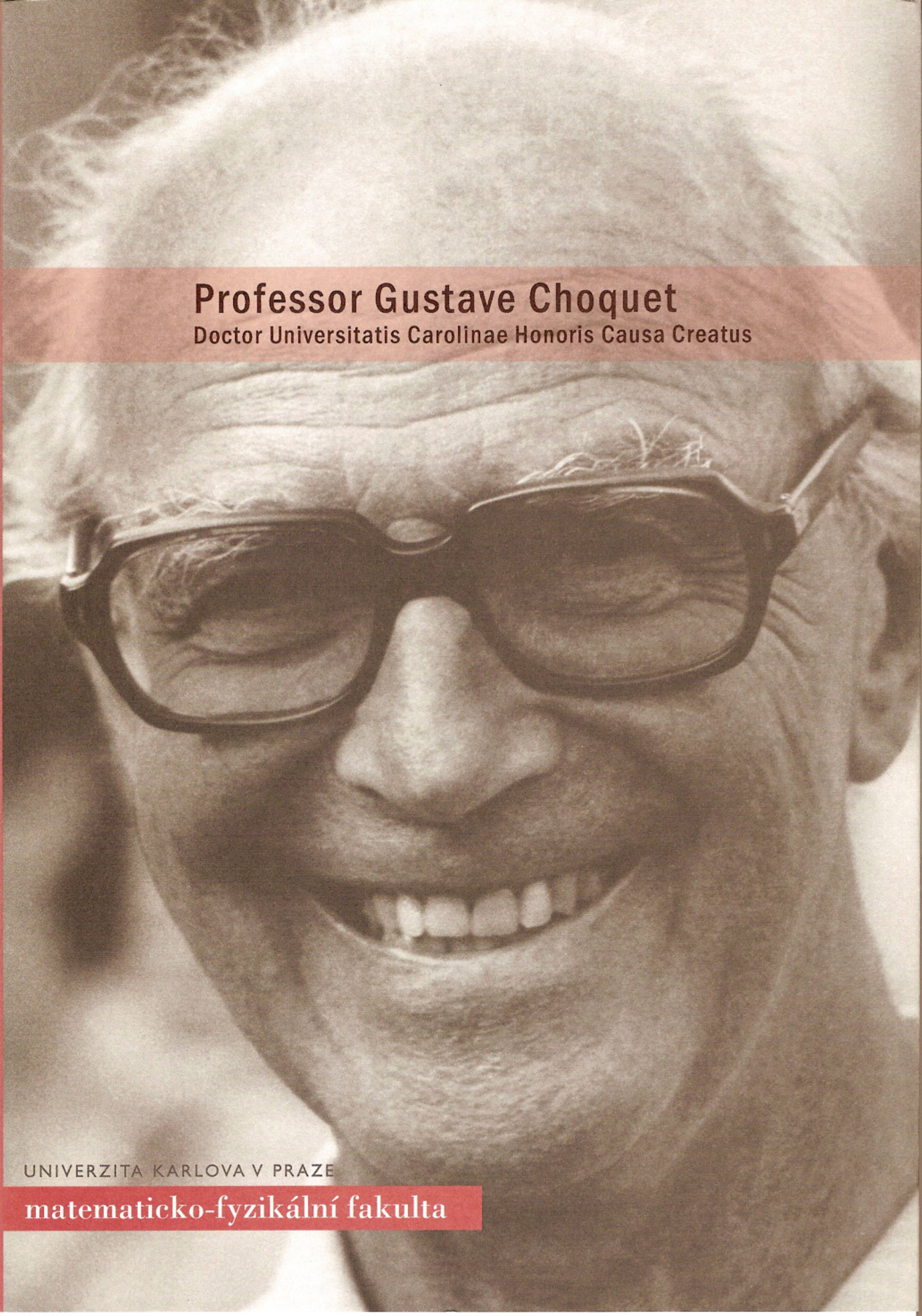
Professor Gustave Choquet

Doctor Universitatis Carolinae Honoris Causa Creatus



UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

matematicko-fyzikální fakulta

Q·B·F·F·F·Q·S

SVMMIS AVSPICIIS
REI PVBLICAE BOHEMICAE

NOS RECTOR ET ALMA ATQVE ANTIQVISSIMA LITTERARVM

VNIVERSITAS CAROLINA PRAGENSIS

LECTVRIS SALVTEM

VIROS IN COGNITIONE RERVM INDAGANDA SAGACISSIMOS
OPERIBVSQVE SVIS PRAECIPVOS QVI AD DOCTRINAM EXCOLENDAM ET
HVMANITATEM PROMOVENDAM MIRVM QVANTVM CONTVLERVNT

MAIORES NOSTRI HONORIBVS ACADEMICIS ORNARE CONSVEVERANT

HVNC MOREM SEQVENS CONSILIVM FACVLTATIS MATHEMATICAE PHYSICAEQVE
DISCIPLINAE VNIVERSITATIS CAROLINAE PRAGENSIS IN CONSESSV
QVEM DIE XIII MENSIS IVNII ANNI MMI HABVIT

COMMVNI OMNIVM SENTENTIA DECREVIT
VT VIR ILLVSTRISSIMVS

GUSTAVE CHOQUET

TOTIVS VITAE SVAE OPERA DE ARTE MATHEMATICA PRAECIPVE AVTEM
DE ANALYSI FVNCTIONALI POTENTIARVMQVE THEORIA EXCOLENDA
OPTIME MERITVS

HONORIS CAVSA

IN DOCTORVM MATHEMATICAE PHYSICAEQVE DISCIPLINAE VNIVERSITATIS
CAROLINAE PRAGENSIS NVMERVM RECIPERETVR

QVARE FACVLTATIBVS VTENTES NOBIS A CIVITATE ACADEMICA TRIBVTIS

NOS HVNC VIRVM PERILLVSTREM

DOCTOREM MATHEMATICAE PHYSICAEQVE DISCIPLINAE

CREAVIMVS CREATVMQVE RENVNTIAVIMVS

ATQVE OMNIA QVAE HVNC HONOREM SEQVVNTVR IVRA ET PRIVILEGIA IN
EVM CONTVLIMVS IN CVIVS REI FIDEM HASCE LITTERAS MAIORE
VNIVERSITATIS CAROLINAE SIGILLO ROBORANDAS CVRAVIMVS

DABAMVS PRAGAE DIE XXI MENSIS MAII ANNI MMII

DECANVS	RECTOR	PROMOTOR

Professor Gustave Choquet
Doctor Universitatis Carolinae Honoris Causa Creatus

Professor Gustave Choquet

Doctor Universitatis Carolinae Honoris Causa Creatus

