



*Ľaroslav Lukeř*

MEDIDAS E  
INTEGRALES

HUMBERTO RAFEIRO  
ANDRÉS VARGAS  
*Traducción y revisión*

•e  
editorial  
Pontificia Universidad  
JAVERIANA  
— 25 AÑOS —

*Ľan Malý*

JAROSLAV LUKEŠ & JAN MALÝ

---

# MEDIDAS E INTEGRALES

---

## *Prefacio a la edición en español*

EN PRIMER LUGAR, nos gustaría agradecer a los profesores Jaroslav Lukeš y Jan Malý por su interés y amable colaboración con la producción de la presente edición en español de su libro, que ha sido preparada a partir de la segunda edición en inglés *Measure and Integral*, publicada por MATFYZPRESS, casa editorial de la Facultad de Matemáticas y Física de la Universidad Carolina de Praga en 2005.

Adicionalmente, queremos extender nuestro agradecimiento a la Facultad de Ciencias de la Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá, por su apoyo, así como a nuestro Departamento de Matemáticas por brindarnos las condiciones para dedicarle tiempo a este proyecto.

Finalmente, queremos reconocer la gran labor de la Editorial Pontificia Universidad Javeriana y en especial a todos los involucrados en este proyecto, porque con su ayuda y profesionalismo fue posible obtener un producto final de gran calidad.

La preparación de esta traducción fue parcialmente financiada por el proyecto ID-PROY: 6054 de la Facultad de Ciencias de la Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá.

Bogotá, marzo 2017

Humberto Rafeiro y Andrés Vargas  
PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

# Índice general

Notación básica y símbolos . . . . .	15
<i>A Medidas y funciones medibles . . . . .</i>	<i>17</i>
1 <i>Medida de Lebesgue . . . . .</i>	17
2 <i>Medidas abstractas . . . . .</i>	24
3 <i>Funciones medibles . . . . .</i>	28
4 <i>Construcción de medidas a partir de medidas exteriores . . . . .</i>	32
5 <i>Clases de conjuntos y funciones de conjuntos . . . . .</i>	34
6 <i>Medidas con signo y complejas . . . . .</i>	39
<i>B Integral abstracta de Lebesgue . . . . .</i>	<i>45</i>
7 <i>Integración en <math>\mathbb{R}</math> . . . . .</i>	45
8 <i>Integral abstracta de Lebesgue . . . . .</i>	47
9 <i>Integrales que dependen de un parámetro . . . . .</i>	55
10 <i>Espacios <math>L^p</math> . . . . .</i>	57
11 <i>Medidas producto y el teorema de Fubini . . . . .</i>	61
12 <i>Sucesiones de funciones medibles . . . . .</i>	65
13 <i>Teorema de Radon–Nikodým y descomposición de Lebesgue . . . . .</i>	70
<i>C Integral y medida de Radon . . . . .</i>	<i>77</i>
14 <i>Integral de Radon . . . . .</i>	77
15 <i>Medidas de Radon . . . . .</i>	82
16 <i>Teorema de representación de Riesz . . . . .</i>	87
17 <i>Sucesiones de medidas . . . . .</i>	93
18 <i>Teorema de Luzin . . . . .</i>	97
19 <i>Medidas en grupos topológicos . . . . .</i>	98
<i>D Integración en <math>\mathbb{R}</math> . . . . .</i>	<i>105</i>
20 <i>Medida y diferenciación . . . . .</i>	105
21 <i>Funciones de variación finita y absolutamente continuas . . . . .</i>	107
22 <i>Teoremas de diferenciación en casi todas partes . . . . .</i>	109

23	<i>Integral indefinida de Lebesgue y continuidad absoluta</i>	113
24	<i>Medidas de Radon en <math>\mathbb{R}</math> y funciones de distribución</i>	117
25	<i>Integral de Henstock–Kurzweil</i>	119
<b>E</b>	<b><i>Integración en <math>\mathbb{R}^n</math></i></b>	127
26	<i>Medida e integral de Lebesgue en <math>\mathbb{R}^n</math></i>	127
27	<i>Teoremas de cubrimiento</i>	134
28	<i>Diferenciación de medidas</i>	141
29	<i>Teorema de densidad de Lebesgue y aproximación de funciones continuas</i>	144
30	<i>Funciones de Lipschitz</i>	147
31	<i>Teoremas de aproximación</i>	149
32	<i>Distribuciones</i>	152
33	<i>Transformada de Fourier</i>	160
<b>F</b>	<b><i>Cambio de variable y medidas <math>k</math>-dimensionales</i></b>	169
34	<i>Teorema del cambio de variable</i>	169
35	<i>Grado de una aplicación</i>	181
36	<i>Medidas de Hausdorff</i>	187
<b>G</b>	<b><i>Integrales de línea y de superficie</i></b>	193
37	<i>Cálculo integral en el análisis vectorial</i>	193
38	<i>Integración de formas diferenciales</i>	202
39	<i>Integración en variedades</i>	213
<b>H</b>	<b><i>Integración vectorial</i></b>	225
40	<i>Funciones medibles</i>	225
41	<i>Medidas vectoriales</i>	227
42	<i>Integral de Bochner</i>	229
43	<i>Integrales de Dunford y Pettis</i>	231
	<b>Apéndice topológico</b>	239
	<b>Bibliografía</b>	243
	<b>Referencias</b>	249
	<b>Guía breve de notación</b>	255
	<b>Índice alfabético</b>	259