x,r))}{\lambda U(x,r)} \leq 1$ a čím bližší je tento poměr k 1, tím “více” množiny M je obsaženo v kouli $U(x,r)$. Řekneme, že x je *bodem hustoty* množiny M, jestliže $\lim\limits_{r\to 0+} \dfrac{\lambda(M \cap U(x,r))}{\lambda U(x,r)} = 1$. Platí následující důležité tvrzení.

29.2. Lebesgueova věta o hustotě. *Skoro každý bod měřitelné množiny M je bodem hustoty M.*

Důkaz. Položme $\mu A := \lambda(A \cap M)$ pro každou (lebesgueovsky) měřitelnou množinu $A \subset \mathbf{R}^n$. Potom zřejmě μ je Radonova míra na $\mathfrak{M}_n$, která je absolutně spojitá vzhledem k λ. Protože $\mu A = \int_A c_M d\lambda$, pokud $A \in \mathfrak{M}_n$, je funkce c_M Radon-Nikodýmovou derivací μ vzhledem k λ. Na druhé straně z věty 28.7 víme, že i derivace D_μ je Radon-Nikodýmovou derivací μ vzhledem k λ, tudíž podle Radon-Nikodýmovy věty (poznámka 13.6.1) $D_\mu = c_M$ skoro všude. Uvědomíme-li si, že $D_\mu(x) = \lim\limits_{r\to 0+} \dfrac{\mu U(x,r)}{\lambda U(x,r)}$ a $c_M(x) = 1$ pro $x \in M$, dostáváme ihned tvrzení. ■

29.3. Poznámka. V případě $n = 1$ je x bodem hustoty měřitelné množiny M, jestliže $\lim\limits_{r\to 0+} \dfrac{1}{2r}\lambda(M \cap (x - r, x + r)) = 1$ a Lebesgueova věta o hustotě je snadným důsledkem věty 23.4, podle níž derivace neurčitého Lebesgueova integrálu (lokálně) integrabilní funkce (v našem případě uvažujeme c_M) je rovna této funkci skoro všude. Rozmyslete a dokažte do detailů!

29.4. Hustotní topologie. Řekneme, že měřitelná množina $M \subset \mathbf{R}^n$ je *d-otevřená*, jestliže každý bod M je bodem hustoty M. Tak kupř. množina iracionálních čísel je d-otevřená v $\mathbf{R}$ či každá otevřená podmnožina v $\mathbf{R}^n$ je d-otevřená (ověřte !). Za chvíli dokážeme, že systém d všech d-otevřených množin v $\mathbf{R}^n$ tvoří topologii (to znamená, že systém d je uzavřen na sjednocení libovolného počtu množin a průnik konečně mnoha množin). Tuto topologii, kterou značíme d, budeme nazývat *hustotní topologií* v $\mathbf{R}^n$. Z předchozího plyne, že d obsahuje všechny otevřené podmnožiny $\mathbf{R}^n$, je tedy hustotní topologie jemnější než eukleidovská topologie $\mathbf{R}^n$.

29.5. Věta. *Systém všech d-otevřených množin tvoří topologii.*

Důkaz. Zřejmě $\emptyset$ a $\mathbf{R}^n$ jsou d-otevřené a průnik dvou d-otevřených množin opět leží v d (proveďte však podrobně!). Je-li $\mathcal{A}$ systém d-otevřených množin, potřebujeme dokázat, že $T := \bigcup\limits_{A\in\mathcal{A}} A \in d$. K tomu stačí ověřit, že T je měřitelná; pak již bude zřejmé, že každý bod T je bodem hustoty T. Dokazujme tedy měřitelnost T. Lze předpokládat, že $T \subset I$, kde $I \subset \mathbf{R}^n$ je kompaktní interval (proč?). Označme $\mathcal{S} = \{S$: existuje spočetný systém $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ tak, že $S = \bigcup\limits_{A\in\mathcal{A}_0} A\}$. Zajisté existuje $S \in \mathcal{S}$ tak, že $\lambda S = \sup\{\lambda M : M \in \mathcal{S}\}$. Buď $x \in T$. Existuje $A \in \mathcal{A}$ tak, že x je bodem hustoty A. Protože $\lambda(A \cup S) = \lambda S$, máme $\lambda(A \setminus S) = 0$. Odtud x je bodem hustoty množiny $A \cap S$ a také bodem hustoty S. Samozřejmě, x nemůže být bodem hustoty $I \setminus S$. Protože podle Lebesgueovy věty o hustotě skoro každý bod $I \setminus S$ je bodem hustoty $I \setminus S$, musí být $\lambda(T \setminus S) = 0$. Tudíž $T = S \cup (T \setminus S)$ je měřitelná. ■

29.6. Poznámka. Hustotní topologie v $\mathbf{R}^n$ má řadu zajímavých vlastností. Nelze je zde však uvádět, přesahovalo by to rámec těchto skript. Podotkněme pouze, že tato topologie není metrizovatelná, není dokonce ani normální (i když je úplně regulární), či že jediné kompaktní množiny v ní jsou pouze konečné množiny. Na druhé straně pro hustotní topologii platí Baireova věta o kategoriích.

29.7. Aproximativně spojité funkce. Funkce f definovaná na okolí bodu $z \in \mathbf{R}^n$ se nazve *aproximativně spojitá* v z, existuje-li měřitelná množina $M \subset \mathbf{R}^n$ tak, že z je bodem hustoty M a $\lim\limits_{M\ni x\to z} f(x) = f(z)$. Je-li f aproximativně spojitá v každém bodě dané množiny, říkáme jednoduše, že f je aproximativně spojitá.

Zřejmě každá spojitá funkce je aproximativně spojitá.

29.8. Věta. *Funkce f je aproximativně spojitá v bodě z, právě když je d-spojitá v z.*

Důkaz. Nechť funkce f je d-spojitá v bodě z. Buď $U = U(z, r_0)$ okolí bodu z, na němž je funkce f definována. Potom z je bodem hustoty každé z množin $M_j := \{x \in U : |f(x) - f(z)| < \frac{1}{j}\}$. Najděme poloměry $r_k > 0$ tak, aby tvořily klesající posloupnost ($r_0 > r_1 > \dots$) a aby platilo

$$\frac{\lambda(U(z,r) \setminus M_j)}{\lambda U(z,r)} < 2^{-j-k}$$

pro všechna $j = 1, \dots, k$ a $r \in (0, r_k)$. Položme

$$M = U \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j, \quad \text{kde } A_j = U(z, r_j) \setminus M_j\,.$$

Uvědomme si, že

$$\frac{\lambda(U(z,r) \cap A_j)}{\lambda U(z,r)} \le 2^{-j}$$

pro všechna $r > 0$. Zvolme $k \in \mathbf{N}$ a $r \in (0, r_k)$. Potom

$$\frac{\lambda(U(z,r) \cap A_j)}{\lambda U(z,r)} \le \begin{cases} 2^{-j-k} & \text{pro } j \le k, \\ 2^{-j} & \text{pro } j > k, \end{cases}$$

takže

$$\frac{\lambda(U(z,r) \setminus M)}{\lambda U(z,r)} \le 2^{-k+1}.$$

Ověřili jsme, že z je bodem hustoty množiny M. Jestliže $x \in M \cap U(z, r_k)$, potom $x \in M_k$ a tudíž $|f(x) - f(z)| < \frac{1}{k}$. Tedy $\lim_{x \to z, x \in M} f(x) = f(z)$. Tím je dokázána aproximativní spojitost f v z. Opačná implikace věty je snadná. ■

29.9. Denjoyova věta. *Funkce $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ je měřitelná, právě když je aproximativně spojitá skoro všude.*

Důkaz. Nechť funkce f je aproximativně spojitá skoro všude. Označme N množinu bodů aproximativní nespojitosti funkce f. Zvolme $c \in \mathbf{R}$; dokážeme, že množina $M := \{x \in \mathbf{R} : f(x) > c\}$ je měřitelná. Pro každý bod $x \in M \setminus N$ je M d-okolí bodu x, tedy i $M \setminus N$ je d-okolí bodu x. Množina $M \setminus N$ je tedy d-otevřená a tudíž měřitelná. Jelikož N má míru nula, je i množina M měřitelná.

Nyní předpokládejme, že funkce f je měřitelná. Volme $\varepsilon > 0$ a podle Luzinovy věty 18.2.ii nalezněme spojitou funkci g na $\mathbf{R}^n$ a otevřenou množinu G tak, že $\mu G < \varepsilon$ a $f = g$ v $\mathbf{R}^n \setminus G$. Protože podle Lebesgueovy věty o hustotě je skoro každý bod množiny $\mathbf{R}^n \setminus G$ jejím bodem hustoty, je funkce f aproximativně spojitá ve skoro všech bodech $\mathbf{R}^n \setminus G$. Odtud už snadno dostáváme, že funkce f je aproximativně spojitá skoro všude. ■

29.10. Poznámka. Porovnejte poslední ekvivalenci (f je lebesgueovsky měřitelná, právě když je aproximativně spojitá skoro všude) s Lebesgueovou větou 7.9 (omezená funkce f je riemannovsky integrovatelná, právě když je spojitá skoro všude).

29.11. Cvičení. Nechť funkce f je definována a omezená na okolí bodu $z \in \mathbf{R}^n$. Potom funkce f je aproximativně spojitá v bodě z, právě když z je lebesgueovským bodem f (viz 23.8). Ukažte, že předpoklad omezenosti je pro jednu implikaci podstatný.

29.12. Historické poznámky. Pojem aproximativní spojitosti zavedl A. Denjoy [1915], přičemž on sám ukázal, že každá lebesgueovsky měřitelná funkce je aproximativně spojitá skoro všude. Opačná implikace byla dokázána V. Stěpanovem v [1924]. Věta 29.2 o hustotě náleží H. Lebesgueovi [*1904]. Tato věta platí i pro neměřitelné množiny, pokud v definici bodů hustoty použijeme Lebesgueovu vnější míru. Pojem hustotní topologie byl zkoumán daleko později, teprve od padesátých let dochází k jejímu zavedení a detailnímu studiu. O mnoha jejích vlastnostech a zobecněních (srovnejte s poznámkou 28.10) a novějších aplikacích se lze dočíst v monografii J. Lukeš, J. Malý and L. Zajíček [*1986].

30. Lipschitzovské funkce

30.1. Lipschitzovská zobrazení. Buď $\beta > 0$. Připomeňme, že zobrazení $f : P_1 \to P_2$, kde (P_1, ρ_1), (P_2, ρ_2) jsou metrické prostory, se zove *β-lipschitzovské*, jestliže

$$\rho_2(f(x), f(y)) \le \beta \rho_1(x, y)$$

pro každou dvojici $x, y \in P_1$. Řekneme, že zobrazení f je *lipschitzovské* na P_1, existuje-li $\beta > 0$, tak, že f je β-lipschitzovské. Zobrazení $f : P_1 \to P_2$ se nazve *lokálně lipschitzovské*, existuje-li ke každému bodu $z \in P_1$ takové jeho okolí, na němž je f lipschitzovské (konstanta lipschitzovskosti β se může v tomto případě bod od bodu měnit).

30.2. Lemma. *Nechť f je spojitá funkce na otevřené množině $G \subset \mathbf{R}^n$. Potom množina všech bodů, v nichž neexistuje některá z parciálních derivací $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, je borelovská.*

Důkaz. Pro jednoduchost můžeme předpokládat, že $G = \mathbf{R}^n$. Označme

$$u_{m,k}(x) = \sup\{\frac{f(x+te_i)-f(x)}{t} : t \in (-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}), |t| \geq \frac{1}{k}\},$$
$$v_{m,k}(x) = \inf\{\frac{f(x+te_i)-f(x)}{t} : t \in (-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}), |t| \geq \frac{1}{k}\}.$$

Potom pro $k > m$ jsou $u_{m,k}, v_{m,k}$ spojité funkce a množina neexistence $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ je $\{x : u(x) \neq v(x)\}$, kde

$$u(x) = \inf_m \sup_{k>m} u_{m,k}, \qquad v(x) = \sup_m \inf_{k>m} v_{m,k}.$$

■

30.3. Rademacherova věta. *Nechť f je β-lipschitzovská funkce na otevřené množině $G \subset \mathbf{R}^n$. Potom funkce f je diferencovatelná skoro všude na G.*

Důkaz. Oddělme množinu E všech bodů, v nichž selhává existence některé parciální derivace. Z jednorozměrné věty o derivování lipschitzovských funkcí poměrně snadno dostáváme užitím Fubiniovy věty, že množina E má míru nula. (Uvědomme si nejprve, že tato množina je měřitelná podle lemmatu 30.2.) Pro $p, q \in \mathbf{Q}^n$ a $m \in \mathbf{N}$ označme

$$S_{p,q,m} = \Big\{x \in G \setminus E\colon \text{ pro všechna } i = 1, \dots, n \text{ a } t \in \big(-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\big)$$
$$\text{je } p_i < \frac{f(x+te_i)-f(x)}{t} < q_i\Big\}.$$

Nechť $\tilde{S}_{p,q,m}$ je množina všech bodů hustoty množiny $S_{p,q,m}$. Podle věty o hustotě je $\lambda(S_{p,q,m} \setminus \tilde{S}_{p,q,m}) = 0$. Položme

$$N = \bigcup_{p,q,m} (S_{p,q,m} \setminus \tilde{S}_{p,q,m}).$$

Potom N má míru nula. Ukážeme, že funkce f je diferencovatelná v každém bodě $x \in G \setminus (N \cup E)$.

Nechť tedy $x \in G \setminus (N \cup E)$ a $\varepsilon \in (0, 1)$. Najděme $p, q \in \mathbf{Q}^n$ tak, že

$$q_i - \varepsilon < p_i < \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) < q_i, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Potom určitě existuje $m \in \mathbf{N}$ tak, že $x \in S := S_{p,q,m}$. Jelikož x neleží v N, je dokonce x bodem hustoty S. Najděme $\delta \in (0, \frac{1}{m})$ tak, že pro všechna $r \in (0, 2\delta)$ je $\lambda(U(x,r) \setminus S) \leq \frac{\varepsilon}{2}\lambda U(x,r)$ (takže speciálně se do $U(x, (1+\varepsilon)\tau) \setminus S$, $0 < \tau < \delta$, nevejde žádná koule o poloměru $\varepsilon\tau$). Zvolme $y \in U(x, \delta)$. Označme $y^i = (y_1, \dots, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Ke každému $i \in \{1, \dots, n\}$ najděme kouli U_i se středem v y^i a poloměrem $\varepsilon|y - x|$. Volbou $\tau = |y - x|$ dostáváme, že pro všechna i je $S \cap U_i \neq \emptyset$. Zvolme body $z^i \in S \cap U_i$ a označme $w^i = z^{i-1} + (y_i - x_i)e_i$. Máme

$$p_i < \frac{f(w^i) - f(z^{i-1})}{y_i - x_i} < q_i,$$
$$p_i < \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) < q_i,$$

a tudíž

$$|f(w^i) - f(z^{i-1}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)(y_i - x_i)| \leq (q_i - p_i)(y_i - x_i) \leq \varepsilon|y - x|.$$

Tedy

$$
\begin{aligned}
&|f(y) - f(x) - \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)(y_i - x_i)| \\
&\le |\sum_i \Big(f(w^i) - f(z^{i-1}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)(y_i - x_i)\Big)| + \sum_i (|f(w^i) - f(y^i)| + |f(z^{i-1}) - f(y^{i-1})|) \\
&\le \varepsilon\,(n + 2\beta n)|y - x|\,.
\end{aligned}
$$

(zde jsme podruhé využili lipschitzovskosti funkce f , poprvé při konstatování, že $\lambda E = 0$). Tedy $f'(x)$ existuje. ■

30.4. Lemma. *Nechť $(f_\alpha)_\alpha$ je systém β-lipschitzovských funkcí na $\mathbf{R}^n$. Potom funkce* $\sup_\alpha f_\alpha$ *je β-lipschitzovská, pokud je konečná aspoň v jednom bodě.*

Důkaz. Tvrzení je zřejmé. ■

30.5. Kirszbraunova rozšiřovací věta. *Nechť f je β-lipschitzovská funkce na množině $E \subset \mathbf{R}^n$. Potom existuje β-lipschitzovské rozšíření, tj. β-lipschitzovská funkce f^* na $\mathbf{R}^n$ tak, že $f^* = f$ na E. Je-li navíc množina E omezená, můžeme najít β-lipschitzovské rozšíření f^{**} tak, aby mělo kompaktní nosič.*

Důkaz. Položme

$$f^*(x) = \sup_{y \in E}\{f(y) - \beta|y - x|\}\,.$$

Podle předchozího lemmatu je f^* β-lipschitzovská funkce a zřejmě je $f^* = f$ na E. Předpokládejme nyní, že množina E je omezená. Potom existuje $\alpha > 0$ tak, že $|f(x)| < \alpha - \beta|x|$ pro všechna $x \in E$. Nyní stačí položit

$$
f^{**}(x) = \begin{cases}
\min(f^*(x), \alpha - \beta|x|), & \text{je-li } |x| < \alpha/\beta \text{ a } f^*(x) \ge 0, \\
\max(f^*(x), -\alpha + \beta|x|), & \text{je-li } |x| < \alpha/\beta \text{ a } f^*(x) < 0, \\
0\,, & \text{je-li } |x| \ge \alpha/\beta.
\end{cases}
$$

■

30.6. Poznámka. Nechť f je β-lipschitzovské zobrazení množiny $E \subset \mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^k$. Potom můžeme f rozšířit po složkách podle předchozí věty a dostaneme $k\beta$-lipschitzovské zobrazení $f^*\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$. Toto rozšíření však obecně nemusí být β-lipschitzovské, což pro naše účely nebude vadit. Pravá Kirszbraunova věta zaručuje, že β-lipschitzovské rozšíření existuje, ale důkaz není tak snadný.

30.7. Cvičení. Nechť $E \subset \mathbf{R}^n$ a $f\colon E \to \mathbf{R}^n$ je β-lipschitzovské zobrazení. Potom $\lambda^* f(E) \le \beta^n \lambda^* E$.

Návod. Můžeme předpokládat, že $\lambda^* E < +\infty$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle lemmatu 26.26 najdeme posloupnost $\{U(x_j, r_j)\}$ otevřených koulí tak, že $E \subset \bigcup_j U(x_j, r_j)$ a $\sum_j \lambda U(x_j, r_j) < \lambda^* E + \varepsilon$. Pro každé j je $f(U(x_j, r_j)) \subset U(f(x_j), \beta r_j)$. Dostáváme

$$\lambda^*(f(E)) \le \sum_j \lambda U(f(x_j), \beta r_j) = \beta^k \sum_j \lambda U(x_j, r_j) \le \beta^k(\lambda^* E + \varepsilon)\,.$$

30.8. Historické poznámky. Věta 30.3 pochází od H. Rademachera [1919]. Její elementární důkaz (rozdílný od našeho) podali A. Nekvinda a L. Zajíček [1984]

Rozšiřování lipschitzovských funkcí v metrických prostorech těsně souviselo s původními důkazy Hahn-Banachovy věty. Věta 30.5 o rozšiřování (nelineárních) lipschitzovských funkcí byla dokázána nezávisle M.D. Kirszbraunem [1934] a E.J. McShanem [1934] a bývá též nazývána Kirszbraun-McShaneovou větou. Další materiály lze získat v G.J. Minty [1970].

31. Věty o aproximaci

31.1. Prostor $\mathcal{D}(\Omega)$. Nechť $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina. Prostor všech nekonečně diferencovatelných funkcí na Ω s kompaktním nosičem (rozumí se v Ω) budeme značit $\mathcal{D}(\Omega)$. Našim cílem v této kapitole bude dokázat, že prostor $\mathcal{D}(\Omega)$ je často hustý v jiných prostorech funkcí, neboli, že bývá možné aproximovat funkce pomocí nekonečně hladkých funkcí s kompaktním nosičem. Prvním úkolem ovšem bude zkonstruovat aspoň jednu netriviální nekonečně hladkou funkci s kompaktním nosičem.

Položme

$$\chi_1(x) = \begin{cases} \alpha e^{1/(|x|^2-1)}, & \text{je-li } |x| < 1, \\ 0, & \text{je-li } |x| \geq 1\,, \end{cases}$$

přičemž konstanta α je volena tak, aby $\int_{\mathbf{R}^n} \chi_1(x)\,dx = 1$. Označme

$$\chi_k(x) = k^n \chi_1(kx)\,.$$

Potom integrály $\int_{\mathbf{R}^n} \chi_k(x \pm y)\,dy$ $(k \in \mathbf{N},\ x \in \mathbf{R}^n)$ jsou rovny jedné. Snadným výpočtem zjistíme, že funkce χ_k jsou opravdu nekonečně diferencovatelné (převeďte to nejprve na úlohu o diferencovatelnosti funkcí jedné proměnné !).

Nyní, je-li f lokálně integrovatelná funkce, potom z věty o derivaci integrálu závislého na parametru okamžitě dostáváme, že také funkce $\chi_k * f$ jsou nekonečně diferencovatelné. Podobně konvoluce $\chi_k * \mu$ jsou nekonečně diferencovatelné, je-li μ Radonova míra.

31.2. Lemma. *Nechť $p \in [1,\infty)$, $f \in \mathcal{L}^p(\mathbf{R}^n)$ a $k \in \mathbf{N}$. Potom $\chi_k * f \in \mathcal{L}^p(\mathbf{R}^n)$ a $\|\chi_k * f\|_p \leq \|f\|_p$.*

Důkaz. Podle 26.20 máme

$$\|\chi_k * f\|_p \leq \|f\|_p \|\chi_k\|_1 \leq \|f\|_p\,,$$

neboť $\|\chi_k\|_1 = 1$. ■

31.3. Věta. *Nechť $p \in [1,\infty)$ a $f \in \mathcal{L}^p(\mathbf{R}^n)$. Potom $\|f - \chi_k * f\|_p \to 0$.*

Důkaz. Označme $E_j = \{x \in \mathbf{R}^n \colon |x| \leq j \text{ a } |f(x)| \leq j\}$ a $f_j = f c_{E_j}$. Jelikož množina $\bigcap_j (\mathbf{R}^n \setminus E_j)$ má míru nula, $f_j - f \to 0$ skoro všude a podle Lebesgueovy věty (majoranta $|f|^p$) je $\|f - f_j\|_p \to 0$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Najděme $j \in \mathbf{N}$ tak, že $\|f - f_j\|_p < \varepsilon$, takže podle lemmatu 31.2 také $\|\chi_k * f_j - \chi_k * f\|_p = \|\chi_k * (f_j - f)\|_p < \varepsilon$ pro všechna $k \in \mathbf{N}$. Funkce $\chi_k * f_j$ konvergují pro $k \to \infty$ skoro všude k funkci f_j; totiž, snadno se ověří, že konvergence nastává ve všech bodech aproximativní spojitosti funkce f_j, které zaujímají množinu plné míry podle Denjoyovy věty 29.9. Podle Lebesgueovy věty (majoranta $(2j)^p\, c_{B(0,j+1)}$) máme

$$\lim_{k\to 0} \|f_j - \chi_k * f_j\|_p = 0\,.$$

Pro všechna dostatečně velká k dostáváme

$$\|f - \chi * f\|_p \leq \|f - f_j\|_p + \|f_j - \chi_k * f_j\|_p + \|\chi_k * f_j - \chi_k * f\|_p < 3\varepsilon\,.$$

■

31.4. Věta. *Nechť $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina a $p \in [1,\infty)$. Potom $\mathcal{D}(\Omega)$ je hustá podmnožina $\mathcal{L}^p(\Omega)$.*

Důkaz. Nechť $\Omega_j = \{x \in \Omega : |x| < j \text{ a } \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{j}\}$. Zvolme $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$.Podobně jako v předchozím důkazu i zde je jasné, že označíme-li $g_j = f c_{\Omega_j}$, je $\|f - g_j\|_p \to 0$. Pro všechna $k > j$ je $\chi_k * g_j \in \mathcal{D}(\Omega)$. Z odhadu

$$\|f - \chi_k * g_j\|_p \leq \|f - g_j\|_p + \|g_j - \chi_k * g_j\|_p$$

dostáváme tvrzení. ■

31.5. Věta. *Nechť f je spojitá funkce s kompaktním nosičem v otevřené množině $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Potom $\chi_k * f \rightrightarrows f$ na Ω.*

Důkaz. Můžeme předpokládat, že $\Omega = \mathbf{R}^n$. Funkce f je stejnoměrně spojitá. K danému $\varepsilon > 0$ tedy najdeme $k_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechna $x, y \in \mathbf{R}^n$ je

$$|x - y| < \frac{1}{k_0} \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon\,.$$

Nechť $k > k_0$. Potom pro všechna $x \in \mathbf{R}^n$ je

$$\begin{aligned} |f(x) - \chi_k * f(x)| &= \Big|\int_{\mathbf{R}^n} (f(x) - f(y))\,\chi_k(x-y)\,dy\Big| \\ &= \Big|\int_{B(x,1/k)} (f(x) - f(y))\,\chi_k(x-y)\,dy\Big| \\ &\le \varepsilon \int_{\mathbf{R}^n} \chi_k(x-y)\,dy = \varepsilon. \end{aligned}$$

■

31.6. Věta. *Nechť μ je Radonova míra na Ω. Potom*

(a) existují míry μ_j a $f_j \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ tak, že $f_j = d\mu_j/d\lambda$ a $\mu_j \xrightarrow{w} \mu$,

(b) je-li navíc μ s kompaktním nosičem, pak můžeme hledat μ_j jako míry s hustotou $\chi_j * \mu$.

Důkaz. Důkaz začneme případem (b), opět předpokládejme, že $\Omega = \mathbf{R}^n$. Zvolíme-li $f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{R}^n)$, pak podle předchozí věty $f * \chi_j \rightrightarrows f$, a tedy

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x)(\chi_j * \mu)(x)\,dx = \int_{\mathbf{R}^n} f * \chi_j\,d\mu \to \int_{\mathbf{R}^n} f\,d\mu\,.$$

V důkazu (a) spojíme právě provedenou úvahu s restrikcí μ na dostatečně velkou kompaktní podmnožinu Ω. Podrobnosti přenecháme čtenáři. ■

31.7. Věta. *Nechť f je β-lipschitzovská funkce na $\mathbf{R}^n$. Potom $\chi_k * f$ jsou (nekonečně diferencovatelné) β-lipschitzovské funkce, $|\chi_k * f(x) - f(x)| \le \beta/k$ pro všechna $x \in \mathbf{R}^n$ a $(\chi_k * f)' \to f'$ skoro všude v $\mathbf{R}^n$.*

Důkaz. Máme

$$(\chi_k * f)' = \chi_k * f'\,.$$

Odtud je zřejmé, že $\chi_k * f$ jsou β-lipschitzovské funkce. Dále, pro každý bod x platí

$$\begin{aligned} |\chi_k * f(x) - f(x)| &\le \int_{B(x,\frac{1}{k})} |f(x) - f(y)|\,\chi_k(x-y)\,dy \\ &\le \frac{\beta}{k} \int_{B(x,\frac{1}{k})} \chi_k(x-y)\,dy = \frac{\beta}{k}\,. \end{aligned}$$

Konvergence $(\chi_k * f')(x) \to f'(x)$ nastává ve všech bodech x, kde existuje a je aproximativně spojitá derivace $f'(x)$. To jest skoro všude podle Rademacherovy věty 30.3. a Denjoyovy věty 29.9. ■

31.8. Cvičení. Podejte alternativní důkaz, že $\mathcal{D}(\Omega)$ je husté v $\mathcal{L}^p(\Omega)$ $(1 \le p < +\infty)$.

Návod. Je-li $f \in \mathcal{C}_c(\Omega)$, pak podle věty 31.5 konvergují funkce $\chi_k * f$ stejnoměrně k f, přičemž jejich nosiče jsou obsaženy nezávisle na k v jediném kompaktu. Z toho je zřejmé, že $\chi_k * f$ konvergují k f i v $\mathcal{L}^p$ normě. Nyní stačí použít hustotu $\mathcal{C}_c(\Omega)$ v $\mathcal{L}^p(\Omega)$ (cvičení 15.17).

31.9. Cvičení. Využujte větu 31.4 k důkazu spojitosti konvolucí (tj. dokažte tvrzení vyslovené v poznámce 26.22).

31.10. Riemann-Lebesgueovo lemma. Nechť $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$. Potom

$$\lim_{|x|\to\infty} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\cdot t} f(t)\,dt = 0\,.$$

Návod. Je-li $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, potom integrování "per partes" dává

$$-\int_{\mathbf{R}^n} |x|^2 e^{ix\cdot t} g(t)\,dt = \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\cdot t} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial t_j^2}(t)\,dt\,,$$

odkud

$$\Big|\int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\cdot t} g(t)\,dt\Big| \le |x|^{-2}\|\Delta g\|_1\,.$$

Pro libovolnou $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$ a $\varepsilon > 0$ najdeme podle věty 31.4 $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ (g závisí na f a ε) tak, aby $\|f-g\|_1 < \varepsilon$. Pak ovšem také

$$\Big|\int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\cdot t}(f(t) - g(t)\,dt\Big| \le \varepsilon\,,$$

tedy

$$\Big|\int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\cdot t} f(t)\,dt\Big| \le |x|^{-2}\|\Delta g\|_1 + \|f-g\|_1\,.$$

32. Distribuce

Zhruba od dvacátých let začali fyzikové pracovat se "zobecněnými funkcemi", přičemž podle fyzikální představy tyto "funkce" byly určeny svými "průměrnými hustotami" v okolí každého bodu. P.A.M. Dirac zavedl "δ-funkci", k jejímž základním vlastnostem patřilo, že

$$\delta(x) = 0 \quad \text{pro} \quad x \ne 0, \quad \delta(0) = \infty \quad \text{a} \quad \int_U \delta(x) = 1$$

pro každou otevřenou kouli U obsahující počátek. "Průměrná hustota δ-funkce" v kouli $U(x,r)$ je tedy

$$f_r(x) := \begin{cases} \frac{1}{\lambda U(x,r)}, & \text{pokud} \quad x \in U(0,r) \quad (\text{neboli } 0 \in U(x,r)), \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

Je

$$\delta(x) = \lim_{r\to 0_+} f_r(x).$$

Je-li nyní φ spojitá funkce na $\mathbf{R}^n$, označme

$$Z_r(\varphi) = \int_{\mathbf{R}^n} f_r\varphi \quad , \quad \delta(\varphi) = \varphi(0).$$

Použitím definice spojitosti nyní ukažte, že

$$\lim_{r\to 0_+} Z_r(\varphi) = \delta(\varphi)$$

pro každou spojitou funkci φ na $\mathbf{R}^n$. Jinými slovy, δ-funkce je "slabou" limitou posloupnosti funkcionálů Z_r, zatímco "hodnoty" δ-funkce jsou bodovou limitou posloupnosti f_r. Již množství uvozovek v těchto výrocích napovídá, že je zapotřebí podat přesné definice, a tudíž i interpretace, uvedených pojmů. A tak, zatímco fyzikové úspěšně používali δ-funkci, ale i mnohé další "zobecněné funkce", matematická teorie distribucí (rozuměj zobecněných funkcí) vznikla až mnohem později koncem třicátých let a je spojena se jmény S.L. Soboleva a zejména francouzského matematika L. Schwartze.

A ještě jednu poznámku. Zajisté víte, že existují spojité funkce, které nemají (dokonce v žádném bodě) derivaci. Obrovskou předností distribucí je skutečnost, že každá z nich má derivaci (dokonce všech řádů). Je nutno si ovšem uvědomit, že je značný rozdíl mezi klasickou derivací a derivací ve smyslu distribucí, mimojiné i v tom, že derivace funkce ve smyslu distribucí nemusí být funkce (viz příklady 32.5). Aby distributivní derivací spojité funkce $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ byla opět funkce (přesněji, regulární distribuce, viz 32.3.1), musí být f lokálně absolutně spojitá. Speciálně, taková funkce musí mít klasickou derivaci skoro všude.

V dalším budeme uvažovat otevřenou množinu $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Je-li $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ n-tice celých nezáporných čísel (tzv. multiindex), položme $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ a symbolem D^α označme diferenciální operátor

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Konečně, připomeňme, že $\mathcal{D}(\Omega)$ značí vektorový prostor všech nekonečně diferencovatelných funkcí majících kompaktní nosič v Ω (viz 31.1).

32.1. Pojem distribuce. Je-li $\{f_k\}$ posloupnost funkcí z $\mathcal{D}(\Omega)$, řekneme, že $f_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$, jestliže existuje kompaktní množina $K \subset \Omega$ tak, že supt $f_k \subset K$ pro každé k a $D^\alpha f_k \rightrightarrows 0$ stejnoměrně na K pro každý multiindex α. Každá lineární forma T na $\mathcal{D}(\Omega)$, pro niž

$$T(f_k) \to 0, \quad \text{kdykoliv} \quad f_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$$

se nazývá *distribucí* (na Ω). Každá distribuce je tedy definována svými hodnotami na $\mathcal{D}(\Omega)$.

Nechť f je lokálně integrovatelná funkce na Ω (tj. integrovatelná na každé kompaktní podmnožině Ω - kupř. f může být libovolná spojitá funkce). Pro $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ položme

$$T_f(\varphi) = \int_\Omega f\varphi \, d\lambda$$

(uvědomte si, že integrál - samozřejmě jako Lebesgueův - existuje). Není těžké dokázat, že T_f je distribuce: Nechť $\varphi_k \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$. Je-li K kompakt, vně kterého jsou všechny funkce φ_k rovny 0, z odhadu

$$|T_f(\varphi)| \le \max_{t\in K} |\varphi(t)| \int_K |f| d\lambda$$

a stejnoměrné konvergence $\varphi_k \rightrightarrows 0$ na K ihned vyplyne tvrzení.

Můžeme tedy každé lokálně integrovatelné funkci přiřadit jistou distribuci. Řekneme, že T je *regulární distribuce*, existuje-li taková funkce $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$, pro niž $T = T_f$. V tomto smyslu lze mluvit o ztotožnění regulárních distribucí s lokálně integrovatelnými funkcemi. Mnozí autoři pak hovoří třeba o distribuci sin a mají tím na mysli příslušnou distribuci $T_{\sin}$. I my se budeme držet této konvence.

32.2. Poznámky. 1. Posluchač vyššího ročníku asi ví, že na prostoru $\mathcal{D}(\Omega)$ lze zavést takovou lokálně konvexní topologii, pro niž $f_k \to 0$, právě když $f_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$. Distribuce pak není nic jiného než spojitá lineární forma na $\mathcal{D}(\Omega)$.

2. Jestliže lineární forma Z na $\mathcal{D}(\Omega)$ je "bodovou" limitou posloupnosti distribucí $\{Z_j\}$ (tj. $Z(\varphi) = \lim Z_j(\varphi)$ pro všechna $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$), potom Z je také distribuce. To je důsledkem hluboké Banach-Steinhausovy věty z funkcionální analýzy.

3. Je-li $f = g$ skoro všude, je zřejmě $T_f = T_g$. Platí však i obrácené (hlubší) tvrzení: Jsou-li regulární distribuce T_f, T_g stejné, rovnají se funkce f a g skoro všude.

K tomuto účelu stačí dokázat, že $f\eta = g\eta$ pro každou funkci $\eta \in \mathcal{D}(\Omega)$. Nechť $h = (f - g)\eta$ na Ω a $h = 0$ vně Ω. Potom $h \in L^1(\mathbf{R}^n)$ a $T_h = 0$ v $\mathbf{R}^n$. Tedy $\chi_k * h = 0$ pro každé k a z věty 31.3 (z níž je vzato i označení) dostáváme, že $h = 0$ skoro všude.

Tím jsme ověřili, že ztotožnění regulárních distribucí s lokálně integrovatelnými funkcemi je korektní.

32.3. Příklady.

1. V 32.1 jsme "vnořili" lokálně integrovatelné funkce do distribucí. Další objekty spadající pod rámec distribucí jsou Radonovy míry. Buď μ (nezáporná) Radonova míra na Ω. Distribuci T_μ definujeme předpisem

$$T_\mu(\varphi) = \mu(\varphi) \quad (= \int_\Omega \varphi d\mu).$$

Záměnou limity a integrálu pro stejnoměrně konvergentní posloupnosti bezprostředně dostáváme, že T_μ je distribuce. V tomto smyslu můžeme opět každou Radonovu míru chápat jako distribuci. Důležitým příkladem je právě Diracova "δ-funkce" . Definujeme-li $T_\delta(\varphi) = \varphi(0)$, není T_δ vlastně nic jiného než Diracova míra v bodě 0. Distribuce T_δ není regulární. Kdyby totiž existovala lokálně integrovatelná funkce f tak, že $T_f = T_\delta$, snadno bychom odvodili, že $f = 0$ skoro všude, ale T_δ není nulová distribuce.

2. Ne každá distribuce musí být regulární či určená nějakou (Radonovou) mírou. Uvažujte například funkcionál $\varphi \to \varphi'(0)$. Jiný příklad takové distribuce uvedeme za okamžik. Existuje však jednoduché kriterium, jak poznat, že distribuce T je rovna T_μ – je-li μ Radonova míra, je distribuce T_μ zřejmě nezáporný funkcionál. Naopak, je-li T taková distribuce, že $T(\varphi) \geq 0$, kdykoliv $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ je nezáporná, existuje Radonova míra μ tak, že $T = T_\mu$. Poslední tvrzení lze dostat poměrně snadno z Rieszovy věty 16.5.

3. Pro $\varepsilon > 0$ označme $O(\varepsilon) = (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, +\infty)$ a položme

$$R_\varepsilon(\varphi) = \int\limits_{O(\varepsilon)} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \quad \text{pro } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$$

(uvědomte si, že integrál triviálně existuje). Není těžké nahlédnout, že R_ε je distribuce na $\mathbf{R}$. Nyní, a to je již o něco těžší dokázat, pro každou funkci $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ existuje vlastní $\lim_{\varepsilon \to 0+} R_\varepsilon(\varphi)$. Označíme-li tuto limitu jako $T_{\frac{1}{x}}(\varphi)$, je $T_{\frac{1}{x}}$ distribuce. Jste schopni to dokázat? (Jedna z možností je využít poznámku 32.2.2). Uvědomte si také, že funkce $\frac{1}{x}$ není integrovatelná v žádném okolí počátku. Distribuce $T_{\frac{1}{x}}$, kterou opět mnozí ztotožňují s funkcí $\frac{1}{x}$ (my to nedoporučujeme), není tedy regulární (odůvodněte pořádně), ale také nemůže vzniknout z žádné Radonovy míry (proč?).

Distribuce tvoří vektorový prostor (prostor všech distribucí je topologický duál k $\mathcal{D}(\Omega)$).

Jak jsme se již zmínili, každou distribuci lze zderivovat. Jako motiv definice nám poslouží následující úvaha: Nechť funkce f má spojitou derivaci f' na $\mathbf{R}$ (speciálně, f i f' jsou lokálně integrovatelné). Samozřejmě bychom chtěli, aby derivací distribuce T_f byla distribuce $T_{f'}$. Ovšem

$$T_{f'}(\varphi) = \int_{\mathbf{R}} f'\, \varphi = -T_f(\varphi')$$

pro libovolnou $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, jak lehko zjistíme integrací per partes. Tudíž následující obecná definice se zdá zcela přirozenou.

32.4. Derivování distribucí. Buď T distribuce na Ω. Je-li α multiindex, definujeme α-tou (parciální) derivaci D^α distribuce T předpisem

$$D^\alpha T(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Speciálně,

$$\frac{\partial T}{\partial x_j}(\varphi) = -T\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\Big)\,.$$

Ve smyslu ztotožnění regulárních distribucí s lokálně integrovatelnými funkcemi často mluvíme o distributivní derivaci funkce, nebo o distributivním derivování, jehož výsledkem je funkce.

Je-li f funkce třídy $\mathcal{C}^1$, potom její distributivní derivace splývá s klasickou (ortodoxně řečeno, $(T_f)' = T_{f'}$). Pro jednorozměrný případ jsme již tento fakt odvodili před chvílí, vícerozměrný (parciální derivace) z něj dostaneme snadno použitím Fubiniovy věty.

32.5. Poznámky a příklady. 1. V prvé řadě musíme ukázat, že $D^\alpha T$ je opět distribuce. Linearita $D^\alpha T$ je zřejmá. Nechť tedy $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$. Jelikož i $D^\alpha \varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$, dostáváme $D^\alpha T(\varphi_k) \to 0$. (V topologickém jazyce – užili jsme poznatek, že zobrazení $\varphi \to D^\alpha \varphi$ je spojité v prostoru $\mathcal{D}(\Omega)$.)

2. Uvědomme si, že každá distribuce má derivace libovolného řádu. Derivace "funkce" však již nemusí být "funkce", ale třeba (a to ještě v lepším případě) "míra" (viz další příklady). Kupříkladu spojitá funkce nemající v žádném bodě derivaci je libovolněkrát derivovatelná - ale ve smyslu distribucí !

3. Věnujme se chvíli případu, kdy distributivní derivace lokálně integrovatelné funkce u na intervalu (a,b) je lokálně integrovatelná funkce f. Ukážeme, že potom existuje lokálně absolutně spojitá funkce v a konstanta c tak, že $u = v + c$ skoro všude a $v' = f$ skoro všude.

K tomuto účelu sestrojme nejprve funkci $\eta \in \mathcal{D}((a,b))$ tak, aby $\int_a^b \eta = 1$ a najděme nějaký neurčitý Lebesgueův integrál v funkce f (to je funkce lokálně absolutně spojitá). Ze vzorce pro integrování per partes (23.13) je zřejmé, že distributivní derivace funkce $w := u - v$ je nula. Položme $c = \int_a^b w\eta$. Zvolme libovolnou funkci $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$. Nechť $\psi(x) = \int_a^x (\varphi(t) - \eta(t) \int_a^b \varphi(s)\, ds)\, dt$. Potom $\psi \in \mathcal{D}((a,b))$ a tudíž

$$\int_a^b (w - c)\varphi = \int_a^b w\varphi - \int_a^b w\eta \int_a^b \varphi = \int_a^b w\psi' = 0\,.$$

Je tedy $T_{w-c} = 0$, takže $w = c$ skoro všude podle 32.3.1.

4. Nechť funkce f je spojitá a má derivaci f' skoro všude na intervalu I. Potom funkce f' je distributivní derivace funkce f, právě když f je lokálně absolutně spojitá na I.

5. Nechť $f(x) = \max(0, x)$. Funkce f nemá v nule "klasickou derivaci". Nicméně její distributivní derivace je tzv. *Heavisidova funkce* Y na $\mathbf{R}$, která je definována jako charakteristická funkce intervalu $(0, +\infty)$. Integrací per partes lehce zjistíme, že

$$T'_Y(\varphi) = -\int_0^{+\infty} \varphi' = \varphi(0) = T_\delta(\varphi),$$

kdykoliv $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Vidíme, že derivace distribuce T_Y je rovna Diracově "δ-funkci". Obdobně zjistíme, že

$$T''_Y(\varphi) = -\varphi'(0), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Ukažte sami, že T''_Y již není ani "funkce" ani "míra".

6. Nechť f je funkce (reálné proměnné), jejíž (klasická) derivace není lokálně lebesgueovsky integrovatelná (viz příklad 25.1). Potom T'_f není regulární distribuce.

7. Distributivní derivace Cantorovy funkce (příklad 23.1) není nulová funkce (nýbrž míra "soustředěná" na Cantorově diskontinuu, viz cvičení 24.8.a).

8. Funkce $\ln(|x|)$ je lokálně lebesgueovsky integrovatelná. Její derivace ve smyslu distribucí je distribuce $T_{\frac{1}{x}}$ (to není tak těžké a dává to jednu z možností, jak dokázat, že $T_{\frac{1}{x}}$ je distribuce).

9. Pro $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ položme

$$U(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{(k)}(k)$$

a ukažte, že U je distribuce na $\mathbf{R}$. Opět, U není ani regulární, ani nevznikne z žádné Radonovy míry.

10. Spočtěme ve smyslu distribucí Laplacián u, totiž $\Delta u := \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, pro funkci $u(x) = |x|^{2-n}$. Nejprve dostáváme $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = (2-n)\dfrac{x_i}{|x|^n}$ (to je lokálně integrovatelná funkce). Nyní distributivní derivace $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ je složitá distribuce, zahrnující "integrál v průměru" podobný distribuci z příkladu 32.3.3. My jsme si položili jednodušší otázku – zjistit součet těchto distribucí přes $i = 1, \dots, n$. Nechť κ_n je objem jednotkové koule v $\mathbf{R}^n$. Dokážeme, že pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ je

$$\int_{\mathbf{R}^n} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{|x|^n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = -n\kappa_n \varphi(0)\,,$$

takže

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = n(2-n)\kappa_n \delta_0\,.$$

Nechť γ je nerostoucí nekonečně hladká funkce na $(0, \infty)$, $\gamma(t) = 1$ pro $t < 1$, $\gamma(t) = 0$ pro $t > 2$, $|\gamma'(t)| \le 2$, a $\eta_r(x) = \gamma(x/r)$. Použijeme rozklad

$$\varphi = \varphi(0)\eta_r + (\varphi - \varphi(0))\eta_r + \varphi(1 - \eta_r)\,.$$

Máme

$$\int_{\mathbf{R}^n} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{|x|^n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = A_r + B_r + C_r + D_r,$$

kde

$$\begin{aligned} A_r &= \varphi(0) \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{|x|^n} \frac{\partial \eta_r}{\partial x_i}(x)\, dx \\ &= \varphi(0) \int_{\mathbf{R}^n} |x|^{1-n} r^{-1} \gamma'(|x|/r)\, dx = \varphi(0) n\kappa_n \int_0^{2r} r^{-1}\gamma'(t/r)\, dt = -n\kappa_n\varphi(0) \end{aligned}$$

(použili jsme cvičení 26.17),

$$B_r = \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{|x|^n} \big(\varphi(x) - \varphi(0)\big) \frac{\partial \eta_r}{\partial x_i}(x)\, dx,$$

$$C_r = \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{|x|^n} \eta_r(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx\,,$$

a

$$D_r = \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{|x|^n} \frac{\partial\bigl(\varphi(1-\eta_r)\bigr)}{\partial x_i}(x)\,dx\,.$$

Nechť

$$\psi_i(x) := \begin{cases} \frac{x_i}{|x|^n}\varphi(x)(1-\eta_r(x))\,, & \text{je-li } x \neq 0,\\ 0, & \text{je-li } x = 0\,. \end{cases}$$

Snadným výpočtem se přesvědčíme, že $\psi_i \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ a

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{|x|^n} \frac{\partial\bigl(\varphi(1-\eta_r)\bigr)}{\partial x_i}(x)\,.$$

Tedy

$$D_r = \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}\,dx = 0\,.$$

Důkaz uzavřeme odhadem integrálů B_r a C_r a limitním přechodem pro $r \to 0$. Jelikož $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, existuje konstanta K tak, že pro všechna $x \in U(0,1)$ je $|\nabla\varphi(x)| \leq K$ a $|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq K|x|$. Samozřejmě, $|\nabla\eta_r| \leq \frac{2}{r}$. Dostáváme

$$|B_r| \leq \int_{B(0,2r)} \sum_{i=1}^n \Bigl|\frac{x_i}{|x|^n}\Bigr|\,\bigl|(\varphi(x)-\varphi(0)\bigr|\,\Bigl|\frac{\partial\eta_r}{\partial x_i}(x)\Bigr|\,dx \leq \frac{4nKr}{r}\int_{B(0,2r)} |x|^{1-n}\,dx \to 0$$

a

$$|C_r| \leq \int_{B(0,2r)} \sum_{i=1}^n \eta_r(x)\,\Bigl|\frac{x_i}{|x|^n}\Bigr|\,\Bigl|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\Bigr|\,dx \leq nK\int_{B(0,2r)} |x|^{1-n}\,dx \to 0\,.$$

Další operací s distribucemi je násobení. Za chvíli si odvodíme Schwartzovu větu, že na prostoru všech distribucí není možno rozumným způsobem definovat násobení. Je-li však h hladká funkce na $\mathbf{R}$ a f spojitá, potom zřejmě

$$T_{hf}(\varphi) = T_f(h\varphi) \quad \text{pro} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Tento poznatek nás vede k následující definici.