VYDAVATELSTVÍ
MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTY
UNIVERZITY KARLOVY, 2002

ISBN 80 – 85863 – 79 – 0

Obsah

Úvod

Profesorovi G. Choquetovi bude dne 21. května 2002 předán v Karolinu diplom čestného doktora Univerzity Karlovy. Posláním této publikace je při této příležitosti přiblížit širší veřejnosti tohoto vynikajícího francouzského matematika a člověka mimořádných kvalit prostřednictvím jeho vzpomínek, názorů i svědectví a také výkladem alespoň části jeho rozsáhlého matematického díla.

Informaci o osobnosti G. Choqueta poskytuje jednak návrh Matematicko-fyzikální fakulty na udělení čestného doktorátu, jednak Choquetova vlastní charakteristika. Dále je uveden přehled významných představitelů matematiky, fyziky a informatiky, jimž Univerzita Karlova udělila čestnou vědeckou hodnost doktora věd na základě návrhu Matematicko-fyzikální fakulty. Následuje seznam publikací G. Choqueta svědčící o rozmanitosti a šíři jeho matematického díla. Ten zahrnuje pouze údaje získané z referativních časopisů Mathematical Reviews a Zentralblatt für Mathematik, tedy nepostihuje různé nepublikované statě či referáty na seminářích. Široký okruh čtenářů patrně zaujme text rozhovoru s G. Choquetem věnovaného jeho vzpomínkám a názorům. Další dva příspěvky jsou určeny spíše matematikům a týkají se dvou objevů, které G. Choqueta celosvětově proslavily a zajistily mu trvalé místo v monografiích, učebnicích i historii matematiky 20. století. První z nich je věnován Choquetově teorii integrálních reprezentací a její souvislosti s teorií potenciálu, druhý přibližuje slavnou Choquetovu větu o kapacitabilitě.

V literatuře se jen velmi zřídka setkáváme se svědectvím velkých matematiků o jejich vlastní cestě k významným objevům. V tomto směru je mimořádně cenný další článek o tajemstvích Choquetovy práce a jeho cestě k teorii kapacit. Tento text je napsán pro širší okruh čtenářů, nejen pro matematiky. Podobný charakter má i následující filozoficky laděný text Choquetovy přednášky o spojitém a diskrétním jako důležitých tématech vědeckého myšlení. Poslední dva příspěvky zachycují Choquetovy postřehy o systémech studia, vzdělávání a výzkumu i jeho názory na metody badatelské práce a výchovu vědeckých pracovníků.

Pět z uvedených příspěvků je s laskavým svolením redakce převzato z časopisu Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, překlad přednášky o spojitém a diskrétním je zařazen se souhlasem autora.

Věříme, že předkládaná publikace bude příznivě přijata nejen jako výraz našeho blahopřání profesoru G. Choquetovi k udělení čestného doktorátu, ale i jako snaha poskytnout širší veřejnosti příležitost k nahlédnutí do života a díla jednoho z nejvýznamnějších matematiků 20. století.

Praha, květen 2002 — Jaroslav Lukeš, Ivan Netuka a Jiří Veselý

Návrh na udělení čestného doktorátu Univerzity Karlovy

Prof. Gustave Choquet

Narozen 1. března 1915

Studium:

1934 – 1938	École Normale Supérieure, Paříž
1937	Agrégé de Mathématiques

Odborná dráha:

1938 – 1939	stipendium Jane Eliza Proctor, Princeton, USA
1941 – 1946	stipendista CNRS
1946	Docteur ès Sciences Mathématiques, Paříž
1946 – 1947	profesor v Institut Français v Polsku
1947 – 1949	docent na Université de Grenoble
od 1949	docent, profesor na Université de Paris (Paris VI, Paris XI)
1960 – 1969	docent, profesor na École Polytechnique, Paris
1976	člen Académie des Sciences, Paříž

Vědecká činnost:

Gustave Choquet je autorem více než 150 prací, 7 monografií a řady učebnic. Patrně nejznámější jsou Choquetovy výsledky z teorie kapacit a z integrální reprezentace konvexních množin. Jejich důležitost je zdůrazněna tím, že se staly standardními partiemi v učebnicích, monografiích a univerzitních přednáškách matematiky po celém světě. Necháme-li stranou Choquetovy práce z reálných a komplexních funkcí, variačního počtu, geometrie a její didaktiky, teorie grafů, teorie čísel, teorie chaosu či teorie duševních procesů při tvůrčí práci, stále máme podstatnou část jeho díla před sebou: teorie potenciálu (vlastnosti průměru pro harmonické a polyharmonické funkce, Greenovy prostory, harmonické a polyharmonické polynomy, velikost množiny bodů tenkosti, rozložení míry na polárních množinách, existence jemného nosiče míry, regularizující množiny iregulárních bodů, potenciály obecných jader, integrál energie, věty o konvergenci potenciálů, teorie vymetání atd.); funkcionální analýza (cylindrické a kónické míry, adaptované prostory, reprezentace lineárních forem atd.); teorie množin (např. konstrukce ultrafiltrů význačných vlastností); teorie míry (např. množiny paradoxních vlastností, Prochorovovy prostory); topologie (teorie konvergence, Baireovy prostory, topologické hry, deskriptivní teorie množin atd.).