32.6. Násobení distribucí. Buď T distribuce na Ω a $h \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Definujme distribuci $hT = Th$ předpisem

$$hT(\varphi) = T(h\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

32.7. Poznámky a příklady. 1. Opět je nutno dokázat, že hT je distribuce. Udělejte sami !

2. Počítejme

$$xT_\delta(\varphi) = T_\delta(x\varphi(x)) = 0,$$
$$xT_{\frac{1}{x}}(\varphi) = T_{\frac{1}{x}}(x\varphi(x)) = \int_{\mathbf{R}} \varphi = T_1(\varphi).$$

Je vidět, že násobení v prostoru distribucí se téměř shoduje s násobením "bodovým".

32.8. Schwartzova věta. *Na prostoru všech distribucí na* $\mathbf{R}$ *nelze zavést operaci násobení tak, aby byla komutativní a asociativní, a aby* $xT_\delta = 0$ *a* $xT_{\frac{1}{x}} = T_1$.

Důkaz. Následující serie rovností ukazuje na nemožnost definování součinu

$$0 = 0 \cdot T_{\frac{1}{x}} = (xT_\delta)T_{\frac{1}{x}} = T_\delta(xT_{\frac{1}{x}}) = T_\delta \cdot 1 = T_\delta.$$

■

32.9. Konvergence posloupností distribucí. Nechť $\{Z_k\}$ je posloupnost distribucí na Ω. Řekneme, že Z_k konvergují na Ω k distribuci Z, píšeme $Z_k \to Z$, jestliže $Z_k(\varphi) \to Z(\varphi)$ pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Konvergence tedy neznamená nic jiného než bodovou konvergenci (v řeči funkcionální analýzy – *slabou** konvergenci na $\mathcal{D}'(\Omega)$).

32.10. Příklady. (a) Buď $Z_k := T_{\sin kx}$ na $\mathbf{R}$. Ukažte, že $\{Z_k\}$ konverguje k nule (tj. k distribuci T_0).

(b) Nechť Z_k je regulární distribuce na $\mathbf{R}$ příslušná k funkci $\frac{\sin kx}{\pi x}$. Ukažte, že $Z_k \to T_\delta$. (Ve světle úmluvy v 32.1 se říká, že posloupnost funkcí $\{\frac{\sin kx}{\pi x}\}$ konverguje ve smyslu distribucí k Diracově míře δ.)

Návod. Volte $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$. Je-li $\varphi = 0$ vně intervalu $[-A, A]$, vyjádřete

$$\pi Z_k(\varphi) = \int_{-A}^{A} \frac{(\varphi(x) - \varphi(0))}{x} \sin kx \, dx + \varphi(0) \int_{-A}^{A} \frac{\sin kx}{x} \, dx \, .$$

Limita prvního členu je nula podle Riemann-Lebesgueova lemmatu 31.10. Dále

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-kA}^{kA} \frac{\sin t}{t} \, dt = \pi.$$

(viz [JII], kapitola VIII). Odtud již lehko plyne tvrzení.

(c) Ukažte, že posloupnost funkcí $\{\chi_k\}$ z odstavce 31.1 konverguje na $\mathbf{R}^n$ ve smyslu distribucí k Diracově míře δ.

Návod. Tvrzení je snadným důsledkem věty 31.5.

(d) Nechť $f_k, f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$. Jestliže $\lim \int_K |f_k - f| \to 0$ pro každý kompakt $K \subset \Omega$, potom $T_{f_k} \to T_f$.

32.11. Věta. *Nechť $Z_k \to Z$ na Ω. Je-li α multiindex, potom $D^\alpha Z_k \to D^\alpha Z$.*

Důkaz. Tvrzení je bezprostředním důsledkem definic. ■

32.12. Příklad. Z předchozí věty dostáváme, že každou konvergentní řadu distribucí lze derivovat člen po členu (upřesněte však, co se rozumí konvergencí řady distribucí!). Uveďme ilustrující příklad.

Nechť f je 2π–periodická funkce na $\mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi - x) & \text{pro } x \in (0, \pi], \\ -\frac{1}{2}(\pi + x) & \text{pro } x \in [-\pi, 0), \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Rozvojem ve Fourierovu řadu lehce zjistíte, že

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$$

pro každé $x \in \mathbf{R}$. Ukažte nyní, že:

(a) Tato rovnost platí také ve smyslu distribucí.

(b) Derivace distribuce T_f je 2π-periodická míra μ, jejíž restrikce na interval $[-\pi, \pi]$ je $-\frac{1}{2} + \pi\delta$.

Na druhé straně z věty 32.11 plyne, že $T_f' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} T_{\cos kx}$.

Ve smyslu distribucí je tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cos kx = \mu \, .$$

Lze tedy i divergentní řadě $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \cos kx$ přiřadit její "součet", ale ten je již distribucí (a nikoliv funkcí).

Tento příklad má důležitou fyzikální interpretaci v kvantové teorii pole. Obdobný smysl mohou mít i různé divergentní integrály, nebudeme se tím však zabývat.

32.13. Historické poznámky. Čtenáře odkazujeme na Lützenovu monografii [*1982]. Další materiály lze nalézt v J. Horváth [1970] či J. Horváth [*1966].

33. Fourierova transformace

V této kapitole budeme značit $u \cdot v$ skalární součin n-rozměrných vektorů u a v. Funkcemi budeme rozumět *komplexní* funkce a v tomto smyslu zde přizpůsobíme i definice prostorů funkcí (např. L^p).

Fourierova transformace je operátor, pro jehož kalkulus je známo mnoho vzorců. Uveďme kupříkladu, že Fourierova transformace, zhruba řečeno, převádí derivování podle j-té proměnné na násobení funkcí x_j, nebo konvoluci na součin. Pro tyto vlastnosti nachází bohaté uplatnění v teorii prostorů funkcí, v teorii parciálních diferenciálních rovnic, v operátorovém počtu i jinde.

Při čtení doporučujeme vnímat určitou paralelu mezi teorií Fourierových řad a Fourierovy transformace (viz též poznámka 33.14).

33.1. Fourierova transformace funkcí. Formálně můžeme zapsat Fourierovu transformaci ve tvaru

$$\hat{f}(x) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ix\cdot y} f(y)\, dy\,.$$

Tento vzorec lze chápat jako definici funkce bod po bodu, pokud $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$. Integrál chápeme samozřejmě jako Lebesgueův - uvědomte si, že vždy existuje !

Podobně jako součet Fourierovy řady je limita posloupnosti částečných součtů (a můžeme se rozhodnout, jaký druh konvergence posloupnosti funkcí budeme uvažovat), lze Fourierovu transformaci chápat v zobecněném smyslu jako limitu "částečných integrálů"

$$\mathcal{F}_r f(x) := (2\pi)^{-n/2} \int_{B(0,r)} e^{-ix\cdot y} f(y)\, dy\,.$$

Elementárně lze dokázat následující vzorce.

33.2. Věta. *Jsou-li f, $g \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$, potom*

(a) $\widehat{f * g} = (2\pi)^{n/2} \hat{f}\, \hat{g}$,
(b) $\int_{\mathbf{R}^n} \hat{f} g\, dx = \int_{\mathbf{R}^n} f \hat{g}\, dx$ *(tzv. multiplikativní formule).*

Důkaz. Použijeme-li Fubiniovu větu, lehko uvedené rovnosti ověříme. (Uvědomte si též, že $\hat{f} g \in \mathcal{L}^1$ pro f, $g \in \mathcal{L}^1$!) ∎

Následující věta má klíčový význam pro aplikaci Fourierovy transformace na parciální diferenciální rovnice.

33.3. Věta. *Nechť $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$ a $1 \le j \le n$.*

(a) Je-li také $x_j f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$, potom

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_j} = (\widehat{-ix_j f}).$$

(b) Nechť funkce f, $\partial f / \partial x_j$ jsou spojité na $\mathbf{R}^n$ a $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0$. Je-li ještě $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$, potom

$$\widehat{\partial f / \partial x_j}(x) = i x_j \hat{f}(x).$$

Důkaz. (a) Derivováním za integračním znamením v rovnosti

$$\hat{f}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ix\cdot t} f(t)\, dt$$

dostaneme

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_j}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ix\cdot t} i t_j f(t)\, dt\,.$$

(b) Pomocí Fubiniovy věty a integrace per partes dostaneme

$$\begin{aligned}(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ix\cdot t} \frac{\partial f}{\partial t_j}(t)\, dt &= -(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} f(t) \frac{\partial}{\partial t_j} e^{-ix\cdot t} dt \\ &= i x_j (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} f(t) e^{-ix\cdot t}\, dt\,.\end{aligned}$$

∎

Následující tvrzení je vlastně příklad, ale důležitý.

33.4. Lemma. *Pro funkci* $h(x) = e^{-|x|^2/2}$ *platí* $\hat{h} = h$.

Důkaz. Lemma dokážeme ve dvou krocích. Nejprve budeme předpokládat, že dimenze $n = 1$. Podle předchozí věty funkce h i $\hat{h}$ řeší diferenciální rovnici

$$u' + xu = 0,$$

přičemž $h(0) = \hat{h}(0)$ (Laplaceův integrál, viz [L-Př], př. 5.84). Tudíž $\hat{h} = h$. V druhém kroku – pro libovolnou dimenzi – máme

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^n} e^{-ix\cdot t} e^{-|t|^2/2}\, dt &= \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ix_1t_1 - t_1^2/2} \dots e^{-ix_nt_n - t_n^2/2}\, dt_1 \dots dt_n \\ &= \int_{\mathbf{R}} e^{-ix_1t_1 - t_1^2/2}\, dt_1 \cdots \int_{\mathbf{R}} e^{-ix_nt_n - t_n^2/2}\, dt_n = (2\pi)^{n/2} e^{-|x|^2/2}.\end{aligned}$$

■

33.5. Fourierova transformace distribucí. Užitečným zobecněním je zavedení Fourierovy transformace na distribucích. Začněme s motivací: Bylo by přirozené definovat Fourierovu transformaci distribucí tak, aby Fourierova transformace distribuce T_f byla distribuce $T_{\hat{f}}$. Je-li $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$ a $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, multiplikativní formule 33.2.b dává

$$\int_{\mathbf{R}^n} \hat{f}\varphi = \int_{\mathbf{R}^n} f\hat{\varphi}\,.$$

Tudy však cesta nevede, neboť Fourierova transformace funkce z $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ již nemusí ležet v $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. Platí dokonce, že funkce $\varphi = 0$ je jedinou funkcí z $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, pro niž $\hat{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$.

Stojí též za povšimnutí, že Fourierova transformace funkce z $\mathcal{L}^1$ nemusí být z $\mathcal{L}^1$: Je-li f charakteristická funkce intervalu $[-1, 1]$, potom

$$\hat{f}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin x}{x}\,.$$

Hledáme-li podmnožinu $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$, která by byla uzavřena na Fourierovu transformaci a derivování (tedy nutně i na násobení polynomy, jak je patrné z věty 33.3), přirozenou cestou dospějeme ke *Schwartzovu prostoru* $\mathcal{S}$.

Řekneme, že funkce f leží v $\mathcal{S}$, jestliže f je nekonečně diferencovatelná na $\mathbf{R}^n$ a pro každou parciální derivaci g funkce f libovolně vysokého řádu (včetně smíšených) a pro každý polynom p na $\mathbf{R}^n$ je pg omezená funkce (resp. funkce z $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$ – víte, proč to vyjde nastejno ?)

Množina $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ je ovšem částí $\mathcal{S}$; jako příklad funkce z $\mathcal{S}$ která nemá kompaktní nosič uveďme $e^{-|x|^2}$.

S pomocí věty 33.3 a lemmatu 33.6 se snadno ukáže, že množina funkcí $\mathcal{S}$ je skutečně uzavřena na Fourierovu transformaci, dokonce že zobrazení $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ je lineární izomorfismus $\mathcal{S}$ na $\mathcal{S}$.

Nyní zavedeme pojem Fourierovy transformace distribuce. Lineární formu T na $\mathcal{S}$ nazveme *temperovanou distribucí*, jestliže je spojitá v následujícím smyslu: Pokud $\{\varphi_j\}$ je posloupnost funkcí z $\mathcal{S}$, a pro každý multiindex α a každý polynom p je $pD^\alpha\varphi_j \rightrightarrows 0$, potom $T(\varphi_j) \to 0$. Lehko ověříte, že každá temperovaná distribuce (zúžená na $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$) je distribuce.

Nechť T je temperovaná distribuce. Potom definujeme její *Fourierovu transformaci* $\hat{T}$ předpisem

$$\hat{T}(\varphi) = T(\hat{\varphi})\,, \qquad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Rozmyslete si, že $\hat{T}$ je opět temperovaná distribuce.

Zrekapitulujme, že prozatím máme Fourierovu transformaci definovanou pro funkce z $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$ a pro temperované distribuce. Podobně, jako jsme každé lokálně integrovatelné funkci f na $\mathbf{R}^n$ přiřadili (regulární) distribuci T_f, lze i mnohé lokálně integrovatelné funkci přiřadit jistou temperovanou distribuci. Je-li kupříkladu $f \in \mathcal{L}^p(\mathbf{R}^n)$, kde $1 \le p \le \infty$, definujme S_f jako temperovanou distribuci

$$\varphi \mapsto \int_{\mathbf{R}^n} f\varphi\,, \qquad \varphi \in \mathcal{S}\,.$$

(Ověřte, že S_f je skutečně temperovaná distribuce.) Obdobně jako v předchozí kapitole ztotožníme funkci $f \in \mathcal{L}^p(\mathbf{R}^n)$ s temperovanou distribucí S_f. Z multiplikativní formule je zřejmé, že pro $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$ platí $\hat{S}_f = S_{\hat{f}}$, tedy nová definice Fourierovy tranformace temperovaných distribucí je rozšířením původní definice pro funkce z $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$.

Jelikož nyní máme definovánu Fourierovu transformaci i pro některé funkce mimo $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$, zajímá nás otázka, zda k dané funkci f, dejme tomu $f \in \mathcal{L}^p(\mathbf{R}^n)$, najdeme funkci g tak, aby platilo $\hat{S}_f = S_g$ (a mohli jsme říci, že Fourierova transformace funkce f je funkce g). Víme, že v $\mathcal{L}^1$-případě je odpověď kladná, stačí položit $g = \hat{f}$. Na druhé staně, ze cvičení 33.9 je vidět, že Fourierova transformace konstanty (což je funkce z $\mathcal{L}^\infty(\mathbf{R}^n)$) není funkce.

Poznamenejme ovšem, že i když Fourierovou transformací funkce f je v tomto distributivním smyslu funkce g, nemáme funkci g určenou bodově (tak jak tomu bylo v původní definici Fourierovy transformace funkce z $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$), ale pouze až na množinu míry nula.

V dalším se omezíme na případ $p = 2$ a uvedeme hlavní větu našeho úvodu do teorie Fourierovy transformace, která slibuje eleganci teorie Fourierovy transformace v Hilbertově prostoru $L^2(\mathbf{R}^n)$. Nejprve zavedeme *inverzní Fourierovu transformaci* předpisem

$$\begin{aligned}
&\tilde{f}(y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\cdot y} f(x)\,dx\,, \qquad f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n),\\
&\tilde{T}(\varphi) = T(\tilde{\varphi})\,,\ \varphi \in \mathcal{S}\,, \qquad T \text{ je temperovaná distribuce}
\end{aligned}$$

(jediné, čím se předpis liší od Fourierovy transformace je znaménko u exponentu $ix \cdot y$). Takto vznikne teorie zcela symetrická.

Je-li $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$, definujeme *Fourierovu transformaci* $\hat{f}$ jako $g \in L^2(\mathbf{R}^n)$, pro niž $\hat{S}_f = S_g$. Podobně zavádíme i *inverzní Fourierovu transformaci* $\tilde{f}$ funkce $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$. Dříve než ověříme korektnost těchto definic, uveďme následující užitečné lemma.

33.6. Lemma. *$\mathcal{S}$ je hustá podmnožina $L^2(\mathbf{R}^n)$ a pro $f \in \mathcal{S}$ platí vzorce*

$$\tilde{\hat{f}} = f\,, \qquad \hat{\tilde{f}} = f \quad a \quad \|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2\,.$$

Důkaz. Ve větě 31.4 jsme dokonce dokázali, že $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ je hustá podmnožina $L^2(\mathbf{R}^n)$.

Nyní se budeme zabývat důkazem formule $\tilde{\hat{f}} = f$. Označme $h(x) = e^{-|x|^2/2}$. Připomeňme, že podle 33.4 je $\hat{h} = h$. Užitím multiplikativní formule 33.2.b dostáváme

$$\int_{\mathbf{R}^n} \hat{f}(t) h(\frac{t}{k})\,dt = \int_{\mathbf{R}^n} f(\frac{t}{k})\hat{h}(t)\,dt\,.$$

Limitním přechodem pro $k \to \infty$ dostáváme

$$\int_{\mathbf{R}^n} \hat{f}(t)\,dt = \int_{\mathbf{R}^n} f(0)\hat{h}(t)\,dt = (2\pi)^{n/2} f(0)\,.$$

Dosadíme-li nyní za funkci f funkci $x \mapsto f(x+y)$, dostáváme po substituci $z = x + y$

$$\begin{aligned}
f(y) &= \int_{\mathbf{R}^n} (\int_{\mathbf{R}^n} (2\pi)^{-n} e^{-ix\cdot t} f(t+y)\,dt)\,dx\\
&= \int_{\mathbf{R}^n} (\int_{\mathbf{R}^n} (2\pi)^{-n} e^{iy\cdot t} e^{-iz\cdot t} f(z)\,dz)\,dt = \int_{\mathbf{R}^n} (2\pi)^{-n/2} e^{iy\cdot t} \hat{f}(t)\,dt = \tilde{\hat{f}}(y)\,.
\end{aligned}$$

Zcela obdobně platí $f = \hat{\hat{f}}$. Všimněme si, že pro Fourierovu transformaci komplexně sdružené funkce platí $\hat{\bar{f}} = \bar{\tilde{f}}$, a tudíž multiplikativní formule dává

$$\int_{\mathbf{R}^n} |f|^2\,dx = \int_{\mathbf{R}^n} f\bar{f}\,dx = \int_{\mathbf{R}^n} f\bar{\tilde{\hat{f}}}\,dx = \int_{\mathbf{R}^n} f\hat{\bar{\hat{f}}}\,dx = \int_{\mathbf{R}^n} \hat{f}\bar{\hat{f}}\,dx = \int_{\mathbf{R}^n} |\hat{f}|^2\,dx.$$

■

33.7. Plancherelova věta. *Nechť $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$. Potom existuje $g \in L^2(\mathbf{R}^n)$ tak, že $\hat{S}_f = S_g$, $\tilde{S}_g = S_f$ a $\|f\|_2 = \|g\|_2$.*

Důkaz. Podle lemmatu 33.6 najdeme funkce $f_j \in \mathcal{S}$ tak, že $f_j \to f$ v $L^2(\mathbf{R}^n)$. Podle výše uvedeného výpočtu je $\{\hat{f}_j\}$ cauchyovská posloupnost v $L^2(\mathbf{R}^n)$ a tudíž existuje $g \in L^2(\mathbf{R}^n)$ tak, že

$$\|g - \hat{f}_j\|_2 \to 0.$$

Rutinním limitním přechodem obdržíme

$$\hat{S}_f = S_g\,, \qquad \tilde{S}_g = S_f \quad \text{a} \quad \|f\|_2 = \|g\|_2\,,$$

což jsme měli dokázat. ■

33.8. Poznámka. Plancherelova věta vlastně říká, že (původní) Fourierovu transformaci lze jednoznačně spojitě rozšířit z prostoru $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ na $L^2(\mathbf{R}^n)$. Výsledkem je spojitá lineární izometrie $\mathcal{F}$ prostoru $L^2(\mathbf{R}^n)$ na sebe. Je tedy $\mathcal{F}$ unitární zobrazení a lehce se zjistí, že zachovává i skalární součin v $L^2(\mathbf{R}^n)$.

33.9. Cvičení. Nechť δ je Diracova distribuce. Dokažte, že $\hat{\delta}$ je konstanta $(2\pi)^{-n/2}$ a naopak, Fourierova transformace této konstanty je δ.

33.10. Cvičení. Najděte funkci u, jejíž Fourierova transformace $\hat{u}$ řeší ve smyslu distribucí rovnici

$$-\Delta\hat{u} + \hat{u} = \delta\,,$$

kde Δ je Laplaceův operátor ($\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}$).

33.11. Fourierova transformace funkce z $L^1(\mathbf{R}^n)$. (a) Nechť $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$. Potom $\hat{f}$ je stejnoměrně spojitá funkce a $\lim_{|x|\to\infty} \hat{f}(x) = 0$ (neboli $\hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbf{R}^n)$).

Návod. Limitní chování v nekonečnu dostáváme z Riemann-Lebegueova lemmatu 31.10. Stejně jako v jeho důkazu, i v důkazu stejnoměrné spojitosti se vzhledem k hustotě $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ v $L^1(\mathbf{R}^n)$ (věta 31.4) stačí omezit na případ funkce $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. Nechť nosič funkce f je obzažen v $U(0,R)$. Využijme nerovnosti

$$|e^{iy\cdot t} - e^{ix\cdot t}| \le |t|\,|y-x|.$$

Máme

$$|\hat{f}(y) - \hat{f}(x)| = \Big|\int_{\mathbf{R}^n} (e^{iy\cdot t} - e^{ix\cdot t}) f(t)\,dt\Big| \le R\,|y-x|\,\|f\|_1\,,$$

odkud plyne stejnoměrná spojitost.

(b) Je-li $h \in \mathcal{C}_0(\mathbf{R}^n)$, neznamená to, že by h musela být Fourierovou transformací funkce z L^1. Uvažujme funkci $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}\log(2+x^2)}$, $x \in \mathbf{R}$. Nechť $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$. Potom z Fubiniovy věty a omezenosti funkce $a \mapsto \int_1^a \frac{1}{z} e^{-iz}\,dz$ na $(1,+\infty)$ dostáváme, že $\int_1^x \frac{\hat{f}(t)}{t}\,dt$ je omezená funkce na $(1,+\infty)$. Odtud je zřejmé, že nemůže být $\hat{f} = g$.

Poznamenejme, že zatímco např. $\{\hat{f}\colon f \in L^2(\mathbf{R}^n)\} = L^2(\mathbf{R}^n)$, ani pro $n = 1$ není známa uspokojivá charakterizace oboru hodnot Fourierovy transformace na L^1, tj. systému $\{\hat{f}\colon f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)\}$.

33.12. Cvičení. Pro $f \in L^2(\mathbf{R})$ definujme

$$\mathcal{G}f(x) = \int_{\mathbf{R}} f(t)\,\frac{e^{-itx} - 1}{-it}\,dt\,.$$

Ukažte, že $\mathcal{G}f$ je neurčitý Lebesgueův integrál (lokálně integrovatelné) funkce $\hat{f}$. Je tedy $(\mathcal{G}f)' = \hat{f}$ skoro všude.

33.13. Poznámka. Definujme "Fourierovu transformaci" F na $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$ předpisem

$$Ff = \frac{1}{a}\int_{\mathbf{R}^n} e^{-ibx\cdot t} f(t)\,dt\,.$$

Označme $c = (2\pi)^n |b|^{-n} a^{-2}$. Potom za vhodných předpokladů

$$\begin{aligned}
F(f*g) &= aFf\,Fg,\\
F(Ff(x) &= c\,f(-x),\\
\frac{\partial(Ff)}{\partial x_j}(x) &= -ibx_j Ff(x),\\
\|Ff\|_2 &= c\,\|f\|_2\,.
\end{aligned}$$

V literatuře se vyskytují nejrůznější volby a i b (např. $a = 1$, $a = (2\pi)^{n/2}$, $b = \pm 1$, $b = \pm 2\pi$). Doporučujeme opatrnost při přebírání vzorců!

33.14. Srovnání s Fourierovými řadami. Nechť T je interval $[-\pi,\pi]$. Každé funkci $u \in L^1(T)$ přiřaďme posloupnost $\{\hat{u}(k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ jejích *Fourierových koeficientů*, definovanou předpisem

$$\hat{u}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_T e^{-ikt} u(t)\,dt\,.$$

Naopak, posloupnosti $\{c_k\} \in l^1(\mathbf{Z})$ přiřadíme funkci

$$\tilde{c}(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k e^{ikx}$$

(součet konvergentní *trigonometrické řady* o koeficientech c_k). (Formální) řadu

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} \hat{u}(k) e^{ikx}$$

nazýváme *Fourierovou řadou* funkce u. Teorii Fourierových řad ponecháváme stranou těchto skript (čtenáře odkazujeme kupříkladu na učebnice V. Jarníka [JII] či W. Rudina [Ru]). Uvedeme zde však bez důkazu některé výsledky, ukazující na analogii mezi teorií Fourierových řad a teorií Fourierovy transformace. Posloupnosti Fourierových koeficientů $\{\hat{u}(k)\}$ odpovídá Fourierova transformace $\hat{f}(x)$ a součtu $\tilde{a}(x)$ odpovídá inverzní Fourierova transformace $\tilde{f}(x)$. Teorie Fourierových řad je v jistém ohledu jednodušší, neboť $L^2(T) \subset L^1(T)$ a $l^1(\mathbf{Z}) \subset l^2(\mathbf{Z})$. Na druhé straně ztrácíme výhodu symetrie mezi Fourierovou transformací a inverzní Fourierovou transformací.

(a) Je-li $u \in L^1(T)$, potom $\lim_{|k|\to\infty} \hat{u}(k) = 0$. Tvrzení dostaneme z Riemann-Lebesgueova lemmatu 31.10 podobně jako pro případ Fourierovy transformace v 33.11.a. Ani tentokrát neplatí, že by libovolná posloupnost v $c_0(\mathbf{Z})$ byla posloupností Fourierových koeficientů nějaké funkce z $L^1(T)$.

(b) Je-li $\{c_k\} \in l^1(\mathbf{Z})$, potom $\tilde{c}$ je spojitá funkce na T, splňující $\tilde{c}(-\pi) = \tilde{c}(\pi)$ (srovnejte s 33.11.a). Opět upozorněme, že tímto způsobem nedostaneme všechny takové spojité funkce.

(c) Jestliže $u \in L^2(T)$, potom $\{\hat{u}(k)\} \in l^2(\mathbf{Z})$ (plyne z Besselovy nerovnosti). Naopak, ke každé posloupnosti $\{c_k\} \in l^2(\mathbf{Z})$ existuje právě jedna funkce $u \in L^2(T)$ tak, že $c_k = \hat{u}(k)$ (Riesz-Fischerova věta). Tuto funkci lze získat jako limitu posloupnosti $\{s_k\}$ v $L^2(T)$, kde

$$s_k(x) = \sum_{j=-k}^{k} c_k e^{ikx}\,, \qquad x \in T.$$

Navíc, $\|u\|_2 = \sqrt{2\pi}\,\|\{\hat{u}(k)\}\|_2$ (Parsevalova rovnost). Porovnejte s Plancherelovou větou 33.7.

(d) I přiřazení $u \mapsto \{\hat{u}(k)\}$ a $\{c_k\} \mapsto \tilde{c}$ lze zobecnit na širší třídy funkcí, resp. posloupností. Podrobnosti nebudeme uvádět. Všimněte si však, že přiřazení $\{c_k\} \mapsto u$, $\{c_k\} \in l^2(\mathbf{Z})$, dané Riesz-Fischerovou větou, je vlastně rozšíření zobrazení $\{c_k\} \mapsto \tilde{c}$, $\{c_k\} \in l^1(\mathbf{Z})$. V l^2-případě je však funkce u určena jen jako prvek $L^2(T)$, tj. s přesností až na množinu míry nula.

(e) Je-li $u \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ 2π-periodická funkce a $v = u'$, potom

$$\hat{v}(k) = ik\hat{u}(k)\,, \qquad k \in \mathbf{Z}\,.$$

Porovnejte s větou 33.3.

Již z tohoto neúplného výčtu paralel lze vytušit, že existují teorie zastřešující problematiku Fourierovy transformace i Fourierových řad. Nové pohledy na obě partie dává harmonická analýza na grupách (pokračování kontextu kapitoly 19), viz knihu E. Hewitt and K.A. Ross [*1970]. Vedle Fourierovy transformace jsou v matematice hojně využívány i jiné integrální transformace (např. Laplaceova transformace, Mellinova transformace, viz skripta [KS]).

Zhruba řečeno, integrální transformace je vzájemně jednoznačné zobrazení mezi dvěma prostory funkcí, dané předpisem tvaru

$$\hat{u}(x) = \int_Y K(x, y)\, u(y)\, d\nu(y)\,.$$

Často lze nalézt inverzní formuli v podobném tvaru:

$$u(y) = \int_X K'(x, y)\, \hat{u}(x)\, d\mu(x)\,.$$

Do tohoto kontextu lze zahrnout i Fourierovy řady, neboť sčítání řad je vlastně integrování podle aritmetické míry.

F. VĚTY O SUBSTITUCI A k-ROZMĚRNÉ MÍRY

34. Věta o substituci

V celé této kapitole předpokládejme, že $k \le n$ je celé nezáporné číslo. Konečně dokážeme větu o substituci, dokonce v obecnější podobě pro k-rozměrné míry.

V mnoha problémech matematické analýzy a geometrie je užitečné měřit "velikost" různých množin v $\mathbf{R}^n$ majících dimenzi k, $k \le n$. Kupříkladu nás zajímá otázka délky křivek či povrchů ploch v $\mathbf{R}^3$. K tomu, v různém stupni obecnosti, vedou mnohé metody. Je-li množina $A \subset \mathbf{R}^n$ izometrickým obrazem množiny $E \subset \mathbf{R}^k$, je rozumné považovat Lebesgueovu (k-rozměrnou) míru množiny E také za k-rozměrnou míru množiny A v $\mathbf{R}^n$. Tudíž by neměl být problém v zavedení k-rozměrné míry "rovných" množin v $\mathbf{R}^n$. Potom za k-rozměrnou míru zakřivené k-rozměrné "plochy" v $\mathbf{R}^n$ jsme ochotni intuitivně považovat limitu hodnot, získaných rozdělením plochy na malé, téměř rovné dílky a sečtením k-rozměrných měr rovných plošek blízkých oněm málo zakřiveným ploškám. Naším cílem je zavedení a studium k-rozměrné míry, která by byla dostatečně obecná, snadno popsatelná a nevedla k rozporu s intuitivní představou. Úlohu budeme řešit nezávisle ve dvou kapitolách.

Integrál podle k-rozměrné míry je tzv. (křivkový, plošný) integrál prvého druhu. Dokážeme pro něj větu o substituci, která jako speciální případ zahrnuje větu 26.13.

V úvodu kapitoly poskytneme krátké opakování potřebných pojmů z algebry. Skalární součin vektorů x a y budeme opět značit $x \cdot y$. Dále $\mathbf{M}_{n,k}$ bude množina všech matic o n-řádcích a k sloupcích. Každá taková matice reprezentuje lineární zobrazení $\mathbf{R}^k$ do $\mathbf{R}^n$. Je-li $L : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ lineární zobrazení, existuje právě jedno zobrazení $L^* : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ tak, že $Lx \cdot y = x \cdot L^*y$ pro všechna $x \in \mathbf{R}^k$ a $y \in \mathbf{R}^n$. Zobrazení L^* se nazývá (*hermiteovsky*) *adjungované* k L. Je-li L reprezentováno maticí A, potom L^* odpovídá transponovaná matice k A, kterou budeme značit A^T. *Normu* zobrazení L budeme značit $\|L\|$, je definována předpisem

$$\|L\| = \sup\{|Lx| \colon x \in \mathbf{R}^k, |x| \le 1\}.$$

Dále označme $\|L^{-1}\| = \sup\{|x| \colon x \in \mathbf{R}^k, |Lx| \le 1\}$.

Předpokládáme, že čtenář je obeznámen s pojmem determinantu. Budeme jej vztahovat nejen na čtvercové matice, ale i na objekty, které lze reprezentovat maticí $A \in \mathbf{M}_{k,k}$, jmenovitě na k-tice vektorů z $\mathbf{R}^k$, k-tice lineárních forem nad $\mathbf{R}^k$ a lineární zobrazení $\mathbf{R}^k$ do $\mathbf{R}^k$.

34.1. Vlastnosti determinantu. *Nechť $A, B \in \mathbf{M}_{k,k}$. Potom*

(a) $\det A = \det A^T$,

(b) $\det AB = \det A \det B$.

34.2. Izometrická zobrazení. Nechť $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ jsou k-rozměrné lineární prostory se skalárním součinem. Připomeňme, že lineární zobrazení $L : \mathbf{W} \to \mathbf{V}$ se nazývá *izometrické*, jestliže zachovává vzdálenosti bodů. Potom ovšem zachovává i normu a skalární součin (skalární součin lze totiž vyjádřit z normy na základě vzorce $4x \cdot y = |x+y|^2 - |x-y|^2$). Maticím izometrických zobrazení $\mathbf{R}^k$ do $\mathbf{R}^k$ se také říká *unitární* nebo *ortogonální*. Matice A je ortogonální, právě když její řádky (resp. sloupce) tvoří ortonormální bázi $\mathbf{R}^k$. Součin unitárních matic je ovšem unitární matice.

34.3. Lemma. *Nechť $\mathbf{W}$ je k-rozměrný lineární prostor se skalárním součinem. Potom existuje izometrické lineární zobrazení $Q \colon \mathbf{R}^k \to \mathbf{W}$.*

Důkaz. V prostoru $\mathbf{W}$ najděme ortonormální bázi $u_1, \dots, u_k$. Lineární zobrazení, které přiřadí $e_i \mapsto u_i$, $i = 1, \dots, k$, je izometrické. ■

34.4. Příklad.
Buď $\mathbf{W} \subset \mathbf{R}^3$ vektorový prostor generovaný vektory $[1,1,1]$ a $[0,1,2]$. Hledáme izometrické lineární zobrazení $\mathbf{R}^2$ na $\mathbf{W}$. Toho docílíme nalezením ortonormální báze u_1, u_2 prostoru $\mathbf{W}$. Řešením rovnice $[1,1,1] \cdot \big([0,1,2] + \alpha[1,1,1]\big) = 0$ dostaneme $\alpha = -1$, takže vektor $[-1,0,1] = [0,1,2] - [1,1,1]$ je kolmý k $[1,1,1]$. Položíme-li $u_1 = 3^{-1/2}[1,1,1]$, $u_2 = 2^{-1/2}[-1,0,1]$, mají již vektory u_1, u_2 normu 1. Matice hledaného lineárního zobrazení má sloupce u_1, u_2.

34.5. Lemma. *Nechť $Q \in \mathbf{M}_{k,k}$ je unitární matice. Potom $|\det Q| = 1$.*

34.6. Lemma. *Nechť $A \in \mathbf{M}_{k,k}$. Potom existují unitární matice Q_1, $Q_2 \in \mathbf{M}_{k,k}$ a diagonální matice $D \in \mathbf{M}_{k,k}$ tak, že $A = Q_1 D Q_2$.*

Důkaz. Pokud tuto větu nenajdeme ve své učebnici lineární algebry, zcela jistě (předpokládáme, že čtenář používá *dobrou* učebnici lineární algebry) najdeme jiné dvě – existuje unitární matice U a symetrická matice R tak, že $A = UR$, dále existuje unitární matice Q a diagonální matice D tak, že $R = Q^T D Q$. Nyní stačí položit $Q_1 = UQ^T$, $Q_2 = Q$. ■

Nyní se už budeme věnovat i teorii míry.

34.7. Lemma. *Nechť $L\colon \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^k$ je lineární zobrazení. Potom pro každou měřitelnou množinu $E \subset \mathbf{R}^k$ je $L(E)$ měřitelná a platí $\lambda(L(E)) = |\det L|\, \lambda E$.*

Důkaz. Měřitelnost je snadná. Podle lemmatu 34.6 existují izometrická lineární zobrazení Q_1, Q_2 a diagonální zobrazení $D = (d_{i,j})_{i,j=1}^k$ prostoru $\mathbf{R}^k$ do sebe tak, že $L = Q_1 D Q_2$. Buď $K = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_k, b_k]$. Potom (pro jednoduchost zápisu budeme předpokládat, že $d_{i,i} \ge 0$, ale ke stejnému výsledku bychom došli i v ostatních případech) $D(K) = [d_{1,1}a_1,\, d_{1,1}b_1] \times \dots \times [d_{k,k}a_k,\, d_{k,k}b_k]$, takže

$$\lambda(D(K)) = |d_{1,1}(b_1 - a_1) \dots d_{k,k}(b_k - a_k)| = |\det D| \lambda(K)\,.$$

Z vlastností izometrických lineárních zobrazení (zachovávají míru, při skládání s jinými lineárními zobrazeními nemění absolutní hodnotu determinantu) máme pro každou měřitelnou množinu $E \subset \mathbf{R}^n$

$$\lambda(L(E)) = \lambda(DQ_2(E)) = |\det D|\, \lambda(Q_2(E)) = |\det D|\, \lambda E = |\det L|\, \lambda E\,.$$

■

34.8. k-rozměrná míra. Nechť σ je míra na σ-algebře $\Sigma \supset \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$. Označme

$$\sigma^* E = \{\inf \sigma S\colon S \supset E,\ S \in \Sigma\}.$$

Řekneme, že σ je *k-rozměrná míra v $\mathbf{R}^n$*, jestliže jsou splněny tyto požadavky:

(a) Je-li $I : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ izometrické zobrazení, potom $\sigma^* I(E) = \lambda^* E$ pro každou množinu $E \subset \mathbf{R}^k$.

(b) Pro každé β-lipschitzovské zobrazení $\varphi\colon E \to \mathbf{R}^n$, $E \subset \mathbf{R}^n$, je $\sigma^*\varphi(E) \le \beta^k \sigma^* E$.

Jak se zmíníme podrobněji v poznámce 34.31, k-rozměrná míra není jednoznačně určena vlastnostmi (a) a (b). Na rozumných množinách však všechny k-rozměrné míry splývají. Poznamenejme, že pro každou k-rozměrnou míru σ je podle vlastnosti (a) $\sigma([0,1]^k \times \{0\}^{n-k}) = 1$.

Podle cvičení 30.7 splňuje Lebesgueova míra požadavek (b) (a tudíž i (a)) pro $k = n$. Je tedy Lebesgueova míra jedinou (jednoznačnost plyne okamžitě z (a)) n-rozměrnou mírou v $\mathbf{R}^n$.

34.9. Existence k-rozměrné míry. *Existuje k-rozměrná míra v $\mathbf{R}^n$.*

Důkaz. Pro $E \subset \mathbf{R}^n$ položme

$$\mu^* E = \inf\{\sum_j \lambda_k G_j\}\,,$$

kde infimum bereme přes všechny posloupnosti otevřených množin $\{G_j\}$, $G_j \subset \mathbf{R}^k$, k nimž existují 1-lipschitzovské funkce φ_j na G_j tak, že $E \subset \bigcup_j \varphi_j(G_j)$. Pokud taková posloupnost $\{G_j\}$ neexistuje, je ovšem $\mu^* E = \infty$.

Zřejmě μ^* je vnější míra na $\mathbf{R}^n$.

Buď Σ σ-algebra všech μ^*-měřitelných množin (viz 4.4). Podobně jako ve větě 1.19 se dokáže, že každá borelovská množina leží v Σ. Uvědomme si, že je-li H otevřený poloprostor v $\mathbf{R}^n$ a φ je spojité zobrazení otevřené množiny $G \subset \mathbf{R}^k$ do $\mathbf{R}^n$, potom G je disjunktní sjednocení množin $G \cap \varphi^{-1}(H)$ (to je zřejmě otevřená množina) a $G \setminus \varphi^{-1}(H)$ (to je sjednocení spočetně mnoha uzavřených množin, tedy měřitelná množina, kterou můžeme aproximovat otevřenou nadmnožinou libovolně blízké míry). Zřejmě

$$\mu^* E = \inf\{\mu F \colon F \in \Sigma,\ F \supset E\}\,,$$

neboť množiny tvaru $\bigcup_j \varphi_j(G_j)$ jsou měřitelné (G_j je sjednocením posloupnosti kompaktních množin a spojitý obraz kompaktní množiny je kompaktní). Z cvičení 30.7 dostáváme, že μ je k-rozměrná míra. ■

34.10. Objem. Nechť $\mathbf{W}$ je k-rozměrný lineární prostor se skalárním součinem a $L \colon \mathbf{R}^k \to \mathbf{W}$ je lineární zobrazení. Mějme ještě izometrické zobrazení $Q \colon \mathbf{R}^k \to \mathbf{W}$. Potom pro každou borelovskou množinu $E \subset \mathbf{R}^k$ je $\lambda(Q^{-1}L(E)) = a\,\lambda E$, kde $a = |\det(Q^{-1}L)|$. Konstanta a zřejmě nezávisí na volbě izometrického zobrazení Q a má podobný význam jako mělo v 34.7 (případ $n = k$) číslo $|\det L|$. Výraz $|\det(Q^{-1}L)|$ lze dále upravit: Podle věty o součinu determinantů a determinantu transponované matice je

$$(\det(Q^{-1}L))^2 = \det((Q^{-1}L)^T Q^{-1}T)) = \det\bigl(Q^{-1}Le_i \cdot Q^{-1}Le_j\bigr)_{i,j=1}^k \det\bigl(Le_i \cdot Le_j\bigr)_{i,j=1}^k\,.$$

Výraz

$$\sqrt{\det(u_i \cdot u_j)_{i,j=1}^k}$$

nazveme *objemem k-tice vektorů* $(u_1, \dots, u_k)$ a označíme $\operatorname{vol}(u_1, \dots, u_k)$; má geometrický význam "k-rozměrné míry" množiny

$$\{c_1 u_1 + \cdots + c_k u_k \colon (c_1, \dots, c_k) \in [0,1]^k\}\,.$$

Objem přiřadíme i zobrazení L; bude definován jako

$$\operatorname{vol} L = \operatorname{vol}(Le_1, \dots, Le_k)\,.$$

Všimněme si, že platí odhad

$$\operatorname{vol} L \le \|L\|^k\,.$$

Důsledky pro k-rozměrnou míru lze shrnout do následující věty.

34.11. Věta. *Nechť $\mathbf{W}$ je k-rozměrný lineární podprostor $\mathbf{R}^n$ a σ je k-rozměrná míra v $\mathbf{R}^n$. Nechť $L \colon \mathbf{R}^k \to \mathbf{W}$ je lineární zobrazení. Potom pro každou měřitelnou množinu $E \subset \mathbf{R}^k$ je*

$$\sigma(L(E)) = \operatorname{vol} L\,\lambda E\,.$$

34.12. Věta. *Nechť $\mathbf{W}$ je k-rozměrný lineární prostor a $L \colon \mathbf{R}^k \to \mathbf{W}$, $M \colon \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^k$ jsou lineární zobrazení. Potom* $\operatorname{vol}(LM) = |\det M| \operatorname{vol} L$.

Důkaz. Nechť $Q \colon \mathbf{R}^k \to \mathbf{W}$ je izometrické lineární zobrazení. Podle věty o součinu determinantů máme

$$(\operatorname{vol} LM)^2 = \det((Q^{-1}LM)^T Q^{-1}LM) = \det M^T \det((Q^{-1}L)^T Q^{-1}L) \det M = (\det M)^2 (\operatorname{vol} L)^2\,.$$

■

34.13. Výpočet objemu. Nyní odvodíme vzorec, který nám usnadní výpočet objemu lineárního zobrazení $L\colon \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ (ale pozor – při nepříznivém poměru n a k může i zkomplikovat). Prvky množiny $\{1,\dots,n\}^k$ (tj. uspořádané k-tice indexů) budeme nazývat *multiindexy*. Budeme značit $I = I(k,n)$ množinu multiindexů $\alpha \in \{1,\dots,n\}^k$, které jsou rostoucí, tj. $\alpha_1 < \dots < \alpha_k$. Mějme matice $A = (a_{m,j})_{\substack{m=1,\dots,n\\ j=1,\dots,k}}$, $B = (b_{m,j})_{\substack{m=1,\dots,n\\ j=1,\dots,k}}$. Pro každý multiindex $\alpha \in I$ označme $A_\alpha = (a_{\alpha_i,j})_{\substack{i=1,\dots,k\\ j=1,\dots,k}}$, $B = (b_{\alpha_i,j})_{\substack{i=1,\dots,k\\ j=1,\dots,k}}$. Nyní dokážeme vzorec

$$\det A^T B = \sum_{\alpha\in I} \det A_\alpha^T B_\alpha\,.$$

Rutinním roznásobením dostaneme

$$\det A^T B = \det(\sum_{m=1}^n a_{m,i} b_{m,j})_{i,j=1}^k = \sum_{\beta\in\{1,\dots,m\}^k} \det(a_{\beta_i,i}, b_{\beta_i,j})_{i,j=1}^k\,.$$

Jelikož

$$\det(a_{\beta_i,i}, b_{\beta_i,j})_{i,j=1}^k = 0$$

jakmile se některý index v β opakuje, dostáváme

$$\begin{aligned}\det A^T B &= \sum_{\beta\in\{1,\dots,m\}^k} \det(a_{\beta_i,i}, b_{\beta_i,j})_{i,j=1}^k\\ &= \sum_{\alpha\in I}\sum_{\beta\in\{\alpha_1,\dots,\alpha_k\}^k} \det(a_{\beta_i,i}, b_{\beta_i,j})_{i,j=1}^k = \sum_{\alpha\in I}\det(A_\alpha^T B_\alpha)\,.\end{aligned}$$

Nyní slíbená aplikace na objem – dosaďme za $A = B$ matici zobrazení L. Z předchozího dostaneme vzorec

$$(\operatorname{vol} L)^2 = \det A^T A = \sum_{\alpha\in I}\det A_\alpha^T A_\alpha = \sum_{\alpha\in I}(\det A_\alpha)^2\,.$$

34.14. Příklad.
Na ukázku volme

$$u_1 = [0,2,1],\quad u_2 = [1,0,1],$$

tedy

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Potom můžeme počítat

$$(\operatorname{vol}(u_1,u_2))^2 = \det(A^T A) = \det\begin{pmatrix} 5 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} = 9$$

nebo

$$(\operatorname{vol}(u_1,u_2))^2 = \Bigl(\det\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\Bigr)^2 + \Bigl(\det\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Bigr)^2 + \Bigl(\det\begin{pmatrix} 2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Bigr)^2 = (-2)^2 + 1^2 + 2^2 = 9\,.$$

34.15. Lemma. *Nechť σ je k-rozměrná míra v $\mathbf{R}^n$. Nechť $L : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ je prosté lineární zobrazení, $G \subset \mathbf{R}^k$ je otevřená množina, $F \subset G$ je měřitelná množina a $\varepsilon > 0$. Nechť dále $\varphi\colon G \to \mathbf{R}^n$ je zobrazení, které má skoro všude v G derivaci a splňuje nerovnost*

$$|\varphi(s) - \varphi(t) - L(s-t)| \le \varepsilon|s-t|\,,\qquad t,s\in F\,.$$

Označme $\beta = 1 + \varepsilon\|L^{-1}\|$, $\alpha = (1-\varepsilon\|L^{-1}\|)^{-1}$.
Potom platí:

(a) Zobrazení $\varphi\circ L^{-1}$ je β-lipschitzovské na $L(F)$.