Vědecká práce G. Choqueta byla oceněna v letech 1945, 1951, 1956 a 1968 cenami pařížské Akademie věd, v roce 1976 byl G. Choquet zvolen řádným členem této vědecké instituce. V roce 1966 byl poctěn titulem Rytíř čestné legie.

Prof. Choquet je znám jako přednášející *par excellence*. Vychoval desítky matematiků, mnozí z nich se stali vynikajícími mezinárodně uznávanými osobnostmi, svým dílem ovlivnil stovky matematiků ve celém světě. Jeho jméno je spojeno s dvěma proslulými pařížskými semináři: Séminaire d'Initiation à l'Analyse a Séminaire de Théorie du Potentiel. G. Choquet dlouhodobě věnuje pozornost otázkám výuky matematiky, v letech 1950 – 1962 byl předsedou Mezinárodní komise pro výzkum a zkvalitňování výuky matematiky.

Zdůvodnění :

Profesor Gustave Choquet patří mezi nejvýznamnější postavy poválečné světové matematiky. Jeho objevy ovlivnily mimořádným způsobem rozvoj matematiky. Pojmy nesoucí jeho jméno, jako např. Choquetova teorie, Choquetova kapacita, Choquetův integrál, Choquetova vlastnost jemné topologie, Choquetova hranice, Choquetova množina, váha Choquetova typu, Brelot-Choquetova konvergenční věta, Choquetovo lemma a Choquetův simplex, se staly trvalým bohatstvím moderní matematiky.

G. Choquet navštívil Prahu poprvé v roce 1946; v sedmdesátých a osmdesátých letech umožnil řadě matematiků svázaných s Univerzitou Karlovou působit v jeho Equipe d'Analyse na Université Paris VI. Po roce 1989 došlo k dalšímu prohloubení kontaktů prof. Choqueta s Univerzitou Karlovou a s Pražskou skupinou teorie potenciálu: proslovil přednášky a diskutoval se studenty na MFF v roce 1990, byl zvaným řečníkem na mezinárodních Letních školách uspořádaných v České republice v letech 1993 a 1997 a proslovil hlavní přednášku na Mezinárodní konferenci z teorie potenciálu (Kouty, 1994). S významem prof. Choqueta pro světovou vědu a pro otázky výuky a dále s jeho názory, nejen na výzkum a vzdělávání, se lze seznámit v článcích uveřejněných v časopise Pokroky matematiky, fyziky a astronomie (PMFA):

- G. Choquet: *Vznik teorie kapacit: zamyšlení nad vlastní zkušeností*, PMFA 34(1989), č. 2, s. 71 – 83.
- *Setkání s profesorem Gustavem Choquetem*, PMFA 37 (1992), č. 1, s. 30 – 42.
- Gustave Choquet: *Vzpomínky a názory*, PMFA 37 (1992), č. 2, s. 65 – 79.
- *Matematický výzkum — svědectví badatelů* (záznam přednášky G. Choqueta), PMFA 39 (1994), č. 3, s. 143 – 151.
- J. Lukeš, I. Netuka a J. Veselý: *Choquetova teorie a Dirichletova úloha*, PMFA 45 (2000), č. 2, s. 98 – 124.

Čestný doktorát fyzikálně-matematických věd je udělován za mimořádné celoživotní dílo v matematice.

Prof. RNDr. Ivan Netuka, DrSc., děkan MFF

Návrh byl doporučen vědeckou radou Matematicko-fyzikální fakulty dne 13. června 2001 a schválen vědeckou radou Univerzity Karlovy dne 25. října 2001.