(b) Je-li $\varepsilon\|L^{-1}\| < 1$, potom zobrazení φ je prosté a zobrazení $L\circ\varphi^{-1}$ je α-lipschitzovské na $\varphi(F)$.

(c) Pro skoro všechna $t\in F$ je $\|\varphi'(t) - L\| \le \varepsilon$ a $\operatorname{vol}\varphi'(t) \le \beta^k \operatorname{vol} L$.

(d) Je-li $\varepsilon\|L^{-1}\| < 1$, pak pro skoro všechna $t \in F$ je $\operatorname{vol}\varphi'(t) \geq \alpha^{-k} \operatorname{vol} L$.

(e) Pro každou množinu $E \subset F$ je $\sigma^*\varphi(E) \leq \beta^k \operatorname{vol} L\, \lambda^* E$.

(f) Je-li $\varepsilon\|L^{-1}\| < 1$, pak pro každou množinu $E \subset F$ je $\beta^{-k}\alpha^{-k} \int_E \operatorname{vol}\varphi'(t)\,dt \leq \sigma^*\varphi(E) \leq \beta^k\alpha^k \int_E \operatorname{vol}\varphi'(t)\,dt$.

Důkaz.

(a), (b) Nechť $t, s \in F$. Potom

$$\begin{aligned}|\varphi(s) - \varphi(t)| &\leq |\varphi(s) - \varphi(t) - L(s-t)| + |Ls - Lt| \leq \varepsilon|s-t| + |Ls - Lt| \\ &\leq (\varepsilon\|L^{-1}\| + 1)|Ls - Lt|\end{aligned}$$

(odtud dostáváme (a)) a

$$|Ls - Lt| \leq |\varphi(s) - \varphi(t) - L(s-t)| + |\varphi(s) - \varphi(t)| \leq \varepsilon\|L^{-1}\|\,|Ls - Lt| + |\varphi(s) - \varphi(t)|.$$

Poslední nerovnost také můžeme upravit

$$(1 - \varepsilon\|L^{-1}\|)|L(s) - L(t)| \leq |\varphi(s) - \varphi(t)|\,,$$

odkud plyne (b).

(c), (d) Podle věty o hustotě 29.2 je skoro každý bod množiny F jejím bodem hustoty. Pokud v takovém bodě navíc existuje derivace φ', zřejmě pro $A = \varphi'(t)$ platí $\|A - L\| \leq \varepsilon$. Jelikož zobrazení AL^{-1} je (jako v (a)) β-lipschitzovské, je $\|AL^{-1}\| \leq \beta$ a $\operatorname{vol} AL^{-1} \leq \beta^k$, neboli $\operatorname{vol} A \leq \beta^k \operatorname{vol} L$. Podobně dostaneme $\operatorname{vol} A \geq \alpha^{-k} \operatorname{vol} L$, pokud $\varepsilon\|L^{-1}\| < 1$.

(e), (f) Podle definice k-rozměrné míry a předchozích bodů máme

$$\sigma^*\varphi(E) \leq \beta^k \sigma^* L(E) = \beta^k \operatorname{vol} L\, \lambda^* E.$$

Za předpokladu $\varepsilon\|L^{-1}\| < 1$ dostáváme

$$\sigma^*\varphi(E) \leq \beta^k \operatorname{vol} L\, \lambda^* E \leq \beta^k\alpha^k \int_E \operatorname{vol}\varphi'(t)\,dt$$

a

$$\sigma^*\varphi(E) \geq \alpha^{-k} \operatorname{vol} L\, \lambda^* E \leq \beta^{-k}\alpha^{-k} \int_E \operatorname{vol}\varphi'(t)\,dt\,.$$

■

Nyní budeme pracovat s lokálně lipschitzovskými zobrazeními. Po celou dobu mějme na paměti, že podle Rademacherovy věty 30.3 má lokálně lipschitzovské zobrazení φ skoro všude derivaci $\varphi'(t)$ a tato je (jako funkce proměnné t) měřitelná.

34.16. Lemma. *Nechť $G \subset \mathbf{R}^k$ je otevřená množina, $E \subset G$ je měřitelná množina a $\varphi\colon G \to \mathbf{R}^n$ je lokálně lipschitzovské zobrazení. Nechť $\mathcal{F}$ je uzavřená nebo otevřená podmnožina $\mathbf{M}_{n,k}$. Nechť ε je kladná funkce na $\mathcal{F}$. Potom existuje spočetný disjunktní rozklad $E \cap \{\varphi' \in \mathcal{F}\} = \bigcup D_j$, kde D_j jsou měřitelné a ke každému j existuje $L \in \mathcal{F}$ tak, že pro všechna $s, t \in D_j$ je*

$$|\varphi(t) - \varphi(s) - L(s-t)| < \varepsilon(L)|s-t|\,.$$

Důkaz. Nejprve předpokládejme, že množina $\mathcal{F}$ je kompaktní. Systém množin $\{M \in \mathcal{F}\colon \|M - L\| < \varepsilon(L)\}$, kde L probíhá $\mathcal{F}$, je otevřené pokrytí $\mathcal{F}$. Můžeme tedy vybrat jeho konečné podpokrytí a rozdělit $E \cap \{\varphi' \in \mathcal{F}\}$ na disjunktní sjednocení měřitelných množin E^i, kde ke každému i existuje $L \in \mathcal{F}$ tak, že pro všechna $t \in E^i$ je $\|\varphi'(t) - L\| < \varepsilon(L)$. Buď i pevné. Máme $E^i = \bigcup\limits_p E^i_p$, kde

$$E^i_p := \{t \in E^i\colon \text{pro všechna } s \in U(t, \frac{2}{p}) \text{ je } |\varphi(s) - \varphi(t) - L(s-t)| < \varepsilon(L)|s-t|\}\,.$$

Rozdělíme-li E^i_p na měřitelné po dvou disjunktní díly $E^i_{p,q}$ o průměru nejvýš $1/p$, mají už tyto požadované vlastnosti. Jestliže nyní množina $\mathcal{F}$ je uzavřená nebo otevřená v $\mathbf{M}_{n,k}$, je spočetným sjednocením kompaktních množin a použijeme předchozí. ■

34.17. Sardova věta. *Nechť σ je úplná k-rozměrná míra v $\mathbf{R}^n$. Nechť $G \subset \mathbf{R}^k$ je otevřená množina a $\varphi\colon G \to \mathbf{R}^k$ je lokálně lipschitzovské zobrazení. Buď $Z := \{t\colon \operatorname{vol} \varphi'(t) = 0\}$. Potom $\sigma(\varphi(Z)) = 0$.*

Důkaz. Zřejmě stačí dokázat, že $\sigma(\varphi(E)) = 0$ pro každou množinu $E := Z \cap \{\|\varphi'\| \le m\}$. Buď $\mathcal{K} = \{M \in \mathbf{M}_{n,k}\colon \operatorname{vol} M = 0 \text{ a } \|M\| \le m\}$. Potom $\mathcal{K}$ je uzavřená podmnožina $\mathbf{M}_{n,k}$. Zvolme $\delta > 0$. Ke každému $L \in \mathcal{K}$ přiřaďme $\varepsilon(L) > 0$ tak, že $2^k \|L\|^{k-1} \varepsilon(L) < \delta$ a $|Lt| \ge \varepsilon(L)|t|$ pro všechna t kolmá na $\operatorname{Ker} L := \{s \in \mathbf{R}^k\colon Ls = 0\}$. Podle lemmatu 34.16 najdeme disjunktní rozklad E na spočetné sjednocení měřitelných množin D_j tak, že ke každému j existuje $L \in \mathcal{K}$ tak, že

$$|\varphi(t) - \varphi(s) - L(s-t)| < \varepsilon(L)|s-t|$$

pro všechna $s, t \in D_j$. Buď j pevné. Dimenze d prostoru $\operatorname{Ker} L$ je menší než k. Buď P ortogonální projekce $\mathbf{R}^k$ na $\operatorname{Ker} L$ a $\mathbf{W}$ (k-d)-rozměrný podprostor $\mathbf{R}^n$ kolmý na $L(\mathbf{R}^k)$. Najděme izometrické zobrazení Q prostoru $\operatorname{Ker} L$ na $\mathbf{W}$ a položme $Mt = Lt + \varepsilon(L) QPt$. Snadno ověříme, že pro $\varepsilon = \varepsilon(L)$ je $\|M - L\| \le \varepsilon$, $\|M^{-1}\| \le 1/\varepsilon$ a $\operatorname{vol} M = \varepsilon^{k-d} \operatorname{vol} L \le \varepsilon^{k-d} m^d \le \varepsilon m^{k-1}$. Podle lemmatu 34.15 je

$$\sigma^* \varphi(D_j) \le (2\varepsilon \|M^{-1}\|)^k \operatorname{vol} M \, \lambda D \le 2^k m^{k-1} \varepsilon \, \lambda D_j \le \delta \, \lambda D_j\,.$$

Sjednocením a limitním přechodem pro $\delta \to 0$ dostáváme, že $\sigma^* \varphi(E) = 0$. ■

34.18. Věta o substituci. *Nechť σ je úplná k-rozměrná míra v $\mathbf{R}^n$. Nechť $G \subset \mathbf{R}^k$ je otevřená množina a $\varphi\colon G \to \mathbf{R}^n$ je lokálně lipschitzovské zobrazení. Nechť u je měřitelná funkce na G. Definujme $w(x) = \sum\{u(t)\colon t \in \varphi^{-1}(x)\}$. Potom*

$$\int_{\varphi(G)} w(x) \, d\sigma(x) = \int_G u(t) \operatorname{vol} \varphi'(t) \, dt\,,$$

pokud integrál na pravé straně konverguje.

Důkaz. Zřejmě stačí dokázat větu v případě, kdy u je charakteristická funkce měřitelné množiny $E \subset \mathbf{R}^k$. Jestliže E má míru nula, lokálně lipschitzovské zobrazení ji zobrazí opět na množinu míry nula. Je-li $E \subset \{\operatorname{vol} \varphi' = 0\}$, potom podle Sardovy věty 34.17 je $\sigma(\varphi(E)) = 0$ a integrál na pravé straně je ovšem také nula. Můžeme tedy předpokládat, že $E \subset \{\operatorname{vol} f' > 0\}$. Buď $\mathcal{F} = \{M \in \mathbf{M}_{n,k}\colon \operatorname{vol} M > 0\}$. Potom $\mathcal{F}$ je otevřená podmnožina $\mathbf{M}_{n,k}$. Zvolme $\tau > 1$. Ke každé matici $L \in \mathbf{M}_{n,k}$ najděme $\varepsilon(L) > 0$ tak, že $\varepsilon(L)\, \|L^{-1}\| < 1 - \tau^{-(1/2k)}$ (potom pro kostanty α, β z lemmatu 34.15 máme odhad $\beta^k \le \alpha^k < \sqrt{\tau}$). Podle lemmatu 34.16 najdeme disjunktní rozklad $E = \bigcup\limits_j D_j$, kde D_j jsou měřitelné množiny a ke každému j existuje $L \in \mathcal{K}$ tak, že

$$|\varphi(t) - \varphi(s) - L(s-t)| < \varepsilon(L)|s-t|$$

pro všechna $s, t \in D_j$. Potom podle lemmatu 34.15 je φ prostá na D_j. Předpokládejme nejprve, že funkce φ je dokonce prostá na E. Podle lemmatu 34.15 je

$$\tau^{-1} \sigma^* \varphi(D_j) \le \int_{D_j} \operatorname{vol} \varphi'(t) \, dt \le \tau \sigma^* \varphi(D_j)\,.$$

Pro každou kompaktní množinu $K \subset D_j$ je $\varphi(K)$ kompaktní a tudíž měřitelná. Najděme posloupnost $\{K_i\}$ kompaktních podmnožin D_j tak, že $\lambda K_i \to \lambda D_j$. Potom množina $F_j := \bigcup\limits_i \varphi(K_i)$ je σ-měřitelná podmnožina $\varphi(D_j)$ a

$$\int_{D_j} \operatorname{vol} \varphi'(t) \, dt \le \tau \sigma F_j\,.$$

Označme $F = \bigcup\limits_j F_j$. Sečteme-li přes j, dostaneme

$$\tau^{-1} \sigma^* \varphi(E) \le \int_E \operatorname{vol} \varphi'(t) \, dt \le \tau \sigma \varphi(F)$$

a limitním přechodem pro $\tau \to 1$

$$\sigma^*\varphi(E) \le \int_E \operatorname{vol}\varphi'(t)\,dt \le \sigma\varphi(F)\,.$$

Jelikož $F \subset E$, plyne odtud

$$\sigma\varphi(E) = \int_E \operatorname{vol}\varphi'(t)\,dt\,,$$

což je dokazovaná rovnost pro charakteristickou funkci množiny E.

Není-li nyní φ prostá na E, stejnou úvahou jako výše najdeme disjunktní rozklad $E = \bigcup_j E_j$, kde E_j jsou měřitelné množiny a φ je prostá na E_j. Potom z předchozí části plyne

$$\int_{\varphi(G)} c_{E_j}\,d\sigma = \sigma\varphi(E_j) = \int_{E_j} \operatorname{vol}\varphi'(t)\,dt\,.$$

Sečtením přes j dostáváme tvrzení. ∎

34.19. Důsledek. *Nechť σ je úplná k-rozměrná míra v $\mathbf{R}^n$. Nechť $G \subset \mathbf{R}^k$ je otevřená množina, a $\varphi\colon G \to \mathbf{R}^n$ je lokálně lipschitzovské zobrazení. Nechť f je σ-měřitelná funkce na $\varphi(G)$ a $E \subset G$ je měřitelná množina. Definujme $N(x,\varphi,E)$ jako počet prvků množiny $E \cap \varphi^{-1}(x)$. Potom*

$$\int_{\varphi(G)} N(x,\varphi,E)\, f(x)\,d\sigma(x) = \int_E f(\varphi(t)) \operatorname{vol}\varphi'(t)\,dt\,,$$

pokud aspoň jedna strana rovnosti má smysl.

Speciálně, pokud zobrazení φ je navíc prosté, je

$$\int_{\varphi(G)} f(x)\,d\sigma(x) = \int_G f(\varphi(t)) \operatorname{vol}\varphi'(t)\,dt\,.$$

Důkaz. Tvrzení je důsledkem věty 34.18, jen je třeba dokázat, že funkce $f \circ \varphi$ je měřitelná na $\{\operatorname{vol}\varphi' > 0\}$ a funkce $N(x,\varphi,E)$ je σ-měřitelná. Je-li $E \subset \{\operatorname{vol}\varphi' = 0\}$, pak podle Sardovy věty 34.17 je $\sigma\varphi(E) = 0$, takže $N(x,\varphi,E) = 0$ skoro všude. Můžeme tedy předpokládat, že $E \subset \{\operatorname{vol}\varphi' > 0\}$ a podobně jako v důkazu věty o substituci se omezit na případ, kdy φ je prostá na E. Dále můžeme předpokládat, že f je charakteristická funkce σ-měřitelné množiny $H \subset \varphi(G)$. Potom existují borelovské množiny $B, N \subset \varphi(G)$ tak, že $B \subset H$, $H \setminus B \subset N$ a $\sigma N = 0$. Podle věty 34.18 je $\lambda(E \cap \varphi^{-1}(N)) = 0$, tudíž i $\lambda(E \cap \varphi^{-1}(H \setminus B)) = 0$. Vidíme, že množina $E \cap \varphi^{-1}(H) = E \cap \big(\varphi^{-1}(B) \cup \varphi^{-1}(H \setminus B)\big)$ je měřitelná. ∎

34.20. Bilipschitzovská zobrazení.

Nechť (P_1,ρ_1), (P_2,ρ_2) jsou metrické prostory, $G \subset P_1$ a $\beta \in [1,\infty)$ je konstanta. Řekneme, že zobrazení $\varphi\colon G \to P_2$ je *β-bilipschitzovské*, jestliže

$$\beta^{-1}\rho_1(x,y) \le \rho_2(\varphi(x),\varphi(y)) \le \beta\rho_1(x,y)$$

pro všechna $x, y \in P_1$. Jinými slovy, φ i φ^{-1} jsou β-lipschitzovská zobrazení. Zobrazení nazveme bilipschitzovským, jestliže je β-bilipschitzovské pro některé β.

Zobrazení $\psi\colon G \to P_2$ nazveme *lokálně bilipschitzovským*, jestliže ke každému bodu $x \in G$ existuje okolí U bodu x a β (bod od bodu se může měnit) tak, že restrikce ψ na U je β-bilipschitzovská.

34.21. Poznámky. 1. Každé bilipschitzovské zobrazení je prosté, dokonce homeomorfní. Lokálně bilipschitzovské zobrazení nemusí být prosté; a i když je prosté, nemusí být homeomorfní.

2. Uvědomte si, že 1-bilipschitzovské zobrazení je totéž jako izometrie.

3. Derivace bilipschitzovského zobrazení otevřené množiny $G \subset \mathbf{R}^k$ do $\mathbf{R}^n$ existují skoro všude podle Rademacherovy věty 31.2.

34.22. Regulární zobrazení, difeomorfismus. Každé *regulární* zobrazení ($\mathcal{C}^1$-zobrazení otevřené množiny $G \subset \mathbf{R}^k$ do $\mathbf{R}^k$ mající všude nenulový Jakobián) je příkladem lokálně bilipschitzovského zobrazení. To se týká i regulárních zobrazení otevřené množiny $G \subset \mathbf{R}^k$ do $\mathbf{R}^n$ ($k \leq n$), která jsou definována jako $\mathcal{C}^1$-zobrazení, jejichž Jakobiho matice má v každém bodě množiny G hodnost k.

Každé prosté regulární zobrazení φ otevřené množiny $G \subset \mathbf{R}^k$ do $\mathbf{R}^k$ je *difeomorfismus*, neboli homeomorfismus, pro nějž φ i φ^{-1} jsou třídy $\mathcal{C}^1$.

34.23. Příklady. Zobrazení polárních či sférických souřadnic z kapitoly 26 jsou typickými příklady regulárních zobrazení. Je-li $a \in U(0,1)$ konstantní vektor, pak $f : x \mapsto |x|(\frac{x}{|x|} - a)$, $x \in U(0,1)$ může sloužit jako příklad zobrazení, které je $(1-|a|)^{-1}$-bilipschitzovské, ale není třídy $\mathcal{C}^1$ (neboť nemá derivaci v počátku).

34.24. k-rozměrné plochy a integrál prvého druhu. V aplikacích se používá k-rozměrná míra především na tzv. k-rozměrných plochách. Tyto se dají lokálně parametrizovat pomocí lipschitzovských (dokonce bilipschitzovských) zobrazení, a proto je na nich k-rozměrná míra jednoznačně určena pomocí vzorce z věty o substituci.

Množinu $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ nazveme *k-rozměrnou plochou*, jestliže ke každému bodu $x \in \Omega$ existuje lokálně bilipschitzovské homeomorfní zobrazení φ otevřené množiny $G \subset \mathbf{R}^k$ do Ω tak, že $x \in \varphi(G)$ a $\varphi(G)$ je relativně otevřená podmnožina Ω (tím myslíme otevřenost v metrickém prostoru Ω). Zobrazení φ pak nazveme *parametrizací* (části $\varphi(G)$ plochy Ω).

Jestliže okolí každého bodu Ω lze parametrizovat zobrazeními třídy $\mathcal{C}^\ell$ ($\ell \geq 1$), říkáme, že plocha Ω je *třídy $\mathcal{C}^\ell$*.

Názorně řečeno, k-rozměrné plochy jsou množiny, které lokálně vypadají jako bilipschitzovsky pokřivená část $\mathbf{R}^k$. Ekvivalentně můžeme tuto vlastnost popsat pomocí *map*, což jsou inverzní zobrazení k parametrizacím.

Z topologických vlastností $\mathbf{R}^n$ (Lindelöfova vlastnost – z každého otevřeného pokrytí libovolné množiny $E \subset \mathbf{R}^n$ lze vybrat spočetné podpokrytí) plyne, že každá k-rozměrná plocha je spočetné sjednocení ploch tvaru $\varphi(G)$, kde φ je parametrizace.

Mapu (k-rozměrnou) definujeme jako lokálně bilipschitzovské homeomorfní zobrazení otevřené podmnožiny U (metrického prostoru) Ω na otevřenou podmnožinu $\mathbf{R}^k$. Můžeme tedy říci, že množina Ω je k-rozměrná plocha, právě když ke každému bodu $x \in \Omega$ existuje k-rozměrná mapa definovaná na okolí x (vzhledem k Ω).

k-rozměrné plochy třídy $\mathcal{C}^\ell$ lze ještě charakterizovat pomocí implicitního popisu. Totiž, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ je k-rozměrná plocha třídy $\mathcal{C}^\ell$, právě když ke každému $x \in \Omega$ existuje jeho okolí W v $\mathbf{R}^n$ a zobrazení $g\colon W \to \mathbf{R}^{n-k}$ třídy $\mathcal{C}^\ell$ tak, že matice $g'(x)$ má hodnost $n-k$ a $W \cap \Omega = W \cap \{g = 0\}$. (Výroba parametrizace z implicitního zadání je snadné cvičení na větu o implicitních funkcích. Naopak, je-li $\varphi\colon G \to \Omega$ parametrizace třídy $\mathcal{C}^\ell$ a $x = \varphi(t)$, potom existuje projekce Π prostoru $\mathbf{R}^n$ na $\mathbf{R}^k$ tak, že $(\Pi \circ \varphi)'(t) \neq 0$. Potom podle věty o inverzním zobrazení existuje po případném zúžení definičního oboru φ inverzní zobrazení $(\Pi \circ \varphi)^{-1}$. Rovnice $g(x) = 0$, kde $g(x) = x - \varphi\big((\Pi \circ \varphi)^{-1}(\Pi(x))\big)$, je hledané implicitní vyjádření Ω na okolí x.)

Nechť Ω je k-rozměrná plocha a σ k-rozměrná míra v $\mathbf{R}^n$. Integrál $\int_\Omega f\, d\sigma$ se někdy nazývá *křivkovým, resp. plošným integrálem prvého druhu* funkce f.

34.25. Příklad (šroubovice). Buď $X = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3 \colon x = \cos z,\ y = \sin z\}$. Jako parametrizaci X lze použít zobrazení

$$\varphi(t) = [\cos t,\ \sin t,\ t]\,, \quad t \in \mathbf{R}\,.$$

Potom

$$\varphi'(t) = [-\sin t,\ \cos t,\ 1]$$

a

$$\operatorname{vol} \varphi'(t) = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}.$$

34.26. Příklad (sféra). Buď $S = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Uvedeme tři možnosti parametrizace.

(a) Připomeňme, že sférické souřadnice vycházejí z vzorců $\varphi_s = [x,y,z]$, kde

$$\begin{aligned} x(t,a) &= \cos a\ \cos t, \\ y(t,a) &= \cos a\ \sin t, \\ z(t,a) &= \sin a\,, \end{aligned}$$

$[t,a] \in G := (0,2\pi)\times(-\frac{1}{2}\pi,\ \frac{1}{2}\pi)$. Potom $\varphi(G) = X := S\setminus N$, kde N je "poledník" $\{[x,y,z] \in S\colon y = 0, x \in [0,1]\}$. Zřejmě dvourozměrná míra N je nulová, takže rozdíl mezi S a X lze zanedbat. Máme

$$\varphi_s'(t,a) = \begin{pmatrix} -\sin t\cos a, & -\cos t \sin a \\ \cos t\cos a, & -\sin t\sin a \\ 0, & \cos a \end{pmatrix}$$

a

$$\operatorname{vol}\varphi_s'(t,a) = \sqrt{\cos^2 a\sin^2 a + \sin^2 t\cos^4 a + \cos^2 t\cos^4 a} = \cos a\,.$$

(b) Nechť S, X, N jsou jako v předchozím příkladu. Pro parametrizaci X také můžeme použít "válcové souřadnice" $\varphi_c = [x,y,z]$, kde

$$\begin{aligned} x(t,h) &= r\cos t, \\ y(t,h) &= r\sin t, \qquad (r \text{ značí } \sqrt{1-h^2}) \\ z(t,h) &= h \end{aligned}$$

na $G := \{[t,h] \in \mathbf{R}^2\colon t \in (0,2\pi),\ h \in (-1,1)\}$. Potom

$$\varphi_c'(t,h) = \begin{pmatrix} -r\sin t, & -\frac{h}{r}\cos t \\ r\cos t, & -\frac{h}{r}\sin t \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$$

a

$$\operatorname{vol}\varphi_c'(t,h) = \sqrt{h^2 + (1-h^2)(\sin^2 t + \cos^2 t)} = 1\,.$$

(c) Buď S_+ polokoule $\{[x,y,z] \in S : z > 0\}$. Potom S_+ můžeme parametrizovat projekcí do roviny určené osami x a y. Uvažujme parametrizaci $\varphi_p = [x,y,z]$, kde

$$\begin{aligned} x(s,t) &= s, \\ y(s,t) &= t, \\ z(s,t) &= \sqrt{1-s^2-t^2} \end{aligned}$$

na $\{(s,t) \in \mathbf{R}^2\colon s^2+t^2 < 1\}$. Potom

$$\varphi_p'(s,t) = \begin{pmatrix} 1,0 \\ 0,1 \\ \frac{-s}{\sqrt{1-s^2-t^2}}, \frac{-t}{\sqrt{1-s^2-t^2}} \end{pmatrix}$$

a

$$\operatorname{vol}\varphi_p'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-s^2-t^2}}\,.$$

34.27. Příklad. Pomocí parametrizace z příkladu 34.26.b spočteme dvourozměrnou míru jednotkové kulové sféry (povrch koule). Nechť S, X, G mají stejný význam jako v citovaném příkladu. Potom je

$$\sigma(S) = \sigma(X) = \int_G \operatorname{vol}\varphi'\,dt\,dh = \int_{-1}^1 (\int_0^{2\pi} dt)dh = 4\pi\,.$$

34.28. Příklad. Buď σ dvourozměrná míra na $S_- := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3\colon z = -\sqrt{1-x^2-y^2}\}$ (dolní jednotková polosféra). Integrál

$$\int_{S_-} z^2\,d\sigma$$

má (až na konstanty) fyzikální význam síly, kterou je při jednotkovém gravitačním zrychlení nadlehčována koule o jednotkové hustotě zpola ponořená do kapaliny (počítáno integrací tlakových sil).

Použijme sférické souřadnice na $G = \{(t,a) \in \mathbf{R}^2 : t \in (0,2\pi),\ a \in (-\pi/2, 0)\}$. Potom

$$\int_{S_-} z^2\,d\sigma = \int_G \sin^2 a\cos a\,dt\,da = 2\pi\int_{-\pi/2}^0 \sin^2 a\cos a\,da = \frac{2}{3}\pi\,,$$

což je polovina objemu jednotkové koule. Tím jsme potvrdili Archimédův zákon v našem speciálním případě.

34.29. Příklad (délka grafu funkce). Nechť $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ je lipschitzovská funkce a σ je 1-rozměrná míra na jejím grafu Γ. Buď $G = (0,1)$ a $\varphi(t) = (t, f(t))$, $t \in G$. Pak jsou splněny předpoklady věty 34.18 (proč ?) a je tedy

$$\sigma(\Gamma) = \int_0^1 \operatorname{vol}\varphi'(t)\,dt = \int_0^1 \sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt\,.$$

34.30. Cvičení. Odvoďte vzorec

$$\sigma\Omega = 2\pi \int_a^b f(t)\sqrt{1+(f'(t))^2}\, dt$$

pro dvourozměrnou míru plochy Ω vzniklé v $\mathbf{R}^3$ rotací grafu funkce f kolem osy z. Předpokládejte, že funkce $f\colon (a,b) \to (0,+\infty)$ je lipschitzovská a položte

$$\Omega = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3 \colon z \in (a,b),\ \sqrt{x^2+y^2} = f(z)\}\,.$$

34.31. Rektifikovatelné množiny. Množinu $H \subset \mathbf{R}^n$ nazveme *k-rektifikovatelnou*, jestliže existuje lipschitzovské zobrazení omezené měřitelné množiny $E \subset \mathbf{R}^k$ na H. Jak je patrné z věty o substituci 34.19, na σ-algebře generované k-rektifikovatelnými množinami všechny k-rozměrné míry splývají. Existují uzavřené množiny, na nichž se k-rozměrné míry mohou různit (například k-rozměrná míra z 34.9 může dávat jiné hodnoty než Hausdorffova míra z kapitoly 36), konstrukce jsou však dost komplikované.

Samozřejmě, n-rektifikovatelné množiny v $\mathbf{R}^n$ jsou právě všechny omezené měřitelné množiny.

34.32. Historické poznámky. Použité pojetí výkladu k-rozměrné míry a plošného integrálu pochází od D. Preisse. O dané problematice se lze dočíst v rozsáhlé monografií H. Federera [*1969].

Klasická Sardova (někdy též Morse–Sardova) věta pro $\mathcal{C}^1$–zobrazení byla dokázána A.P. Morsem [1939] a A. Sardem [1942].

35. Stupeň zobrazení

Nechť $G \subset \mathbf{R}^k$ je otevřená množina a $\varphi\colon G \to \mathbf{R}^k$ je lokálně lipschitzovské zobrazení. Potom

$$\int_G |J_\varphi(t)|\, dt = \int_{\varphi(G)} N(x,\varphi,G)\, dx,$$

kde $N(x,\varphi,G)$ je počet prvků množiny $\varphi^{-1}(x)$. Je přirozené se ptát, čemu se rovná integrál

$$\int_G J_\varphi(t)\, dt\,.$$

Tato úloha nás vede k pojmu stupně zobrazení, který má řadu dalších aplikací, zejména pro topologii eukleidovského prostoru a problémy řešitelnosti nelineárních “algebraických” rovnic. Nejprve však musíme zvládnout kupu pomocných výpočtů.

35.1. Lemma. *Nechť $G \subset \mathbf{R}^k$ je otevřená množina a $\psi_1,\dots,\psi_k$ jsou dvakrát spojitě diferencovatelné funkce na G. Potom platí*

(a)

$$\sum_{q=1}^k (-1)^{q+1} \frac{\partial}{\partial t_q} \det\Big(\frac{\partial \psi_i}{\partial t_j}\Big)_{\substack{i=2,\dots,k\\ j=1,\dots,q-1,q+1,\dots,k}} = 0\,.$$

(b)

$$\sum_{q=1}^k (-1)^{q+1} \frac{\partial}{\partial t_q}\Big(\psi_1 \det\Big(\frac{\partial \psi_i}{\partial t_j}\Big)_{\substack{i=2,\dots,k\\ j=1,\dots,q-1,q+1,\dots,k}}\Big) = \det(\nabla\psi_1,\dots,\nabla\psi_k)\,.$$

Důkaz. (a) Levá strana je rovna součtu

$$\sum_{q=1}^k \sum_{p=1}^k (-1)^{q+1} \det(a_{i,j,p,q})_{\substack{i=2,\dots,k\\ j=1,\dots,q-1,q+1,\dots,k}}\,,$$

kde

$$a_{i,j,p,q} = \begin{cases} \frac{\partial\psi_i}{\partial t_j}, & \text{je-li } j \neq p \neq q\,, \\ \frac{\partial^2\psi_i}{\partial t_q \partial t_j}, & \text{je-li } j = p \neq q\,, \\ 0, & \text{je-li } p = q\,. \end{cases}$$

Nyní stačí si uvědomit, že podle věty o záměně smíšených derivací je pro všechna p,q

$$(-1)^{q+1}\det(a_{i,j,p,q})_{\substack{i=2,\dots,k\\ j=1,\dots,q-1,q+1,\dots,k}} = (-1)^{p}\det(a_{i,j,q,p})_{\substack{i=2,\dots,k\\ j=1,\dots,p-1,p+1,\dots,k}}.$$

(b) Použijeme-li na levou stranu dokazované rovnosti pravidlo o derivování součinu, dostaneme

$$\begin{aligned}&\sum_{q=1}^{k}(-1)^{q+1}\frac{\partial}{\partial t_q}\Big(\psi_1\,\det\big(\frac{\partial\psi_i}{\partial t_j}\big)_{\substack{i=2,\dots,k\\ j=1,\dots,q-1,q+1,\dots,k}}\Big)\\ &=\sum_{q=1}^{k}(-1)^{q+1}\frac{\partial\psi_1}{\partial t_q}\,\det\big(\frac{\partial\psi_i}{\partial t_j}\big)_{\substack{i=2,\dots,k\\ j=1,\dots,q-1,q+1,\dots,k}}\\ &+\psi_1\sum_{q=1}^{k}(-1)^{q+1}\frac{\partial}{\partial t_q}\det\big(\frac{\partial\psi_i}{\partial t_j}\big)_{\substack{i=2,\dots,k\\ j=1,\dots,q-1,q+1,\dots,k}}.\end{aligned}$$

Prvý člen na pravé straně je právě rozvoj determinantu $\det(\nabla\psi_1,\dots,\nabla\psi_k)$ podle prvního řádku, druhý je roven nule podle části (a). ■

35.2. Lemma. *Nechť $\psi_1,\dots,\psi_k$ jsou lipschitzovské funkce na $\mathbf{R}^k$ rovné 0 vně kompaktní podmnožiny $\mathbf{R}^k$. Potom*

$$\int_{\mathbf{R}^k}\det(\nabla\psi_1,\dots,\nabla\psi_k)\,dt=0\,.$$

Důkaz. Důkaz rozdělíme do dvou kroků. Nejprve předpokládejme, že funkce $\psi_1\dots\psi_k$ jsou třídy $\mathcal{C}^2$. Podle lemmatu 35.1.b existují funkce $\eta_1,\dots,\eta_k$ rovné nule vně kompakní podmnožiny $\mathbf{R}^k$ tak, že

$$\det(\nabla\psi_1,\dots,\nabla\psi_k)=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\eta_j}{\partial t_j}\,.$$

Pro každé $j=1,\dots,k$ a $[t_1,\dots,t_{j-1},t_{j+1},\dots,t_k]\in\mathbf{R}^{k-1}$ máme

$$\int_{\mathbf{R}}\frac{\partial\eta_j}{\partial t_j}(t_1,\dots,t_{j-1},\xi,t_{j+1},\dots,t_k)\,d\xi=0\,.$$

Fubiniova věta dává

$$\int_{\mathbf{R}^k}\frac{\partial\eta_j}{\partial t_j}(t)\,dt=0\,.$$

Sečtením uvedených rovností přes $j=1,\dots,k$ dostaneme požadovaný vzorec.

V druhém kroku dokážeme, že vzorec platí i bez předpokladu hladkosti. Nechť všechny funkce $\psi_1,\dots,\psi_k$ jsou β-lipschitzovské. Potom

$$\int_{\mathbf{R}^k}\det(\nabla\chi_q*\psi_1,\dots,\nabla\chi_q*\psi_k)\,dt=0$$

(značení jako v 31.1) a limitním přechodem $q\to\infty$ podle Lebesgueovy věty (konstantní majoranta) dostáváme požadovanou rovnost. ■

35.3. Důsledek. *Nechť $G\subset\mathbf{R}^k$ je omezená otevřená množina a $\varphi_1,\dots,\varphi_k$, $\psi_1,\dots,\psi_k$ jsou lipschitzovské funkce na $\overline{G}$. Jestliže $\varphi_i=\psi_i$ na ∂G, $i=1,\dots,k$, potom*

$$\int_G\det(\nabla\varphi_1,\dots,\nabla\varphi_k)=\int_G\det(\nabla\psi_1,\dots,\nabla\psi_k)\,dt\,.$$

Důkaz. Podle Kirszbraunovy věty 30.5 můžeme funkce φ_i, ψ_i rozšířit lipschitzovsky na $\mathbf{R}^k$, a to tak, aby měly kompaktní nosič. Ještě předefinujme ψ_i na $\mathbf{R}^k\setminus G$ tak, aby tam splývaly s φ_i. Na základě předchozí věty dostáváme

$$\begin{aligned}\int_G\det(\nabla\varphi_1,\dots,\nabla\varphi_k)\,dt&=-\int_{\mathbf{R}^k\setminus G}\det(\nabla\varphi_1,\dots,\nabla\varphi_k)\,dt=-\int_{\mathbf{R}^k\setminus G}\det(\nabla\psi_1,\dots,\nabla\psi_k)\,dt\\ &=\int_G\det(\nabla\psi_1,\dots,\nabla\psi_k)\,dt\,.\end{aligned}$$

■

35.4. Lemma. *Nechť $G \subset \mathbf{R}^k$ je omezená otevřená množina, f je integrovatelná funkce na $\mathbf{R}^k$ a φ, ψ jsou lipschitzovská zobrazení $\overline{G}$ do $\mathbf{R}^k$. Jestliže $\varphi = \psi$ na ∂G, potom*

$$\int_G f(\varphi(t))\, J_\varphi(t)\, dt = \int_G f(\psi(t))\, J_\psi(t)\, dt\,.$$

Důkaz. Rozepišme do souřadnic $\varphi = [\varphi_1, \dots, \varphi_k]$, $\psi = [\psi_1, \dots, \psi_k]$. Vzhledem k hustotě $\mathcal{D}(\mathbf{R}^k)$ v $L^1(\mathbf{R}^k)$ můžeme předpokládat, že $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^k)$. Najděme $\mathcal{C}^1$-funkci g na $\mathbf{R}^k$ tak, aby platilo $\frac{\partial g}{\partial x_1} = f$. Potom podle důsledku 35.3 máme

$$\int_G \det(\nabla(g \circ \varphi), \nabla\varphi_2, \dots, \nabla\varphi_k)\, dt = \int_G \det(\nabla(g \circ \psi), \nabla\psi_2, \dots, \nabla\psi_k)\, dt\,.$$

Přitom

$$\int_G \det(\nabla(g \circ \varphi), \nabla\varphi_2, \dots, \nabla\varphi_k)\, dt = \sum_{i=1}^k \int_G (\frac{\partial g}{\partial x_i} \circ \varphi)\ \det(\nabla\varphi_i, \nabla\varphi_2, \dots, \nabla\varphi_k)\, dt\,.$$

Z těchto sčítanců je nenulový jen prvý a ten je roven $\int_G (f \circ \varphi)\, J_\varphi\, dt$. Spojíme-li tento výsledek se stejnou úvahou pro funkce ψ_i, dostáváme požadovanou rovnost. ■

35.5. Lemma. *Nechť $G \subset \mathbf{R}^k$ je omezená otevřená množina a $\varphi, \psi \colon \overline{G} \to \mathbf{R}^k$ jsou lipschitzovská zobrazení. Nechť $B(y, r)$ je uzavřená koule v $\mathbf{R}^k$, kterou neprotíná žádná z úseček spojujících $\varphi(t)$ s $\psi(t)$, $t \in \partial G$. Nechť f je integrovatelná funkce na $\mathbf{R}^k$ s nosičem v $U(y, r)$. Potom*

$$\int_G f(\varphi(t))\, J_\varphi\, dt = \int_G f(\psi(t))\, J_\psi(t)\, dt\,.$$

Důkaz. Označme $K = \{t \in \overline{G}\colon$ úsečka spojující $\varphi(t)$ s $\psi(t)$ protíná $B(y, r)\}$. Potom K je kompaktní množina obsažená v G. Funkce η rovná jedné na K a nule vně G je lipschitzovská na $K \cup (\mathbf{R}^k \setminus G)$ a lze ji tedy podle Kirszbraunovy věty 30.5 rozšířit (pod stejným jménem) lipschitzovsky na $\mathbf{R}^k$. Položme $\zeta = \varphi + \eta(\psi - \varphi)$. Potom $\zeta = \varphi$ na ∂G a $f(\zeta(t)) = f(\psi(t))$ pro všechna $t \in G$. Podle lemmatu 35.4 dostáváme

$$\int_G f(\varphi(t))\, J_\varphi\, dt = \int_G f(\zeta(t))\, J_\zeta\, dt = \int_G f(\psi(t))\, J_\psi(t)\, dt\,.$$

■

35.6. Lemma. *Nechť $G \subset \mathbf{R}^k$ je omezená otevřená množina a $\varphi : \overline{G} \to \mathbf{R}^k$ je lipschitzovské zobrazení. Nechť $U \subset \mathbf{R}^k$ je souvislá otevřená množina disjunktní s $\varphi(\partial G)$. Potom existuje $a \in \mathbf{R}$ tak, že pro každou funkci $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^k)$ s nosičem v G je*

$$\int_G f(\varphi(t))\, J_\varphi(t)\, dt = a \int_{\mathbf{R}^k} f(x)\, dx\,.$$

Důkaz. Nejprve předpokládejme, že U je otevřená krychle. Rovnost stačí ověřit pro charakteristické funkce krychlí $K(z, \rho) := [-\rho, \rho]^k + z$ obsažené v U, kde $z \in U$ a ρ je racionální číslo. Buď nejprve ρ pevné a $U_\rho = \{z \in U\colon K(z, \rho) \subset U\}$. Potom pro $z, y \in U_\rho$ je

$$\int_G c_{K(y,\rho)}(\varphi(t))\, J_\varphi(t)\, dt = \int_G c_{K(z,\rho)}(\psi(t))\, J_\psi(t)\, dt\,,$$

kde $\psi(t) = \varphi(t) + y - z$. Pro y blízké z dvojice funkcí φ, ψ splňuje předpoklady lemmatu 35.5 a tudíž ze souvislosti U_ρ plyne, že funkce

$$y \mapsto \int_G c_{K(y,\rho)}(\varphi(t))\, J_\varphi(t)\, dt$$

je konstantní na U_ρ, neboli

$$\int_G c_{K(y,\rho)}(\varphi(t))\, J_\varphi(t)\, dt = a(\rho)\lambda K(y,\rho)\,.$$

Konstanta $a(\rho)$ je reálná, neboť Jakobián lipschitzovského zobrazení je omezená funkce a G je omezená množina. Je-li ρ_1 racionální číslo a ρ_2 přirozený násobek ρ_1, potom krychle o hraně $2\rho_2$ se dá vyplnit krychlemi o hraně $2\rho_1$, takže $a(\rho_2) = a(\rho_1)$. Převedením na společného jmenovatele dostaneme nezávislost $a(\rho)$ na ρ. Nyní už snadno dokončíme důkaz i pro libovolnou souvislou otevřenou množinu U. ■

35.7. Stupeň zobrazení. Nechť $G \subset \mathbf{R}^k$ je omezená otevřená množina a $\varphi\colon \overline{G} \to \mathbf{R}^k$ je spojité zobrazení. Z Tietzeovy věty dostáváme, že φ lze spojitě rozšířit na spojitou funkci na $\mathbf{R}^k$ (pod stejným jménem), samozřejmě se můžeme postarat o to, aby měla kompaktní nosič. Potom podle věty 31.5 existují (dokonce $\mathcal{C}^\infty$) funkce φ_j na $\mathbf{R}^k$ tak, že $\varphi_j \rightrightarrows \varphi$. Nechť $y \in \mathbf{R}^k \setminus \varphi(\partial G)$. Najděme okolí U bodu y, jehož uzávěr neprotíná $\varphi(\partial G)$. Můžeme předpokládat, že $\overline{U} \cap \varphi_j(\partial G) = \emptyset$ pro všechna j. Podle předchozích lemmat existují reálné konstanty a_j tak, že

$$\int_G f(\varphi_j(t))\, J_{\varphi_j}(t)\, dt = a_j \int_{\mathbf{R}^k} f(x)\, dx$$

pro každou integrovatelnou funkci f na $\mathbf{R}^n$ s nosičem v U. Dále z lemmatu 35.5 je zřejmé, že posloupnost $\{a_j\}$ je od určitého indexu konstantní a její limita a nezávisí ani na výběru posloupnosti φ_j. Tato konstanta a, o níž budeme brzy schopni dokázat, že je celočíselná, se nazývá *stupeň zobrazení* φ v y na G a značí se $\deg(y,\varphi,G)$.

35.8. Věta o substituci. *Nechť $G \subset \mathbf{R}^k$ je omezená otevřená množina a $\varphi\colon \overline{G} \to \mathbf{R}^k$ je lipschitzovské zobrazení. Nechť f je měřitelná funkce na $\mathbf{R}^k$, $f = 0$ skoro všude na $\varphi(\partial G)$. Potom*

$$\int_G f(\varphi(t))\, J_\varphi\, dt = \int_{\mathbf{R}^k} \deg(x,\varphi,G)\, f(x)\, dx\,,$$

pokud integrál na levé straně konverguje.

Důkaz. Použijeme-li podobné úvahy o měřitelnosti jako v důkazu 34.19, dostáváme větu z předchozích lemmat a definice stupně. ■

35.9. Vlastnosti stupně. *Nechť $G \subset \mathbf{R}^k$ je omezená otevřená množina a $\varphi\colon \overline{G} \to \mathbf{R}^k$ je spojité zobrazení.*

(a) Funkce $y \mapsto \deg(y,f,G)$ je konstantní v každé komponentě $\mathbf{R}^k \setminus f(\partial G)$.

(b) Nechť $\psi\colon \overline{G} \to \mathbf{R}^k$ je spojité zobrazení a pro žádné $t \in \partial G$ úsečka spojující $\varphi(t)$ s $\psi(t)$ neobsahuje y. Potom $\deg(y,\varphi,G) = \deg(y,\psi,G)$.

(c) Je-li φ prosté a $J_\varphi > 0$ skoro všude v G, potom $\deg(y,\varphi,G) = 1$ pro všechna $y \in \varphi(G)$.

(d) Je-li $\deg(y,\varphi,G) \neq 0$, potom rovnice $\varphi(t) = y$ má řešení v G.

(e) Jsou-li $G_1,\dots,G_m$ disjunktní otevřené podmnožiny G a $\varphi(t) \neq y$ pro $t \in G \setminus (G_1 \cup \dots \cup G_m)$, potom

$$\deg(y,\varphi,G) = \deg(y,\varphi,G_1) + \dots + \deg(y,\varphi,G_m)\,.$$

(f) Je-li φ třídy $\mathcal{C}^1$ a $J_\varphi(t) \neq 0$ pro všechna $t \in \varphi^{-1}(y)$, potom

$$\deg(y,\varphi,G) = \sum\{\operatorname{sign} J_\varphi(t)\colon t \in \varphi^{-1}(y)\}$$

(g) Stupeň $\deg(y,\varphi,G)$ je vždy celé číslo.

Důkaz. (a) a (b) jsou zřejmými důsledky předchozího, (c) dostaneme srovnáním vět o substituci 35.8 a 34.19.

(d) Předpokládejme, že tato rovnice nemá řešení. Jelikož $\varphi(\overline{G})$ je kompaktní, existuje otevřené okolí U bodu y tak, že $\overline{U} \cap \varphi(\overline{G}) = \emptyset$. Najděme lipschitzovskou funkci ψ blízkou φ tak, aby $\overline{U} \cap \psi(\overline{G}) = \emptyset$ a $\deg(y, \psi, G) \neq 0$. Potom $G \cap \psi^{-1}(U) = \emptyset$ a podle 35.8

$$0 = \int_{G\cap\psi^{-1}(U)} J_\psi = \deg(y, \psi, G)\, \lambda U \neq 0\,,$$

což je spor.

(e) Můžeme předpokládat, že φ je lipschitzovské zobrazení. Množina $K := \varphi(\overline{G} \setminus (G_1 \cup \cdots \cup G_m))$ je kompaktní a neobsahuje y. Najděme otevřené okolí U bodu y, jehož uzávěr neprotíná K. Potom podle 35.8

$$\begin{aligned}\deg(y, \varphi, G) &= \int_{G\cap\varphi^{-1}(U)} J_\varphi = \int_{G_1\cap\varphi^{-1}(U)} J_\varphi + \cdots + \int_{G_m\cap\varphi^{-1}(U)} J_\varphi \\ &= \deg(y, \varphi, G_1) + \cdots + \deg(y, \varphi, G_m)\,.\end{aligned}$$

(f) Nechť $s \in \varphi^{-1}(y)$. Jelikož $J_\varphi(s) \neq 0$, existuje okolí V bodu s tak, že φ je prosté na V, $\varphi(V)$ je otevřená množina (věta o inverzním zobrazení neboli lokálním difeomorfismu!) a J_φ má na V konstantní znaménko. Potom zřejmě

$$\lambda\varphi(V)\, \deg(y, \varphi, V) = \int_V J_\varphi\, dt = \operatorname{sign} J_\varphi(s) \int_V |J_\varphi|\, dt = \operatorname{sign} J_\varphi(s)\, \lambda\varphi(V)$$

Také je jasné, že množina $\varphi^{-1}(y)$ je izolovaná, a tudíž konečná podmnožina $\overline{G}$. Závěr dostaneme použitím (e).

(g) Můžeme předpokládat, že φ je třídy $\mathcal{C}^1$. Buď $E = \{t \in G\colon J_\varphi(t) = 0\}$. Podle Sardovy věty 34.17 je $\lambda(\varphi(E)) = 0$. Zvolme $y \in \mathbf{R}^k \setminus \varphi(\partial G)$. Nechť U je okolí y neprotínající $\varphi(\partial G)$. Potom najdeme $x \in U \setminus \varphi(E)$ a máme $\deg(y, \varphi, G) = \deg(x, \varphi, G)$, což jest podle (f) celé číslo. ■

35.10. Věta o otevřeném zobrazení. *Nechť $G_0 \subset \mathbf{R}^k$ je otevřená množina a $\varphi\colon G_0 \to \mathbf{R}^k$ je bilipschitzovské zobrazení. Potom $\varphi(G_0)$ je otevřená množina.*

Důkaz. Nechť $t \in G_0$ a $y = \varphi(t)$. Buď G omezená otevřená množina, $t \in G \subset \overline{G} \subset G_0$ a U otevřené okolí y neprotínající $\varphi(\partial G)$. Dokážeme, že $\deg(y, \varphi, G) \neq 0$. Potom podle 35.9.d má rovnice $\varphi(s) = x$ řešení pro všechna $x \in U$. Existuje otevřené okolí V bodu t tak, že $\varphi(V) \subset U$. Označme $V^+ = \{s \in V\colon J_{\varphi(s)>0}\}$ a $V^- = \{s \in V\colon J_{\varphi(s)<0}\}$. Uvědomme si, že podle Rademacherovy věty 30.3 existuje φ' skoro všude a z definice bilipschitzovskosti je jasné, že nemůže být $J_\varphi(t) = 0$. Aspoň jedna z množin V^+, V^- obsahuje nějakou kompaktní množinu K kladné míry. Máme $0 \neq \int_K J_\varphi = \deg(y, \varphi, G)\, \lambda\varphi(K)$. Tedy $\deg(y, \varphi, G) \neq 0$.

35.11. Věta o orientaci. *Nechť φ je lokálně bilipschitzovské zobrazení souvislé otevřené množiny $G_0 \subset \mathbf{R}^k$ do $\mathbf{R}^k$. Potom $J_\varphi > 0$ skoro všude nebo $J_\varphi < 0$ skoro všude v G_0.*

Důkaz. Nechť $G \subset \overline{G} \subset G_0$ je omezená otevřená množina a $t \in G$. Potom existuje okolí U bodu $\varphi(t)$, které neprotíná $\varphi(\partial G)$ a okolí V bodu t tak, že $\varphi(V) \subset U$. Jako v důkazu věty o otevřeném zobrazení odvodíme, že $\deg(\varphi(t), \varphi, G) \neq 0$. Podle 35.9.g je stupeň celé číslo, takže $|\deg(\varphi(t), \varphi, G)| \geq 1$. Máme

$$\Big|\int_V J_\varphi(t)\, dt\Big| = |\deg(\varphi(t), \varphi, G)|\, \lambda\varphi(V) \geq \lambda\varphi(V) = \int_V |J_\varphi(t)|\, dt\,.$$

Tedy J_φ má konstantní znaménko skoro všude ve V. Ze souvislosti G_0 dostáváme tvrzení. ■

35.12. Historické poznámky. I když počátky stupně zobrazení jdou až k K.F. Gaussovi a A. Cauchymu, a pro hladká zobrazení a hladké množiny byly zkoumány na rozhraní století H. Kroneckerem, H. Poincarém, E. Picardem, P. Bohlem či J. Hadamardem, podstatný krok pro vybudování stupně zobrazení v konečné dimenzi a jeho aplikace učinil až L.E.J. Brouwer v [1912]. Později J. Leray a J. Schauder zavedli topologický stupeň i v prostorech nekonečné dimenze. Jeho důležitost, zejména v nelineární funkcionální analýze, je dnes neoddiskutovatelná. Existuje bohatá literatura a prameny ke studiu stupně zobrazení, čtenáře odkazujeme třeba na S. Fučík a J. Milota [FM] (v poznámce 8.2.9 těchto skript je odkaz na další literaturu a původ analytických důkazů), J. Stará a O. John [SJ], S. Fučík, J. Nečas, J. Souček and V. Souček [*1973], K. Deimling [*1985] či J.T. Schwartz [*1969].

36. Hausdorffova míra

V kapitole 34 jsme dokázali existenci jedné z k-rozměrných měr v $\mathbf{R}^n$ poměrně jednoduchým způsobem. Tento přístup ke k-rozměrné míře zcela vystačí pro účely aplikací na křivkový a plošný integrál.

V teoretičtějších partiích matematické analýzy se však častěji setkáváme s Hausdorffovou mírou, vyskytující se v nejrůznějších souvislostech, dokonce i při necelých hodnotách k.

Samozřejmě, na rektifikovatelných množinách (speciálně na k-rozměrných plochách) podle 34.31 splývá normovaná Hausdorffova míra s mírou konstruovanou v 34.9.

Aniž by zvýšená obecnost ubrala na srozumitelnosti, můžeme předpokládat, že p ("dimenze") je nezáporné reálné číslo a (P,ρ) je metrický prostor, na němž sestrojíme p-rozměrnou míru.

36.1. Hausdorffova vnější míra. Buď $A \subset P$. Označme

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_p(A,\delta) &= \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty}(\operatorname{diam} A_j)^p : \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \supset A, \operatorname{diam} A_j \le \delta\Big\} \qquad \text{pro } \delta > 0,\\ \mathcal{H}_p(A) &= \sup_{\delta>0} \mathcal{H}_p(A,\delta) \quad \big(= \lim_{\delta\to 0+} \mathcal{H}_p(A,\delta)\ \big).\end{aligned}$$

Množinová funkce $A \mapsto \mathcal{H}_p(A)$ se nazývá *p-rozměrnou Hausdorffovou (vnější) mírou.*

Jak později dokážeme, pro $P = \mathbf{R}^n$ a $k \le n$ nezáporné celé existuje konstanta κ_k tak, že $\mathcal{H}_k/\kappa_k$ je k-rozměrná míra v $\mathbf{R}^n$ ve smyslu definice 34.8. Míru $\mathcal{H}_k/\kappa_k$ nazveme *normovanou Hausdorffovou mírou.*

36.2. Metrická vnější míra. Množiny A, $B \subset P$ nazveme *vzdálenými*, jestliže

$$\inf\big\{\rho(x,y) : x \in A,\ y \in B\big\} > 0.$$

Vnější míra γ na P se zove *metrická*, jestliže $\gamma(A\cup B) = \gamma A + \gamma B$, kdykoliv A, B jsou vzdálené.

36.3. Poznámky. 1. V definici $\mathcal{H}_p(A)$, kde jsme uvažovali pokrytí množiny A libovolnými množinami, se lze omezit na pokrytí tvořená uzavřenými, resp. otevřenými množinami.

2. Uvědomte si, že n-dimenzionální Hausdorffova míra koule, resp. krychle K v $\mathbf{R}^n$ je řádově $(\operatorname{diam} K)^n$ (viz lemma 36.12).

3. Množinové funkce $\mathcal{H}_p(\cdot,\delta)$ nejsou metrické vnější míry a nevystihují naší představu o délce či ploše (uvědomte si, že je-li kupř. K čtverec v $\mathbf{R}^2$, pak $\mathcal{H}_1(K,\delta)$ je konečné číslo, ačkoliv se do K vejde nekonečně mnoho disjunktních úseček stejné délky).

Proto také vzorec definující Hausdorffovu míru nemůžeme nahradit jednodušším přiřazením

$$A \mapsto \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty}(\operatorname{diam} A_j)^p : \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \supset A\Big\}$$

(což je vlastně $\mathcal{H}_p(A,\infty)$).

4. Další příklady k-rozměrných měr v $\mathbf{R}^n$ (které obecně nemusejí splývat s normovanou Hausdorffovou mírou) lze sestrojit, vycházíme-li z jiných pokrývacích systémů. Kupříkladu *sférickou* míru lze definovat pomocí pokrytí otevřenými koulemi, viz H. Federer [*1969].

V další sérii vět ukážeme, že $\mathcal{H}_p$ je metrická vnější míra, což nám umožní při aplikaci Carathéodoryovy metody odvodit, že každá borelovská množina je $\mathcal{H}_p$-měřitelná a restrikce $\mathcal{H}_p$ na borelovskou σ-algebru je míra. Obecně totiž platí následující tvrzení

36.4. Věta. *Buď γ vnější metrická míra na P. Potom každá borelovská množina je γ-měřitelná.*

Důkaz. Stačí dokázat, že uzavřené množiny jsou měřitelné. Buď $F \subset P$ uzavřená množina. Zvolme testovací množinu $T \subset P$, $\gamma T < +\infty$. Označme

$$\begin{aligned}P_j &= \Big\{x \in T : \frac{1}{j+1} \le \operatorname{dist}(x,F) < \frac{1}{j}\Big\}, \quad j = 1,2,\dots,\\ P_0 &= \big\{x \in T : \operatorname{dist}(x,F) \ge 1\big\}.\end{aligned}$$

Potom množiny P_0, P_2, $P_4, \dots$ jsou po dvou vzdálené, tedy pro všechna $m \in \mathbf{N}$ je

$$\sum_{j=0}^{m} \gamma P_{2j} = \gamma\Big(\bigcup_{j=0}^{m} P_{2j}\Big) \le \gamma T.$$

Podobně $\sum_{j=0}^{m} \gamma P_{2j+1} \le \gamma T$, a tedy řada $\sum_{j=0}^{\infty} \gamma P_j$ je konvergentní. Pro každé $m \in \mathbf{N}$ jsou množiny $\bigcup_{j=0}^{m} P_j$ a $T \cap F$ vzdálené, tedy

$$\gamma(T \setminus F) \le \gamma\Big(\bigcup_{j=0}^{m} P_j\Big) + \gamma\Big(\bigcup_{j=m+1}^{\infty} P_j\Big) \le \gamma T - \gamma(T \cap F) + \sum_{j=m+1}^{\infty} \gamma P_j\,.$$

Limitním přechodem pro $m \to \infty$ dostáváme

$$\gamma(T \setminus F) \le \gamma(T) - \gamma(T \cap F).$$

■

36.5. Poznámka. Naopak, je-li γ vnější míra na P, pro níž každá borelovská množina je γ-měřitelná, je již γ metrická vnější míra.

36.6. Věta. *$\mathcal{H}_p$ je metrická vnější míra na P.*

Důkaz. Ze věty 4.3 okamžitě plyne, že $A \mapsto \mathcal{H}_p(A,\delta)$ je vnější míra pro každé $\delta > 0$. Limitní přechod pro $\delta \to 0$ dá, že i $\mathcal{H}_p$ je vnější míra. Nechť A, B jsou vzdálené množiny a $\delta_0 < \inf\{\rho(x,y)\colon x \in A,\ y \in B\}$. Buď $M \subset A \cup B$, $\operatorname{diam} M \le \delta_0$. Potom musí být $M \subset A$ nebo $M \subset B$. Odtud je zřejmé, že

$$\mathcal{H}_p(A \cup B, \delta) = \mathcal{H}_p(A,\delta) + \mathcal{H}_p(B,\delta)$$

pro všechna kladná $\delta < \delta_0$. Tedy

$$\mathcal{H}_p(A \cup B) = \mathcal{H}_p(A) + \mathcal{H}_p(B).$$

■

36.7. Důsledek. *Každá borelovská podmnožina P je $\mathcal{H}_p$-měřitelná.*

36.8. Cvičení. (a) Buďte $0 \le p < q$. Je-li $\mathcal{H}_p(A) < +\infty$, je $\mathcal{H}_q(A) = 0$.

(b) Číslo $\inf\{p \ge 0\colon \mathcal{H}_p(A) = 0\}$ se zove *Hausdorffovou dimenzí* množiny A. Spočtěte Hausdorffovu dimenzi Cantorova diskontinua v $[0,1]$.

(c) Konstrukcí "zobecněných" Cantorových diskontinuí lze získat pro libovolné $p \in (0,1)$ množinu $B \subset [0,1]$, pro niž $\mathcal{H}_p(B) = 1$.

36.9. Poznámka. Definice p-rozměrné Hausdorffovy míry připouští i necelé hodnoty p. Hausdorffovy míry o neceločíselné dimenzi nesouvisejí přímo s tématy následujících kapitol, nicméně mají značný význam např. v teorii singulárních množin (k popisu velikosti "zanedbatelné množiny", např. množiny bodů nespojitosti řešení soustavy parciálních diferenciálních rovnic nebo množiny bodů divergence Fourierovy řady). Důležitá jsou i tvrzení typu: "Nechť vlastnost V platí všude až na množinu nulové p-rozměrné Hausdorffovy míry. Potom vlastnost V platí všude". Na pojmu Hausdorffovy míry s neceločíselnou dimenzí také staví proslulá teorie fraktálů (viz třeba G.A. Edgar [*1990], K.J. Falconer [*1985]).

36.10. Cvičení. Každá 0-rozměrná Hausdorffova míra je aritmetická míra.

36.11. Věta. *Nechť P, P' jsou metrické prostory, $\mathcal{H}_p$ je p-rozměrná Hausdorffova míra na P a $\mathcal{H}'_p$ je p-rozměrná Hausdorffova míra na P'. Nechť $E \subset P$ a $f\colon E \to P'$ je β-lipschitzovské zobrazení. Potom*

$$\mathcal{H}'_p(f(E)) \le \beta^p \mathcal{H}_p(E)\,.$$

Důkaz. Pro každé $\delta > 0$ a každou posloupnost $\{A_j\}$ podmnožin E, $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \supset E$, $\operatorname{diam} A_j < \delta$, máme

$$\mathcal{H}_p(f(E), \beta\delta) \le \sum_{j=1}^{\infty} (\operatorname{diam} f(A_j))^p \le \beta^p \sum_{j=1}^{\infty} (\operatorname{diam} A_j)^p,$$

odkud již lehko plyne požadovaná nerovnost. ■

36.12. Lemma. *Buď $\mathcal{H}_k$ k-rozměrná Hausdorffova míra v $\mathbf{R}^n$, $K=[0,1]^k\times\{0\}^{n-k}$. Potom $0<\mathcal{H}_k(K)<+\infty$.*

Důkaz. K danému $\delta>0$ najděme $m\in\mathbf{N}$ tak, že $\dfrac{\sqrt{k}}{m}<\delta$. Potom můžeme K rozbít na m^k krychlí K_j o hraně $\dfrac{1}{m}$ a průměru $\dfrac{\sqrt{k}}{m}<\delta$. Máme

$$\mathcal{H}_k(K,\delta)\le\sum_{j=1}^{m^k}(\operatorname{diam}K_j)^k=m^k\Big(\frac{\sqrt{k}}{m}\Big)^k=k^{k/2}.$$

Odtud plyne $\mathcal{H}_k(K)\le k^{k/2}$.

Na druhé straně, buď λ "Lebesgueova míra" na K. Buď $A\subset K$ a $x\in A$. Potom

$$\begin{aligned}A&\subset B(x,\operatorname{diam}A)\\&\subset\big[x_1-\operatorname{diam}A,x_1+\operatorname{diam}A\big]\times\dots\times\big[x_k-\operatorname{diam}A,x_k+\operatorname{diam}A\big],\end{aligned}$$

tedy

$$\lambda A\le 2^k(\operatorname{diam}A)^k.$$

Je-li $\{A_j\}$ posloupnost podmnožin K, $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}A_j=K$, potom

$$\sum_{j=1}^{\infty}(\operatorname{diam}A_j)^k\ge 2^{-k}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda A_j\ge 2^{-k}\lambda K=2^{-k}\,.$$

Přechodem k infimu dostáváme požadovaný dolní odhad pro $\mathcal{H}_k(K)$. ■

36.13. Normovaná Hausdorffova míra v $\mathbf{R}^n$. Nechť k je přirozené číslo, $k\le n$. Položme $\kappa_k=\mathcal{H}_k([0,1]^k\times 0^{n-k})$. Potom $\mathcal{H}_k/\kappa_k$ je k-rozměrná míra v $\mathbf{R}^n$, kterou jsme nazvali normovanou Hausdorffovou mírou.

Konstanta κ_k je rovna číslu $(4/\pi)^{k/2}\,\Gamma(1+\frac{k}{2})$. Výpočet není snadný, viz C.A. Rogers [*1970].

36.14. Poznámky. 1. Návod k výpočtu k-rozměrné míry konkrétních (rektifikovatelných) množin nám dávají metody kapitoly 34. Příklady na nerektifikovatelné množiny nebudeme zařazovat, protože svou obtížností přesahují rámec těchto skript.

2. Obdobnou teorii lze vybudovat bez velké změny v důkazech i pro sférickou míru (poznámka 36.3.4). Výpočet příslušné konstanty analogické κ_k je mnohem snažší, dostaneme jej okamžitě z cvičení 26.26.

3. V termínech Hausdorffovy míry lze dokázat následující variantu Sardovy věty:

Nechť $G\subset\mathbf{R}^k$ je otevřená množina a $f:G\to\mathbf{R}^n$ je libovolné zobrazení. Nechť E je množina všech bodů $t\in G$, v nichž existuje derivace $f'(t)$ a $\operatorname{vol}f'(t)=0$ (neboli matice $f'(t)$ má hodnost menší než k). Potom $\mathcal{H}_k(f(E))=0$.

Důkaz v tomto případě lze udělat podobnou metodou jako ve skriptech [FM].

36.15. Historické poznámky. C. Carathéodory rozvinul v [1914] teorii lineární (jednorozměrné) míry v n-rozměrných eukleidovských prostorech. V téže práci se také zmiňuje o možnosti definovat k-rozměrnou míru v n-rozměrném prostoru (pro celá k). Ovšem k-rozměrná míra pro libovolné $k>0$ v $\mathbf{R}^n$ byla zavedena až F. Hausdorffem [1919]. Zajímavá věta 36.4 pochází od C. Carathéodoryho [*1918]. Poté se teorie Hausdorffových měr rozvíjela velice intenzivně, byl to zejména A.S. Bezikovič, který publikoval značné množství prací věnovaných této problematice. Z monografií o Hausdorffově míře lze doporučit C.A. Rogers [*1970].

G. PLOŠNÝ A KŘIVKOVÝ INTEGRÁL

37. Integrální počet ve vektorové analýze

V této kapitole zavedeme křivkový a plošný integrál druhého druhu a vyslovíme pro něj věty o substituci. Dále uvedeme vzorce, podle nichž se převádějí integrály přes "vnitřek" (množiny, plochy) na integrál přes její "okraj". V podstatě půjde o vícerozměrné zobecnění známé Leibnizovy formule

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)\,.$$

Později uvidíme, že tyto vzorce jsou zvláštním případem obecné Stokesovy věty následující kapitoly, zatím však bude jednodušší uvést každý zvlášť. Čtenářům možná přijde vhod, že bez hlubší exkurse do multilineární algebry podáme výklad zahrnující všechny situace, které mohou nastat v trojrozměrném prostoru (což je podstatné pro fyzikální aplikace).

Připomeňme, že integrální počet na k-rozměrných plochách v $\mathbf{R}^n$ je založen na pojmu k-rozměrné míry (34.8), která na k-rozměrných plochách existuje (věta 34.9) a je určena jednoznačně (poznámka 34.31). Pro základní pochopení výkladu není nutné vědět, jakým způsobem jsme k-rozměrnou míru zkonstruovali.

Jelikož veškeré věty této kapitoly jsou speciálními případy vět kapitoly 38, nebudeme přerušovat výklad jejich důkazy.

Pro jednorozměrnou míru v $\mathbf{R}^n$ budeme používat označení s, na druhé straně S vyhradíme pro $n-1$-rozměrnou míru.

37.1. Vektorové pole, gradient, divergence, rotace. *Vektorovým polem* na množině X budeme nazývat zobrazení f množiny X do $\mathbf{R}^n$.

Nechť g je funkce třídy $\mathcal{C}^1$ na otevřené množině $U \subset \mathbf{R}^n$. Potom její *gradient* $\operatorname{grad} g$ je definován na U jako vektorové pole $[\frac{\partial g}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n}(x)]$. (Rozdíl mezi gradientem a derivací v $\mathcal{C}^1$ případě spočívá jen v tom, že gradient je vektor a derivace lineární forma.)

Nechť $f = [f_1, \dots, f_n]$ je spojitě diferencovatelné (tj. třídy $\mathcal{C}^1$) vektorové pole na otevřené množině $U \subset \mathbf{R}^n$. Potom *divergence* pole f je funkce $\operatorname{div} f$ na U definovaná předpisem

$$\operatorname{div} f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}\,.$$

Je-li f spojitě diferencovatelné vektorové pole na otevřené množině $U \subset \mathbf{R}^2$, jeho *rotace* je funkce $\operatorname{rot} f$ definovaná předpisem

$$\operatorname{rot} f = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\,.$$

Konečně, je-li f spojitě diferencovatelné vektorové pole na otevřené množině $U \subset \mathbf{R}^3$, zavádíme jeho rotaci $\operatorname{rot} f$ jako vektorové pole na U definované předpisem

$$\operatorname{rot} f = [\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}]\,.$$

V prostorech vyšší dimenze odpovídá rotaci bilineární forma $(u,v) \mapsto f'(x)u \cdot v - f'(x)v \cdot u$.

Nechť $\mathbf{V}$ je n-rozměrný vektorový prostor se skalárním součinem. Volbou ortonormální báze $(u_1, \ldots, u_n)$ ve $\mathbf{V}$ můžeme převést kalkulus ve $\mathbf{V}$ na kalkulus v $\mathbf{R}^n$. Zobrazení souřadnic $L : \mathbf{V} \to \mathbf{R}^n$ přiřadí každému vektoru $x \in \mathbf{V}$ vektor $Lx \in \mathbf{R}^n$ jeho souřadnic vzhledem k $(u_1, \ldots, u_n)$ tak, že je-li $x = t_1 u_1 +, \ldots, t_n u_n$, potom $Lx = [t_1, \ldots, t_n]$. Jelikož daná báze je ortonormální, máme $t_i = u_i \cdot x$. Nechť $U \subset \mathbf{V}$ je otevřená množina, g je reálná funkce na U a $f : U \to \mathbf{V}$ je vektorové pole. Označme $G = L(U)$, $\tilde{g} = g \circ L^{-1}$, $\tilde{f} = L \circ f \circ L^{-1}$. Potom $\tilde{f}$ je reálná funkce na G a $\tilde{g}$ je zobrazení G do $\mathbf{R}^n$. Souřadnice a matice derivací $\tilde{f}$ a $\tilde{g}$ ovšem závisí na volbě báze $(u_1, \ldots, u_n)$. Můžeme zavést $\operatorname{grad} g(x) := L^{-1}(\operatorname{grad} \tilde{g}(Lx))$, $\operatorname{div} f(x) := \operatorname{div} \tilde{f}(Lx)$, $\operatorname{rot} f(x) := \operatorname{rot} \tilde{f}(Lx)$ (je-li $n = 2$) či $\operatorname{rot} f(x) := L^{-1} \operatorname{rot} f(Lx)$ (je-li $n = 3$). Potom operátory grad, div a rot nezávisí na volbě ortonormální báze v $\mathbf{V}$.

37.2. Příklad (v $\mathbf{R}^2$). Buď $f(x) = [x_1^2 + x_2^2, x_2 - x_1]$. Potom $\operatorname{div} f = \frac{\partial(x_1^2+x_2^2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(x_2-x_1)}{\partial x_2} = 2x_1 + 1$ a $\operatorname{rot} f = \frac{\partial(x_2-x_1)}{\partial x_1} - \frac{\partial(x_1^2+x_2^2)}{\partial x_2} = -1 - 2x_2$.

37.3. Příklad (v $\mathbf{R}^3$). Nechť $f(x) = [x_1, x_2^2, x_3 x_1]$. Potom $\operatorname{div} f = \frac{\partial x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2^2}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3 x_1}{\partial x_3} = 1 + 2x_2 + x_1$, $\operatorname{rot} f = [\frac{\partial x_3 x_1}{\partial x_2} - \frac{\partial x_2^2}{\partial x_3}, \frac{\partial x_1}{\partial x_3} - \frac{\partial x_3 x_1}{\partial x_1}, \frac{\partial x_2^2}{\partial x_1} - \frac{\partial x_1}{\partial x_2}] = [0, -x_3, 0]$.

37.4. Cvičení. Ukažte, že je-li g funkce třídy $\mathcal{C}^1$ na okolí x a $u = \operatorname{grad} g \neq 0$, potom funkce, která přiřadí jednotkovému vektoru v derivaci g v x ve směru v, nabývá maxima v $u/|u|$.

37.5. Vektorový součin. Vektor $w \in \mathbf{R}^n$ nazveme *vektorovým součinem* vektorů $u_1, \ldots, u_{n-1}$ a označíme $u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$, jestliže pro každý vektor $v \in \mathbf{R}^n$ je $w \cdot v = \det(v, u_1, \ldots, u_{n-1})$. Speciálně tedy i-tá souřadnice vektoru w je

$$e_i \cdot w = \det(e_i, u_1, \ldots, u_{n-1}) = (-1)^{i+1} \det(e_j \cdot u_m)_{j=1,\ldots,i-1,i+1,\ldots n}^{m=1,\ldots,n-1}.$$

Uvědomme si, že vektorový součin je binární operace, právě když $n = 3$. Vektorový součin je vždy kolmý na své činitele a pro jeho velikost máme vzorec

$$|u_1 \times \cdots \times u_{n-1}| = \operatorname{vol}(u_1, \ldots, u_{n-1}).$$

37.6. Příklad. V $\mathbf{R}^3$ máme např.

$$[1,1,1] \times [1,2,3] = \left[\det \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 2, & 3 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 1, & 3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}\right] = [1, -2, 1].$$

37.7. Příklad. V $\mathbf{R}^2$ je vektorový součin vektoru $[1,2]$ vektor $[2,-1]$.

37.8. Cvičení. Spočtěte v $\mathbf{R}^4$ vektorový součin $[1,0,1,0] \times [0,0,0,1] \times [0,-2,0,0]$.

37.9. Orientace. Nechť Ω je k-rozměrná plocha a $x \in \Omega$. Označme $\mathcal{P}_x = \mathcal{P}_x(\Omega)$ množinu všech parametrizací okolí x v Ω. Řekneme, že parametrizace $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{P}_x$ jsou *souhlasně orientované* v x, jestliže $\det(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)' > 0$ skoro všude na okolí $\varphi_1^{-1}(x)$. V opačném případě podle věty 35.11 musí platit, že $\det(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)' < 0$ skoro všude na okolí $\varphi_1^{-1}(x)$; říkáme pak, že φ_1 a φ_2 jsou *opačně orientované* v x.

(Lokální) orientací Ω v bodě x rozumíme zobrazení, které každé parametrizaci $\varphi \in \mathcal{P}_x$ přiřadí přívlastek *kladná* nebo *záporná* (v x), přičemž dvě kladné parametrizace, resp. dvě záporné parametrizace jsou vždy souhlasně orientované, zatímco kladná a záporná parametrizace jsou vždy opačně orientované (všechny pojmy vztahujeme k bodu x).

Orientací plochy Ω rozumíme její orientaci v každém bodě, a to takovou, že je-li φ kladná parametrizace v x, musí být kladná i ve všech bodech nějakého okolí x.

Zatímco lokální orientace jsou v každém bodě právě dvě, globálně mohou nastat problémy. Existují plochy bez možnosti (globální) orientace (známá Möbiova páska, viz příklad 39.7). Pokud orientace existují, jejich počet je sudý a je roven dvěma, právě když plocha je souvislá (orientovatelná plocha s n souvislými komponentami má 2^n orientací).

n-rozměrné plochy v $\mathbf{R}^n$ jsou jeho otevřené podmnožiny. Za *přirozenou orientaci* n-rozměrné plochy pokládáme takovou, v níž jsou identické parametrizace kladné.

0-rozměrné plochy jsou spočetné množiny izolovaných bodů, kompaktní 0-rozměrné plochy jsou dokonce konečné. Každá orientovaná 0-rozměrná plocha F se rozpadá na množiny F^+ a F^- – v bodech F^+ jsou všechny parametrizace kladné, v bodech F^- jsou všechny záporné.

37.10 Křivky. Jednorozměrné plochy se nazývají *křivky*. Nechť $\gamma \subset \mathbf{R}^n$ je orientovaná křivka. Je-li $\psi\colon G \to \gamma$ kladná parametrizace, potom pro skoro všechna $t \in G$ zavádíme *jednotkový tečný vektor* $\mathbf{t}(x)$ v bodě $x = \psi(t)$ předpisem $\mathbf{t}(x) = u/|u|$, kde $u = \frac{d\psi}{dt}(t)$. Potom až na s-nulovou množinu je vektor $\mathbf{t}(x)$ definován, a to nezávisle na volbě kladné parametrizace ψ (podrobněji viz 38.14).

Známe-li (takto získané) pole $\mathbf{t}(x)$, můžeme zpětně určit orientaci, která ho vytvořila: Parametrizace $\varphi\colon G \to \gamma$ je kladná, pokud pro skoro všechna $t \in G$ platí

$$\frac{d\psi}{dt}(t) = \mathbf{t}(\varphi(t))|\frac{d\psi}{dt}(t)|\,,$$

a záporná, pokud pro skoro všechna $t \in G$ platí

$$\frac{d\psi}{dt}(t) = -\mathbf{t}(\varphi(t))\,|\frac{d\psi}{dt}(t)|\,.$$

Pole jednotkových tečných vektorů budeme někdy nazývat méně přesně, ale stručně *tečným polem*.

Integrál $\int_\gamma f \cdot \mathbf{t}\, ds$ se někdy nazývá *křivkovým integrálem druhého druhu* vektorového pole f. Platí pro něj následující věta o substituci.

37.11. Věta. *Nechť γ je orientovaná jednorozměrná lipschitzovská křivka. Nechť $G \subset \mathbf{R}$ je otevřená množina a $\psi : G \to \gamma$ je kladná parametrizace. Potom pro každé vektorové pole $f = [f_1, \dots, f_n]$, $f_j \in \mathcal{L}^1(\gamma, s)$, je*

$$\int_{\psi(G)} f \cdot \mathbf{t}\, ds = \int_G f_1(\psi(t))\psi_1'(t) + \dots + f_n(\psi(t))\psi_n'(t)\, dt\,.$$

37.12. Příklad. Nechť $\gamma = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3 : x = \cos z,\ y = \sin z,\ 0 < z < 2\pi\}$ je šroubovice (viz příklad 35.12), nechť $f(x, y, z) = [0, x, 3z^2]$. Orientujme γ tak, aby jednotkový tečný vektor měl z-ovou souřadnici kladnou. Pomocí $\varphi(t) = [x(t), y(t), z(t)] = [\cos t,\ \sin t,\ t]$ spočítáme

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{2}}[-\sin z, \cos z, 1] = \frac{1}{\sqrt{2}}[-y, x, 1]\,.$$

a

$$\int_\gamma f \cdot \mathbf{t}\, ds = \int_0^{2\pi} (x\,y' + 3z^2\,z')\, dt = \int_0^{2\pi} (\cos t(\sin t)' + 3t^2)\, dt = \pi + \pi^3\,.$$

37.13 Normálové pole na $n-1$-rozměrné ploše. Nechť $\Gamma \subset \mathbf{R}^n$ je orientovaná $n-1$-rozměrná plocha. Je-li $\varphi\colon G \to \Gamma$ kladná parametrizace, potom pro skoro všechna $t \in G$ zavádíme *jednotkový normálový vektor* $\mathbf{n}(x)$ v bodě $x = \varphi(t)$ předpisem

$$\mathbf{n}(x) = \frac{w_1 \times \dots \times w_{n-1}}{|w_1 \times \dots \times w_{n-1}|}\,,$$

kde $w_j = \frac{\partial\varphi}{\partial t_j}(t)$. Potom až na S-nulovou množinu je vektor $\mathbf{n}(x)$ definován, a to nezávisle na volbě parametrizace φ (podrobněji viz 38.14).

Známe-li (takto získané) pole $\mathbf{n}(x)$, můžeme zpětně určit orientaci, která ho vytvořila. Parametrizace $\varphi\colon G \to \gamma$ je kladná, pokud pro skoro všechna $t \in G$ platí

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t) \times \dots \times \frac{\partial\varphi}{\partial t_{n-1}}(t) = \mathbf{n}(\varphi(t))\,\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t) \times \dots \times \frac{\partial\varphi}{\partial t_{n-1}}(t)\right|,$$

a záporná, pokud výše uvedená rovnost platí se záporným znaménkem na pravé straně.

Pole jednotkových normálových vektorů budeme někdy nazývat méně přesně, ale stručně *normálovým polem*.

Integrál $\int_\Gamma f \cdot \mathbf{n}\, dS$ se někdy nazývá *plošným integrálem druhého druhu* vektorového pole f. Platí pro něj tato věta o substituci:

37.14. Věta. *Nechť Γ je $n-1$-rozměrná orientovaná lipschitzovská plocha. Nechť $G \subset \mathbf{R}^{n-1}$ je otevřená množina a $\varphi : G \to \Gamma$ je kladná parametrizace. Potom pro každé vektorové pole $f = [f_1, \dots, f_n]$, kde $f_j \in \mathcal{L}^1(\Gamma, S)$, je*

$$\int_{\varphi(G)} f \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_G f(\varphi(t)) \cdot (\frac{\partial \varphi}{\partial t_1} \times \cdots \times \frac{\partial \varphi}{\partial t_{n-1}})\, dt\,.$$

37.15. Příklad (kuželová plocha). Budeme počítat integrál

$$\int_\Gamma [x, y, z^2] \cdot \mathbf{n}\, dS\,,$$

kde

$$\Gamma = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3 \colon z^2 = x^2 + y^2,\ 0 < z < 1\}$$

a $\mathbf{n}$ má "směřovat ven z kužele"

$$\Omega := \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3 \colon x^2 + y^2 < z^2, 0 < z < 1\}$$

(viz 37.21) Použijme parametrizaci

$$\varphi(r, t) = [r \cos t,\ r \sin t, r],$$

na $G := \{[r, t] \colon r \in (0, 1) \text{ a } t \in (0, 2\pi)\}$. Zřejmě $\varphi(G)$ se liší od Γ pouze nulovou množinou, takže není rozdíl mezi integrováním přes Γ a $\varphi(G)$. Máme

$$\varphi'(r, t) = \begin{pmatrix} \cos t, & -r \sin t \\ \sin t, & r \cos t \\ 1, & 0 \end{pmatrix}\,,$$

takže

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} \times \frac{\partial \varphi}{\partial t} = [-r \cos t,\ -r \sin t,\ r]\,.$$

Tento vektor by byl v případě kladné parametrizace kladný násobek jednotkového vektoru normály a směřoval by tudíž ven z Ω. Jelikož směřuje dovnitř, je parametrizace φ záporná (precizujte úvahy o směřování 'dovnitř' a 'ven' !). Nevadí, vzorec se bude lišit jen znaménkem. Máme

$$\begin{aligned}\int_\Gamma [x, y, z^2] \cdot \mathbf{n}\, dS &= \int_G [r \cos t,\ r \sin t,\ r^2] \cdot [r \cos t,\ r \sin t,\ -r]\, dr\, dt \\ &= \int_G (r^2 - r^3)\, dr\, dt = \frac{\pi}{3}\,.\end{aligned}$$

37.16. Příklad. Buď $\Gamma = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 = z < 1\}$ (část paraboloidu je ohraničena kružnicí). Jednotkový vektor normály

$$\mathbf{n}(x, y, z) = \pm \frac{1}{\sqrt{4z + 1}} [2x, 2y, -1])$$

orientujme volbou znaménka $+$. Potom $[t, r] \mapsto [x(t, r), y(t, r), z(t, r)] := [r \cos t, r \sin t, r^2]$, $t \in (0, 2\pi)$, $r \in (0, 1)$, je kladná parametrizace a její obor hodnot se liší od Γ pouze o nulovou množinu. Buď $f(x, y, z) = [2x, 0, 0]$. Potom

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f \cdot \mathbf{n}\, dS &= \int_{(0,2\pi)\times(0,1)} 2x \det(\nabla y, \nabla z)\, dt\, dr = \int_{(0,2\pi)\times(0,1)} 2r \cos t \det(\nabla(r \sin t), \nabla(r^2))\, dt\, dr \\ &= \int_{(0,2\pi)\times(0,1)} 4r^3\, cos^2 t\, dt\, dr = \pi\,.\end{aligned}$$

37.17. Plocha s okrajem. Mezi nejzajímavější vzorce integrálního počtu na plochách patří obecná Stokesova věta a její speciální případy. Pro účely formulace těchto výsledků potřebujeme zavést pojem plochy s okrajem.

Označme $\mathbf{H}^k_+$, resp. $\mathbf{H}^k_-$ poloprostory $(0, \infty) \times \mathbf{R}^{k-1}$, resp. $(-\infty, 0) \times \mathbf{R}^{k-1}$. Dále budeme značit $\mathbf{i}$ zobrazení $\mathbf{R}^{k-1}$ na $\partial \mathbf{H}^k_-$ definované předpisem

$$\mathbf{i}([s_1, \dots, s_{k-1}]) = [0, s_1, \dots, s_{k-1}]\,.$$

Nechť $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ je omezená orientovaná k-rozměrná plocha a $\Gamma = \overline{\Omega} \setminus \Omega$. Nechť Γ je orientovaná $k-1$-rozměrná plocha. Řekneme, že Γ je *okraj* Ω, jestliže ke každému bodu $z \in \Gamma$ existuje otevřená množina $G \subset \mathbf{R}^k$, okolí U bodu x a homeomorfní lokálně bilipschitzovské zobrazení $\varphi : G \cap \overline{\mathbf{H}^k_-} \to \Omega \cup \Gamma$ tak, že $z \in \varphi(\partial \mathbf{H}^k_-)$, $\varphi(G \cap \mathbf{H}^k_-) = \Omega \cap U$, $\varphi(G \cap \partial \mathbf{H}^k_-) = \Gamma \cap U$ a nastane jeden z následujích případů:

(a) $\varphi_{|G \cap \mathbf{H}^k_-}$ je kladná parametrizace $\Omega \cap U$ a $\varphi_{|G \cap \partial \mathbf{H}^k_-} \circ \mathbf{i}$ je kladná parametrizace $\Gamma \cap U$.
(b) $\varphi_{|G \cap \mathbf{H}^k_-}$ je záporná parametrizace $\Omega \cap U$ a $\varphi_{|G \cap \partial \mathbf{H}^k_-} \circ \mathbf{i}$ je záporná parametrizace $\Gamma \cap U$.

Je-li $k > 1$, pak parametrizace φ splňující (b) se dá "zrcadlově upravit" tak, aby splňovala (a).

37.18 Úvod ke větě o křivkovém integrálu. Nechť $\gamma \subset \mathbf{R}^n$ je orientovaná křivka s okrajem F. Víme už, že na γ je orientací vytvořeno pole jednotkových tečných vektorů $\mathbf{t}$ a F je konečná množina sestávající z "kladné části" F^+ a "záporné části" F^-.

Vztah mezi orientacemi γ a F je dán přesně definicí 37.17. Slevíme-li na přesnosti, můžeme vyložit názorněji: Tečné pole směřuje od bodů množiny F^- k bodům množiny F^+. Pokud $\mathbf{t}(a)$ je spojité prodloužení $\mathbf{t}$ do bodu $a \in F^-$ (za našich předpokladů však něco takového vůbec nemusí existovat), je

$$\mathbf{t}(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in \gamma}} \frac{x-a}{|x-a|}\,;$$

v $b \in F^+$ to dopadne podobně, ale z opačným znaménkem.

Za popsaných předpokladů platí následující věta:

37.19. Věta o křivkovém integrálu. *Nechť g je spojitě diferencovatelná funkce na okolí $\overline{\gamma}$. Potom*

$$\sum_{b \in F^+} g(b) - \sum_{a \in F^-} g(a) = \int_\gamma \operatorname{grad} g \cdot \mathbf{t}\, ds\,.$$

37.20. Příklad. Nechť h je lipschitzovská funkce na $[-1,1]$, $h(-1) = h(1) = 0$. Buď $\gamma = \{[x,y] : y = h(x), |x| < 1\}$. Nechť jednotkový tečný vektor $\mathbf{t}$ k γ je orientován tak, aby x-ová souřadnice byla kladná, tedy

$$\mathbf{t}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1 + (h'(x))^2}}[1, h'(x)]\,.$$

Máme spočíst integrál $\int_\gamma f \cdot \mathbf{t}\, ds$, kde $f(x,y) = [3x^2 \cos y,\ -x^3 \sin y]$. Přímý výpočet nedává valnou naději, zvláště když funkce h je dostatečně ošklivá. Jelikož však $f = \operatorname{grad} g$ pro $g = x^3 \cos y$, je podle věty o křivkovém integrálu

$$\int_\gamma f \cdot \mathbf{t}\, ds = g([1,0]) - g([-1,0]) = 2\,.$$

37.21. Úvod ke Gaussově větě. Další ze série vzorců je Gaussova věta (nazývána též Gauss-Ostrogradského věta, nebo Divergence Theorem).

Nechť $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ je omezená otevřená množina a Γ je její hranice, splňující požadavky 37.17 kladené na okraj (v tom případě také říkáme, že Ω má *lipschitzovskou hranici*). Na Ω uvažujme přirozenou orientaci. Tím je jednoznačně určena i orientace na Γ, reprezentovaná polem $\mathbf{n}$ jednotkových normálových vektorů. Nepřesně ale názorně lze říci, že $\mathbf{n}(x)$ je jednotkový vektor, který je kolmý na okraj Ω v x a směřuje ven z Ω, proto se mu také říká vektor *vnější normály*; slovem "ven" je míněno, že pro nenulový vektor $u \in \mathbf{R}^n$ a malé kladné t je $x + tu \in \Omega$ pokud $u \cdot \mathbf{n}(x) < 0$ a $x + tu \notin \Omega$ pokud $u \cdot \mathbf{n}(x) > 0$. Taková situace ovšem nastává pouze v bodech hladkosti Γ.

Za popsaných předpokladů platí následující věta:

37.22. Gaussova věta. *Nechť f je vektorové pole třídy $\mathcal{C}^1$ na okolí $\overline{\Omega}$. Potom*

$$\int_\Gamma f \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_\Omega \operatorname{div} f\, d\lambda\,.$$

37.23. Příklad (koule, sférické souřadnice). Buď $\Omega = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$, $\Gamma = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Uvažujme zobrazení sférických souřadnic $\psi = [x,y,z]$, kde

$$\begin{aligned} x(r,t,a) &= r \cos a\, \cos t, \\ y(r,t,a) &= r \cos a\, \sin t, \\ z(r,t,a) &= r \sin a\,, \end{aligned}$$

a $[r,t,a] \in H := (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \times (-\frac{1}{2}\pi,\ \frac{1}{2}\pi)$. Máme

$$\psi'(r,t,a) = \begin{pmatrix} \cos a\, \cos t, & -r \sin t \cos a, & -r \cos t \sin a \\ \cos a\, \sin t, & r \cos t \cos a, & -r \sin t \sin a \\ \sin a, & 0, & r \cos a \end{pmatrix}\,.$$

Potom zobrazení $\varphi(s,t,a) = \psi(s+1,t,a)$, $[s,t,a] \in (-1,0] \times (-\pi,\pi) \times (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ splňuje požadavky kladené v 37.17 pro body $[x,y,z] \in \psi(H)$. (Pokud $[x_0,y_0,z_0]$ není v $\psi(H)$, můžeme si pomoci zobrazením $[s,t,a] \mapsto \psi(s+1,t-t_0,a-a_0)$ pro vhodná t_0 a a_0.) Zkontrolujme, že $\det \psi' = r^2 \cos a > 0$, takže pro výpočet vnější normály dostáváme postupně

$$\begin{aligned} w_2 &:= \frac{\partial[\cos a\, \cos t,\, \cos a\, \sin t,\, \sin a]}{\partial t} = [-\cos a\, \sin t,\, \cos a\, \cos t,\, 0]\,, \\ w_3 &:= \frac{\partial[\cos a\, \cos t,\, \cos a\, \sin t,\, \sin a]}{\partial a} = [-\sin a\, \cos t,\, -\sin a\, \sin t,\, \cos a]\,, \\ w_2 \times w_3 &= [\cos^2 a\, \cos t,\, \cos^2 a\, \sin t,\, \cos a\, \sin a]\,, \\ |w_2 \times w_3| &= \cos a \end{aligned}$$

a konečně

$$\mathbf{n}(x,y,z) = \frac{w_2 \times w_3}{|w_2 \times w_3|} = [\cos t\, \cos a,\, \sin t\, \cos a,\, \sin a] = [x,y,z]\,.$$

37.24. Příklad. (a) Pomocí Gaussovy věty spočteme (nikoli poprvé) velikost sféry $\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Využijeme toho, že Γ je okraj ke kouli $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 < 1\}$. Dvourozměrnou míru sféry zjistíme integrováním jedničky, kterou nejprve musíme vyjádřit ve tvaru $1 = f \cdot \mathbf{n}$. V roli vektorového pole f dobře poslouží např. $f(x,y,z) = [x,y,z]$. Opravdu, $[x,y,z] \cdot \mathbf{n} = [x,y,z] \cdot [x,y,z] = x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (pro jinou množinu je nutné hledat jinou f). Máme

$$\int_\Gamma 1\, dS = \int_\Gamma [x,y,z] \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_\Omega \operatorname{div}[x,y,z]\, dx\, dy\, dz = \int_{\Omega)} 3\, dx\, dy\, dz = 4\pi\,.$$

(b) Jako cvičení spočtěte

$$\int_\Gamma x^2\, dS \qquad (\text{výsledek: } \frac{4}{3}\pi)\,.$$

37.25. Příklad (krychle). Nechť Ω je krychle $(0,1)^3$ a Γ je její hranice orientovaná vnější normálou (např. na stěně $\{0\} \times (0,1)^2$ je jednotkový vektor normály $[-1,0,0]$). Podmínka z 37.17 je zřejmě splněna pro z ležící na stěně; méně zřejmě (ale přesto splněna), pokud z leží na hraně nebo je dokonce vrchol. Buď např. z vrchol $[0,0,0]$. Potom hledané zobrazení φ bude mít tvar $\varphi(t) = [-t_1 + \max(0,-t_2,-t_3),\, t_2 + \max(0,-t_2,-t_3),\, t_3 + \max(0,t_2,-t_3)]$, $t \in (-1,0] \times (-1,1)^2$.

37.26 Úvod ke Greenově větě. Uvažujme situaci z Gaussovy věty v dimenzi dvě. Potom Γ je křivka, její orientaci lze vyjádřit nejen pomocí normálového pole, ale i pomocí tečného pole. Vektor $\mathbf{n}(x)$ je s-skoro všude vektorovým součinem vektoru $\mathbf{t}(x)$, tj. $(\mathbf{n}(x), \mathbf{t}(x))$ je ortonormální báze $\mathbf{R}^2$. (Nepřesně, ale názorně: $\mathbf{t}(x)$ obíhá Ω proti směru hodinových ručiček.)