Čestní doktoři Univerzity Karlovy

Od vzniku Matematicko-fyzikální fakulty v roce 1952 byli čestnými doktory Univerzity Karlovy jmenováni na základě návrhu vědecké rady fakulty tito vynikající představitelé fyziky, informatiky a matematiky:

1958 **Kazimierz Kuratowski, Varšava, Polsko (a)**
matematika; topologie

1965 **Bohumil Bydžovský, Praha, Československo (b)**
matematika; geometrie

Ivan G. Petrovskij, Moskva, Sovětský svaz (c)
matematika; parciální diferenciální rovnice

Sergej L. Sobolev, Novosibirsk, Sovětský svaz (d)
matematika; parciální diferenciální rovnice, funkcionální analýza

1968 **Vojtěch Jarník, Praha, Československo (e)**
matematika; teorie čísel, reálné funkce

1979 **Anatolij A. Logunov, Moskva, Sovětský svaz (f)**
fyzika; teoretická fyzika

1982 **Gurij I. Marčuk, Novosibirsk, Sovětský svaz (g)**
matematika; numerické metody

Jonas Kubilius, Vilnius, Sovětský svaz (h)
matematika; teorie čísel

1984 **Ilja M. Frank, nositel Nobelovy ceny, Moskva, Sovětský svaz (i)**
fyzika; jaderná fyzika

1992 Heinz Bauer, Erlangen, Spolková republika Německo (a)
matematika; teorie potenciálu, funkcionální analýza, teorie pravděpodobnosti

Paul Erdös, Budapešť, Maďarsko (b)
matematika; teorie čísel, kombinatorika

Barbara H. Partee, Amherst, Spojené státy americké (c)
lingvistika; sémantika, matematický popis přirozeného jazyka

1997 Ivo Babuška, Austin, Spojené státy americké (d)
matematika; numerická a aplikovaná matematika

Willem R. van Zwet, Leiden, Nizozemsko (e)
matematika; matematická statistika a teorie pravděpodobnosti

1998 Sir Michael Francis Atiyah, nositel Fieldsovy medaile, Cambridge, Velká Británie (f)
matematika; topologie, geometrie, matematická fyzika

1999 Pierre-Gilles de Gennes, nositel Nobelovy ceny, Paříž, Francie (g)
fyzika; teoretická fyzika, makromolekulární fyzika

2001 Frederick Jelinek, Baltimore, Spojené státy americké (h)
informatika; počítačová lingvistika

2002 Gustave Choquet, Paříž, Francie (i)
matematika; funkcionální analýza, teorie potenciálu, abstraktní analýza

G. Choquet: seznam publikací

Knihy

[1] *Applications de la géométrie des distances à divers problèmes classiques de géométrie infinitésimale. Études pratiques d'accès à la recherche. A. Section des actualités géométriques.* Centre de documentation universitaire, Paris 1956 (spoluautoři: Bouligand, G., Kaloujnine, M., Motchane, L.).

[2] *Lectures on modern teaching of geometry and related topics.* Seminar ICMI held in Åarhus, May 30 – June 2, 1960. Elementaer Afdeling, Nr. 7. Matematisk Institut, Åarhus Universitet, Åarhus 1960 (se spoluautory).

[3] *Recherche d'une axiomatique commode pour le premier enseignement de la géométrie élémentaire.* Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, Paris 1961.

[4] *What is modern mathematics?* Mathematics teaching series. Educational Explorers Ltd., Reading 1963.

[5] *L'enseignement de la géométrie.* Enseign. des sciences, Hermann & Cie, Paris 1964.

[6] *Cours d'analyse.* Tome II: *Topologie. Espaces topologiques et espaces métriques. Fonctions numériques. Espaces vectoriels topologiques.* Masson & Cie, Editeurs, Paris 1964.

[7] *Topology* (překlad z francouzštiny: Amiel Feinstein). Pure and Applied Mathematics, Vol. XIX., Academic Press, New York and London 1966.

[8] *Geometry in a modern setting.* Hermann Publishers in Arts and Science, Paris 1969.

[9] *Cours d'analyse.* Tome II: *Topologie. Espaces topologiques et espaces métriques. Fonctions numériques. Espaces vectoriels topologiques.* Deuxième édition, revue et corrigée. Masson & Cie, Editeurs, Paris 1969.

[10] *Neue Elementargeometrie* (překlad z francouzštiny: Klaus Wigand). Logik und Grundlagen der Mathematik 4., Friedr. Vieweg und Sohn, Braunschweig 1970.

[11] *Outils topologiques et métriques de l'analyse mathématique.* Zapsal Claude Mayer. Centre de Documentation Universitaire, Paris 1969.