37.27. Greenova věta. *Buď $g = [g_1, g_2]$ spojitě diferencovatelné vektorové pole na okolí $\overline{\Omega}$. Potom*

$$\int_\Gamma g \cdot \mathbf{t}\, ds = \int_\Omega \operatorname{rot} g\, dx\,.$$

37.28. Cvičení. Spočtěte jednotkový tečný vektor a jednotkový vektor normály k jednotkové kružnici, orientovaná jako okraj k jednotkovému kruhu.

37.29. Příklad. Pomocí Greenovy věty vypočteme obsah plochy $\Omega = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \colon \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} < 1\}$. Okraj (elipsu) Γ můžeme až na množinu jednorozměrné míry 0 parametrizovat zobrazením $\varphi(t) = [x(t), y(t)] := (a\cos t, b\sin t)$, $t \in (0, 2\pi)$. Najděme vektorové pole f na $\mathbf{R}^n$, jehož rotace je 1, např. $f = [0,x]$, $f = [-y,0]$, $f = [-\frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x]$. Greenova věta dává

$$\int_\Omega 1\, dx\, dy = \int_\Gamma [0,x] \cdot \mathbf{t}(x,y)\, ds = \int_0^{2\pi} x y'\, dt = \int_0^{2\pi} ab\cos^2 t\, dt = \pi ab\,.$$

37.30. Cvičení. Pomocí Greenovy věty spočtěte obsah plochy ohraničené asteroidou $\{(a\cos^3 t,\, b\sin^3 t) \colon t \in [0,2\pi)\}$.

37.31. Úvod ke Stokesově větě. Nechť $\Gamma \subset \mathbf{R}^3$ je orientovaná dvourozměrná plocha s okrajem γ. Na Γ máme vytvořeno normálové pole $\mathbf{n}$ a γ je křivka s tečným polem $\mathbf{t}$. Nepřesně, ale názorně lze říci, že tečný vektor $\mathbf{t}(x)$ opět obíhá proti směru hodinových ručiček, díváme-li se ze směru, do něhož ukazuje normálový vektor $\mathbf{n}(x)$. (Pozor: na rozdíl od Greenovy věty zde značí $\mathbf{n}$ normálové pole ku ploše).

Za uvedených předpokladů platí následující věta:

37.32. (Speciální) Stokesova věta. *Nechť f je vektorové pole třídy $\mathcal{C}^1$ na okolí $\overline{\Gamma}$. Potom*

$$\int_\gamma f \cdot \mathbf{t}\, ds = \int_\Gamma \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} f\, dS\,.$$

37.33. Příklad. Nechť h je kladná sudá funkce třídy $\mathcal{C}^1$ na $[-1,1]$, $h(1)=0$. Buď $\Gamma = \{[x,y,z] : z = h(r)\}$, kde $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Nechť jednotkový vektor normály je orientován tak, aby jeho z-ová složka směřovala vzhůru, tedy

$$\mathbf{n}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1+(h'(r))^2}}\,[-h'(r)\frac{x}{r},\ -h'(r)\frac{y}{r},\ 1]\,.$$

Máme spočítat $\int_\Gamma g \cdot \mathbf{n}\, dS$, kde $g(x,y,z) = [-xe^z, -ye^z, 2e^z]$. Přímý výpočet je obecně beznadějný. Jelikož $g = \operatorname{rot} f$ pro $f(x,y,z) = [-ye^z, xe^z, 0]$ a $f = [-y,x,0]$ na γ, kde $\gamma = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3 : r=1, z=0\}$ je okraj Γ, Stokesova věta dává

$$\int_\Gamma g \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_\gamma f \cdot \mathbf{t}\, ds = \int_\gamma [-y,x] \cdot \mathbf{t}(x,y)\, ds = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = 2\pi\,,$$

k výpočtu integrálu přes γ jsme použili polárních souřadnic $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in (0, 2\pi)$.

38. Integrování diferenciálních forem

V této kapitole uvedeme větu, která v podstatě zahrnuje jako speciální případ větu o křivkovém integrálu, Gaussovu i Stokesovu větu z kapitoly 37. K tomu je zapotřebí poněkud složitější algebraický aparát.

38.1 k-kovektory, k-vektory. Nechť $\mathbf{V}$ je vektorový prostor dimenze n a $\mathbf{V}^*$ jeho duál; hodnotu lineární formy $V \in \mathbf{V}^*$ na vektoru $u \in \mathbf{V}$ budeme značit (podobně jako později složitější případy duality) $<V,u>$. Zobrazení $W : \mathbf{V}^k \to \mathbf{R}$ nazýváme *k-lineární formou* (na $\mathbf{V}$), jestliže je lineární v každé proměnné (považujeme-li ostatní proměnné za konstanty). Speciálním případem jsou *lineární formy* pro $k=1$, či *bilineární formy* pro $k=2$.

k-lineární formu W na $\mathbf{V}$ nazveme *k-kovektorem*, jestliže je *antisymetrická* v následujícím smyslu: Je-li π transpozice (speciální permutace, která vymění právě jednu dvojici prvků) množiny $\{1,\dots,k\}$, potom

$$<W,\ (u_{\pi(1)},\dots,u_{\pi(k)})> \ = \ - <W,\ (u_1,\dots,u_k)>\ .$$

Jako důsledek této definice dostáváme, že pro každou matici $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^k$ a každou uspořádanou k-tici vektorů $(u_1,\dots,u_k)$ na $\mathbf{V}$ je

$$<W,\ (\sum_{j=1}^k a_{1,j}u_j,\dots,\sum_{j=1}^k a_{k,j}u_j)> \ = \ \det A\ <W,\ (u_1,\dots,u_k)>\ .$$

Duálně, *k-vektor* na $\mathbf{V}$ budeme definovat jako k-kovektor na $\mathbf{V}^*$; tedy k-vektor přiřadí reálné číslo k-tici lineárních forem na $\mathbf{V}$. Speciálně, 1-kovektor je totéž jako lineární forma; 1-vektor u na $\mathbf{V}$ ztotožníme s vektorem $v \in \mathbf{V}$, jestliže u přiřadí každé lineární formě $V \in \mathbf{V}^*$ hodnotu $<V,v>$. Reálné číslo c ztotožníme s 0-formou, resp. 0-vektorem, který přiřadí každé 0-tici vektorů, resp. forem číslo c. Vektorový prostor všech k-kovektorů na $\mathbf{V}$ budeme značit $\Lambda^k(\mathbf{V})$, vektorový prostor všech k-vektorů na $\mathbf{V}$ budeme značit $\Lambda_k(\mathbf{V})$. Je tedy $\Lambda^k(\mathbf{V}) = \Lambda_k(\mathbf{V}^*)$, $\Lambda_k(\mathbf{V}) = \Lambda^k(\mathbf{V}^*)$, $\Lambda_1(\mathbf{V}) = \mathbf{V}$, $\Lambda^1(\mathbf{V}) = \mathbf{V}^*$, $\Lambda_0(\mathbf{V}) = \Lambda^0(\mathbf{V}) = \mathbf{R}$.

38.2. Příklad. Bilineární formy lze reprezentovat maticí. Pro jednoduchost buďme v prostoru $\mathbf{V} = \mathbf{R}^n$, potom $(a_{i,j})_{i,j}$ je matice bilineární formy V, je-li

$$<V,(u,v)> \ = \ \sum_{i,j} a_{i,j}u_iv_j$$

pro všechna $u,v \in \mathbf{R}^n$. Mezi bilineárními formami najdeme 2-kovektory jako bilineární formy s antisymetrickou maticí, tj. $a_{i,j} = -a_{j,i}$ (takže speciálně $a_{i,i} = 0$). Příkladem matice 2-kovektoru v $\mathbf{R}^3$ je třeba

$$\begin{pmatrix} 0, & 2, & -3 \\ -2, & 0, & 5 \\ 3, & -5, & 0 \end{pmatrix}.$$

Skalární součin, reprezentovaný jednotkovou maticí, je také bilineární forma, ale rozhodně není 2-kovektor.

38.3. Vnější součin. *Vnějším součinem* uspořádané k-tice $(V_1, \dots V_k)$ lineárních forem na $\mathbf{V}$ nazveme k-kovektor $V_1 \wedge \dots \wedge V_k$ definovaný předpisem

$$< V_1 \wedge \dots \wedge V_k,\ (u_1, \dots, u_k) > = \det(< V_i,\ u_j >)_{i,j=1}^k\,, \quad (u_1, \dots, u_k) \in \mathbf{V}^k\,.$$

Duálně, *vnějším součinem* uspořádané k-tice $(u_1, \dots u_k)$ vektorů z $\mathbf{V}$ nazveme k-vektor $u_1 \wedge \dots \wedge u_k$ definovaný předpisem

$$< (V_1, \dots, V_k),\ u_1 \wedge \dots \wedge u_k > = \det(< V_i,\ u_j >)_{i,j=1}^k\,, \quad (V_1, \dots, V_k) \in (\mathbf{V}^*)^k\,.$$

Uvědomme si, že provedeme-li sudou permutaci činitelů, vnější součin zůstane zachován; provedeme-li lichou permutaci činitelů, vnější součin změní (pouze) znaménko. Vnější součin je nulový, pokud jsou činitelé lineárně závislí (např. když se dva činitelé shodují).

Nyní se budeme zabývat souřadnicemi k-vektorů a k-kovektorů v $\mathbf{R}^n$. Nechť X_i značí i-tou souřadnicovou formu $[u_1, \dots, u_n] \mapsto u_i$. Připomeňme, že v kontextu těchto kapitol *multiindexem* rozumíme uspořádanou k-tici $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_k]$ indexů z $\{1, \dots, n\}$ a množinu všech takových multiindexů značíme $\{1, \dots, n\}^k$. Multiindex α nazveme *rostoucím*, je-li $\alpha_1 < \dots < \alpha_k$. Množinu všech rostoucích multiindexů z $\{1, \dots, n\}^k$ značíme $I(k, n)$. Ke každému k-kovektoru W najdeme (jednoznačně určené) reálné souřadnice W_α, $\alpha \in \{1, \dots, n\}^k$, totiž

$$W_\alpha = < W,\ (e_{\alpha_1}, \dots, e_{\alpha_k}) > \ .$$

Duálně, ke každému k-vektoru w najdeme (jednoznačně určené) reálné souřadnice w_α, $\alpha \in \{1, \dots, n\}^k$, totiž

$$w_\alpha = < (X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_k}),\ w >\,,$$

Nechť W je k-kovektor (úvahy pro k-vektor jsou zcela analogické). Z antisymetrie dostáváme pro každou transpozici π indexů

$$W_{\pi(\alpha_1), \dots, \pi(\alpha_k)} = -W_\alpha\,.$$

Speciálně $W_\alpha = 0$, jakmile některá složka se v multiindexu vyskytuje (aspoň) dvakrát. K úplnému popisu k-kovektoru tedy stačí souřadnice odpovídající rostoucím multiindexům.

Máme

$$W = \sum_{\alpha \in I(k,n)} W_\alpha\, X_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge X_{\alpha_k}\,,$$

takže báze $\Lambda^k(\mathbf{R}^n)$ je $\{X_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge X_{\alpha_k} : \alpha \in I(k, n)\}$. Duálně, máme

$$w = \sum_{\alpha \in I(k,n)} w_\alpha\, e_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge e_{\alpha_k}\,.$$

takže báze $\Lambda_k(\mathbf{R}^n)$ je $\{e_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge e_{\alpha_k} : \alpha \in I(k, n)\}$.

Podobnou úvahou dospějeme k popisu báze $\Lambda^k(\mathbf{V})$ a $\Lambda_k(\mathbf{V})$ pro obecný n-rozměrný vektorový prostor $\mathbf{V}$. (Stačí nahradit $(e_1, \dots, e_n)$ pevně zvolenou bází $\mathbf{V}$ a $(X_1, \dots, X_n)$ bází k ní duální.) Je tedy dimenze prostorů $\Lambda^k(\mathbf{V})$ a $\Lambda_k(\mathbf{V})$ rovna počtu multiindexů v $I(k, n)$, což je $\binom{n}{k}$.

Poznamenejme, že v literatuře bývá zvykem psát některé indexy nahoru a některé dolů; např. souřadnice k-kovektorů se zapisují dolními indexy a souřadnice k-vektorů horními indexy. Zde tuto konvenci nebudeme dodržovat, abychom udrželi kontinuitu se značením z předcházejících kapitol (kde jsme potřebovali horní index podržet pro mocniny).

Pomocí souřadnic lze definovat dualitu mezi k-vektory a k-kovektory, totiž, je-li $v \in \Lambda_k(\mathbf{V})$ a $W \in \Lambda^k(\mathbf{V})$, zavádíme

$$< W, v > = \sum_{\alpha \in I(k,n)} W_\alpha v_\alpha\,.$$

Speciálně, jsou-li navíc $v_1, \dots, v_k \in \mathbf{V}$ a $W_1, \dots, W_k \in \mathbf{V}^*$, platí

$$\begin{aligned} < W,\ v_1 \wedge \dots \wedge v_k > &= < W, (v_1, \dots, v_k) >\,, \\ < W_1 \wedge \dots \wedge W_k,\ v > &= < (W_1, \dots, W_k), v > \ . \end{aligned}$$

Poznamenejme ještě, že ne každý k-kovektor je vnějším součinem lineárních forem a ne každý k-vektor je vnějším součinem vektorů, viz příklad 38.7.

38.4. Příklad (v $\mathbf{R}^3$).

$$\begin{aligned}(e_1+e_2-e_3)\wedge(2e_2+e_3) &= 2e_1\wedge e_2+2e_2\wedge e_2-2e_3\wedge e_2+e_1\wedge e_3+e_2\wedge e_3-e_3\wedge e_3\\ &= 2e_1\wedge e_2+e_1\wedge e_3+(2+1)e_2\wedge e_3\,.\end{aligned}$$

38.5. Příklad. (v $\mathbf{R}_3$, sledujte, jak se při transpozici mění znaménko):

$$\begin{aligned}X_2\wedge(X_1+X_3)\wedge(X_1-X_3) &= X_2\wedge X_1\wedge X_1-X_2\wedge X_1\wedge X_3+X_2\wedge X_3\wedge X_1-X_2\wedge X_3\wedge X_3\\ &= X_1\wedge X_2\wedge X_3-X_3\wedge X_2\wedge X_1=2X_1\wedge X_2\wedge X_3\,.\end{aligned}$$

38.6. Příklad. V $\mathbf{R}^4$ máme

$$< X_1\wedge X_2+X_2\wedge X_3+X_3\wedge X_4,\ 2e_1\wedge e_2-e_1\wedge e_4+e_2\wedge e_4 > = 2\,.$$

38.7. Příklad. 2-kovektor $W=X_1\wedge X_2+X_2\wedge X_3+X_3\wedge X_4$ v $\mathbf{R}^4$ nelze zapsat ve tvaru vnějšího součinu $V_1\wedge V_2$ lineárních forem. Dokážeme to sporem: Předpokládejme, že $W=V_1\wedge V_2$. Buď $A\colon \mathbf{R}^4\to\mathbf{R}^2$) lineární zobrazení $x\mapsto[V_1x,V_2x]$. Jelikož $W_{(1,2)}\neq 0$, je $Ae_1\neq 0$. Dále $W_{(1,3)}=W_{(1,4)}=0$, takže Ae_3 a Ae_4 jsou násobky Ae_1. To je však spor, neboť $W_{(3,4)}\neq 0$.

38.8. Příklad. V $\mathbf{R}^3$ nemáme šanci sestrojit podobný příklad, jako je 38.7. Vskutku, buď W 2-kovektor na $\mathbf{R}^3$. Je-li $W_{1,3}=0$, je

$$W=(W_{(1,2)}X_1-W_{(2,3)}X_3)\wedge X_2\,.$$

Je-li $W_{1,3}\neq 0$, pak je

$$W=(\frac{W_{(2,3)}}{W_{(1,3)}}X_2+X_1)\wedge(W_{(1,3)}X_3+W_{(1,2)}X_2\,.$$

38.9. Diferenciální formy. Zobrazení $\omega: E\to\Lambda^k(\mathbf{R}^n)$, kde $E\subset\mathbf{R}^n$, nazveme *diferenciální k-formou* (nebo, není-li třeba zdůraznit k, diferenciální formou) na E. Diferenciální 0-formy ztotožňujeme s funkcemi. Každou diferenciální k-formu ω na $E\subset\mathbf{R}^n$ lze vyjádřit v souřadnicích

$$\omega=\sum_{\alpha\in I(k,n)}\omega_\alpha dx_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dx_{\alpha_k}\,,$$

kde dx_i značí konstantní diferenciální 1-formu $x\mapsto X_i$ a ω_α jsou funkce na E. Řekneme, že diferenciální forma ω je třídy $\mathcal{C}^\ell$, jestliže všechny její souřadnice ω_α jsou třídy $\mathcal{C}^\ell$. Podobně definujeme po souřadnicích další druhy kvality diferenciálních forem (např. měřitelnost).

38.10. Příklad. Počítání s diferenciálními formami ukážeme na následujícím příkladu (v $\mathbf{R}^4$):

$$\begin{aligned}(dx_2+dx_4)\wedge(x_4\,dx_1-x_1\,dx_4)\wedge(dx_2+dx_3) &= (x_4\,dx_2\wedge dx_1+x_4\,dx_4\wedge dx_1-x_1\,dx_2\wedge dx_4\\ &\quad -x_1\,dx_4\wedge dx_4)\wedge(dx_2+dx_3)\\ &= (-x_4\,dx_1\wedge dx_2-x_4\,dx_1\wedge dx_4-x_1\,dx_2\wedge dx_4)\wedge(dx_2+dx_3)\\ &= -x_4\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_2-x_4\,dx_1\wedge dx_4\wedge dx_2-x_1\,dx_2\wedge dx_4\wedge dx_2\\ &\quad -x_4\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3-x_4\,dx_1\wedge dx_4\wedge dx_3-x_1\,dx_2\wedge dx_4\wedge dx_3\\ &= x_4\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_4-x_4\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3-x_4\,dx_1\wedge dx_4\wedge dx_3+x_1\,dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4\,.\end{aligned}$$

38.11. Diferenciál. Nechť

$$\omega=\sum_{\alpha\in I(k-1,n)}\omega_\alpha dx_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dx_{\alpha_{k-1}}$$

je diferenciální $(k-1)$-forma třídy $\mathcal{C}^1$ na otevřené množině $U\subset\mathbf{R}^n$. Potom definujeme *diferenciál* $d\omega$ jako diferenciální k-formu na U danou předpisem

$$d\omega(x)=\sum_{\alpha\in I(k-1,n)}\sum_{i=1}^n\frac{\partial\omega_\alpha}{\partial x_i}(x)\,dx_i\wedge dx_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dx_{\alpha_{k-1}}\,.$$

Diferenciál $\mathcal{C}^1$-funkce f na U je diferenciální 1-forma

$$df(x)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_i\,;$$

speciálně, diferenciál souřadnicové funkce $x\mapsto x_i$ je dx_i, což koresponduje s dříve zavedeným označením.

38.12. Příklad (v $\mathbf{R}^2$).

$$d(x_2\,dx_1 - x_1 \sin x_2\,dx_2) = dx_2 \wedge dx_1 - \sin x_2\,dx_1 \wedge dx_2 - x_1 \cos x_2\,dx_2 \wedge dx_2$$
$$= -dx_1 \wedge dx_2 - \sin x_2\,dx_1 \wedge dx_2 = (-1 - \sin x_2)\,dx_1 \wedge dx_2\,.$$

38.13. Příklad (v $\mathbf{R}^3$). (a)

$$d(x_1\,dx_1 + x_1x_3\,dx_2) = dx_1 \wedge dx_1 + x_3\,dx_1 \wedge dx_2 + x_1\,dx_3 \wedge dx_2$$
$$= x_3\,dx_1 \wedge dx_2 - x_1\,dx_2 \wedge dx_3\,.$$

(b)

$$d(x_1x_2\,dx_1 \wedge dx_3) = x_2\,dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + x_1\,dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3$$
$$= -x_1\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3\,.$$

38.14. Orientace k-rozměrných ploch. V předchozí kapitole jsme viděli, že orientace křivky vytváří na křivce vektorové pole (jednotkových tečných vektorů), zatímco orientace $n-1$-rozměrné plochy na ní vytváří také vektorové pole (tentokrát jednotkových normálových vektorů), ale zcela jiným způsobem. Nyní uvidíme, že se jedná o speciální projevy obecné zákonitosti – orientace k-rozměrné plochy v $\mathbf{R}^n$ vytváří k-vektorové tečné pole a $n-k$-kovektorové normálové pole. (I normála by měla být vlastně kovektor, ale bývá zvykem tak nazývat vektor o stejných souřadnicích.)

Nechť σ je k-rozměrná míra v $\mathbf{R}^n$ a Ω je k-rozměrná orientovaná plocha v $\mathbf{R}^n$. Je-li $\varphi\colon G \to \Omega$ kladná parametrizace, potom pro skoro všechna $t \in G$ zavádíme *jednotkový tečný k-vektor* $\xi(x) \in \Lambda_k(\mathbf{R}^n)$ v bodě $x = \psi(t)$ předpisem

$$\xi(x) = \frac{w_1 \wedge \cdots \wedge w_k}{\operatorname{vol}(w_1, \ldots, w_k)}\,,$$

kde $w_j = \frac{\partial\varphi}{\partial t_j}(t)$. Potom k-vektor $\xi(x)$ je definován σ-skoro všude, a to nezávisle na volbě parametrizace φ.

Kdybychom měli zájem, mohli bychom ještě odvodit jednotkový normálový $n-k$-kovektor, který vektorům $u_1, \ldots, u_{n-k} \in \mathbf{R}^n$ přiřadí $\operatorname{vol}^{-1}(w_1, \ldots, w_k)\ \det(u_1, \ldots, u_{n-k}, w_1, \ldots, w_k)$. Ten však nebudeme tolik potřebovat.

Vektorový prostor T_x generovaný vektory $w_1, \ldots, w_k$ (v příští kapitole jej budeme nazývat tečným prostorem) je σ-skoro všude nezávislý na volbě parametrizace. Nyní si uvědomte, že $\Lambda_k(T_x)$ má dimenzi 1. Nechť plocha Ω je orientovaná dvěma způsoby, $\varphi_1 : G_1 \to \Omega$, $\varphi_2 : G_2 \to \Omega$ jsou parametrizace, z nichž φ_1 je kladná při orientaci prvním způsobem a φ_2 je kladná při orientaci druhým způsobem. Nechť $U \subset \varphi_1(G_1) \cap \varphi_2(G_2)$ je souvislá otevřená (relativně v Ω) množina. Nechť ξ_j je pole jednotkových tečných k-vektorů na U vytvořené j-tou orientací (pomocí parametrizace φ_j). Z výše uvedených úvah o dimenzi dostaneme, že $\xi_2(x) \in \{\xi_1(x), -\xi_1(x)\}$ σ-skoro všude na U. Z věty 35.11 pak dostáváme, že buď $\xi_2 = \xi_1$ σ-skoro všude, nebo $\xi_2 = -\xi_1$ σ-skoro všude.

Z této úvahy lze vyvodit závěr: Vyjdeme-li z množiny Ω a orientace na Ω (tedy přiřazení "parametrizace $\mapsto$ znaménko"), dostaneme jednotkové tečné k-vektorové pole ξ na Ω. Ztratíme-li v tomto okamžiku informaci o orientaci, jsme schopni ji zrekonstruovat na základě znalosti ξ: Parametrizace $\varphi : G \to \Omega$ je kladná, jestliže pro skoro všechna $t \in G$ je

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t) \wedge \cdots \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial t_k}(t) = \xi(\varphi(t))\operatorname{vol}(\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t), \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial t_k}(t))\,,$$

a záporná, pokud výše uvedená rovnost platí se záporným znaménkem na pravé straně.

38.15. Příklad. Buď $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^4 : x_1 > 0,\ x_3 = x_1 \cos x_2,\ x_4 = x_1 \sin x_2\}$. Najdeme na Ω jednotkový tečný 2-vektor, víme-li, že parametrizace $\varphi : (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \to \Omega$,

$$\varphi(t_1, t_2) = [t_1, t_2,\ t_1 \cos t_2,\ t_1 \sin t_2]\,,$$

je kladná. Je

$$w_1 := \frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t) = [1, 0, \cos t_2, \sin t_2]\,,$$
$$w_2 := \frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(t) = [0, 1, -t_1 \sin t_2, t_1 \cos t_2]\,,$$

tedy

$$\mathrm{vol}^2(w_1, w_2) = 1 + t_1^2 \cos^2 t + t_1^2 \sin^2 t + \cos^2 t + \sin^2 t + t_1^2(\cos^2 t + \sin^2 t)^2 = 2 + 2t_1^2$$

a

$$\xi(x) = \frac{[1, 0, x_3/x_1, x_4/x_1] \wedge [0, 1, -x_4, x_3]}{\sqrt{2 + 2\,x_1^2}}\,.$$

2-vektor $\xi(x)$ má šest souřadnic, jmenovitě $\xi_{(1,2)}(x)$, $\xi_{(1,3)}(x)$, $\xi_{(1,4)}(x)$, $\xi_{(2,3)}(x)$, $\xi_{(2,4)}(x)$ a $\xi_{(3,4)}(x)$. Např.

$$\xi_{(1,3)}(x) = \frac{\det\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ x_1/x_3, & -x_4 \end{pmatrix}}{\sqrt{2 + 2\,x_1^2}} = \frac{-x_4}{\sqrt{2 + 2\,x_1^2}}\,.$$

38.16. Integrál diferenciální formy. Nechť Ω je orientovaná k-rozměrná plocha, ξ je jednotkové tečné k-vektorové pole a σ je k-rozměrná míra na Ω. Potom definujeme integrál diferenciální k-formy

$$\int_\Omega \omega := \int_\Omega <\omega, \xi> \, d\sigma$$

(pokud má pravá strana smysl). Zde Ω zastupuje celou strukturu $(\Omega, \text{orientace})$; bez znalosti ξ by totiž nebylo možno určit znaménko integrálu.

38.17. Zvláštní případy. k-vektorové pole ξ a integrace diferenciálních forem zahrnuje mnohé, co jsme poznali už dříve. Začněme s triviálními případy.

Je-li $k = 0$, potom Ω je konečná množina, $\xi(x) = \pm 1$ na Ω a integrál je jen součet funkčních hodnot. Diferenciální 0-forma ω je funkce a

$$\int_\Omega \omega = \sum_{x \in \Omega} \xi(x)\omega(x)\,.$$

Je-li $k = n$, pak Ω je otevřená podmnožina $\mathbf{R}^n$, $\xi = e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ (také může teoreticky nastat "nepřirozený" případ $\xi = -e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$), diferenciální n-forma ω je popsaná jednou souřadnicí, v případě "přirozené orientace" máme tedy

$$\int_\Omega f(x)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \int_\Omega f \, d\lambda\,.$$

Poněkud zajímavější je jednorozměrný případ křivky. Potom $\xi(x)$ je 1-vektor (tedy vektor) $\mathbf{t}(x)$, diferenciální 1-forma je určena vektorovým polem g a

$$\int_\Omega g_1\, dx_1 + \cdots + g_n\, dx_n = \int_\Omega g \cdot \mathbf{t}\, ds\,.$$

Konečně, jak jsme již naznačili, zahrnut je i případ normály: Buď $k = n - 1$. Potom mezi vektorovým polem $\mathbf{n}(x)$ a $n-1$-vektorovým polem $\xi(x)$ je vztah

$$\xi = \mathbf{n}_1\, e_2 \wedge \cdots \wedge e_n - \mathbf{n}_2\, e_1 \wedge e_3 \wedge \cdots \wedge e_n + (-1)^n \mathbf{n}_n\, e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-1}$$

diferenciální $n-1$-forma je opět určena vektorovým polem g a

$$\int_\Omega g_1\ dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n - g_2\, dx_1 \wedge dx_3 \wedge \cdots \wedge dx_n + \cdots - (-1)^n g_n\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} = \int_\Omega g \cdot \mathbf{n}\, d\sigma\,.$$

38.18. Věta o substituci. *Nechť Ω je orientovaná k-rozměrná plocha, ξ je jednotkové tečné k-vektorové pole na Ω a σ je k-rozměrná míra na Ω. Nechť $\varphi : G \to \Omega$ je kladná parametrizace. Potom pro každou diferenciální formu*

$$\omega = \sum_{\alpha \in I(k,n)} \omega_\alpha dx_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx_{\alpha_k}\,,$$

jejíž souřadnice jsou v $\mathcal{L}^1(\Omega, \sigma)$, platí

$$\int_{\varphi(G)} \omega = \int_G \sum_{\alpha \in I(k,n)} \omega_\alpha \circ \varphi \, d\varphi_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{\alpha_k} = \int_G \sum_{\alpha \in I(k,n)} \omega_\alpha \circ \varphi \, \det(\nabla \varphi_{\alpha_1}, \ldots, \nabla \varphi_{\alpha_k})\,.$$

Důkaz. Tvrzení je zřejmým důsledkem věty o substituci 34.19 a definic. ■

38.19. Příklad. Budeme počítat integrál diferenciální formy $z\,dx \wedge dy$ přes kulovou sféru $\Omega = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Použijeme parametrizaci $\varphi(t,a) = [x(t,a), y(t,a), z(t,a)]$, kde

$$\begin{aligned} x(t,a) &= \cos a \, \cos t, \\ y(t,a) &= \cos a \, \sin t, \\ z(t,a) &= \sin a\,, \end{aligned}$$

$[t,a] \in G := (0, 2\pi) \times (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ (budiž kladná). Připomeňme, že nepokrytá část kulové sféry je nulová množina. Máme

$$\begin{aligned} dx &= -\sin t \cos a \, dt - \cos t \sin a \, da, \\ dy &= \cos t \cos a \, dt - \sin t \sin a \, da\,, \\ dz &= \cos a \, da\,. \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} \int_\Omega z\,dx \wedge dy &= \int_G \sin a(-\sin t \cos a \, dt - \cos t \sin a \, da) \wedge (\cos t \cos a \, dt - \sin t \sin a \, da) \\ &= \int_G \sin^2 a \cos a \sin^2 t \, dt \wedge da - \sin^2 a \cos a \cos^2 t da \wedge dt \\ &= \int_G \sin^2 a \cos a (\sin^2 t + \cos^2 t) \, dt \, da = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 a \cos a \, da \\ &= 2\pi \int_{-1}^{1} u^2 \, du = \frac{4}{3}\pi\,. \end{aligned}$$

38.20. Příklad. Nechť $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2 = 1, \ x_1 > 0, x_3 > 0\}$. Uvažujme parametrizaci $\varphi(t) = [\cos t_1, \sin t_1, \cos t_2, \sin t_2]$, $t \in G := (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^2$ (budiž kladná). Potom

$$\nabla \varphi(t) = \begin{pmatrix} -\sin t_1, & 0 \\ \cos t_1, & 0 \\ 0, & -\sin t_2 \\ 0, & \cos t_2 \end{pmatrix}$$

takže

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t_1} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t_2}(t) = {} & \sin t_1 \, \sin t_2 \, e_1 \wedge e_3 - \sin t_1 \, \cos t_2 \, e_1 \wedge e_4 \\ & - \cos t_1 \, \sin t_2 \, e_2 \wedge e_3 + \cos t_1 \, \cos t_2 \, e_2 \wedge e_4 \end{aligned}$$

a

$$\operatorname{vol}(\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_2})(t) = \sqrt{\sin^2 t_1 \, \sin^2 t_2 + \sin^2 t_1 \, \cos^2 t_2 + \cos^2 t_1 \, \sin^2 t_2 + \cos^2 t_1 \, \cos^2 t_2} = 1\,.$$

(Výraz pod odmocninou je součet druhých mocnin složek 2-vektoru $\frac{\partial \varphi}{\partial t_1} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t_2}$.) Je tedy

$$\xi(x) = x_2 x_4 \, e_1 \wedge e_3 - x_2 x_3 \, e_1 \wedge e_4 - x_1 x_4 \, e_2 \wedge e_3 + x_1 x_3 \, e_2 \wedge e_4$$

tečné 2-vektorové pole. Můžeme (bez zapojení znalosti ξ, používáme jen informaci o kladnosti parametrizace φ) počítat např.

$$\int_\Omega x_1 \, dx_2 \, dx_4 = \int_G \cos t_1 \det \begin{pmatrix} \cos t_1, & 0 \\ 0, & \cos t_2 \end{pmatrix} = \int_G \cos^2 t_1 \, \cos t_2 \, dt_1 \, dt_2 = \pi\,.$$

38.21. Obecná Stokesova věta. *Nechť* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *je orientovaná omezená* k*-rozměrná plocha s okrajem* Γ*. Nechť* ω *je* $\mathcal{C}^1$ *diferenciální* $k{-}1$*-forma na okolí* $\overline{\Omega}$*. Potom*

$$\int_\Gamma \omega = \int_\Omega d\omega \,.$$

Důkaz. Důkaz provedeme pro diferenciální formu ω tvaru

$$\omega = \omega_\alpha dx_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx_{\alpha_{k-1}} \,,$$

kde $\alpha \in I(k{-}1, n)$. Z kompaktnosti $\overline{\Omega}$ a definice plochy s okrajem dostaneme, že existují otevřené koule $U(x_1, r_1), \ldots U(x_m, r_m)$ pokrývající $\overline{\Omega}$, otevřené množiny $G_q \subset \mathbf{R}^k$ a bilipschitzovská zobrazení $\varphi_q \colon G \cap \overline{\mathbf{H}^k_-} \to \overline{\Omega}$ tak, aby pro každé $q = 1, \ldots, m$ bylo $U(x_q, r_q) \cap \Omega = \varphi_q(G_q \cap \mathbf{H}^k_-)$, $U(x_q, r_q) \cap \Gamma = \varphi_q(G_q \cap \partial \mathbf{H}^k_-)$, $\varphi_{q|G_q \cap \mathbf{H}^k_-}$ byla kladná parametrizace $\Omega \cap U(x_q, r_q)$ a $\varphi_{q|G_q \cap \partial\mathbf{H}^k_-} \circ \mathbf{i}$ byla kladná parametrizace $\Gamma \cap U(x_q, r_q)$. (Předpokládáme zde bez újmy na obecnosti, že nastal případ (a) z 37.17.) Nechť χ_q jsou lipschitzovské funkce kladné na $U(x_q, r_q)$, nulové vně $U(x_q, r_q)$ a splňující $\sum_{q=1}^m \chi_q = 1$ na $\overline{\Omega}$. (To je vlastně rozklad jednotky, srov. 39.11. Můžeme volit třeba $\tilde{\chi}_q(x) = \max(0, r_q - |x - x_q|)$ a $\chi_q(x) = \tilde{\chi}_q(x) / \sum_{i=1}^m \tilde{\chi}_i(x)$.) Buď q pevné, $U = U_q$ a $\varphi = \varphi_q$. Pro $\delta > 0$ definujme funkci η_δ na $\mathbf{R}^k$ předpisem

$$\eta_\delta(t) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } t_1 \le 0, \\ 1 - t_1/\delta, & \text{je-li } 0 < t_1 < \delta, \\ 0 & \text{je-li } t_1 \ge \delta. \end{cases}$$

Nechť $\psi_1, \ldots, \psi_k$ jsou lipschitzovské funkce na $\mathbf{R}^k$ rovné nule vně kompaktní podmnožiny G a splňující na $G \cap \overline{\mathbf{H}^k_-}$

$$\psi_1 = (\chi_q \omega_\alpha) \circ \varphi, \quad \psi_2 = \varphi_{\alpha_1}, \quad \ldots, \; \psi_k = \varphi_{\alpha_{k-1}} \,.$$

Jejich existence plyne z Kirszbraunovy věty 30.5. Označme K kompaktní množinu $\{s \in \mathbf{R}^{k-1} \colon \varphi(0, s) \in B(x_q, r_q)\}$. Zřejmě můžeme předpokládat, že existuje $\delta_0 > 0$ tak, $[0, \delta_0] \times K \subset G$ a funkce ψ_j jsou konstantní na úsečkách $[0, \delta_0] \times \{s\}$, $s \in K$ (to je vně $\mathbf{H}^k_-$!). Aplikací důsledku 35.3 na funkce $\eta_\delta \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k$ dostáváme

$$\begin{aligned} 0 &= \int_G \det(\nabla(\eta_\delta \psi_1), \nabla\psi_2, \ldots, \nabla\psi_k) \, dt \\ &= \int_{\mathbf{R}^k} \psi_1 \det(\nabla\eta_\delta, \nabla\psi_2, \ldots, \nabla\psi_k) \, dt + \int_{\mathbf{R}^k} \eta_\delta \det(\nabla\psi_1, \nabla\psi_2, \ldots, \nabla\psi_k) \, dt. \end{aligned}$$

Fubiniova věta dává

$$\begin{aligned} -\int_{\mathbf{R}^k} \psi_1 \det(\nabla\eta_\delta, \nabla\psi_2, \ldots, \nabla\psi_k) \, dt &= \int_{\mathbf{R}^k} (\int_0^\delta \delta^{-1} \psi_1 dt_1) \det(\nabla\psi_2, \ldots, \nabla\psi_k) \, dt_2 \ldots dt_k \\ &= \int_{G \cap \partial\mathbf{H}^k_-} \psi_1 \det(\nabla\psi_2, \ldots, \nabla\psi_k) \, dt_2 \ldots dt_k \\ &= \int_\Gamma \chi_q \omega \,, \end{aligned}$$

zatímco podle Lebesgueovy věty (konstantní majoranta) je zřejmě

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbf{R}^k} \eta_\delta \det(\nabla\psi_1, \nabla\psi_2, \ldots, \nabla\psi_k) \, dt \to \int_{G \cap \mathbf{H}^k_-} \det(\nabla\psi_1, \ldots, \nabla\psi_k) \, dt \\ &= \int_\Omega d(\chi_q \omega) \,. \end{aligned}$$

Sečtením přes $q = 1, \dots, m$ dostaneme požadovanou rovnost. ■

38.22. Příklad. Buď $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^4 : 1 < x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2 < 4\}$, $\Gamma = \{x \in \mathbf{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2 = 1\} \cup \{x \in \mathbf{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2 = 4\}$. Chceme ověřit, že při vhodné volbě orientace je Γ okraj Ω. Techniku ověření (z definice) ukážeme v bodě $[1, 0, 1, 0]$. Položme

$$\varphi(t) = [(1-t_1)\cos t_2, (1-t_1)\sin t_2, (1-t_1)\cos t_3, (1-t_1)\sin t_3],$$

$t \in G := (-1, 1) \times (-\pi, \pi)^2$. Máme

$$\nabla\varphi(t) = \begin{pmatrix} -\cos t_2, & -(1-t_1)\sin t_2, & 0 \\ -\sin t_2, & (1-t_1)\cos t_2, & 0 \\ -\cos t_3, & 0, & -(1-t_1)\sin t_3 \\ -\sin t_3, & 0, & (1-t_1)\cos t_3 \end{pmatrix}.$$

Odtud snadno vypočteme, že $\operatorname{vol}(\frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(t), \frac{\partial\varphi}{\partial t_3}(t)) = 1$ (podobně jako v příkladu 38.20) a

$$\operatorname{vol}(\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t), \frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(t), \frac{\partial\varphi}{\partial t_3})(t)) = \sqrt{2}(1-t_1)^2.$$

Nechť orientace Ω a Γ jsou voleny tak, aby parametrizace φ byla kladná.

Snadno dopočítáme, že jednotkové tečné 3-vektorové pole ξ na Ω má tvar

$$\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} \big(x_1\, e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 - x_2\, e_1 \wedge e_3 \wedge e_4 - x_3\, e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 + x_4\, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3\big)$$

(čemuž odpovídá normálové pole

$$\mathbf{n}(x) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} [x_1, x_2, -x_3, -x_4],$$

viz 38.19), a jednotkové tečné 2-vektorové pole η na Γ má tvar

$$\eta(x) = a\big(x_2x_4\, e_1 \wedge e_3 - x_2x_3\, e_1 \wedge e_4 - x_1x_4\, e_2 \wedge e_3 + x_1x_3\, e_2 \wedge e_4\big),$$

kde konstanta a je rovna $-1/4$ pro $x_1^2 + x_2^2 = 4$ a 1 pro $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

38.23. Příklad. Nechť $\Omega = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2} < \frac{3}{5}x + 1\}$, $\Gamma = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{3}{5}x + 1\}$. (Část kuželové plochy je ohraničená elipsou.) Volme orientaci Ω tak, aby z-ová složka normály byla kladná. Výpočet integrálu $\int_\Omega dy \wedge dz$ se zjednoduší, použijeme-li Stokesovu větu. Použijme zobrazení

$$\varphi(r, t) = [\frac{15}{16} + \frac{25}{16} r\cos t,\ \frac{5}{4} r\sin t,\ \sqrt{(\frac{15}{16} + \frac{25}{16} r\cos t)^2 + (\frac{5}{4} r\sin t)^2},$$

které je kladnou parametrizací; $\varphi((0, 1) \times (0, 2\pi))$ pokrývá Ω až na množinu nulové dvourozměrné míry. Zobrazení $\psi : t \mapsto \varphi(1, t)$, $t \in (0, 2\pi)$ je pak kladnou parametrizací $\Gamma \setminus \{[\frac{5}{2}, 0, \frac{5}{2}]\}$. Jelikož $z = \frac{3}{5}x + 1$ na Γ, je $\psi_3 = \frac{3}{5}\psi_1 + 1$ a $d\psi_3 = \frac{3}{5}\, d\psi_1 = -\frac{3}{5}\,\frac{25}{16}\sin t\, dt$. Tedy

$$\int_\Omega dy \wedge dz = \int_\Gamma y\, dz = -\int_0^{2\pi} \frac{5 \cdot 3 \cdot 25}{4 \cdot 5 \cdot 16} \sin^2 t\, dt = -\frac{75}{64}\pi.$$

39. Integrální počet na varietách

Přirozeným zobecněním k-rozměrných ploch v $\mathbf{R}^n$ jsou variety, jimž se v matematické literatuře věnuje daleko více pozornosti než plochám ve smyslu předchozí kapitoly. Hlavní rozdíl je v tom, že plochu uvažujeme jako podmnožinu $\mathbf{R}^n$, kdežto u variety od vnoření do $\mathbf{R}^n$ (pokud existuje) můžeme abstrahovat. V této kapitole také zavedeme pojmy, které jsme z důvodu úspornosti výkladu vynechali v předchozích kapitolách, předešim tečný prostor a orientaci a alternativní způsob zavedení integrálu diferenciální formy. Tato kapitola však není míněna jako úvod do analýzy na varietách, to vzhledem k jejímu rozsahu ani není možné; jsou zde pouze nejnutnější pojmy pro pochopení problematiky integrování diferenciálních forem. Důkazy neuvádíme, lze však říci, že myšlenkově by se příliš nelišily od důkazů v předchozích kapitolách. Celou teorii by bylo možné vybudovat v lipschitzovském duchu předchozích kapitol, výklad založený na $\mathcal{C}^1$ diferencovatelnosti bude méně obecný, avšak mnohem čitelnější.

39.1. Variety. Nechť Ω je topologický prostor. Homeomorfní zobrazení μ otevřené množiny $U \subset \Omega$ do $\mathbf{R}^k$ nazveme (k-rozměrnou) *mapou* (na Ω), jestliže $\mu(U)$ je otevřená podmnožina $\mathbf{R}^k$. Definiční obor U mapy μ budeme v dalším značit U_μ. Systém $\mathcal{A}$ map na Ω nazveme $\mathcal{C}^\ell$ *atlasem* (na Ω), jestliže $\{U_\mu : \mu \in \mathcal{A}\}$ je pokrytí Ω a všechna složená zobrazení $\nu \circ \mu^{-1}$ pro μ, $\nu \in \mathcal{A}$ jsou třídy $\mathcal{C}^\ell$. V tom případě $\Omega = (\Omega, \mathcal{A})$ nazveme (k-rozměrnou) *varietou* třídy $\mathcal{C}^\ell$. Pokud nebudeme blíže specifikovat řád diferencovatelnosti variety, máme na mysli $\mathcal{C}^1$.

Pokud množina Ω je vybavena dvěma různými atlasy $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, budeme variety $(\Omega, \mathcal{A}_1)$, $(\Omega, \mathcal{A}_2)$ pro jednoduchost považovat také za různé, i když v literatuře bývá snaha v některých případech (kdy se tyto atlasy "příliš neliší") ztotožňovat.

Otevřenou množinu $G \subset \mathbf{R}^k$ ztotožňujeme s varietou $(G, \{\mathbf{id}\})$, kde $\mathbf{id}$ je identita na G.

Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega', \mathcal{A}')$ jsou dvě variety, ne nutně stejné dimenze, a $U \subset \Omega$ je otevřená množina. Řekneme, že zobrazení $f : U \to \Omega'$ je *třídy* $\mathcal{C}^\ell$, *resp. měřitelné, resp. diferencovatelné v bodě* $x \in \Omega$, jestliže všechna složená zobrazení $\nu \circ f \circ \mu^{-1}$, $\mu \in \mathcal{A}$, $\nu \in \mathcal{A}'$, jsou třídy $\mathcal{C}^\ell$, resp. měřitelná, resp. diferencovatelná v $\mu(x)$. Množinu $E \subset \Omega$ nazveme *měřitelnou*, je-li $\mu(E \cap U_\mu)$ λ-měřitelná množina pro každé $\mu \in \mathcal{A}$, a *nulovou*, je-li $\lambda(\mu(E \cap U_\mu)) = 0$ pro každé $\mu \in \mathcal{A}$. I v této souvislosti homeomorfní zobrazení f nazýváme *difeomorfním*, jestliže f i f^{-1} jsou $\mathcal{C}^1$.

Uvědomme si zásadní rozdíl proti předchozímu pojetí ploch v $\mathbf{R}^n$. Je-li Ω podmnožinou $\mathbf{R}^n$, přebírá její metrickou a lineární strukturu (a tím i možnost diferencování). Na varietě jedinou informaci o struktuře (vyjma topologické) poskytuje atlas a bez znalosti atlasu nedovedeme rozhodnout, zda zobrazení otevřené podmnožiny $\mathbf{R}^k$ do variety (kandidát na parametrizaci) je diferencovatelné.

39.2. Vnoření. Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je k-rozměrná varieta třídy $\mathcal{C}^\ell$. Nechť $f\colon \Omega \mapsto \mathbf{R}^n$ je difeomorfní zobrazení a $f\mathcal{A} = \{\mu \circ f^{-1} : \mu \in \mathcal{A}\}$. Pak f nazveme *vnořením* třídy $\mathcal{C}^\ell$ do $\mathbf{R}^n$, jestliže $(f(\Omega), f\mathcal{A})$ je opět varieta třídy $\mathcal{C}^\ell$.

Nejčastěji se setkáváme s identickým vnořením variety, která je už sama dána jako topologický podprostor $\mathbf{R}^n$. Jednou z cest, jak bývá v tomto případě možné zavést na množině $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ strukturu vnořené variety (atlas), je použití souřadnicových map $x \mapsto [x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_k}]$, kde α je multiindex z $\{1, \dots, n\}^k$.

39.3. Orientace. Nechť $k \geq 1$. Difeomorfismus ψ otevřené množiny $G \subset \mathbf{R}^k$ do $\mathbf{R}^k$ nazveme *kladným*, jestliže $J_\psi > 0$ na G, a *záporným*, je-li $J_\psi < 0$ na G. Řekneme, že $(\Omega, \mathcal{A})$ je *orientovaná varieta*, nebo že $\mathcal{A}$ je *orientovaný atlas na* Ω, jestliže všechna složená zobrazení $\nu \circ \mu^{-1}$, $\mu, \nu \in \mathcal{A}$, jsou kladná.

Atlasy $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$ na Ω považujeme za souhlasně orientované, jestliže všechna složená zobrazení $\nu \circ \mu^{-1}$, $\mu \in \mathcal{A}_1, \nu \in \mathcal{A}_2$, jsou kladná, a opačně orientované, jestliže všechna složená zobrazení $\nu \circ \mu^{-1}$, $\mu \in \mathcal{A}_1, \nu \in \mathcal{A}_2$, jsou záporná.

Uvědomme si, že ke každé orientované varietě $(\Omega, \mathcal{A})$ dimenze $k \geq 1$ existuje *opačně orientovaná* varieta $(\Omega, \overline{\mathcal{A}})$: položme $\overline{\mathcal{A}} = \{[-\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k] \colon [\mu_1, \dots, \mu_k] \in \mathcal{A}\}$.

Řekneme, že souvislá varieta $(\Omega, \mathcal{A})$ dimenze $k \geq 1$ je *orientovatelná*, jestliže existuje orientovaný atlas $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A} \cup \overline{\mathcal{A}}$. (Nesouvislá varieta je orientovatelná, když všechny její topologické komponenty jsou orientovatelné.)

0-rozměrné variety jsou množiny izolovaných bodů. Orientací takové variety rozumíme přiřazení znaménka plus nebo minus každému jejímu bodu. Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je orientovaná 0-rozměrná varieta. Je-li $\mu \in \mathcal{A}$ a $z \in U_\mu$, potom $U_\mu = \{z\}$ a $\mu(z) = 0$. Je-li z kladný bod, je i mapa μ kladná a naopak.

39.4. Tečný prostor a derivace zobrazení. Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je k-rozměrná varieta a $x \in \Omega$. Nechť $\mu \in \mathcal{A}$ je mapa, v jejímž definičním oboru leží x, a $\varphi = \mu^{-1}$. Potom *tečný prostor* T_x k Ω v bodě x je generován vektory $\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(\mu(x)), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}(\mu(x))$. Je-li varieta Ω vnořená do $\mathbf{R}^n$, není třeba tyto vektory definovat, parciální derivace zobrazení φ jsou prvky $\mathbf{R}^n$. Na "abstraktní" varietě však taková interpretace chybí. Abychom symbolům $\frac{\partial \varphi}{\partial t_j}(\mu(x))$ přiřadili konkrétní význam, můžeme si pomoci následující konstrukcí – vektor $\frac{\partial \varphi}{\partial t_j}(\mu(x))$ reprezentujeme jako lineární formu $f \mapsto \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial t_j}$ na vektorovém prostoru všech funkcí na Ω, které jsou diferencovatelné v x. Únavným výpočtem je možné se přesvědčit, že pojem tečného prostoru nezávisí na volbě μ.

Nechť $(\mathcal{X},\mathcal{M})$ a $(\mathcal{Y},\mathcal{N})$ jsou dvě variety, ne nutně stejné dimenze. Mějme zobrazení $f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$. Předpokládejme, že $x\in\mathcal{X}$, $y\in\mathcal{Y}$, $f(x)=y$ a f je diferencovatelná v x. Potom *derivaci* zobrazení f definujeme jako zobrazení, které každému vektoru $u\in T_x(\mathcal{X})$ přiřadí vektor $f'(x)u\in T_y(\mathcal{Y})$, totiž, je-li $u=\frac{\partial\varphi}{\partial t_j}(\mu(x))$, kde $\mu\in\mathcal{M}$ a $\varphi=\mu^{-1}$, definujeme $f'(x)u=\frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial t_j}'(\mu(x))$.

Nechť k-rozměrná varieta $(\Omega,\mathcal{A})$ je orientovaná. Nechť $\mu\in\mathcal{A}$ a $x\in U_\mu$. Potom bázi $(u_1,\dots,u_k)$ tečného prostoru $T_x(\Omega)$ nazveme *kladnou*, resp. *zápornou*, jestliže $\det(\mu'(x)u_1,\dots,\mu'(x)u_k)>0$, resp. $\det(\mu'(x)u_1,\dots,\mu'(x)u_k)<0$. Rozmyslete si, že ani tyto pojmy nezávisí na volbě mapy.

39.5. Příklad. Buď Ω kulová sféra $\{x\in\mathbf{R}^n:|x|^2=1\}$.

(a) Strukturu orientované variety třídy $\mathcal{C}^\infty$ vytvoříme na Ω (s pomocí souřadnicových map) atlasem $\mathcal{A}=\{\mu_q: q\in\{-n,\dots,-1,1,\dots,n\}\}$, kde

$$\begin{aligned}
\mu_1(x)&=[x_2,\dots,x_n],\quad x_1>0,\\
\mu_{-1}(x)&=[-x_2,\dots,x_n],\quad x_1<0,\\
\mu_2(x)&=[x_1,x_3,\dots,x_n],\quad x_2>0,\\
\mu_{-2}(x)&=[-x_1,x_3,\dots,x_n],\quad x_2<0,\\
&\dots\\
\mu_n(x)&=[x_1,\dots,x_{n-1}],\quad x_n>0,\\
\mu_{-n}(x)&=[-x_1,\dots,x_{n-1}],\quad x_n<0.
\end{aligned}$$

(b) Na Ω nelze najít atlas, který by byl složen jen z jedné mapy μ. Totiž, Ω je kompaktní, μ je spojitá a tudíž by $\mu(\Omega)$ musela být také kompaktní množina. V $\mathbf{R}^{n-1}$ však žádné kompaktní otevřené množiny nejsou.

(c) Tečný prostor v bodě $x\in\Omega$ vypočteme např. pomocí μ_n pro x splňující $x_n>0$. Použijme $\varphi=\mu_n^{-1}$, tedy je-li $G=\{t\in\mathbf{R}^{n-1}:|t|<1\}$, pak $\varphi(t)=[t_1,\dots,t_{n-1},\sqrt{1-|t|^2}]$, $t\in G$, a tečný prostor v bodě $x=\varphi(t)$ je generován vektory $[1,0,\dots,0,\frac{-t_1}{\sqrt{1-|t|^2}}],\dots,[0,\dots,0,1,\frac{-t_{n-1}}{\sqrt{1-|t|^2}}]$, neboli vektory $[1,0,\dots,0,-\frac{x_1}{x_n}],\dots,[0,\dots,0,1,-\frac{x_{n-1}}{x_n}]$.

(d) Uvažujme zobrazení $g\colon\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$ definované předpisem $g(x)=[x_1^2,x_2^2,\sqrt{2}\,x_1x_2]$ a označme f jeho restrikci na jednotkovou kružnici Ω_2 v $\mathbf{R}^2$. Potom f zobrazuje Ω_2 do jednotkové sféry Ω_3 v $\mathbf{R}^3$. Derivace $f'(x)$ přiřadí vektoru $u\in T_x(\Omega_2)\subset\mathbf{R}^2$ vektor $f'(x)(u)\in T_{f(x)}(\Omega_3)$, který je (pročpak asi) roven vektoru $g'(x)u=u_1\frac{\partial g}{\partial x_1}(x)+u_2\frac{\partial g}{\partial x_2}(x)=[2u_1x_1,\,2u_2x_2,\,\sqrt{2}u_1x_2+\sqrt{2}u_2x_1]$.

39.6. Příklad. Nechť $0<r<R$ jsou konstanty. Uvažujme anuloid

$$\{[x,y,z]\in\mathbf{R}^3:(\sqrt{x^2+y^2}-R)^2+z^2=r^2\}\,.$$

Použijme parametrizace $\varphi_q(s,t)=[x,y,z]$, $[s,t]\in G_q$, kde

$$\begin{aligned}
x&=(R+r\cos s)\,\cos t\,,\\
y&=(R+r\cos s)\,\sin t\,,\\
z&=r\,\sin s\,,\\
G_1&=(0,2\pi)\times(0,2\pi)\,,\\
G_2&=(0,2\pi)\times(-\pi,\pi)\,,\\
G_3&=(-\pi,\pi)\times(0,2\pi)\,,\\
G_4&=(-\pi,\pi)\times(-\pi,\pi)\,.
\end{aligned}$$

Potom atlas $\mathcal{A}=\{\varphi_1^{-1},\dots,\varphi_4^{-1}\}$ tvoří na Ω strukturu orientované variety třídy $\mathcal{C}^\infty$.

39.7. Příklad. Buď $\Omega=\varphi(G)$, kde $G=(-1/2,1/2)\times(-2\,\pi,\,2\,\pi)$ a

$$\varphi(s,t)=[(1+s\cos\frac{t}{2})\cos t,\,(1+s\cos\frac{t}{2})\sin t,\,s\sin\frac{t}{2}].$$

Potom Ω má tvar tzv. *Möbiovy pásky*. Buď $\mathcal{A}$ atlas všech $\mathcal{C}^1$ map na Ω. Dokážeme, že varieta $(\Omega,\mathcal{A})$ není orientovatelná. Máme

$$\varphi'(s,t)=\begin{pmatrix}\cos t\cos\frac{t}{2}, & -\sin t-s\sin t\cos\frac{t}{2}-\frac{s}{2}\cos t\sin\frac{t}{2}\\ \sin t\cos\frac{t}{2}, & \cos t+s\cos t\cos\frac{t}{2}-\frac{s}{2}\sin t\sin\frac{t}{2}\\ \sin\frac{t}{2}, & \frac{s}{2}\cos\frac{t}{2}\end{pmatrix}.$$

Předpokládejme, že existuje orientovaný atlas $\mathcal{A}'\subset\mathcal{A}$. Buď $H=\{[s,t]\in G\colon\det\nabla(\mu\circ\varphi)(s,t)>0$ kdykoliv $\mu\in\mathcal{A}'$ a $\varphi(s,t)\in U_\mu\}$. Potom ze souvislosti G dostáváme, že $H=G$ nebo $H=\emptyset$. Nechť $\mu\in\mathcal{A}'$, $[-1,0,0]\in U_\mu$. Potom $\det(\mu\circ\varphi)$ musí mít stejné znaménko v bodech $[0,-\pi]$ a $[0,\pi]$, což vede ke sporu.

39.8. Diferenciální formy. *Diferenciální k-formu* na n-rozměrné varietě Ω definujeme jako zobrazení ω, které každému $x \in \Omega$ přiřadí $\omega(x) \in \Lambda^k(T_x(\Omega))$. Počítání s diferenciálními formami převádíme na počítání s diferenciálními formami v $\mathbf{R}^k$ prostřednictvím pullbacku. Nechť $G \subset \mathbf{R}^m$ je otevřená množina a $\varphi : G \to \Omega$ je $\mathcal{C}^1$ zobrazení. Nechť φ je diferenciální k-forma na Ω. Potom definujeme diferenciální k-formu $\varphi^\sharp\omega$ (která se nazývá *pullback* φ) na G předpisem

$$< (\varphi^\sharp\omega)(t),\ (u_1, \dots, u_k) > = < \omega(\varphi(t)),\ (\varphi'(t)u_1, \dots, \varphi'(t)u_k) > , \quad u_1 \dots, u_k \in \mathbf{R}^m .$$

Pullback diferenciální formy na Ω

$$\omega(x) = \sum_{\alpha \in I(k,n)} \omega_\alpha(x) d\mu_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge d\mu_{\alpha_k}\,(x)$$

je diferenciální forma na G

$$\varphi^\sharp\omega(t) = \sum_{\alpha \in I(k,n)} \omega_\alpha(\varphi(t)) d(\mu_{\alpha_1} \circ \varphi) \wedge \cdots \wedge d(\mu_{\alpha_k} \circ \varphi)\,(t)\,,$$

což lze ovšem přepočítat do souřadnic v $\mathbf{R}^m$ (viz příklad 39.10).

Řekneme, že diferenciální forma ω na Ω je třídy $\mathcal{C}^\ell$, resp. měřitelná, lze-li totéž říci o jejích pullbacích $(\mu^{-1})^\sharp\omega$, $\mu \in \mathcal{A}$.

Diferenciál diferenciální $k-1$-formy ω je taková diferenciální k forma $d\omega$, že $(\mu^{-1})^\sharp d\omega = d((\mu^{-1})^\sharp\omega)$ pro každou mapu $\mu \in \mathcal{A}$. Každá $\mathcal{C}^1$ diferenciální forma má diferenciál (to není úplně snadné), a je-li Ω otevřená podmnožina $\mathbf{R}^n$, shoduje se s diferenciálem zavedeným v předchozí kapitole.

Je-li varieta Ω vnořená do $\mathbf{R}^n$, pak každá diferenciální forma $\omega = \sum\limits_{\alpha \in I(k,n)} \omega_\alpha dx_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx_{\alpha_k}$ na okolí Ω indukuje diferenciální formu $\tilde{\omega}$ na Ω, totiž

$$\tilde{\omega} = \sum_{\alpha \in I(k,n)} \omega_\alpha d\tilde{x}_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge d\tilde{x}_{\alpha_k}\ ,$$

kde $\tilde{x}_i$ jsou souřadnicové funkce $x \mapsto x_i$ na Ω. Rozdíl je hlavně v tom, že $\omega(x) \in \Lambda^k(\mathbf{R}^n)$, zatímco $\tilde{\omega}(x) \in \Lambda^k(T_x(\Omega))$, což tak nevadí, neboť $T_x(\Omega)$ lze považovat za podprostor $\mathbf{R}^n$. Z hlediska integrování tento rozdíl nebude hrát roli. Přesto je zapotřebí jisté opatrnosti. Různým prvkům $\Lambda^k(\mathbf{R}^n)$ odpovídají někdy stejné prvky $\Lambda_k(T_x(\Omega))$, takže zdánlivě různé diferenciální formy na Ω (ve skutečnosti jsou různé jen jejich popisy pomocí diferenciálních forem na okolí Ω) jsou stejné. K osvětlení tohoto jevu doporučujeme prostudovat příklad 39.9.

39.9. Příklad. Buď Ω jednotková kružnice $\{[x, y] \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Potom $x\,dx + y\,dy$ indukuje nulovou diferenciální formu na Ω.

39.10. Příklad. Buď Ω kuželová plocha $\{x \in \mathbf{R}^3 : x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\}$. Nechť μ je mapa inverzní k zobrazení $\varphi : G \to \Omega$, $G = (0, 1) \times (0, 2\pi)$, $\varphi(t) = [\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)] = [t_1 \cos t_2,\ t_1 \sin t_2,\ t_1]$. Uvažujme na Ω diferenciální formu $\omega(x) = x_1\, dx_2 \wedge dx_3$. Potom

$$\varphi^\sharp\omega = \varphi_1\, d\varphi_2 \wedge d\varphi_3 = t_1 \cos t_2\, d(t_1\ \sin t_2) \wedge dt_1 = (-t_1^2\ \cos^2 t_2) dt_1 \wedge dt_2\,.$$

39.11. Rozklad jednotky. Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je varieta. Systém $\{\chi_\tau\}_{\tau \in \mathcal{T}}$ nezáporných funkcí třídy $\mathcal{C}^1$ na Ω ($\mathcal{T}$ je nějaká indexová množina) nazveme *rozkladem jednotky na* Ω (podřízeným pokrytí $\{U_\mu\}_{\mu \in \mathcal{A}}$), jestliže ke každému $\tau \in \mathcal{T}$ existuje $\mu \in \mathcal{A}$ tak, že $\overline{\{\chi_\tau > 0\}} \subset U_\mu$; a dále každý bod $x \in \Omega$ má okolí V, k němuž existuje konečná množina $\mathcal{T}_V \subset \mathcal{T}$ tak, že $\chi_\tau = 0$ na V, pokud $\tau \notin \mathcal{T}_V$, a $\sum_{\tau \in \mathcal{T}_V} \chi_\tau = 1$ na V. Je tedy $\sum_{\tau \in \mathcal{T}} \chi_\tau = 1$ na Ω a tato suma je “lokálně konečná”.

Pokud je varieta Ω metrizovatelná, (např. je li kompaktní nebo vnořená do $\mathbf{R}^n$), rozklad jednotky existuje. Nyní nebudeme přerušovat výklad konstrukcemi, zájemce odkazujeme na konec kapitoly.

39.12. Riemannova metrika. Chceme-li zavést k-rozměrnou míru na varietě, myšlenka okopírovat definici z $\mathbf{R}^n$ není nejšťastnější. Schůdnější cestou je analogie se substituční větou 34.19. V tom případě potřebujeme mít definovám objem k-tice tečných vektorů. Definice objemu (pomineme-li také možný přístup jeho axiomatického zavedení) je založena na skalárním součinu. Pokud je uvažovaná varieta vnořená do $\mathbf{R}^n$, máme dán automaticky na každém tečném prostoru skalární součin. V obecném případě však musíme skalární součin na tečných prostorech považovat za dodatečnou strukturu.

Nechť $(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ je n-rozměrná varieta třídy $\mathcal{C}^1$ a $\mathbf{g}$ je zobrazení, které každému $x \in \mathcal{X}$ přiřadí pozitivně definitní bilineární formu $\mathbf{g}^x$ na $T_x(\mathcal{X})$. Potom $\mathbf{g}^x$ můžeme vyjádřit v souřadnicích vzhledem k mapě $\mu \in \mathcal{M}$, a to tak, aby pro každé dva vektory u, $v \in T_x(\mathcal{X})$ platilo

$$\mathbf{g}^x(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{g}^x_{i,j} \hat{u}_i \hat{v}_j \,,$$

kde $\hat{u}_i = \mu_i'(x)u$ a $\hat{v}_j = \mu_j'(x)v$. Jsou-li všechny souřadnicové funkce $x \mapsto \mathbf{g}^x_{i,j}$, $i,j = 1,\dots,n$, spojité, nazveme $\mathbf{g}$ *Riemannovou metrikou* na $\mathcal{X}$. Struktura $(\mathcal{X}, \mathcal{M}, \mathbf{g})$ se nazývá *Riemannova varieta*. Na každé varietě třídy $\mathcal{C}^1$ lze pomocí rozkladu jednotky snadno zavést riemannovskou strukturu.

39.13. Příklad. Buď $\mathcal{X} = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3 : x = r\cos z, y = r\sin z, \text{ kde } r = \sqrt{x^2+y^2}\}$ ("točité schody"). Potom $\mathcal{X}$ je dvourozměrná varieta. Zavedeme-li metriku na $T_{[x,y,z]}$ předpisem

$$\mathbf{g}^{[x,y,z]}(u,v) = Pu \cdot Pv \,,$$

kde P je projekce $[x,y,z] \mapsto [x,y]$, potom dostaneme Riemanovu varietu, kterou nelze izometricky vnořit do $\mathbf{R}^n$. (Zobrazení P je ovšem lokálně izometrické vnoření do $\mathbf{R}^2$, ale globálně není prosté). Přesto je účelné např. v komplexní analýze s takovou Riemannovou varietou počítat. Nelze se tedy domnívat, že nevnořené variety jsou zbytečná abstrakce.

39.14. Příklad. Buď Ω otevřený jednotkový kruh v $\mathbf{R}^2$. Položme

$$\mathbf{g}^x(u,v) = u \cdot v + \frac{(u\cdot x)(v \cdot x)}{|x|^2}\,, \quad x \in \Omega,\ u,v \in \mathbf{R}^2\,.$$

Potom $\mathbf{g}$ je Riemannova metrika, která varietě Ω "dává tvar polosféry". Skutečně, je-li $f : x \to [x_1, x_2, \sqrt{x_1^2 + x_2^2}]$ zobrazení $\mathcal{X}$ do "skutečné polosféry" $f(\mathcal{X})$ vybavené eukleidovským skalárním součinem, potom f zachovává skalární součin; totiž pro všechna $u,v \in \mathbf{R}^2$ a $x \in \Omega$ máme

$$(f'(x)u) \cdot (f'(x)v) = \mathbf{g}^x(u,v)\,,$$

je tedy f "izometrické zobrazení". Naopak, Ω není izometrická žádné otevřené podmnožině $\mathbf{R}^2$ (polosféru nelze izometricky narovnat). Z geometrického hlediska je důležitější tvar Riemannovy metriky než množina, na níž je struktura vytvářena.

39.15. k-rozměrná míra na Riemannově varietě. Nechť $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathbf{g})$ je Riemannova varieta. Buď $x \in \mathcal{X}$ a $(u_1,\dots,u_k) \in (T_x(\mathcal{X}))^k$. Potom definujeme objem této k-tice vektorů podobně jako v 34.10:

$$\operatorname{vol}(u_1,\dots,u_k) = \det(\mathbf{g}^x(u_i,u_j))_{i,j=1}^k\,.$$

Tím máme také zaveden objem lineárního obrazení $L : \mathbf{R}^k \to T_x(\mathcal{X})$. Nechť σ je míra na σ-algebře všech měřitelných podmnožin $\mathcal{X}$. Řekneme, že σ je k-rozměrná míra na X, jestliže pro každou $\mu \in \mathcal{A}$ a každou měřitelnou množinu $E \subset U_\mu$ je při označení $\varphi = \mu^{-1}$

$$\sigma E = \int_{\varphi^{-1}(E)} \operatorname{vol}\varphi'(t)\,dt\,.$$

Jelikož takový integrál nezávisí na volbě μ, pomocí rozkladu jednotky bychom dostali existenci k-rozměrné míry na k-rozměrné Riemannově varietě.

39.16. Integrování diferenciálních forem na Riemannových varietách. Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{g})$ je k-rozměrná Riemannova varieta. Potom definujeme *jednotkový tečný k-vektor* $\xi(x)$ k Ω v bodě $x \in \Omega$ předpisem

$$\xi(x) = \frac{u_1 \wedge \cdots \wedge u_k}{\operatorname{vol}(u_1, \ldots, u_k)}\,,$$

kde $(u_1, \ldots, u_k)$ je kladná báze $T_x(\Omega)$, na jejíž volbě definice nezávisí (rozmyslete si, proč). Potom můžeme integrování diferenciálních forem převést na integrování podle k-rozměrné míry σ na Ω podobně, jako jsme to provedli v 38.16: Totiž, je-li ω integrovatelná diferenciální forma na Ω, potom

$$\int_\Omega \omega = \int_\Omega <\omega, \xi> \, d\sigma\,.$$

39.17. Příklad. Spočteme integrál

$$\int_\Omega \frac{r x_2}{\sqrt{4r^4 + 5r^2 + 1}}\, d\sigma\,,$$

kde r je výraz $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^4 : x_1 = r\cos x_4,\ x_2 = r\sin x_4,\ x_3 = r^2,\ x_4 \in (0, \pi),\ r \in (0,1)\}$ a σ je dvourozměrná míra na Ω.

Budeme značit (e_s, e_t) kanonickou bázi $\mathbf{R}^2$ a $(e_1, \ldots, e_4)$ kanonickou bázi $\mathbf{R}^4$. Varietu Ω budeme parametrizovat pomocí zobrazení $\varphi(s,t) = [s\cos t,\ s\sin t,\ s^2,\ t]$, $[s,t] \in G := (0,1) \times (0,\pi)$. Na Ω zavedeme strukturu orientované variety pomocí atlasu $\{\varphi^{-1}\}$. Označme $L = \varphi'(s,t)$, $w = Le_s \wedge Le_t$. Potom

$$\begin{aligned}
w &= \frac{\partial\varphi}{\partial s} \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,t) = [\cos t,\ \sin t,\ 2s,\ 0] \wedge [-s\sin t,\ s\cos t,\ 0, 1] \\
&= [\frac{x_1}{r},\ \frac{x_2}{r},\ 2r,\ 0] \wedge [-x_2, x_1, 0, 1] \\
&= r\, e_1 \wedge e_2 + 2rx_2\, e_1 \wedge e_3 + \frac{x_1}{r}\, e_1 \wedge e_4 - 2rx_1\, e_2 \wedge e_3 + \frac{x_2}{r}\, e_2 \wedge e_4 + 2r\, e_3 \wedge e_4\,,
\end{aligned}$$

a

$$|w|^2 = r^2 + 4r^2x_2^2 + \frac{x_1^2}{r^2} + 4r^2x_1^2 + \frac{x_2^2}{r^2} + 4r^2 = 4r^4 + 5r^2 + 1\,.$$

Potom už čtenář snadno dosadí do vzorce

$$\xi = \frac{w}{|w|}\,.$$

Pro integrand máme vyjádření

$$\frac{r x_2}{\sqrt{4r^4 + 5r^2 + 1}} = \frac{1}{2} <dx_1 \wedge dx_3,\ \xi>\,,$$

tedy

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{r x_2}{\sqrt{4r^4 + 5r^2 + 1}}\, d\sigma &= \frac{1}{2} \int_\Omega dx_1 \wedge dx_3 \\
&= \frac{1}{2} \int_G (\cos t\, ds - s\sin t\, dt) \wedge 2s\, ds = \int_G s^2\ \sin t\, ds\, dt = \frac{2}{3}\,.
\end{aligned}$$

39.18. Integrování na obecných varietách. K integrování diferenciálních forem na varietách ovšem nepotřebujeme ani k-rozměrnou míru, ani riemannovskou strukturu. Stačí si uvědomit, že vyjádření pomocí vět o substituci na těchto strukturách nezávisí. Můžeme tedy v obecném případě postupovat následujícím způsobem: Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je k-rozměrná orientovaná metrizovatelná varieta. Nechť ω je měřitelná diferenciální k-forma na $\mathcal{A}$ a E je měřitelná podmnožina Ω. Integrál $\int_E \omega$ definujeme ve dvou krocích: Nechť nejprve $E \subset U_\mu$ pro některé $\mu \in \mathcal{M}$. Potom definujeme

$$\int_E \omega = \int_{\mu(E)} (\mu^{-1})^\sharp \omega\,.$$

Z věty o substituci snadno plyne, že tento integrál (má-li smysl) nezávisí na volbě μ. Druhý krok, založený na rozkladu jednotky a pojmu konvergence, se provede následovně: Nechť $\{\chi_\tau\}_{\tau \in \mathcal{T}}$ je rozklad jednotky na $(\Omega, \mathcal{A})$ (z metrizovatelnosti plyne existence rozkladu jednotky).

Pro každou měřitelnou množinu $E \subset \Omega$ označme

$$I(E) = \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \int_{E \cap \{\chi_\tau > 0\}} \chi_\tau \omega \,.$$

(výraz $I(E)$ může nebo nemusí mít smysl). Řekneme, že *integrál* $\int_E \omega$ *konverguje*, nebo že diferenciální forma ω je *integrovatelná* na E, jestliže pro každou měřitelnou množinu $E' \subset \Omega$ má $I(E')$ smysl jako konečné číslo a pro každou posloupnost $\{E_q\}$ po dvou disjunktních měřitelných množin $E_q \subset E$ konverguje řada

$$\sum_{q=1}^{\infty} I(E_q)$$

(pak musí konvergovat absolutně – proč?). Jestliže integrál $\int_E \omega$ konverguje, položme

$$\int_E \omega = I(E) \,.$$

Jelikož jsme byli při definici konvergence dostatečně opatrní, hodnota takto definovaného integrálu nezávisí na "rozkladu" E ani na rozkladu jednotky. Na druhé straně, ačkoliv to ze symboliky není patrné, závisí na orientaci Ω: Kdybychom varietu orientovali opačně, integrál by změnil znaménko.

Nechť $G \subset \mathbf{R}^k$ je otevřená množina a $\varphi : G \to \Omega$ je difeomorfismus. Řekneme, že φ je *kladná parametrizace*, jestliže všechna složená zobrazení $\mu \circ \varphi$, $\mu \in \mathcal{A}$, mají kladný Jakobián. Pro kladné parametrizace platí substituční vzorec

$$\int_{\varphi(G)} \omega = \int_G \varphi^\sharp \omega \,,$$

pokud jeden z těchto integrálů má smysl.

39.19. Příklad. Nechť Ω je množina všech klesajících řešení diferenciální rovnice $x''(s) - \frac{(x'(s))^2}{x(s)} = 0$ splňujících podmínku $0 < x(0) < 1$. Buď $\mathcal{A} = \{\mu : \Omega \to \mathbf{R}^2\colon$ existují $a,\ b \in \mathbf{R}$ tak, že $a < b$ a $\mu(x) = [x(a), x(b)]$ pro všechna $x \in \Omega\}$. Potom $(\Omega, \mathcal{A})$ je dvourozměrná orientovaná varieta a $\varphi : t \mapsto e^{t_2 s + t_1}$, $t \in (-\infty, 0)^2$ je kladná parametrizace Ω. Tečný prostor $T_x(\Omega)$, $x = \varphi(t)$, lze reprezentovat jako dvourozměrný prostor funkcí generovaný funkcemi $\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t) : s \mapsto e^{t_2 s + t_1}$ a $\frac{\partial \varphi}{\partial t_2}(t) : s \mapsto s\, e^{t_2 s + t_1}$. Pro každé $\tau \in \mathbf{R}$ buď ε_τ funkce na Ω definovaná přiřazením $\varepsilon_\tau(x) = x(\tau)$. Potom $\omega := d\varepsilon_0 \wedge d\varepsilon_1$ je diferenciální forma, která dvojici vektorů u_1, u_2 z $T_x(\Omega)$ přiřadí číslo

$$\det \begin{pmatrix} u_1(0), & u_2(0) \\ u_1(1), & u_2(1) \end{pmatrix} .$$

Máme

$$\begin{aligned} \varphi^\sharp \omega &= d(e^{t_1}) \wedge d(e^{t_1 + t_2}) = e^{t_1}\, dt_1 \wedge (e^{t_1+t_2}\, dt_1 + e^{t_1+t_2}\, dt_2) \\ &= e^{2t_1 + t_2}\, dt_1 \wedge dt_2 \,, \end{aligned}$$

takže

$$\int_\Omega \omega = \int_{(-\infty,0)^2} e^{2t_1+t_2}\, dt_1\, dt_2 = \frac{1}{2} \,.$$

39.20. Úvod k obecné Stokesově větě na varietách. Nechť $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ je k-rozměrná orientovaná metrizovatelná varieta a $\Omega \cup \Gamma$ je kompaktní podmnožina $\mathcal{X}$. Nechť $(\Gamma, \mathcal{B})$ je $k{-}1$-rozměrná orientovaná varieta. Budeme předpokládat, že ke každému bodu $z \in \Omega \cup \Gamma$ existuje otevřená množina $G \subset \mathbf{R}^k$, okolí U bodu z a homeomorfní zobrazení $\varphi : G \cap \overline{\mathbf{H}^k_-} \to \Omega \cup \Gamma$ tak, že $z \in \varphi(\partial \mathbf{H}^k_-)$, $\varphi(G \cap \mathbf{H}^k_-) = \Omega \cap U$, $\varphi(G \cap \partial \mathbf{H}^k_-) = \Gamma \cap U$ a nastane jeden z následujích případů:

(a) $\varphi_{|G \cap \mathbf{H}^k_-}$ je kladná parametrizace $\Omega \cap U$ a $\varphi_{|G \cap \partial \mathbf{H}^k_-} \circ \mathbf{i}$ je kladná parametrizace $\Gamma \cap U$.

(b) $\varphi_{|G \cap \mathbf{H}^k_-}$ je záporná parametrizace $\Omega \cap U$ a $\varphi_{|G \cap \partial \mathbf{H}^k_-} \circ \mathbf{i}$ je záporná parametrizace $\Gamma \cap U$.

(Připomeňme, že podle úmluvy této kapitoly jsou všechny parametrizace difeomorfní.)

39.21. Obecná Stokesova věta na varietách. *Nechť ω je $\mathcal{C}^1$ diferenciální $k-1$-forma na $\mathcal{X}$. Potom*

$$\int_\Gamma \omega = \int_\Omega d\omega\,.$$

39.22. Existence rozkladu jednotky. Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je lokálně kompaktní k-rozměrná plocha. Přijměme pracovní název *přijatelná soustava funkcí* pro systém $\{f_\tau\}_{\tau\in\mathcal{T}}$ nezáporných funkcí na Ω, splňující následující požadavky: Ke každému τ z indexové množiny $\mathcal{T}$ existuje $\mu \in \mathcal{A}$ tak, že $\overline{\{f_\tau > 0\}} \subset U_\mu$ a $f_\tau \circ \mu^{-1}$ je nekonečně diferencovatelná funkce; dále každý bod $x \in \Omega$ má okolí V, k němuž existuje konečná množina $\mathcal{T}_V \subset \mathcal{T}$ tak, že $f_\tau = 0$ na V, pokud $\tau \notin \mathcal{T}_V$. Z vlastností požadovaných od rozkladu jednotky chybí vlastně jen to, že součet je jedna. Jestliže máme přijatelnou soustavu funkcí $\{f_\tau\}_{\tau\in\mathcal{T}}$, jejíž součet S je kladný, potom $\{f_\tau/S\}_{\tau\in\mathcal{T}}$ je zřejmě rozklad jednotky. Přitom jeho kvalita závisí na kvalitě atlasu: je-li atlas $\mathcal{A}$ třídy $\mathcal{C}^\ell$, resp. lokálně lipschitzovský, je i utvořený rozklad jednotky třídy $\mathcal{C}^\ell$, resp. lokálně lipschitzovský.

V dalším kroku buď $K \subset W$ podmnožiny Ω, K kompaktní, W otevřená. Ukážeme, že existuje přijatelná soustava funkcí, dokonce konečná, jejíž součet je kladný na K a nulový vně W. Ke každému bodu $a \in K$ najděme $\mu_a \in \mathcal{A}$ a poloměr $r_a > 0$ tak, že $a \in U_{\mu_a}$ a $B(\mu_a(a), 2r_a) \subset \mu_a(U_{\mu_a} \cap W)$. Nyní položme

$$f_a(x) = \begin{cases} e^{1/(|\mu_a(x)-\mu_a(a)|^2-r_a^2)}, & \text{je-li } x \in \mu_a^{-1}(U(\mu_a(x), r_a))\,, \\ 0 & \text{v ostatních případech.} \end{cases}$$

Potom $\{\{f_a > 0\} : a \in K\}$ je pokrytí K a vzhledem ke kompaktnosti K můžeme vybrat konečnou množinu $\{f_{a_1}, \dots, f_{a_m}\}$ tvořící přijatelnou soustavu funkcí, jejíž součet je kladný na K. Tím máme vyřešenu existenci rozkladu jednotky, pokud Ω je kompaktní.

Od tohoto okamžiku předpokládejme, že Ω je metrizovatelná varieta. Je-li Ω souvislý prostor, potom podle topologického lemmatu, které za chvíli uvedeme, existují kompaktní množiny K_q a otevřené množiny W_q ($q \in \mathbf{N}$) tak, že $K_q \subset W_q$, $\Omega = \bigcup_{q=1}^\infty K_q$ a každý bod má okolí, které protíná jen konečně mnoho množin W_q. Ke každé dvojici (K_q, W_q) najdeme přijatelnou soustavu funkcí podle předchozího postupu. Sjednocením přes q dostaneme přijatelnou soustavu funkcí, jejíž součet je kladný na Ω. Tím máme vyřešenu existenci rozkladu jednotky, pokud Ω je souvislá. Jestliže Ω není souvislá, potom topologické komponenty jsou souvislé podvariety Ω. Prostým sjednocením rozkladů jednotek na komponentách (je-li funkce χ prvkem rozkladu jednotky na komponentě Ω', rozšíříme ji nulou vně Ω') dostaneme rozklad jednotky na Ω.

39.23. Topologické lemma. *Nechť (P, ρ) je souvislý lokálně kompaktní metrický prostor. Potom existuje posloupnost $\{K_q\}$ kompaktních podmnožin P a posloupnost $\{W_q\}$ otevřených podmnožin X tak, že $X = \bigcup_{q=1}^\infty K_q$ a každý bod P má okolí protínající je konečně mnoho množin W_q.*

Důkaz. Předpokládejme, že P není kompaktní, jinak je tvrzení triviální. Dále, metriku modifikujme tak, aby určovala stejnou topologii, ale prostor P byl omezený. Ke každému bodu $x \in P$ existuje poloměr $r(x)$ tak, že $B(x, 2r(x))$ je kompaktní, zatímco $B(x, 4r(x))$ není kompaktní. Sestrojíme indukcí posloupnost $\{V_q\}$ otevřených relativně kompaktních podmnožin P. Zvolme $x_0 \in P$ a položme $V_1 = U(x_0, 2r_0)$. Nechť máme sestrojeny množiny $V_1, \dots, V_q$. Z kompaktnosti $\overline{V_q}$ plyne, že můžeme najít konečný systém koulí $\{U(x_j, r_j)\}$ vybraný z $\{U(x, r(x)) : x \in \overline{V}_q\}$ tak, aby pokrýval $\overline{V}_q$. Položme $V_{q+1} = \bigcup_j U(x_j, 2r_j)$. Sestrojená posloupnost splňuje $\overline{V}_q \subset V_{q+1}$. Dokážeme sporem, že $V := \bigcup_{q=1}^\infty V_q = P$. Předpokládejme, že $V \neq P$. Jelikož prostor je souvislý, znamená to, že existuje $z \in \partial V$. Položme $R = r(z)/3$. Najděme $x \in U(z, R) \cap V$ a q tak, že $x \in V_q$. Dále najděme $y \in \overline{V_q}$ a $r = r(y)$ tak, že $x \in U(y, r)$ a $U(y, 2r) \subset V_{q+1}$. Jelikož $z \notin V$, je $\rho(z, y) \geq 2r$. Máme

$$2r \leq \rho(y, z) \leq \rho(y, x) + \rho(x, z) \leq r + R,$$

tedy $r \leq R$. Je-li $t \in B(y, 4r)$, potom

$$\rho(t, z) \leq \rho(t, y) + \rho(y, z) \leq 4r + r + R \leq 6R,$$

takže $B(y, 4r(y)) \subset B(z, 2r(z))$. To je ale spor, neboť koule $B(y, 4y)$ není kompaktní a koule $\overline{B(z, 2r(z)}$ je kompaktní. Dokázali jsme, že $V = P$. K dokončení důkazu stačí položit $K_1 = \overline{V}_1$, $W_1 = V_2$, $W_2 = V_3$, $K_q = \overline{V_q} \setminus V_{q-1}$ pro $q \geq 2$ a $W_q = V_{q+1} \setminus \overline{V}_{q-2}$ pro $q \geq 3$. ■

35.24. Historické poznámky. Kořeny této problematiky sahají do konce 18. století a jsou spojeny se slavnými jmény klasiků matematické analýzy. Z obsáhlé literatury k těmto tématům doporučujeme třeba M. Berger and B. Gostiaux [*1988], L. Boček [Boč], I. Černý a J. Mařík [ČM II], H. Federer [*1969], W. Fleming [*1965], O. Kowalski [Kow], F. Moran [*1988], R. Sikorski [Sik], L. Simon [*1983].

H. VEKTOROVÁ INTEGRACE

40. Měřitelné funkce

V mnoha teoretických i aplikačních partiích se setkáváme s problémem integrace nikoliv pouze reálných funkcí, ale dokonce i funkcí majících hodnoty v obecnějších vektorových prostorech. Omezíme se zde na případ, kdy $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ bude prostor s mírou, X bude Banachův prostor a f zobrazení z Ω do X ("vektorová funkce"). Chtěli bychom – rozumným způsobem – definovat integrál $\int_\Omega f d\mu$. Nabízejí se, zhruba řečeno, dvě možnosti:

(1) daný problém převedeme na případ reálných (či komplexních) funkcí tím, že budeme uvažovat funkce $\varphi \circ f$, kde φ bude probíhat všechny prvky duálu X^*,
(2) pokusíme se vhodně uzpůsobit některou z možných definic (Lebesgueova) integrálu a zkoumat ji v obecnějším případě Banachových prostorů.

Obě dvě metody jsou běžné i v některých jiných partiích analýzy. Kupříkladu lze takto rozšířit pojem holomorfní funkce. Je-li totiž f funkce s hodnotami v Banachově prostoru X, můžeme říci, že f je holomorfní (na nějaké oblasti $G \subset \mathbf{C}$), jestliže

– buďto $\varphi \circ f$ je holomorfní pro každé $\varphi \in X^*$ (též říkáme, že f je *slabě holomorfní*),
– anebo existuje-li $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\,[f(x+h) - f(x)]$ pro každé $x \in G$ (někdy se též říká, že f je *silně holomorfní*).

Obě možnosti se používají. Je ovšem nutné vyřešit otázku, která ihned každého napadne, jaký je vztah slabě a silně holomorfních funkcí.

I my se v této (krátké a spíše informativní) kapitole zaměříme na obě možnosti definice. Poznamenejme však předem, že pro dobré pochopení těchto kapitol čtenář již musí znát alespoň základy teorie Banachových prostorů (topologický duál, Hahn–Banachova věta, Rieszova věta o reprezentaci spojitého lineárního funkcionálu na Hilbertově prostoru, reflexivní prostory apod.). Historicky k prvním pokusům definice integrálu z vektorové funkce (v případě $\Omega = [0,1]$ a Lebesgueovy míry) patří definice Gravesova integrálu z roku 1927 – stačí použít vhodně upravené původní riemannovské definice – stručný nástin této myšlenky lze nalézt ve cvičení 43.7.

V dalším budeme uvažovat Banachův prostor X a prostor s mírou $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$, kde μ je (pro jednoduchost) pravděpodobnostní ($\mu\Omega = 1$) úplná míra. Nejdříve musíme definovat pojem měřitelné funkce.

40.1. Měřitelné funkce. Funkci $f : \Omega \to X$ nazveme
– *jednoduchou*, existují-li $x_1, ..., x_n \in X$ a $E_1, ..., E_n \in \mathcal{S}$ tak, že $f = \sum_i x_i c_{E_i}$,
– *měřitelnou*, existuje-li posloupnost $\{f_n\}$ jednoduchých funkcí tak, že $\lim f_n(\omega) - f(\omega) = 0$ pro μ-skoro všechna $\omega \in \Omega$ (tj. konverguje-li $f_n(\omega)$ k $f(\omega)$ v normě prostoru X pro μ-skoro všechna $\omega \in \Omega$),
– *slabě měřitelnou*, jestliže $\varphi \circ f$ je měřitelná pro každé $\varphi \in X^*$.

40.2. Poznámky. 1. Všimněte si, že pro definici měřitelnosti jsme použili charakteristiku měřitelnosti reálných funkcí uvedenou ve cvičení 5.7. Je samozřejmé, že jsme nemohli v případě vektorových funkcí použít obvyklou definici ($\{\omega \in \Omega : f(\omega) < \alpha\} \in \mathcal{S}$ pro každé $\alpha \in X$). Jiná z možných ekvivalentních definic měřitelnosti reálných funkcí spočívá v požadavku $\{\omega \in \Omega : f(\omega) \in B\} \in \mathcal{S}$ pro každou otevřenou (nebo borelovskou) množinu $B \subset \mathbf{R}$ (viz cvičení 3.6.a). Tato definice by se dala přenést i na případ zobrazení do Banachova prostoru X. V případě separabilních prostorů pak takto definovaná třída "měřitelných" funkcí splývá s třídou všech měřitelných (a též podle následující Pettisovy věty i slabě měřitelných) funkcí. Obecně však již nemusí tato třída funkcí tvořit ani vektorový prostor.

2. Ukažte sami, že jsou-li f_n měřitelné, $f_n \to f$ μ-skoro všude, $\lambda \in \mathbf{R}$, jsou i funkce $f_1 + f_2, \lambda f_1, f$ měřitelné. Stejné tvrzení platí i pro slabou měřitelnost.

Vztah mezi měřitelností a slabou měřitelností udává následující důležitá Pettisova věta.

40.3. Věta (Pettis). *Funkce f je měřitelná, právě když f je slabě měřitelná a existuje množina $E \in \mathcal{S}$, $\mu E = 0$, tak, že $f(\Omega \setminus E)$ je separabilní podmnožina X. Speciálně, v případě, kdy X je separabilní Banachův prostor, pojmy měřitelnosti a slabé měřitelnosti splývají.*

Důkaz. Nechť f_k jsou jednoduché funkce, $\mu(E) = 0$ a $f_k \to f$ na $\Omega \setminus E$. Protože $f(\Omega \setminus E)$ je podmnožinou uzávěru množiny $\bigcup f_k(\Omega)$ a množiny $f_k(\Omega)$ jsou konečné, je $f(\Omega \setminus E)$ separabilní.

Pro důkaz jedné implikace tedy zbývá ověřit, že $\varphi \circ f$ je měřitelná, pokud $\varphi \in X^*$. Ale to je již docela snadné – stačí si uvědomit, že funkce $\varphi \circ g$ je měřitelná, v případě, kdy g je jednoduchá, a poté použít limitní přechod.

Buď nyní f slabě měřitelná, $E \in \mathcal{S}$, $\mu E = 0$, a $f(\Omega \setminus E)$ separabilní. V první fázi důkazu ukážeme, že funkce $\omega \to \|f(\omega)\|$ je měřitelná. To ukážeme takto: Existuje hustá a spočetná množina $\{x_n\} \subset f(\Omega \setminus E)$. Z Hahn-Banachovy věty nalezneme $\varphi_n \in X^*$, $\|\varphi_n\| = 1$ tak, aby $\varphi_n(x_n) = \|x_n\|$. Stačí ukázat, že

$$\|f(\omega)\| = \sup_n |\varphi_n(f(\omega))|$$

pro $\omega \in \Omega \setminus E$. To však není těžké – na jedné straně je $|\varphi_n(f(\omega))| \le \|\varphi_n\| \cdot \|f(\omega)\| = \|f(\omega)\|$. Je-li nyní $\omega \in \Omega \setminus E$ a $\varepsilon > 0$, nalezneme x_n tak,aby $\|f(\omega) - x_n\| < \varepsilon$. Potom

$$\begin{aligned} | \|f(\omega)\| - \varphi_n(f(\omega))| &\le | \|f(\omega)\| - \|x_n\| | + | \|x_n\| - \varphi_n(x_n)| + |\varphi_n(x_n) - \varphi_n(f(\omega))| \\ &\le \|f(\omega) - x_n\| + |\varphi_n(x_n - f(\omega))| \le \varepsilon + \|\varphi_n\| \cdot \|x_n - f(\omega)\| < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Obdobně bychom také dokázali, že funkce $g_n : \omega \mapsto \|f(\omega) - x_n\|$ jsou měřitelné. Volme tedy nyní $k \in \mathbf{N}$, položme $E_n^k = \{\omega \in \Omega : g_n(\omega) < \frac{1}{k}\}$ (zřejmě $E_n^k \in \mathcal{S}$) a definujme

$$h_k(\omega) = \begin{cases} x_n, & \text{je-li } \omega \in E_n^k \setminus \bigcup_{j<n} E_j^k \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

(Nejlépe je kreslit obrázek!) Pro $\omega \in \Omega \setminus E$ dostáváme $\|f(\omega) - h_k(\omega)\| < \frac{1}{k}$ (podrobně odůvodněte!). Ukázali jsme tedy, že existuje posloupnost $\{h_k\}$ tak, že $h_k \to f$ μ-skoro všude, přičemž každá z funkcí h_k nabývá pouze spočetně mnoha hodnot – a je tudíž měřitelná (proč vlastně?). ■

Pro dobré pochopení základů vektorové integrace je nutné si spočítat (a dobře promyslet) řadu ilustrujících příkladů. K tomu účelu budeme značit

- c_0 prostor všech posloupností $x = \{x_n\}$ reálných čísel konvergujících k nule s normou $||x|| = \max_n |x_n|$,
- l^p, $1 \le p < \infty$, prostor všech posloupností $x = \{x_n\}$, pro něž $\|x\|_p := \big(\sum_n |x_n|^p\big)^{1/p} < \infty$,
- l^∞ prostor všech omezených posloupností $x = \{x_n\}$ s normou $\|x\|_\infty := \sup_n |x_n|$,
- $l^2([0,1])$ Hilbertův prostor všech reálných funkcí f na $[0,1]$, které jsou nenulové pouze na spočetné množině a pro něž $\sum_{t\in[0,1]} |f(t)|^2 < \infty$ s obvyklou definicí skalárního součinu $\langle f, g\rangle = \sum_t f(t)g(t)$.

40.4. Příklad. Uvažujme $X = l^2([0,1])$ a prostor s mírou $([0,1]), \mathcal{M}, \lambda)$. Buď $\{e_t : t \in [0,1]\}$ ortonormální báze prostoru X ($e_t(x) = 1$ pro $x = t$, $e_t(x) = 0$ pro ostatní x). Definujeme-li zobrazení $f\colon [0,1] \to X$ předpisem $f(t) = e_t$, je f slabě měřitelná. Vskutku, je-li $\varphi \in X^*$, existuje podle Rieszovy věty o reprezentaci spojitých lineárních funkcionálů na Hilbertových prostorech právě jedno $a \in X$ tak, že $\varphi(x) = \langle x, a\rangle$ pro každé $x \in X$. Tudíž $\varphi(f(t)) = \langle e_t, a\rangle = a(t)$ a množina $\{t \in [0,1] : \langle e_t, a\rangle \ne 0\}$ je spočetná. Vidíme, že $\varphi \circ f = 0$ skoro všude. Tedy $\varphi \circ f$ je měřitelná funkce. Na druhé straně, $\|e_t - e_s\| = \sqrt{2}$ pro $t \ne s$ (odtud mj. plyne, že X není separabilní), a tedy $f([0,1] \setminus E) = \{e_t : t \in [0,1] \setminus E\}$ je separabilní, právě když množina $[0,1] \setminus E$ je spočetná. Neexistuje tedy množina $E \subset [0,1]$ míry nula tak, aby $f([0,1] \setminus E)$ byla separabilní. Tedy f není měřitelná. (Jiný příklad lze nalézt v 43.7.e či f.)

40.5. Historické poznámky. Teorie vektorových měr a integrace se rozvíjela podstatným způsobem ve třicátých letech. Slavná věta 40.3 se objevuje v práci B.J. Pettise [1938].

41. Vektorové míry

V této kapitole se velice stručně zmíníme o mírách, jejichž hodnoty leží v nějakém Banachově prostoru X. Než však k tomu přijdeme, zastavme se na chvíli u pojmu konvergence řad v Banachových prostorech.

41.1. Absolutní a bezpodmínečná konvergence. Jsou-li x_n prvky Banachova prostoru X, řekneme, že (formální) řada $\sum_{i=1}^{\infty} x_n$

- *konverguje*, jestliže existuje $\lim_n \sum_{i=1}^{n} x_i$ (píšeme $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = \lim_n \sum_{i=1}^{n} x_i$),
- *konverguje absolutně*, jestliže $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| < +\infty$,
- *konverguje bezpodmínečně* k prvku $x \in X$, jestliže $\sum_n x_{P(n)} = x$ pro každou permutaci P (= prosté zobrazení $\mathbf{N}$ na $\mathbf{N}$).

Každá absolutně konvergentní řada konverguje (X je úplný !), a tudíž i bezpodmínečně konverguje. Je-li $\dim X < +\infty$, potom každá bezpodmínečně konvergentní řada konverguje i absolutně (Riemannova věta – vzpomeňte si na přednášku z 1. semestru !), zatímco v nekonečné dimenzi toto tvrzení již nemusí platit (volte $x_n = (0, \dots, 0, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots) \in c_0$).

V dalším bude $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ prostor s mírou.

41.2. Vektorová míra. Je-li nyní $F : \mathcal{S} \to X$ množinová vektorová funkce, řekneme, že F je *aditivní* či *σ-aditivní* vektorová míra, jestliže $F(\emptyset) = 0$ a

$$F(\bigcup_n E_n) = \sum_n F(E_n)$$

pro každou konečnou či spočetnou posloupnost disjunktních množin $E_n \in \mathcal{S}$. Konvergenci řady (v případě σ-aditivní míry) zde chápeme jako konvergenci v X. Uvědomme si ale, že tato konvergence je vlastně bezpodmínečná (ať přeházíme množiny E_n jak chceme, pořád dostáváme tentýž součet).

41.3. Příklady. Buď $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ prostor $([0,1], \mathcal{M}, \lambda)$.

1. Je-li $X = L^p([0,1])$, $1 \le p \le \infty$, a $F : E \mapsto c_E$ pro $E \in \mathcal{M}$, je F σ-aditivní vektorová míra.

2. Buď L spojitý lineární operátor z $L^1[0,1]$ do nějakého Banachova prostoru X. Položíme-li $F(E) = L(c_E)$ pro $E \in \mathcal{M}$, je F opět σ-aditivní vektorová míra. K tomu si stačí uvědomit, že

$$||F(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) - \sum_{j=1}^{n} F(E_j)|| = ||F(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} E_j)|| \le \lambda(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} E_j)||L||.$$

3. Buď $T : L^\infty[0,1] \to X$ spojitý lineární operátor, $F(E) = T(c_E)$ pro $E \in \mathcal{M}$. Potom F je konečně aditivní vektorová míra, která již nemusí být σ-aditivní. Stačí vzít za T Hahn-Banachovo rozšíření funkcionálu $\varphi : x \mapsto x(\frac{1}{2})$ z $\mathcal{C}[0,1]$ na $L^\infty[0,1]$ (zde dokonce $X = \mathbf{R}$!)

41.4. Absolutní spojitost. Řekneme, že vektorová míra $F : \Omega \to X$ je *absolutně spojitá* vzhledem k míře μ, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ lze nalézt $\delta > 0$ tak, že $||F(E)|| < \varepsilon$, kdykoliv $\mu E < \delta$.

41.5. Věta (Pettis). *Nechť F je σ-aditivní vektorová míra a μ konečná míra na $\mathcal{S}$. Potom F je absolutně spojitá vzhledem k μ, právě když $F(E) = 0$, jakmile $\mu E = 0$.*

Důkaz. Nutnost podmínky je zřejmá. Důkaz opačné implikace se vede podobně jako ve cvičení 8.22.b: Předpokládá se existence takového $\varepsilon > 0$ a posloupnosti $\{E_n\} \subset \mathcal{S}$, pro něž

$$||F(E_n)|| \ge \varepsilon \quad \text{a} \quad \mu E_n < 2^{-n}.$$

Abychom však dostali spor, je zapotřebí přejít do reálného případu a uvažovat složení $\varphi \circ F$, kde $\varphi \in X^*$. Závěr důkazu je však již obtížnější než ve cvičení 8.22.b, neboť v odhadech potřebujeme jistou "stejnoměrnost" vzhledem k funkcionálům φ. ■

41.6. Cvičení. Buď μ aritmetická míra na množině přirozených čísel $\mathbf{N}$, $X = l^2$. Pro $E \subset \mathbf{N}$ položme $F(E) = \{\frac{1}{n} c_E(n)\}$. Ukažte, že F je σ-aditivní vektorová míra.

41.7. Variace vektorové míry. Buď $F : \Omega \to X$ vektorová míra. Ve shodě s větou 6.9 definujeme *variaci* F jako

$$|F(E)| := \sup\{\sum_{k=1}^{n} ||F(A_k)|| : A_k \in \mathcal{S} \text{ jsou po dvou disjunktní, } \bigcup_{k=1}^{n} A_k = E\}\,.$$

Je-li $|F(\Omega)| < +\infty$, říkáme, že F má *konečnou variaci*.

(a) Ukažte, že variace vektorové míry je nezáporná míra.

(b) Zkoumejte, které z předchozích příkladů vektorových měr mají konečnou variaci.

42. Bochnerův integrál

42.1. Bochnerův integrál. Řekneme, že vektorová funkce $f\colon \Omega \to X$ je *bochnerovsky integrovatelná*, jestliže f je měřitelná a existují jednoduché funkce f_n tak, že $\int_\Omega \|f - f_n\| d\mu \to 0$.

K této definici si uvědomte, že (reálná) funkce $\|f - f_n\|$ je měřitelná (viz důkaz Pettisovy věty). Dále, vždy existuje $\lim \int_B f_n d\mu$ pro každé $B \in \mathcal{S}$, jak ihned plyne z úplnosti X a odhadů

$$\|\int_B f_n - \int_B f_k\| \le \int_B \|f_n - f_k\| \le \int_\Omega \|f_n - f\| + \int_\Omega \|f_k - f\|.$$

(Je-li φ jednoduchá funkce, $\varphi = \sum x_i c_{E_i}$, definujeme samozřejmě $\int_B \varphi d\mu := \sum x_i \mu(E_i \cap B)$.)

Jak se lze v jedné monografii o vektorových funkcích dočíst, v důkazu, že $\int_B \varphi d\mu$ nezávisí na vyjádření $\sum x_i c_{E_i}$ by se mohli vyžívat leda masochisté. Navíc, je-li $\int_B \|f - f_n\| \to 0$, $\int_B \|f - g_n\| \to 0$, $B \in \mathcal{S}$ (kde f_n, g_n jsou jednoduché), je $\lim \int_B f_n = \lim \int_B g_n$ (uvažujte posloupnost $f_1, g_1, f_2, g_2, \ldots$, označte ji $\{h_n\}$ a uvědomte si, že $\int_B \|f - h_n\| \to 0$, tudíž existuje $\lim \int_B h_n$).

Je-li tedy f bochnerovsky integrovatelná, $B \in \mathcal{S}$ a $\{f_n\}$ je posloupnost jednoduchých funkcí, pro niž $\int_B \|f - f_n\| \to 0$, můžeme $\lim \int_B f_n d\mu$ (což je prvek našeho Banachova prostoru X!) nazvat *Bochnerovým integrálem* funkce f přes B a označit $\int_B f d\mu$. Z předchozího plyne, že tato definice je zcela korektní. Základní charakteristiku bochnerovsky integrovatelných funkcí udává následující věta.

42.2. Věta (Bochner). *Buď $f : \Omega \to X$ měřitelná. Potom f je bochnerovsky integrovatelná, právě když $\int_\Omega \|f\| \, d\mu < \infty$ (tj. když (reálná) funkce $\|f\|$ je lebesgueovsky integrovatelná).*

Důkaz. Nechť f je bochnerovsky integrovatelná. Potom $\|f\|$ je měřitelná (cvičení 42.5) a tvrzení plyne z odhadů

$$\int \|f\| \le \int \|f - f_n\| + \int \|f_n\|\,,$$

kde $\{f_n\}$ je posloupnost jednoduchých funkcí, $\int \|f - f_n\| \to 0$.

Nechť naopak $\|f\|$ je integrovatelná. Buďte f_n jednoduché, $f_n \to f$ μ-skoro všude, a položme

$$g_n(\omega) = \begin{cases} f_n(\omega), & \text{jestliže } \|f_n(\omega)\| \le 2\,\|f(\omega)\|\,, \\ 0 & \text{pro ostatní } \omega \in \Omega. \end{cases}$$

Zřejmě g_n jsou opět jednoduché, $\|g_n(\omega)\| \le 2\,\|f(\omega)\|$, $\|f(\omega) - g_n(\omega)\| \to 0$ pro μ-skoro všechna $\omega \in \Omega$. Protože

$$\|f(\omega) - g_n(\omega)\| \le \|f(\omega)\| + \|g_n(\omega)\| \le 3\,\|f(\omega)\|\,,$$

lze užít Lebesgueovy věty 8.13 , podle níž $\int \|f - g_n\| \to 0$. ∎

Označíme-li tedy $\mathcal{L}^1_X$ (přesněji $\mathcal{L}^1_X(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$) prostor všech bochnerovsky integrovatelných funkcí, je $f \in \mathcal{L}^1_X$, právě když $\|f\| \in \mathcal{L}^1$. Některé ze základních vlastností Bochnerova integrálu jsou uvedeny v následující větě.

42.3. Věta (vlastnosti Bochnerova integrálu). *(a) Je-li $f \in \mathcal{L}^1_X$ a $E \in \mathcal{S}$, potom $\left\|\int_E f\right\| \le \int_E \|f\|$.*

(b) $\mathcal{L}^1_X$ je úplný prostor, definujeme-li na něm normu předpisem $\|g\|_1 = \int_\Omega \|g\| \, d\mu$ (tedy, po ztotožnění funkcí lišících se na množině míry nula, $\mathcal{L}^1_X$ je Banachův prostor).

(c) Označíme-li $F(E) = \int_E f d\mu$ (tzv. neurčitý Bochnerův integrál), je F σ-aditivní vektorová míra, která je absolutně spojitá vzhledem k μ. Dokonce, jsou-li $E_n \in \mathcal{S}$ po dvou disjunktní, konverguje řada $\sum_n F(E_n)$ absolutně.

Náznak důkazu. (a) Tvrzení platí (z trojúhelníkové nerovnosti) pro jednoduché funkce. Obecně pak použijeme limitní přechod a Lebesgueovu větu (která platí i ve vektorovém případě).

(b) Důkaz je téměř totožný jako v případě reálných funkcí.

(c) Neurčitý Bochnerův integrál je zřejmě konečně aditivní. Jsou-li $E_n \in \mathcal{S}$ po dvou disjunktní, řada $\sum F(E_n)$ konverguje absolutně ($\sum \|F(E_n)\| \le \sum \int_{E_n} \|f\| = \int_{\bigcup E_n} \|f\| \le \int_\Omega \|f\| < +\infty$) a

$$\big\|F(\bigcup E_n) - \sum_{n=1}^{k} F(E_n)\big\| = \big\|F(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} E_n)\big\| .$$

Tvrzení plyne z toho, že $\lim \mu(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} E_n) = 0$ využitím absolutní spojitosti. Míra $E \mapsto \int_E \|f\| \, d\mu$ je totiž absolutně spojitá vzhledem k μ (viz cvičení 8.22.b), tedy k danému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že kdykoliv $\mu E < \delta$, potom $\big\|\int_E f\big\| \le \int_E \|f\| < \varepsilon$. ■

42.4. Poznámka. Viděli jsme, že neurčitý Bochnerův integrál $E \mapsto \int_E f d\mu$ je σ-aditivní vektorová míra absolutně spojitá vzhledem k μ. Navíc, tato míra má konečnou variaci. Naskýtá se, úplně stejně jako v reálném případě, otázka, zda každá σ-aditivní vektorová míra konečné variace s hodnotami v Banachově prostoru X, která je absolutně spojitá vzhledem k μ, je již neurčitým (Bochnerovým) integrálem z nějaké bochnerovsky integrovatelné funkce. Jinými slovy, je problém, zda Radon-Nikodýmova věta platí i pro vektorové míry. Odpověď je záporná. Vektorová míra z příkladu 41.3.1 je absolutně spojitá vzhledem k Lebesgueově míře. Pro $p = 1$ má konečnou variaci, a přeci není neurčitým integrálem z žádné bochnerovsky integrovatelné funkce.

Řekneme, že Banachův prostor X má *Radon-Nikodýmovu vlastnost* (krátce jen RNP), platí-li Radon-Nikodýmova věta pro vektorové míry s hodnotami v X. (Přesněji, kdykoliv $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s pravděpodobnostní mírou a $\nu\colon \mathcal{S} \to X$ je míra konečné variace, která je absolutně spojitá vzhledem k μ, potom ν je neurčitým Bochnerovým integrálem podle μ z nějaké bochnerovsky integrovatelné funkce.)

Prostor $L^1[0,1]$ tedy nemá RNP. Také prostor c_0, l^∞ či $\mathcal{C}(K)$ (K nekonečný kompakt) nemají RNP; naopak kupříkladu každý reflexivní Banachův prostor má RNP.

42.5. Cvičení. Je-li $f : \Omega \to X$ měřitelná, je i reálná funkce $||f||$ měřitelná. (Toto tvrzení jsme již vlastně dokázali v průběhu důkazu Pettisovy věty 40.3.) Dokažte toto tvrzení přímo.

Návod. Tvrzení je téměř zřejmé v případě, kdy f je jednoduchá. Jsou-li nyní f_n jednoduché, $f_n \to f$ skoro všude, je i $||f_n|| \to ||f||$ skoro všude.

42.6. Cvičení. Buďte f, g silně měřitelné funkce takové, že $\|f\| \le \|g\|$ skoro všude. Je-li g bochnerovsky integrovatelná, je f také.

42.7. Cvičení. Ukažte, že neurčitý Bochnerův integrál je vektorová míra konečné variace.

42.8. Historické poznámky. Pokud jde o Bochnerův integrál, objevuje se v pracích S. Bochnera [1933] a N. Dunforda [1935]. Dnes se používá převážně v teorii funkčních prostorů, zkoumání diferenciálních rovnic v Banachových prostorech či ve studiu otázek souvisejících s geometrií Banachových prostorů.

43. Dunfordův a Pettisův integrál

Základním lemmatem pro zkoumání vektorové integrace pomocí spojitých lineárních forem na X je následující tvrzení.

43.1. Lemma (Dunford). *Buď $f : \Omega \to X$. Jestliže $\varphi \circ f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ pro každé $\varphi \in X^*$, potom ke každému $E \in \mathcal{S}$ existuje $L_E \in X^{**}$ tak, že*

$$L_E(\varphi) = \int_E \varphi \circ f d\mu$$

pro každé $\varphi \in X^*$.

Důkaz. Samozřejmě, funkce f je slabě měřitelná. Zafixujeme $E \in \mathcal{S}$ a definujeme $L_E : \varphi \to \int_E \varphi \circ f$ pro $\varphi \in X^*$. Zřejmě L_E je lineární a potřebujeme dokázat, že L_E je omezený. Definujeme ještě zobrazení $T : \varphi \to \varphi \circ (f c_E)$ $(X^* \to \mathcal{L}^1(\mu))$. Uvědomíme si, že T je uzavřené zobrazení. (Potřebujeme dokázat toto: jestliže $\varphi_n \to \varphi$, $T(\varphi_n) \to g$, potom $T(\varphi) = g$, ale to není těžké. Podle věty 12.4 či cvičení 10.9 existuje vybraná posloupnost $\{\varphi_{n_k}\}$ tak, že $T(\varphi_{n_k}) \to g$ μ-skoro všude, tj. $\varphi_{n_k} \circ (fc_E) \to g$ μ-skoro všude. Protože však $\varphi_n \circ (fc_E) \to \varphi \circ (fc_E)$ všude, je $g = \varphi \circ (fc_E)$ μ-skoro všude. Ježto T je evidentně lineární a prostory X^* a $L^1(\mu)$ jsou Banachovy, je zobrazení T podle věty o uzavřeném grafu omezené). Tudíž

$$\|L_E(\varphi)\| = \|\int_E \varphi \circ f\| = \|\int_\Omega \varphi \circ (fc_E)\| \le \|\varphi \circ (fc_E)\|_1 = \|T\varphi\|_1 \le \|T\|\,\|\varphi\|$$

a vidíme, že $L_E \in X^{**}$. ■

43.2. Slabé integrály. Buď $f\colon \Omega \to X$. Jestliže $\varphi \circ f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ pro každé $\varphi \in X^*$, říkáme, že f je *dunfordovsky integrovatelná* (nebo také *slabě integrovatelná*). Prvek $L_E \in X^{**}$, jehož existenci zaručuje Dunfordovo lemma, pak nazveme *Dunfordovým integrálem* (někdo též říká *Gelfandovým integrálem*) funkce f přes E. Jestliže dokonce $L_E \in X$ pro každé $E \in \mathcal{S}$ (přesněji, $L_E \in \varepsilon X \subset X^{**}$, kde ε je kanonické vnoření X do X^{**}), tj. jestliže existuje $P_E \in X$ tak, že $L_E(\varphi) = \varphi(P_E)$ pro každé $\varphi \in X^*$, říkáme, že f je *pettisovsky integrovatelná*. Prvek $P_E \in X$ se pak zove *Pettisovým integrálem* f přes E. Místo L_E píšeme také $(D)\int_E f$ (a je to prvek X^{**}), zatímco místo P_E (což je prvek X) používáme označení $(P)\int_E f$.

Je-li X reflexivní, lze oba integrály ztotožnit.

43.3. Příklad. Nechť $X = c_0$ a $(\Omega, \mathcal{S}, \mu) = ([0,1], \mathcal{M}, \lambda)$. Definujme zobrazení $f\colon [0,1] \to c_0$ předpisem

$$f(t) = \{c_{(0,1]}(t),\ 2c_{(0,1/2]}(t),\ 3c_{(0,1/3]}, \dots\}\,.$$

Je-li $\varphi \in (c_0)^*$, existuje posloupnost $\{\alpha_n\} \subset l^1$ tak, že $\varphi(x) = \sum_n \alpha_n x_n$ pro každé $x = \{x_n\} \in c_0$. Tudíž (Lebesgueův integrál !)

$$\int_0^1 |\varphi \circ f| = \int_0^1 |\sum \alpha_n n c_{(0,1/n]}(t)|\,dt \le \sum_n \int_0^1 |\alpha_n| n c_{(0,1/n]} = \sum_n |\alpha_n| < +\infty$$

a vidíme, že f je dunfordovsky integrovatelná. Protože

$$\int_0^1 \varphi \circ f = \int_0^1 \sum_n \alpha_n n c_{(0,1/n]} = \sum_n \alpha_n\,,$$

je kupříkladu $(D)\int_0^1 f = \{1,1,1,\dots\}$, což je prvek $l^\infty = (l^1)^* = (c_0)^{**}$, který je určen formou $\varphi \mapsto \sum_n \alpha_n$. Také ihned vidíme (skutečně ?), že f není pettisovsky integrovatelná.

Ukažte sami, že

$$(D)\int_0^{1/n} f = \int_0^{1/n} \varphi \circ f = \int_0^{1/n} \sum_i \alpha_i i c_{[0,1/i]} = \frac{1}{n}\alpha_1 + \frac{2}{n}\alpha_2 + \dots + \frac{n}{n}\alpha_n + \alpha_{n+1} + \dots\,.$$

Tedy

$$(D)\int_0^{1/n} f = \{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}, 1, 1, 1, \dots\} \in l^\infty$$

a

$$\|(D)\int_0^{1/n} f\|_\infty = 1.$$

43.4. Poznámka. Z uvedeného příkladu je vidět ještě další nepříjemné vlastnosti Dunfordova integrálu. Neurčitý Dunfordův integrál

$$F : E \mapsto (D)\int_E f\ ,\ E \in \mathcal{M}$$

není totiž funkce absolutně spojitá ($\lambda[0,1/n] = 1/n \to 0$ a přesto $\|(D)\int_0^{1/n} f\| = 1$). Vektorová míra F také není σ-aditivní (proč?).

Trochu jasno do celé záležitosti přináší následující věta.

43.5. Pettisova věta. *Buď $f\colon \Omega \to X$ dunfordovsky integrovatelná. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *f je pettisovsky integrovatelná,*
(ii) *neurčitý Dunfordův integrál funkce f je σ-aditivní vektorová míra,*
(iii) *neurčitý Dunfordův integrál funkce f je absolutně spojitý (vzhledem k μ).*

Důkaz této věty není nikterak triviální a využívá již hlubších vět funkcionální analýzy. ■

43.6. Poznámky. 1. Je-li f bochnerovsky integrovatelná, je f i pettisovsky integrovatelná a oba integrály splývají na množinách z $\mathcal{S}$.

2. Platí dokonce následující věta:
Nechť $f : \Omega \to X$ je měřitelná a pettisovsky integrovatelná. Potom f je bochnerovsky integrovatelná, právě když neurčitý Pettisův integrál f je vektorová míra konečné variace.

3. Prostor c_0 je v jistém smyslu výjimečný. Neobsahuje-li totiž X kopii c_0 (tj. neexistuje-li v X podprostor algebraicky i topologicky izomorfní s c_0), potom každá měřitelná dunfordovsky integrovatelná funkce je i pettisovsky integrovatelná.

4. A jaký je rozdíl mezi bochnerovskou a pettisovskou integrovatelností? Mějme měřitelnou funkci $f : \Omega \to X$. Existují $x_n \in X$, $E_n \in \mathcal{S}$ tak, že $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n c_{E_n}$ (proč? – jaká konvergence?). Potom

f je pettisovsky integrovatelná, právě když $\sum x_n\mu(E_n \cap E)$ konverguje bezpodmínečně pro každé $E \in \mathcal{S}$,
f je bochnerovsky integrovatelná, právě když $\sum x_n\mu(E_n \cap E)$ konverguje absolutně pro každé $E \in \mathcal{S}$.

Je vidět, že otázky vektorové integrace jsou velmi jemné a vyžadují důkladnější (a pečlivé) studium vlastností Banachových prostorů. Existuje řada pěkných knížek z této oblasti funkcionální analýzy, zájemcům můžeme doporučit třeba J. Diestel and J.J. Uhl [*1977] nebo L. Mišík [*1989].

Tuto kapitolu zakončíme ještě jedním důležitým příkladem.

5. Buď X opět Banachův prostor a K jeho kompaktní podmnožina. Nechť $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ je pravděpodobnostní Radonova míra. Je-li $A \subset X$, nechť $\overline{\text{co}}A$ značí uzavřený konvexní obal A (tedy $\overline{\text{co}}A$ je průnik třech uzavřených konvexních množin obsahujících A – lze ukázat, že je to vlastně uzávěr konvexního obalu A). Existuje (právě jedno) $z \in \overline{\text{co}}K$ tak, že $\varphi(z) = \int\limits_K \varphi d\mu$ pro každé $\varphi \in X^*$. Toto z se nazve *těžištěm* μ. A souvislost s Pettisovým integrálem? Definujeme-li $f(x) = x$ pro $x \in K$, je vlastně $z = (P)\int\limits_K f d\mu$ (ještě jinak: $z = (P)\int\limits_K x d\mu$). Zkuste si sami triviální příklady – kupř. $X = \mathbf{R}$, $K = [0, 1]$, $\mu = \lambda$.

6. Předchozí speciální příklad lze dále zobecňovat. Jedním ze základních kritérií existence Pettisova integrálu je následující věta:
Nechť K je kompaktní podmnožina Banachova prostoru X a μ pravděpodobnostní míra na K. Je-li zobrazení $f\colon K \to X$ spojité, potom existuje Pettisův integrál z f a $(P)\int_K f\, d\mu \in \overline{\text{co}} f(K)$.

43.7. Gravesův integrál. V tomto odstavci podáme stručný nástin analogie Riemannova integrálu pro funkce z intervalu $[0, 1]$ s hodnotami v Banachově prostoru. Především si připomeňme, že Riemannův integrál lze definovat pomocí darbouxovských horních a dolních součtů (a horního a dolního integrálu) či pomocí původní Riemannovy definice pomocí riemannovských součtů. Pojem horního a dolního součtu (využívající uspořádání $\mathbf{R}$ a definici suprema či infima) ovšem nelze bezprostředně použít. V Banachových prostorech není (obecně) žádné uspořádání ! Nicméně obě možnosti zde nyní podáme obecně.

Buď tedy X opět Banachův prostor, f zobrazení z $[0, 1]$ do X. Je-li $D := \{0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = 1\}$ dělení intervalu $[0, 1]$, $I(D) = \{\xi = \{\xi_i\} : \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]\}$, položme

$$\Xi(f, D, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Číslo $\Xi(f, D, \xi)$ nazýváme *riemannovským* součtem. Dále ještě definujme *normu dělení* $\nu D := \max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, ..., n\}$.

(a) Řekneme, že f je *riemannovsky integrovatelná*, existuje-li $z \in X$ s vlastností : Ke každému $\varepsilon > 0$ lze nalézt $\delta > 0$ tak, že

$$||\Xi(f, D, \xi) - z|| < \varepsilon,$$

kdykoliv $\nu D < \delta$ a $\xi \in I(D)$. Je-li f riemannovsky integrovatelná, není těžké ukázat, že prvek z je jednoznačně určen. Nazývá se pak *Gravesův* (někdy též *Riemann–Gravesův*) integrál f, budeme ho značit $(RG)\int_0^1 f$. Stejně jako v reálném případě, f je riemannovsky integrovatelná, právě když existuje $w \in X$ s vlastností: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje dělení D_0 tak, že

$$||\Xi(f, D, \xi) - w|| < \varepsilon,$$

kdykoliv dělení D je *zjemněním* D_0 (tj. $D \subset D_0$) a $\xi \in I(D)$. (Uvědomte si dobře rozdíl obou "definic"!) Pochopitelně, v tomto případě w je Gravesův integrál f.

(b) Gravesův integrál je vlastně definován jako limita "zobecněné" posloupnosti $\{\Xi(f, D, \xi)\}$, která je "uspořádána" ať již pomocí normy či zjemnění.

(c) Je-li f riemannovsky integrovatelná, je omezená (tj. existuje $K > 0$ tak, že $||f(t)|| < K$ pro každé $t \in [0, 1]$).

V dalším budeme používat pojmy z teorie vektorové integrace pro případ prostoru s mírou $([0, 1], \mathcal{M}, \lambda)$.

(d) Je-li $f : [0, 1] \to X$ riemannovsky integrovatelná a $\varphi \in X^*$, je (reálná) funkce $\varphi \circ f$ riemannovsky integrovatelná. Speciálně, f je slabě měřitelná a pettisovsky integrovatelná.

Návod. Skoro vše je jasné, i to, že f je dunfordovsky integrovatelná a $(RG)\int_0^1 = (D)\int_0^1$. Dále z omezenosti f plyne, že $(D)\int_I \in X$ pro každý interval $I \subset [0, 1]$, odkud již lehko vyplyne, že f je pettisovsky integrovatelná.

(e) Definujme (vektorovou) funkci $f : [0, 1] \to l^\infty[0, 1]$ (=prostor všech omezených funkcí na $[0, 1]$ opatřený sup–normou) předpisem $f(t) = c_{[0,t]}$. Pomocí "Bolzano–Cauchyovy podmínky" ukažte, že f je riemannovsky integrovatelná. Z (d) tedy plyne, že f je slabě měřitelná (to lze dokázat i přímo, je-li φ libovolná spojitá lineární forma na $l^\infty[0, 1]$, potom funkce $t \mapsto \varphi(f(t))$ má konečnou variaci (to je vidět z definice) a tudíž je měřitelná). Nicméně f není měřitelná (použijte Pettisovu větu 40.3, všimněte si, že $||f(s) - f(t)|| = 1$ pro $s \neq t$).

(f) Ještě jeden příklad. Definujte $g_E : [0, 1] \to l^\infty[0, 1]$ takto : Je-li $E \subset [0, 1]$, položíme $g_E(t) = c_{\{t\}}$, pokud $t \in E$, jinak $g_E(t)$ bude nulová funkce pro $t \notin E$. Ukažte, že g_E je riemannovsky integrovatelná. Je-li E neměřitelná množina, je i funkce $t \mapsto ||g_E(t)||$ neměřitelná, a tudíž g_E nemůže být měřitelná (srovnej se cvičením 42.5 či s Pettisovou větou 40.3). Za jakých podmínek na množinu E je g_E měřitelná?

(g) Je-li f riemannovsky integrovatelná a měřitelná, je i bochnerovsky integrovatelná (a samozřejmě oba integrály splývají).

Návod. Stačí si uvědomit, že $||f||$ je omezená a měřitelná funkce a použít Bochnerovu charakteristiku 42.2.

(h) Je-li opět $D := \{0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = 1\}$ dělení intervalu $[0, 1]$, položme

$$\mathcal{D}(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \sup\{||f(s) - f(t)|| : s, t \in [x_{i-1}, x_i]\}(x_i - x_{i-1}).$$

Řekneme, že $f : [0, 1] \to X$ je *darbouxovsky* integrovatelná, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $\mathcal{D}(f, D) < \varepsilon$, kdykoliv dělení D splňuje $\nu D < \delta$. Opět, podobně jako v reálném případě, tato definice vyjde nastejno, použijeme-li místo "uspořádání" daného normou "uspořádání" určeného množinovou inkluzí. Rovněž tak důkaz tvrzení, že každá darbouxovsky integrovatelná funkce je i riemannovsky integrovatelná, je skoro stejný jako pro reálné funkce.

(i) Funkce $f : [0, 1] \to X$ je darbouxovsky integrovatelná, právě když f je omezená a spojitá ve skoro všech bodech intervalu $[0, 1]$ (porovnejte s 7.9.d).

Návod. Definujte *oscilaci* funkce g jako

$$t \mapsto \omega_g(t) := \lim_{\delta \to 0_+} \sup\{||g(u) - g(v)|| : u, v \in (t - \delta, t + \delta)\}.$$

Nejdříve si je třeba uvědomit, že f je spojitá v bodě t_0, právě když $\omega_f(t_0) = 0$, a že $\{t \in [0, 1] : \omega_f(t) \geq \alpha\}$ je vždy uzavřená.

Je-li f darbouxovsky integrovatelná, je zřejmě f omezená. Stačí ukázat, že

$$\lambda\{t \in [0, 1] : \omega_f(t) \geq \frac{1}{n}\} = 0$$

pro každé n. Ale to je poměrně snadné.

K důkazu opačné implikace volte $\varepsilon > 0$. Najděte otevřenou množinu $G \subset [0, 1]$ tak, že $\lambda G \sup \|f\| < \varepsilon$ a f je spojitá ve všech bodech kompaktní $K := [0, 1] \setminus G$. Ke každému $t \in K$ najděme největší $\delta_t > 0$ tak, že $\|f(s) - f(t)\| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$ pro všechna $s \in [0, 1] \cap (t - \delta_t, t + \delta_t)$. Rutinní využití kompaktnosti K dává existenci takového $\delta > 0$, že je-li $D := \{0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = 1\}$ dělení intervalu $[0, 1]$ a $\nu D < \delta$, potom každý interval $[x_{i-1}, x_i]$ leží buďto celý v G, nebo splňuje $\|f(s) - f(t)\| \leq \varepsilon$, $s, t \in [x_{i-1}, x_i]$. Pro takové dělení je ovšem $\mathcal{D}(f, D) \leq 3\varepsilon$.

(j) Z předešlého plyne, že každá darbouxovsky integrovatelná funkce je měřitelná (můžete třeba použít Pettisovu větu 40.3 a uvědomit si, že spojitý obraz separabilního prostoru je separabilní), a tudíž podle Bochnerovy věty 42.2 je i bochnerovsky integrovatelná.

(k) Také každá omezená funkce, která je spojitá skoro všude, je riemannovsky integrovatelná. Opak však nemusí být pravdou. Volíme-li v příkladu z (f) $E = \mathbf{Q}$, je funkce $g_{\mathbf{Q}}$ riemannovsky integrovatelná, $||g_{\mathbf{Q}}||$ je Dirichletova funkce z 7.5, nemůže tedy $g_{\mathbf{Q}}$ být spojitá v žádném bodě intervalu $[0, 1]$ (uvědomte si, že norma je spojitá funkce).

(l) Ve vektorovém případě tedy nesplývají třídy darbouxovsky a riemannovsky integrovatelných funkcí. Není známa žádná uspokojivá charakteristika Banachových prostorů, pro něž to platí.

43.8. Cvičení. Buď $X = c_0$, $(\Omega, \mathcal{S}, \mu) = ([0,1], \mathcal{M}, \lambda)$. Definujte

$$f(t) = \{c_{(0,1]}(t), 2c_{(0,1/2]}(t), 3c_{(0,1/3]}(t), ...\},$$
$$g(t) = \{c_{(1/2,1]}(t), 2c_{(1/3,1/2]}(t), 3c_{(1/4,1/3]}(t), ...\},$$
$$h(t) = \{\sum_{n=1}^{\infty} nc_{(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]}(t), 0, 0, ...\}.$$

a ukažte, že

(a) g je pettisovsky integrovatelná funkce,

(b) f (jak jsme ukázali v textu) není pettisovsky integrovatelná funkce, ale je integrovatelná dunfordovsky,

(c) h není ani dunfordovsky integrovatelná, je však alespoň měřitelná (slabě či silně ?),

(d) $\|f(t)\| = \|g(t)\| = \|h(t)\|$ pro všechna $t \in [0,1]$.

43.9. Cvičení. Definujte zobrazení f intervalu $(0,1)$ (uvažovaného s Lebesgueovou mírou) do Hilbertova prostoru l^2 předpisem

$$f : x \mapsto (\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x+2}, \frac{1}{x+3}, ...), x \in (0,1).$$

Ukažte, že $(P)\int_0^1 f = \{\log(1 + \frac{1}{n})\}_n$.

43.10. Cvičení. Opět uvažujte prostor s mírou $([0,1], \mathcal{M}, \lambda)$. Buď $e_n := \{0, ..., 0, 1, 0, ...\}$ (jednička je na n-tém místě), $e_0 = \{0, 0, ...\}$ (nulový prvek v prostorech posloupností).

(a) Nechť $\{r_n\}$ je posloupnost všech racionálních čísel intervalu $[0,1]$. Položte $f(r_n) = e_n$ a $f = e_0$ jinde. Ukažte, že $f : [0,1] \to c_0$ je měřitelná a bochnerovsky integrovatelná (je dokonce riemannovsky integrovatelná).

(b) Uvažujte zobrazení f jako v (a), pouze prostor c_0 nahraďte l^p, $1 \le p < \infty$ a zkoumejte jeho měřitelnost a integrovatelnost.

(c) Buď $\alpha \in \mathbf{R}$. Definujte

$$h(t) = \{n^{\alpha} c_{(0,\frac{1}{n}]}(t)\}_n, \text{ pokud } t \in [0,1]\}.$$

Buď dále X jeden z Banachových prostorů c_0, l^p, $1 \le p \le \infty$. Ukažte, že h je v každém případě měřitelná. To není příliš těžké, zrovna tak, jako rozhodnout v případě $X = c_0$ či $X = l^{\infty}$, že h je dunfordovsky integrovatelná, právě když $\alpha \le 1$. Dále h je pettisovsky integrovatelná, právě když je bochnerovsky integrovatelná, a to je právě v případě $\alpha < 1$. Ostatní případy jsou již technicky náročnější, jsou popsány (ještě s dalšími příklady) v I. Chitescu [1990].

43.11. Historické poznámky. Základní vlastnosti Pettisova integrálu se objevují v práci B.J. Pettise [1938], přičemž i N. Dunford v [1936] již tento integrál studoval. Také další ze slabých integrálů (pro funkce s hodnotami v duálech Banachových prostorů) byl zaveden I.M. Gelfandem v [1936]. Pettisův integrál dnes hraje klíčovou roli v různých teoretických partiích funkcionální analýzy. L.M. Graves přenesl riemannovskou definici pro případ vektorových funkcí na intervalu $[0,1]$ v [1927]. Podrobné zpracování historie vektorové integrace lze nalézt v T.H. Hildebrandt [1953].

APPENDIX O TOPOLOGII

V tomto dodatku se stručně zmíníme o některých topologických pojmech, které jsme v textu používali a které by nemusely být zcela běžné čtenáři. Ostatní pojmy používáme asi v rozsahu běžných kurzovních přednášek z matematické analýzy.

Připomeňme, že pod *topologií* rozumíme vždy takový systém τ podmnožin množiny X, pro nějž platí

(a) $\emptyset, X \in \tau$,
(b) $A, B \in \tau \implies A \cap B \in \tau$,
(c) $A_\alpha \in \tau \implies \bigcup\limits_\alpha A_\alpha \in \tau$.

Množinám ze systému τ říkáme *otevřené*. Jejich doplňky se nazývají *uzavřené* množiny.

Bází topologie τ rozumíme takový systém množin $\mathcal{B} \subset \tau$, že libovolná otevřená množina lze vyjádřit jako sjednocení množin z nějakého podsystému $\mathcal{B}$. Jelikož často se topologie zadává právě pomocí nějaké báze $\mathcal{B}$ předpisem $\tau = \{\bigcup\{B \colon B \in \mathcal{Z}\} \colon \mathcal{Z} \subset \mathcal{B}\}$, je dobré vědět, kdy soustava množin určuje tímto způsobem topologii. Odpověď je následující.

Soustava množin $\mathcal{B}$ tvoří bázi nějaké topologie na X, právě když $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ a je-li $z \in B_1 \cap B_2$, kde $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, existuje $B \in \mathcal{B}$ tak, že $z \in B \subset B_1 \cap B_2$.

Důležitějším příkladem je topologie metrického prostoru, která je určena systémem všech jeho otevřených podmnožin. Báze této topologie je kupříkladu tvořena všemi otevřenými koulemi. *Diskrétní* topologie na X je určena soustavou všech jeho podmnožin a jednobodové množiny tvoří její bázi.

Velice obecné topologické prostory mohou mít často hodně komplikovanou strukturu a leckdy se i vymykají z běžných představ, které si přinášíme třeba z topologií eukleidovských prostorů. V celém skriptu předpokládáme, že všechny prostory jsou *Hausdorffovy*: Jsou-li x, y dva různé body prostoru X, existují disjunktní otevřené množiny $G_x, G_y \in \tau$ tak, že $x \in G_x$, $y \in G_y$.

Okolím bodu $z \in X$ rozumíme každou množinu, která obsahuje z ve svém vnitřku. *Vnitřek* množiny M je přitom definován jako největší otevřená množina obsažená v M – ta vždy existuje, stačí totiž vzít sjednocení všech otevřených množin obsažených v M.

Podobně jako vnitřek množiny, definuje se *uzávěr* $\overline{A}$ množiny A jako nejmenší uzavřená množina obsahující A (existuje!). Množina E je *hustá* v X, jestliže $\overline{E} = X$, a *řídká*, jestliže její uzávěr má prázdný vnitřek.

Separabilní jsou ty prostory, které obsahují hustou spočetnou množinu. Mezi metrickými prostory jsou to právě ty, které mají *spočetnou bázi*.

Jsou-li X, Y topologické prostory, řekneme, že zobrazení $f : X \to Y$ je *spojité*, jestliže vzor každé otevřené množiny v Y je množina otevřená v X. Lze také obvyklým způsobem pomocí okolí definovat *spojitost v bodě*. Zobrazení je pak spojité, je-li spojité v každém bodě.

Funkce f je spojitá na prostoru X, právě když množiny

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}, \{x \in X : f(x) < \alpha\}$$

jsou otevřené pro každé $\alpha \in \mathbf{R}$. Funkce f na X se zove *polospojitá zdola*, jestliže množina $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ je otevřená pro každé $\alpha \in \mathbf{R}$.

Prosté zobrazení $f : X \to Y$ se nazve *homeomorfismem*, je-li samo spojité a také inverzní zobrazení $f^{-1} : f(X) \to X$ je spojité.

Topologie kartézského součinu dvou topologických prostorů X_1 a X_2 je určená bází všech množin tvaru $G_1 \times G_2$, kde G_j probíhají všechny otevřené množiny v X_j.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Normální topologický prostor je takový, v němž každé dvě disjunktní uzavřené množiny lze oddělit (disjunktními) otevřenými množinami. Jsou to právě ty prostory, kde platí následující *Urysohnovo lemma a Tietzeova věta.*

Urysohnovo lemma. Jsou-li F_1, F_2 dvě disjunktní uzavřené podmnožiny normálního topologického prostoru X, existuje spojitá funkce f na X tak, že

$$0 \le f \le 1\,, \quad f = 0 \text{ na } F_1\,, \quad f = 1 \text{ na } F_2\,.$$

Tietzeova věta. Je-li f spojitá funkce na uzavřené podmnožině Z normálního topologického prostoru X, existuje spojitá funkce F na X tak, že

$$f = F \text{ na } Z \text{ a } \sup_X |F| = \sup_Z |f|\,.$$

Každý metrický prostor je normální.

Zajímavou, a z hlediska teorie míry, důležitou třídou topologických prostorů jsou *lokálně kompaktní* prostory. To jsou ty prostory, v nichž každý bod má kompaktní okolí. *Kompaktní* množiny se definují jako ty, z jejichž každého pokrytí otevřenými množinami lze vybrat pokrytí konečné. Lokálně kompaktní prostory nemusejí být normální, nicméně i v nich platí jisté Urysohnovo lemma.

Urysohnovo lemma. Je-li K kompaktní a U otevřená podmnožina lokálně kompaktního prostoru X, $K \subset U \subset X$, existuje spojitá funkce f na X a kompaktní množina L s vlastnostmi

$$K \subset L \subset U\,, \quad 0 \le f \le 1\,, \quad f = 1 \text{ na } K\,, \quad f = 0 \text{ na } X \setminus L.$$

Každý lokálně kompaktní prostor se spočetnou bází je metrizovatelný. Kartézský součin konečně mnoha lokálně kompaktních prostorů je lokálně kompaktní prostor.

Nechť $\mathcal{C}(X)$ značí prostor spojitých (reálných či komplexních) spojitých funkcí na kompaktu X. Definujeme-li

$$||f|| := \max\{|f(t)| : t \in X\} \text{ pro } f \in \mathcal{C}(X),$$

je $\mathcal{C}(X)$ s takto definovanou normou Banachův prostor.

Konvergence v prostoru $\mathcal{C}(X)$ je samozřejmě stejnoměrnou konvergencí. I bodová konvergence může za jistých předpokladů zajistit konvergenci v $\mathcal{C}(X)$, jak svědčí následující věta.

Diniho věta. Je-li $\{f_n\}$ monotonní posloupnost spojitých funkcí na kompaktním prostoru konvergující bodově ke spojité funkci, potom tato konvergence je stejnoměrná.

Buď $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(X)$. Řekneme, že $\mathcal{A}$

- je *algebra*, jestliže $fg \in \mathcal{A}$ pro každé $f, g \in \mathcal{A}$,
- je *svaz*, jestliže $\max(f, g), \min(f, g) \in \mathcal{A}$, pokud $f, g \in \mathcal{A}$,
- *odděluje body* X, jestliže ke každé dvojici $x, y \in X$, $x \ne y$ existuje $\varphi \in \mathcal{A}$ tak, že $\varphi(x) \ne \varphi(y)$.

Následující věta bývá užitečná v mnoha partiích moderní analýzy.

Stone–Weierstrassova věta. Nechť X je kompaktní prostor a $\mathcal{A}$ lineární podprostor $\mathcal{C}(X)$. Jestliže $\mathcal{A}$ splňuje následující podmínky:

(a) $\mathcal{A}$ tvoří algebru nebo svaz,
(b) $\mathcal{A}$ odděluje body X,
(c) $\mathcal{A}$ obsahuje konstantní funkce,

potom $\mathcal{A}$ je hustý v $\mathcal{C}(X)$.

Nechť P je kompaktní metrický prostor. Pak existuje spočetná báze $\{V_n\}$ topologie na P. Položme $f_n(x) = \operatorname{dist}(x, P \setminus V_n)$ a uvažujme algebru funkcí generovanou $\{f_n\}$. Ze Stone-Weierstrassovy věty dostáváme následující užitečné tvrzení.

Věta. Je-li P kompaktní metrický prostor, je $\mathcal{C}(P)$ separabilní.

PŘEHLED LITERATURY

Uebnice a skripta v eskm jazyce

L. Boček
[Boč] *Te[redacted]zorový počet*, SNTL Praha, 1976.

I. Černý a J. Mařík
[ČM I] *Int[redacted]rální počet I*, skripta, SPN Praha 1960.
[ČM II] *Inte[redacted]ální počet II*, skripta, SPN Praha 1961.

S. Fučík a J. Milota
[FM] *M[redacted]tematická analýza II. Diferenciální počet funkcí více proměnných*, skripta, SPN Praha 1975.

O. Kowalski
[Kow] *Zá[redacted]ady matematické analýzy na varietách*, skripta, UK Praha 1975.

J. Král, I. Netuka a J. Veselý
[KNV] *Teo[redacted]e potenciálu III (skripta)*, skripta, SPN Praha 1976.

J. Kučera a Š. Schwabik
[KS] *I[redacted]egrální transformace*, SPN Praha 1969.

J. Lukeš
[L-P] *Pří[redacted]lady z matematické analýzy I. Příklady k teorii Lebesgueova integrálu*, skripta, SPN Praha 1968 (1972, 1984).
[L-T] *Te[redacted]rie míry a integrálu I*, skripta, SPN Praha 1972 (1974, 1980).

J. Lukeš a kolektiv
[Problémy] *Problém[redacted] z matematické analýzy*, skripta, SPN Praha 1972 (1974, 1977, 1982).

S. Marcus
[Mar] *M[redacted]ematická analýza čtená podruhé*, Academia Praha 1976.

I. Netuka a J. Veselý
[NV] *P[redacted]klady z matematické analýzy. Míra a integrál*, skripta, UK Praha 1982.

W. Rudin
[Ru] *A[redacted]alýza v reálném a komplexním oboru*, Academia Praha 1977.

R. Sikorski
[Sik] *D[redacted]ferenciální a integrální počet. Funkce více proměnných*, Academia Praha 1973.

J. Stará a O. John
[SJ] *[redacted]unkcionální analýza. Nelineární úlohy*, skripta, SPN Praha 1986.

Ostatní knihy

C.D. Aliprantis and O. Burkinshaw
[*1981] *Pri[redacted]iples of real analysis*, North-Holland.

E. Asplund and L. Bungart
[*1966] *A fi[redacted]st course in integration*, Holt, Reinhart and Winston.

G. Bachman
[*1964] *Ele[redacted]ents of abstract harmonic analysis*, Academic Press.

S. Banach
[*1932] *Thé[redacted]rie des opérations linéaires*, Warszava.

R.G. Bartle
[*1966] *The [redacted]lements of integration*, Wiley.

H. Bauer
[*1990] *Ma[redacted] und Integrationstheorie*, Walter de Gruyter.

E. Behrends
[*1987] [redacted] und Integrationstheorie, Springer-Verlag.

S.K. Berberian
[*1965] [redacted]ure and integration, Macmillan.

M. Berger and B. Gostiaux
[*1988] [redacted]rential geometry: Manifolds, Curves, and Surfaces, Springer-Verlag.

K.P.S. Bhaskara Rao and M. Bhaskara Rao
[*1983] [redacted]ry of charges, Academic Press.

P. Billingsley
[*1968] [redacted]ergence of probability measures, John Wiley 1968, ruský překlad Moskva 1977.
[*1979] [redacted]bility and measure, Wiley.

E. Borel
[*1898] [redacted]s sur la théorie des fonctions, Gauthier-Villars, Paris.

T.A. Botts and E.J. McShane
[*1959] [redacted]Analysis, Van Nostrand.

N. Bourbaki
[*1952] [redacted]ration, Herman et Cie, Paris 1952, druhé vydání 1965.

C. Carathéodory
[*1918] [redacted]sungen über reelle Funktionen, Teubner Leipzig 1918, 2. vyd. 1927, 3. vyd. Chelsea 1948.

A.L. Cauchy
[*1821] [redacted]s d'analyse de l'École Royale Polytechnique, Paris.

G. Choquet
[*1969] [redacted]res on analysis, Vol. I, W.A. Benjamin.

Donald L. Cohn
[*1980] [redacted]ure theory, Birkhäuser.

C. Constantinescu, K. Weber and A. Sontag
[*1985] [redacted]ration theory, Vol. 1: Measure and integral, John Wiley & Sons.

M. Davis
[*1977] [redacted]ed nonstandard analysis, Wiley-Interscience.

K. Deimling
[*1985] [redacted]near functional analysis, Springer–Verlag.

J. Diestel and J.J. Uhl
[*1977] [redacted]r measures, AMS.

R.M. Dudley
[*1989] [redacted]analysis and probability, Wadsworth&Brooks/Cole.

G.A. Edgar
[*1990] [redacted]ure, topology, and fractal geometry, Springer–Verlag.

K.J. Falconer
[*1985] [redacted]eometry of fractal sets, Cambridge University Press.

H. Federer
[*1969] [redacted]etric measure theory, Springer–Verlag 1969, Moskva 1987.

W.H. Fleming
[*1965] [redacted]tions of several variables, Addison–Wesley.

K. Floret
[*1981] [redacted] und Integrationstheorie, B.G. Teubner-Verlag, Stuttgart.

Gerald B.Folland
[*1984] [redacted]analysis, John Wiley.

J. Foran
[*1991] [redacted]amentals of real analysis, Marcel Dekker.

D.H. Fremlin
[*1974] [redacted]ogical Riesz spaces and measure, Cambridge University Press.

S. Fučík, J. Nečas, J. Souček and V. Souček
[*1973] *Spe*[redacted]*ral analysis of nonlinear operators*, Lecture Notes in Math. 346, Springer–Verlag 1973.

M. de Guzmán
[*1975] *Diff*[redacted]*rentiation of integrals in* $\mathbf{R}^n$, Springer Verlag.

H. Hahn
[*1921] *The*[redacted]*rie der reellen Funktionen, "I. Band"*, Julius Springer, Berlin.

H. Hahn and A. Rosenthal
[*1948] *Set* [redacted]*unctions*, Univ. New Mexico Press.

P.R. Halmos
[*1950] *Mea*[redacted]*ure theory*, Van Nostrand 1950, 1966, Springer 1974.

T. Hawkins
[*1970] *Lebe*[redacted]*gue's theory of integration (Its origins and development)*, Wisconsin Press.

R. Henstock
[*1988] *Lect*[redacted]*res on the theory of integration*, World Scientific Publishing, Singapore.
[*1991] *The*[redacted]*eneral theory of integration*, Clarendon Press, Oxford.

E. Hewitt and K.A. Ross
[*1963] *Abs*[redacted]*act harmonic analysis I*, Academic Press 1963 (ruský překlad 1975).
[*1970] *Abs*[redacted]*act harmonic analysis II*, Academic Press 1970 (ruský překlad 1975).

E. Hewitt and K. Stromberg
[*1965] *Rea*[redacted]*and abstract analysis*, Springer Verlag.

K. Hoffman
[*1975] *Ana*[redacted]*ysis in Euclidean spaces*, Prentice-Hall Inc.

J. Horváth
[*1966] *Top*[redacted]*ogical vector spaces and distributions I*, Addison Wesley.

K. Jacobs
[*1978] *Mea*[redacted]*ure and integral*, Academic Press.

A.N. Kolmogorov
[*1933] *Gru*[redacted]*dbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung [Foundations of the theory of probability]*, Springer-Verlag 1933, Chelsea 1950.

J. Kurzweil
[*1980] *Nich*[redacted]*absolut konvergente Integrale*, B.S.B.G. Teubner, Leipzig.

H.L. Lebesgue
[*1904] *Leço*[redacted]*s sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Paris, 2. vydání 1928.

Peng Yee Lee
[*1989] *Lan*[redacted]*hou lectures on Henstock integration*, World Scientific Publishing Co..

S. Lojasiewicz
[*1988] *An* [redacted]*troduction to the theory of real functions*, John Wiley & Sons.

J. Lukeš, J. Malý and L. Zajíček
[*1986] *Fin*[redacted]*topology methods in real analysis and potential theory*, Lecture Notes in Math. 1189, Springer–Verlag, Berlin - New York.

J. Lützen
[*1982] *The*[redacted]*prehistory of the theory of distributions*, Springer–Verlag.

N.N. Luzin
[*1915] *Inte*[redacted]*ral i trigonometričeskie rjady*, Moskva 1915, 2. vydání 1950.

P. Mattila
[*1986] *Lect*[redacted]*re notes on geometric measure theory*, Universidad de Extremadura.

J. Mawhin
[*1992] *Ana*[redacted]*yse (Fondaments, techniques, évolution)*, DeBoeck Université, Bruxelles.

J. Mikusiňski
[*1978] *The*[redacted]*Bochner integral*, Birkhäuser.

H. Minkowski
[*1907] *Diop*[redacted]*antische Approximationen*, Teubner, Leipzig.

L. Mišík
[*1989] *Fun[redacted]cionálna analýza*, Alfa.

F. Moran
[*1988] *Geo[redacted]etric measure theory*, Academic Press.

A. Mukherjea and K. Pothoven
[*1986] *Rea[redacted] and functional analysis, Part A and B*, Plenum Press.

M.E. Munroe
[*1971] *Mea[redacted]ure and integration*, Addison-Wesley.

L. Nachbin
[*1965] *The[redacted] Haar integral*, Van Nostrand.

T. Neubrunn a B. Riečan
[*1981] *Mie[redacted] a integrál*, Veda.

J.C. Oxtoby
[*1971] *Mea[redacted]ure and category*, Springer-Verlag 1971, 1980, Moskva 1974.

K.R. Parthasarathy
[*1978] *Intr[redacted]duction to probability and measure*, Springer-Verlag.

Gert K. Pedersen
[*1989] *Ana[redacted]ysis now*, Springer-Verlag.

W.F. Pfeffer
[*1977] *Inte[redacted]rals and measures*, Marcel Dekker, New York.

M.M. Rao
[*1987] *Mea[redacted]ure theory and integration*, John Wiley & Sons.

C.A. Rogers
[*1970] *Hau[redacted]dorff measures*, Cambridge University Press.

A.C.M. van Rooij and W.H. Schikhof
[*1982] *A se[redacted]ond course on real functions*, Cambridge University Press.

H.L. Royden
[*1968] *Rea[redacted] analysis*, Macmillan.

S. Saks
[*1937] *The[redacted]y of the integral*, Stechert 1937 (mnoho dalších vydání).

Š. Schwabik
[*1992] *Gen[redacted]ralized ordinary differential equations*, World Scientific, Singapore.

J.T. Schwartz
[*1969] *Non[redacted]near functional analysis*, Gordon and Breach, New York.

I. Segal and R.A. Kunze
[*1968] *Inte[redacted]rals and operators*, McGraw-Hill.

L. Simon
[*1983] *Lect[redacted]res on geometric measure theory*, Proc. of the Centre for mathematical analysis, Australian National University, vol.3.

K.T. Smith
[*1983] *Pri[redacted]er on modern analysis*, Springer-Verlag.

K. Stromberg
[*1981] *An [redacted]troduction to classical real analysis*, Wadsworth International.

M. Švec, T. Šalát a T. Neubrunn
[*1987] *Mat[redacted]matická analýza funkcí reálnej premennej*, Alfa.

A.E. Taylor
[*1965] *Gen[redacted]ral theory of functions and integration*, Blaisdell.

F. Topsoe
[*1970] *Top[redacted]ogy and measure*, Springer-Verlag.

A. Torchinsky
[*1988] *Rea[redacted] variables*, Addison-Wesley.

G. Vitali
[*1905] *Sul [redacted]roblema della misura dei gruppi di punta di una retta*, Bologna.

S. Wagon
[*1985] *The [redacted]Banach-Tarski paradox*, Cambridge University Press.

A. Weil
[*1940] *In[redacted]égration dans les Groupes Topologiques et ses Applications*, Hermann et Cie, Paris 1940, 2.vydání 1965.

A.J. Weir
[*1973] *Lebe[redacted]gue integration and measure*, Cambridge University Press.

R.L. Wheeden and A. Zygmund
[*1977] *Mea[redacted]ure and integral*, Marcel Dekker.

H. Widom
[*1969] *Lect[redacted]res on measure and integration*, Van Nostrand.

J.H. Williamson
[*1962] *Lebe[redacted]gue integration*, Holt,Rinehart and Winston.

A.C. Zaanen
[*1967] *Inte[redacted]ration*, North Holland.

lnky

S. Banach
[1922] *Su[redacted]les opérations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux équations intégrales*, Fund. Math. **3**, 133-181.
[1923] *Su[redacted]le problème de la mesure*, Fund. Math. **4**, 7-33.
[1924] *Su[redacted]un theorème de M. Vitali*, Fund. Math. **5**, 130-136.
[1925] *Su[redacted]les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie*, Fund. Math. **7**, 225-237.

S. Banach and A. Tarski
[1924] *Su[redacted]la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*, Fund. Math. **6**, 244-277.

H. Bauer
[1957] *Su[redacted]l'équivalence des théories de l'intégration selon N. Bourbaki et selon M.H. Stone*, Bull. Soc. math. France **85**, 51-75.

A.S. Bezikovič
[1945] *[redacted]eneral form of the covering principle and relative differentiation of additive functions*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **41**, 103-110.
[1946] *[redacted]eneral form of the covering principle and relative differentiation of additive functions*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **42**, 1-10.

S. Bochner
[1933] *Int[redacted]gration von Funktionen deren Werte die Elemente eines Vectorraumes sind*, Fund. Math. **20**, 262-276.

E. Borel
[1895] *Su[redacted]quelques points de la théorie des fonctions*, Ann. Ecole Normale Sup. **12**, 9-55.

G.E. Bredon
[1963] *[redacted]ew treatment of the Haar integral*, Michigan Math. J. **10**, 365-373.

C. Carathéodory
[1914] *Üb[redacted]r das lineare Mass von Punktmengeneine Verallgemeinerung des Längenbegriffs*, Nach. Ges. Wiss. Göttingen, [redacted] 404-426.

H. Cartan
[1940] *Su[redacted]la mesure de Haar*, C. R. Acad. Sci. Paris **211**, 759-762.

I. Chitescu
[1990] *[redacted]arametrical example of Dunford, Pettis and Bochner integration*, Stud. Cerc. Mat. **42**, 405-418.

G. Choquet
[1989] *Vz[redacted]ik teorie kapacit: zamyšlení nad vlastní zkušeností*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie **34**, 71-83.

P.J. Daniell
[1918] *[redacted]eneral form of integral*, Ann. of Math. **19**, 279-284.

R. Doss
[1980] *Th[redacted] Hahn decomposition theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **80**, 377.

N. Dunford
[1935] *Integration in general analysis*, Trans. Amer. Math. Soc. **37**, 441-453.
[1936] *Integration and linear operation*, Trans. Amer. Math. Soc. **40**, 474-494.

G. Faber
[1910] *Über stetige Funktionen. II*, Math. Annalen **69**, 372-433.

P.J.L. Fatou
[1906] *Séries trigonométriques et séries de Taylor*, Acta Math. **30**, 335-400.

M.B. Feldman
[1981] *A proof of Lusin's theorem*, Amer. Math. Monthly **88**, 191-192.

E. Fischer
[1907] *Sur la convergence en moyenne*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **144**, 1022-1024.

M. Foreman and F. Wehrung
[1991] *The Hahn-Banach theorem implies the existence of a non Lebesgue-measurable set*, Fund. Math. **138**, 13-19.

M. Fréchet
[1915] *Sur l'intégrale d'une fonctionnelle étendue à un ensemble abstrait*, Bull. Soc. Math. France **43**, 248-265.
[1924] *Des familles et fonctions additives d'ensembles abstraits*, Fund. Math. **5**, 206-251.

G. Fubini
[1907] *Sugli integrali multipli*, Rendiconti Accad. Nazionale dei Lincei (Rome) **16**, 608-614.
[1915] *Sulla derivazione per serie*, Rendiconti Accad. Nazionale dei Lincei (Roma) **24**, 204-206.

I.M. Gel'fand
[1936] *Sur un lemme de la théorie des espaces linéaires*, Comm. Ins. Sci. Math. Méc. Univ. de Kharkov et Soc. Mat. Kharkov **13**, 35-40.

H.H. Goldstine
[1941] *Linear functionals and integrals in abstract spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **47**, 615-620.

L.M. Graves
[1927] *Riemann integration and Taylor's theorem in general analysis*, Trans. Amer. Math. Soc. **29**, 163-177.

A. Haar
[1933] *Der Maßbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen*, Ann. of Math. **34**, 147-169.

H. Hahn
[1933] *Über die multiplikation total-additiver Mengenfunktionen*, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa **2**, 429-452.

O. Hájek
[1957] *Note sur la mesurabilité B de la dérivée supérieure*, Fund. Math. **44**, 238-240.

D.G. Hartig
[1983] *The Riesz representation theorem revisited*, Amer. Math. Monthly **90**, 277-280.

F. Hausdorff
[1919] *Dimension und äusseres Mass*, Math. Ann. **79**, 157-179.

R. Henstock
[1961] *Definitions of Riemann type of the variational integrals*, Proc. London Math. Soc. **13,3**, 305-321.
[1988] *A short history of integration theory*, SEA Bull. Math. **12**, 75-95.

T.H. Hildebrandt
[1953] *Integration in abstract spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **59**, 111-139.

O. Hölder
[1889] *Über einen Mittelwerthssatz*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys., 38-47.

J. Horváth
[1970] *An introduction to distributions*, Amer. Math. Monthly **77**, 227-240.

D. Jegorov
[1911] *Sur les suites de fonctions mesurables*, C. R. Acad. Sci. Paris **152**, 244-246.

C. Jordan
[1881] *Sur la série de Fourier*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **92**, 228-230.

S. Kakutani
[1941] *Concrete representation of abstract (M)-spaces*, Annals of Math. **42**, 994-1024.
[1948] *A proof of the uniqueness of Haar's measure*, Ann. Math. **49**, 225-226.

S. Kakutani and J.C. Oxtoby

[1950] *Co*[redacted]*struction of a non-separable invariant extension of the Lebesgue measure space*, Annals of Math. **52**, 580-590.

M.D. Kirszbraun

[1934] *Üb*[redacted]*r die zussammenziehenden und Lipschitzchen Transformationen*, Fund. Math. **22**, 77-108.

J. Kurzweil

[1957] *Ge*[redacted]*eralized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter*, Czechoslovak Math. J. **82**, 418-446.

H. Lebesgue

[1901] *Su*[redacted] *une généralisation de l'intégrale définie*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **132**, 1025-1028.

[1902] *Int*[redacted]*grale, longuer, aire*, Annali Mat. Pura Appl. **7**, 231-359.

[1910] *Su*[redacted] *l'intégration des fonctions discontinues*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **27**, 361-450.

B. Levi

[1906] *Sop*[redacted]*a l'integrazione delle serie*, Rend. Instituto Lombardo di Sci. e Lett. **39**, 775-780.

A. Ljapunov

[1940] *Su*[redacted] *les fonctions–vecteurs complètement additives*, Bull. Acad. Sci. URSS **6**, 465-478.

N.N. Luzin

[1912] *Su*[redacted] *les propriétés des fonctions mesurables*, C. R. Acad. Sci. Paris **154**, 1688-1690.

J. Mařík

[1952] *Zá*[redacted]*ady theorie integrálu v Euklidových prostorech*, Časopis Pěst. Mat. **77**, 1-51, 125-145, 267-301.

E.J. McShane

[1934] *Ex*[redacted]*nsion of range of functions*, Bull. Amer. Math. Soc. **40**, 837-842.

F.A. Medvedev

[1975] *Th*[redacted] *work of Henri Lebesgue on the theory of functions (on the occasion of his centenary) Transl. from Uspechi Mat. Nauk, 30(1975), 227-238*, Russian Math.Surveys **30**, 179-191.

G.J. Minty

[1970] *On*[redacted] *the extension of Lipschitz, Lipschitz–Hölder continuous and monotone functions*, Bull. Amer. Math. Soc. **76**, 334-339.

A.P. Morse

[1939] *Th*[redacted] *behaviour of a function on its critical set*, Ann. of Math. **40**, 62–70.

[1947] *Pe*[redacted]*ect blankets*, Trans. Amer. Math. Soc. **6**, 418-442.

A. Nekvinda and L. Zajíček

[1988] [redacted]*mple proof of the Rademacher theorem*, Časopis Pěst. Mat. **113**, 337-341.

J. von Neumann

[1934] *Zu*[redacted] *Haarschen Maß in topologischen Gruppen*, Compositio Math. **1**, 106-114.

[1936] *Th*[redacted] *uniqueness of Haar's measure*, Matem. sbornik **43**, 721-734.

O. Nikodym

[1930] *Su*[redacted] *une généralisation des intégrales de M.J. Radon*, Fund. Math. **15**, 131-179.

O. Perron

[1914] *Üb*[redacted]*r den Integralbegriff*, Sitzungsber. Heidelberg Akad. Wiss. **A16**, 1-16.

F. Peter and H. Weyl

[1927] *Di*[redacted] *Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe*, Math. Ann. **97**, 737-755.

B.J. Pettis

[1938] *On*[redacted] *integration in vector spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **44**, 277-304.

H. Rademacher

[1919] *Üb*[redacted]*r partielle und totale Differenzierbarkeit*, Math. Ann. **89**, 340-359.

J. Radon

[1913] *Th*[redacted]*rie und Anwendungen der absolut additiv Mengenfunktionen*, S.-B. Math. Natur. Kl. Kais. Akad. Wiss. Wien **122.IIa**, 1295-1438.

F. RIESZ

[1906] *Su[redacted]les ensembles de fonctions*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **143**, 738-741.

[1909a] *Sur [redacted]s suites de fonctions mesurables*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **148**, 1303-1305.

[1909b] *Sur [redacted]s opérations fonctionnelles linéaires*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **149**, 974-977.

[1910] *Un[redacted]ersuchungen über Systeme integrirbarer Funktionen*, Math. Annalen **69**, 449-497.

[1913] *Su[redacted] quelques points de la théorie des fonctions sommables*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **154**, 641-643.

[1920] *Su[redacted] l'intégrale de Lebesgue*, Acta Math. **42**, 191-205.

[1930-32] *Sur l'[redacted]istence de la dérivée des fonctions monotones et sur quelques problèmes qui s'y rattachent*, Acta Sci. Math. Szeged **5**, 208-221.

L.J. ROGERS

[1888] *An [redacted]xtension of a certain theorem in inequalities*, Messenger of Math. **17**, 145-150.

S. SAKS

[1938] *Int[redacted]gration in abstract metric spaces*, Duke Math. J. **4**, 408-411.

A. SARD

[1942] *Th[redacted] measure of the critical set values of differentiable mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. **48**, 883–890.

J. SCHWARTZ

[1951] *A [redacted]ote on the space L_p^**, Proc. Amer. Math. Soc. **2**, 270-275.

I.E. SEGAL

[1951] *Eq[redacted]ivalence of measure spaces*, Am. J. Math. **73**, 275-313.

W. SIERPIŃSKI

[1928] *Un [redacted] théorème général sur les familles d'ensembles*, Fund. Math. **12**, 206-210.

R.M. SOLOVAY

[1970] *A [redacted]odel of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable*, Annals of Math. **92**, 1-56.

H. STEINHAUS

[1919] *Ad[redacted]tive und stetige Funktionaloperationen*, Math. Z. **5**, 186-221.

M.H. STONE

[1948] *No[redacted]s on integration I - III*, Proc. Nat. Acad. Sci. **34**, 336-342, 447-455, 483-490.

[1949] *No[redacted]s on integration IV*, Proc. Nat. Acad. Sci. **35**, 50-58.

R. THOMAS

[1985] *A [redacted]mbinatorial construction of a nonmeasurable set*, Amer. Math. Monthly **92**, 421-422.

L. TONELLI

[1909] *Su[redacted]'integrazione per parti*, Rendiconti Accad. Nazionale dei Lincei **18**, 246-253.

E.B. VAN VLECK

[1908] *On [redacted]non-measurable sets of points with an example*, Trans. Amer. Math. Soc. **9**, 237-244.

N. WIENER

[1922] *Li[redacted]it in terms of continuous transformation*, Bull. Soc. Math. France **50**, 119-134.

[1939] *Th[redacted] ergodic theorem*, Duke Math. J. **1-18**.

C.G. YOUNG AND W.H. YOUNG

[1911] *On [redacted] the existence of a differential coefficient*, Proc. London Math. Soc. **9**, 325-335.

W.H. YOUNG

[1904] *On [redacted] upper and lower integration*, Proc. London Math. Soc. **2**, 52-66.

STRUČNÝ PRŮVODCE OZNAČENÍM

$\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}(\gamma)$, $\mathfrak{M}_n$ ... měřitelné množiny 1.3, 4.4, 26
λ, λ_n ... Lebesgueova míra 1.3, 1.15, 26
$\sigma(\mathcal{A})$ ... nejmenší σ-algebra obsahující $\mathcal{A}$ 2.3
$\mathcal{B}$, $\mathcal{B}(P)$ ... borelovské podmnožiny P 2.3
$\mu_{|A}$, μ_A, $\mu_{|\mathcal{T}}$ ... různé pojmy restrikce míry 2.4
$\mathcal{S}_A$ ... restrikce σ-algebry 2.4
ε_x ... Diracova míra 2.5
$\overline{\mu}$ ... zúplnění míry μ 2.7
μ^*, μ_* ... vnější a vnitřní míra 1.3, 4.8
$\mathbf{M}(\mathcal{S})$ ... míry (znaménkové, komplexní) na $(X, \mathcal{S})$ 6.17
$\operatorname{vol} I$ ... objem intervalu 1.15
μ^+, μ^-, $|\mu|$ ... variace míry 6.6, 6.10
$f(\mu)$ ... obraz míry 8.23
$\mathcal{L}^*$ ... funkce, pro něž integrál má smysl 8.3
$\mathcal{L}^p$, L^p ... elpéčka, 8.3, 10.1
$\|f\|_p$ ... L^p-norma funkce f 10.1, 10.5
l^p ... malá elpéčka 10.7, 40.3-4
$\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$ ... součinová σ-algebra 11.1
M^x, M_x ... řezy 11.1
$\mu \otimes \nu$ ... součin měr 11.6
$f_j \to f$ ... bodová konvergence 12.1
$f_j \rightrightarrows f$ ... stjnoměrná konvergence 12.1
w-lim f_j ... slabá limita 12.12
w*-lim f_j ... slabá* limita 12.13
X^* ... (topologický) duál 12.4
μ_f ... míra s hustotou f, 8.19, 13.1
$\frac{d\nu}{d\mu}$ ... Radon-Nikodýmova derivace 13.1
$\nu \ll \mu$ ... ν je absolutně spojitá vzhledem k μ 13.1
$\nu \perp \mu$ ... navzájem singulární míry 13.8
$\operatorname{supt} f$ ... nosič 14.1
$\mathcal{C}_K(P)$ ... spojité funkce s nosičem v K 14.1
$\mathcal{C}_c(P)$ ... spojité funkce s kompaktním nosičem 14.1
$C_c^{\uparrow}(P)$, $C_c^{\downarrow}(P)$ ... polospojité funkce 14.4
A^+, A^-, $|A|$ ... variace znaménkového Radonova integrálu 14.11, 14.12
μ_A, μ_A^* ... míra (resp. vnější) z Radonova integrálu 16.1, 16.4
$\mathcal{C}_b(P)$ ... omezené spojité funkce 16.7
$\mathcal{C}_0(P)$ ... spojité funkce s nulou v nekonečnu 16.7
$\mu_j \xrightarrow{v} \mu$ ... vágní konvergence 17.1
$\mathcal{M}(P)$ ... znaménkové (resp. komplexní) Radonovy míry na P 17.1
$\mathcal{M}_b(P)$ ... konečné znaménkové (resp. komplexní) Radonovy míry 17.1
$\mathbf{e}$ ... jednotkový prvek grupy 19.2
Δ ... modulární funkce 19.9; nebo také množina všech kladných funkcí 25.2
$f * g$ ... konvoluce 19.19, 26.21
$\bigvee_a^b f$ ... variace 21.1
D^+f, D^-f, D_+f, D_-f $\overline{D}f$, $\underline{D}f$ ... extremální derivace 22.3
$\nabla\varphi$ ... Jacobiho matice parciálních derivací 26.12

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

φ' … (Fréchetova) derivace 26.12
$\mathcal{C}^\ell$ … třída diferencovatelnosti 26.12
J_φ … jakobián 26.12
D_μ … symetrická derivace míry 28.2
$\mathcal{D}(\Omega)$ … nekonečně hladké funkce s kompaktním nosičem 31.1
χ_k … uhlazovací konvoluční jádro 31.1
T_f … distribuce odpovídající funkci f 32.1
T_μ … distribuce odpovídající míře μ 32.3
δ … Diracova distribuce (Diracova míra v nule) 32
$f_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ … konvergence v $\mathcal{D}$ 32.1
$D^\alpha T$ … derivace podle multiindexu 32.4
$Z_k \to Z$ … konvergence distribucí 32.9
$\hat{f}$, $\mathcal{F}f$ … Fourierova transformace 33.1, 33.5, 33.8
$\tilde{f}$ … inverzní Fourierova transformace 33.5
$\mathcal{S}$ … Schwartzův prostor 33.5
$\mathbf{M}_{n,k}$ … matice 34
L^* … adjungované zobrazení 34
A^T … transponovaná matice 34
$\|L\|$ … norma lineárního zobrazení 34
$\det A$ … determinant 34
σ … k-rozměrná míra v $\mathbf{R}^n$ 34.8
$\operatorname{vol} L$, $\operatorname{vol}(u_1, \dots, u_k)$ … objem 34.10
$N(x, \varphi, E)$ … multiplicita 34.19
$\deg(y.\varphi, G)$ … stupeň zobrazení 35.7
$\mathcal{H}_p(A)$, $\mathcal{H}_p(A, \delta)$ … Hausdorffova míra 36.1
s, S … jednorozměrná, resp. $n-1$-rozměrná míra 37
$\operatorname{grad} g$, $\operatorname{div} f$, $\operatorname{rot} f$ … gradient, divergence, rotace 37.1
$u_1 \times \cdots \times u_{k-1}$ … vektorový součin 37.5
$\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ … jednotkový tečný, resp. normálový vektor 37.10, 37.13
$\mathbf{H}^k_-$ … poloprostor 37.17
$\mathbf{i}$ … vnoření $\mathbf{R}^{n-1}$ do $\partial \mathbf{H}^k_-$ 37.17
$<\cdot, \cdot>$ … dualita 38.1
$\Lambda^k(\mathbf{V})$, $\Lambda_k(\mathbf{V})$ … k-kovektory, resp. k-vektory 38.1
$V_1 \wedge \cdots \wedge V_k$ … vnější součin 38.3
$I(k, n)$ … množina všech rostoucích multiindexů 38.3
X_i … souřadnicová forma 38.3
$d\omega$ … diferenciál 38.11
$\xi(x)$ … jednotkový tečný k-vektor 38.14
U_μ … definiční obor mapy μ 39.1
T_x … tečný prostor 39.4
c_0 … prostor posloupností konvergujících k nule 40.3-4

REJSTŘÍK

d-otevřená množina 29.4
k-kovektor 38.1
k-lineární forma 38.1
k-rozměrná míra 34.8
  na varietě 39.15
k-rozměrná plocha 34.24
k-vektor 38.1
L^p-norma 10.1
L^p-prostor 10.5
L^∞-norma 10.1
δ-okruh 5.1
μ-stejnoměrná konvergence 12.1, 12.3
π-systém 5.1
σ-okruh 5.1
σ-aditivita 2.4
σ-algebra 2.1
σ-konečná míra 2.4
σ-subaditivita 1.2, 4.1

absolutně spojitá funkce 21.3
absolutně spojitá míra 13.1, 13.8
  vektorová 41.4
absolutní konvergence 41.1
adjungované zobrazení 34
algebra 5.1, Appendix
analytická množina 26.10
antisymetrická k-lineární forma 38.1
aproximativně spojitá funkce 29.7
aritmetická míra 2.5, 2.10, 19.4
atlas 39.1
atom 2.15
atomická míra 15.18

Baireova funkce 7.9
Banach-Zareckého věta 23.11
báze topologie Appendix
Bezikovičova věta 27.4
bezpodmínečná konvergence 41.1
bilineární forma 38.1
bilipschitzovské zobrazení 34.20
Bochnerova věta 42.2
Bochnerův integrál 42.1
bod hustoty 29.1
bod lebesgueovský 23.8
bodová konvergence 12.1
Borel-Cantelliho lemma 2.14
borelovská funkce 3.2
borelovská množina 2.3

Cantorova funkce 23.1
Cantorovo diskontinuum 1.12
Choquetova kapacita 5.14
Cousinovo lemma 25.2

Čebyševova nerovnost 7.8

Daniellova vlastnost 14.3
Darbouxova vlastnost míry 2.15
darbouxovsky integrovatelná funkce 43.7
dělení intervalu 7.2, 25.2
Denjoy-Perronův integrál 25.14
Denjoyova věta 29.9
derivace 26.12
derivace míry 28.1
derivace zobrazení 39.4
deskriptivní definice integrálu 23.7
difeomorfismus 34.22, 39.1
diferenciál 38.11, 39.8
diferenciální forma 38.9, 39.8
difuzní míra 15.18
Diniho derivace 22.3
Diniho věta Appendix
Diracova míra 2.5
Diracův integrál 14.2
Dirichletova funkce 7.5
diskontinuum kladné míry 1.13
diskrétní míra 15.18
diskrétní topologie Appendix
distribuce 32.1
  temperovaná 33.5
distribuční funkce 24.1
divergence 37.1
dolní derivace 22.3
dolní Riemannův součet 7.2
duál k L^p 13.17
Dunfordovo lemma 43.1
Dunfordův integrál 43.2
Dynkinův systém 5.1

extremální derivace 22.3

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Fatouovo lemma 8.15
Fourierova transformace 33.1, 33.5, 33.11
Fourierova řada 33.20
Fourierovy koeficienty 33.20
Fréchetova derivace 26.12
Fubiniova věta 11.9, 26.9
Fubiniovo lemma 24.10
funkce
  absolutně spojitá 21.3
  aproximativně spojitá 29.7
  Baireova 7.9
  borelovská 3.2
  Cantorova 23.1
  darbouxovsky integrovatelná 43.7
  Dirichletova 7.5
  distribuční 24.1
  Heavisidova 32.5
  horní Baireova 7.9
  integrovatelná 8.3
  integrovatelná 14.5
  jednoduchá 3.8, 8.1, 40.1
  lebesgueovsky měřitelná 26.7
  lipschitzovská 19.30
  lokálně absolutně spojitá 21.3
  lokálně integrovatelná 23.3
  měřitelná 3.1, 3.13, 40.1
  modulární 19.9
  primitivní 7.1
  první Baireovy třídy 18.3
  Riemannova 7.6
  riemannovsky integrovatelná 7.2
  s kompaktním nosičem 14.1, 31.1
  s konečnou variací 21.1
  shora polospojitá 14.14
  skoků 24.7
  slabě integrovatelná 43.2
  slabě měřitelná 40.1
  třídy $\mathcal{C}^\ell$ 26.12
  zdola polospojitá 14.4

Gaussova věta 37.22
Gelfandův integrál 43.2
gradient 37.1
Gravesův integrál 43.7
Greenova věta 37.27

Haarova míra 19.3
Hahnův rozklad 6.3
harmonická míra 14.8
Hausdorffova dimenze 36.8
Hausdorffova míra 36.1
Hausdorffova vnější míra 4.2
Hausdorffův prostor Appendix
hermiteovsky adjungované zobrazení 34
Heavisidova funkce 32.5
Henstock-Kurzweilův integrál 25.14
homeomorfismus Appendix
Hopfova věta 5.5
horní Baireova funkce 7.9
horní derivace 22.3
horní Riemannův součet 7.2
hustota míry 13.1
hustotní topologie 29.4
Hölderova nerovnost 10.3

integrace per partes 23.13
integrál 8.3
  Bochnerův 42.1
  Denjoy-Perronův 25.14
  Denjoyův užší 25.14
  diferenciální formy 38.16, 39.18
  Diracův 14.2
  Dunfordův 43.2
  Gelfandův 43.2
  Gravesův 43.7
  Henstock-Kurzweilův 25.14
  komplexní Radonův 14.10
  konvergentní 8.3
  Kurzweilův 25.2
    neurčitý 25.5
  křivkový druhého druhu 37.10
  křivkový prvého druhu 34.24
  Lebesgueův 8.3, 26
    neurčitý 23.3
  Newtonův 7.1
  Perronův 25.10
  Pettisův 43.2
  plošný druhého druhu 37.13
  plošný prvého druhu 34.24
  Poissonův 14.2
  Radonův 14.1
    znaménkový 14.10
  Riemann-Gravesův 43.7
  Riemann-Stieltjesův 14.2
  riemannovský úplný 25.14
  Riemannův 7.2
integrovatelná funkce 8.3, 14.5
inverzní Fourierova transformace 33.5
involuce 19.23
izometrické zobrazení 34.2

Jacobiho matice 26.12
Jakobián 26.12
jednoduchá funkce 3.8, 8.1, 40.1
jednotkový tečný k-vektor 38.14, 39.16
jednotkový tečný vektor 37.10

Jegorovova věta 12.6
Jordan-Peanův objem 1.5, 5.12, 26.24
Jordanův rozklad 6.7

Kadec-Kleeova vlastnost 12.14
kapacita 5.14
kapacitabilní množina 5.15
Kirszbraunova věta 30.5
kladná báze 39.4
kladná parametrizace 37.9, 39.18
kladná variace Radonova integrálu 14.12
kladný difeomorfismus 39.3
kompaktní prostor Appendix
komplexní míra 6.10
komplexní Radonova míra 15.8
komplexní Radonův integrál 14.10
konečná míra 2.4
konečně aditivní míra 6.20
konvergence 41.1
  μ-stejnoměrná 12.1, 12.3
  absolutní 41.1
  bezpodmínečná 41.1
  bodová 12.1
  lokálně stejnoměrná 12.1
  silná 17.1
  skoro všude 12.1
  slabá 12.12, 12.14, 17.1, 32.9
  slabá* 12.13, 12.14
  stejnoměrná 12.1
  v míře 12.1, 12.2
  v normě 12.1
  vágní 17.2
konvergentní integrál 8.3
konvoluce funkcí 19.19, 26.18
konvoluce měr 19.24, 26.18
koule 26.11, 28.2.1
Kurzweilův integrál 25.2
kužel 37.15
křivka 37.10
křivkový integrál druhého druhu 37.10
křivkový integrál prvého druhu 34.24

Lebesgue-Stieltjesova míra 14.8
Lebesgueova míra 1.3, 1.15, 2.5, 19.4
Lebesgueova věta 8.13, 8.14, 12.6
  o derivování monotonních funkcí 22.5
  o hustotě 29.2
  o rozkladu 13.10
Lebesgueova vnější míra 1.1, 1.15
lebesgueovsky měřitelná funkce 26.7
lebesgueovský bod 23.8
lemma
  Borel-Cantelliho 2.14
  Cousinovo 25.2
  Dunfordovo 43.1
  Fatouovo 8.15
  Fubiniovo 24.10
  Riemann-Lebesgueovo 12.13, 31.10
  Saks-Henstockovo 25.6
  Urysohnovo Appendix
lemniskata 26.15
levá Haarova míra 19.3
Leviho věta 8.5, 8.11, 8.12
lineární forma 38.1
lipschitzovská funkce 19.30
lipschitzovská hranice 37.21
lipschitzovské zobrazení 30.1
Ljapunovova věta 2.16
lokalizovatelná míra 13.18
lokálně absolutně spojitá funkce 21.3
lokálně bilipschitzovské zobrazení 34.20
lokálně integrovatelná funkce 23.3
lokálně kompaktní prostor Appendix
lokálně lipschitzovské zobrazení 30.1
lokálně stejnoměrná konvergence 12.1
lokálně uniformně konvexní prostor 12.14
Luzinova věta 18.3
Luzinova vlastnost (N) 20.7

majoranta 25.10
mapa 34.24, 39.1
metoda obálek 25.10
metrická vnější míra 36.17
měřitelná funkce 3.1, 3.13, 40.1
měřitelná množina 1.3, 1.15, 2.4, 4.4
měřitelný obdélník 10.12
měřitelný prostor 2.1
Minkowského nerovnost 10.4
minoranta 25.10
míra 2.4
  k-rozměrná 34.8
    na varietě 39.15
  σ-konečná 2.4
  absolutně spojitá 13.1, 13.8
  aritmetická 2.5, 19.4
  atomická 15.18
  difuzní 15.18
  Diracova 2.5
  diskrétní 15.18
  Haarova 19.3
  harmonická 14.8
  Hausdorffova 36.1
    vnější 4.2
  komplexní 6.10
  konečná 2.4
  konečně aditivní 6.20
  Lebesgue-Stieltjesova 14.8
  Lebesgueova 1.3, 1.15, 2.5, 19.4
    vnější 1.1, 1.15
  levá Haarova 19.3

lokalizovatelná 13.18
molekulární 17.7
pravá Haarova 19.3
pravděpodobnostní 2.4
Radonova 15.1
vnější 16.1
komplexní 15.8
regulární borelovská 15.2
s hustotou 8.19
spojitá 15.18
translačně invariantní 1.2
triviální 2.5
úplná 2.4
vektorová 41.2
absolutně spojitá 41.4
vnější 4.1
metrická 36.17
regulární 4.7
znaménková 6.1 množina
analytická 26.10
borelovská 2.3
d-otevřená 29.4
kapacitabilní 5.15
měřitelná 1.3, 1.15, 2.4, 4.4
rektifikovatelná 34.31
typu $F_{\sigma\delta}$ 2.3
typu F_{σ} 2.3
typu $G_{\delta\sigma}$ 2.3
typu G_{δ} 2.3
modulární funkce 19.9
molekulární míra 17.7
monotonní funkcionál 14.1
monotonní systém 11.3
Möbiova páska 39.7
multiindex 32, 34.13, 38.3

náboj 6.20
negativní variace míry 6.6
nerovnost Čebyševova 7.8
neurčitá variace 21.1
neurčitý Kurzweilův integrál 25.5
neurčitý Lebesgueův integrál 23.3
Newtonova kapacita 5.14
Newtonův integrál 7.1
Newtonův potenciál 5.14
nezáporný funkcionál 14.1
norma dělení 43.7
normála 37.13
normální prostor Appendix
nosič funkce 14.1
nosič Radonovy míry 15.10

objem 34.10
k-tice vektorů 34.10
obraz míry 8.23
okolí Appendix
okraj 37.17
okruh 5.1
omezená variace 21.1
opačně orientovaná varieta 39.3
orientace 37.9, 38.14, 39.3
orientovaná varieta 39.3
orientovaný atlas 39.3
orientovatelná varieta 39.3
Orlicz-Pettisova věta 43.5
ortogonální matice 34.2
oscilace 43.7

parametrizace 34.24
Perronův integrál 25.10
Pettisova věta 40.3, 41.5
Pettisův integrál 43.2
Plancherelova věta 33.7
plocha k-rozměrná 34.24
plocha s okrajem 37.17
plošný integrál druhého druhu 37.13
plošný integrál prvého druhu 34.24
Poissonův integrál 14.2
polární souřadnice 26.14
polookruh 5.1
polospojitá funkce 14.4, Appendix
pozitivní variace míry 6.6
pramíra 5.2
pravá Haarova míra 19.3
pravděpodobnostní míra 2.4
primitivní funkce 7.1
prostor s mírou 2.4
pullback 39.8
přirozená orientace 37.9

Rademacherova věta 30.3
Radon-Nikodýmova derivace 13.1
Radon-Nikodýmova věta 13.4
Radon-Nikodýmova vlastnost 42.4
Radonova míra 15.1
Radonova vnější míra 16.1
Radonův integrál 14.1
regulární distribuce 32.3
regulární vnější míra 4.7
regulární zobrazení 34.22

regulární borelovská míra 15.2
rektifikovatelná množina 34.31
restrikce míry 2.4
Riemann-Gravesův integrál 43.7
Riemann-Lebesgueovo lemma 12.13, 31.10
Riemann-Stieltjesův integrál 14.2
Riemannova funkce 7.6
Riemannova metrika 39.12
Riemannova varieta 39.12
riemannovsky integrovatelná funkce 7.2
Riemannův integrál 7.2
Rieszova věta 12.3
    o reprezentaci 16.5
Rieszův svaz 14.14
rostoucí multiindex 38.3
rotace 37.1
rozklad jednotky 39.11, 39.22

řez 11.1

Saks-Henstockovo lemma 25.6
Sardova věta 34.17
Schwartzova věta 32.8
Schwartzův prostor 33.5
separabilní prostor Appendix
sféra 34.26, 34.27, 37.23
sférické souřadnice 26.16, 37.23
silná konvergence 17.1
silná subaditivita 5.14
singulární míry 13.8
skoro všude 3.12, 3.14
slabá konvergence 12.12, 12.14, 17.1, 32.9
slabá* konvergence 12.13, 12.14
slabě integrovatelná funkce 43.2
slabě měřitelná funkce 40.1
součin měr 11.6
součin Radonových integrálů 14.13
součin Radonových měr 16.9
součinová σ-algebra 11.1
spojitá míra 15.18
stejnoměrná konvergence 12.1
Stokesova věta 37.32, 38.21, 39.21
Stone-Weierstrassova věta Appendix
Stoneova podmínka 14.14
stupeň zobrazení 35.7
svaz Appendix

šroubovice 34.25, 37.12

temperovaná distribuce 33.5
tečný k-vektor 38.14
tečný prostor 39.4
tečný vektor 37.10
těžiště 43.6
Tietzeova věta Appendix 43.6
Tonneliho věta 26.10
topologická grupa 19.2
totální variace míry 6.6, 6.10
translačně invariantní míra 1.2
trigonometrická řada 33.20
triviální míra 2.5

uniformně konvexní prostor 12.14
unimodulární grupa 19.11
unitární matice 34.2
úplná míra 2.4
úplný riemannovský integrál 25.14
užší Denjoyův integrál 25.14

vágní konvergence 17.2
váhová aritmetická míra 2.10
variace funkce 21.1
variace míry 6.6
variace Radonova integrálu 14.11
variace vektorové míry 41.7
varieta 39.1
vektorová míra 41.2
vektorové pole 37.1
vektorový součin 37.5
věta
    Banach-Zareckého 23.11
    Bezikovičova 27.4
    Bochnerova 42.2
    Denjoyova 29.9
    Diniho Appendix
    Fubiniova 11.9, 26.9
    Gaussova 37.22
    Greenova 37.27
    Hopfova 5.5
    Jegorovova 12.6
    Kirszbraunova 30.5
    Lebesgueova 8.13, 8.14, 12.6
        o derivování monotonních funkcí 22.5
        o hustotě 29.2
        o rozkladu 13.10
    Leviho 8.5, 8.11, 8.12
    Ljapunovova 2.16
    Luzinova 18.3
    o hustotě 29.2
    o substituci 26.13, 34.18, 34.19, 35.8, 38.18
    Orlicz-Pettisova 43.5
    Plancherelova 33.7
    Rademacherova 30.3
    Radon-Nikodýmova 13.4
    Rieszova 12.3
        o reprezentaci 16.5
    Sardova 34.17
    Schwartzova 32.8
    Stokesova 37.32, 38.21 39.21
    Stone-Weierstrassova Appendix
    Tietzeova Appendix
    Tonneliho 26.10
    Vitaliova 12.9, 27.2, 27.6

Vitaliova věta 12.9, 27.2, 27.6
Vitaliova vlastnost 27.1
vitaliovské pokrytí 27.1
vlastnost
  Daniellova 14.3
  Kadec-Kleeova 12.14
  Luzinova (N) 20.7
  Radon-Nikodýmova 42.4
  Vitaliova 27.1
vnější kapacita 5.15
vnější míra 4.1
vnější normála 37.21
vnější součin 38.3
vnoření 39.2
vzdálené množiny 36.17

Youngova nerovnost 10.2

záporná báze 39.4
záporná parametrizace 37.9
záporná variace Radonova integrálu 14.12
záporný difeomorfismus 39.3
zdola polospojitá funkce 14.4
zjemnění 43.7
znaménková míra 6.1
znaménková Radonova míra 15.8
znaménkový Radonův integrál 14.10
zobecněná Youngova nerovnost 26.20
zobrazení
  bilipschitzovské 34.20
  difeomorfní 39.1
  hermiteovsky adjungované 34
  izometrické 34.2
  lipschitzovské 30.1
  lokálně bilipschitzovské 34.20
  lokálně lipschitzovské 30.1
  regulární 34.22
  třídy $\mathcal{C}^\ell$ 26.12
zúplnění míry 2.7