[12] *Lectures on analysis.* Vol. I*: Integration and topological vector spaces.* Zapsali Marsden, J., Lance, T. and Gelbart, S., W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam 1969, 1971, 1976.

[13] *Lectures on analysis.* Vol. II*: Representation theory.* Zapsali Marsden, J., Lance, T. and Gelbart, S., W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969, 1971, 1976.

[14] *Lectures on analysis.* Vol. III*: Infinite dimensional measures and problem solutions.* Zapsali Marsden, J., Lance, T. and Gelbart, S., W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969, 1971, 1976.

Časopisecké práce

[15] *Étude des homéomorphies planes.* C. R. Acad. Sci. Paris 206 (1938), 159–161.

[16] *Étude de certains réseaux de routes.* C. R. Acad. Sci. Paris 206 (1938), 310–313.

[17] *Prolongement d'homéomorphies.* C. R. Acad. Sci. Paris 206 (1938), 634–636.

[18] *Homéomorphies.* C. R. Acad. Sci. Paris 210 (1940), 129–131.

[19] *Points invariants et structure des continus.* C. R. Acad. Sci. Paris 212 (1941), 376–379.

[20] *Préliminaires à une nouvelle définition de la mesure.* C. R. Acad. Sci. Paris 215 (1942), 52–54.

[21] *Choix d'une mesure cartésienne* Δ*. Applications.* C. R. Acad. Sci. Paris 215 (1942), 101–103.

[22] *Isométrie des ensembles et cinématique.* C. R. Acad. Sci. Paris 214 (1942), 784–786.

[23] *Isométrie et roulement sans glissement.* C. R. Acad. Sci. Paris 214 (1942), 837–839.

[24] *Caractérisation de la sphère en géométrie infinitésimale directe.* Revue Sci. (Rev. Rose Illus.) 81 (1943), 447–452.

[25] *Structure des domaines plans et accessibilité.* C. R. Acad. Sci. Paris 216 (1943), 279–280.

[26] *Topologie de la représentation conforme.* C. R. Acad. Sci. Paris 216 (1943), 330–331.

[27] *Représentation conforme et topologie.* C. R. Acad. Sci. Paris 216 (1943), 402–404.

[28] *Primitive d'une fonction par rapport à une fonction à variation non bornée.* C. R. Acad. Sci. Paris 218 (1944), 495–497.

[29] *Étude différentielle des minimisantes dans les problèmes réguliers du calcul des variations.* C. R. Acad. Sci. Paris 218 (1944), 540–542.

[30] *Problèmes liés à des métriques variationnelles.* C. R. Acad. Sci. Paris 218 (1944), 696–698 (spoluautor: Bouligand, G.).

[31] *Étude des espaces métriques par les propriétés de leurs sous-ensembles finis.* Bull. Soc. Math. France 71 (1944), 112–192.

[32] *Sur quelques propriétés de moyenne caractéristiques des fonctions harmoniques et polyharmoniques.* Bull. Soc. Math. France 72 (1944), 118–140 (spoluautor: Deny, J.).

[33] *Étude métrique des espaces de Finsler. Nouvelles méthodes pour les théorèmes d'existence en calcul des variations.* C. R. Acad. Sci. Paris 219 (1944), 476–478.

[34] *Prolongements d'homéomorphies. Ensembles topologiquement nommables. Caractérisation topologique individuelle des ensembles fermés totalement discontinus.* C. R. Acad. Sci. Paris 219 (1944), 542–544.

[35] *L'isométrie des ensembles dans ses rapports avec la théorie du contact et la théorie de la mesure.* Mathematica (Timisoara) 20 (1944), 29–64.

[36] *Sur un type de transformation analytique généralisant la représentation conforme et définie au moyen de fonctions harmoniques.* Bull. Sci. Math. (2) 69 (1945), 156–165.

[37] *Résolution du problème de M. Fréchet sur la paramétrisation d'arcs doués de tangentes. Généralisation aux variétés à plusieurs dimensions. Paramétrages intrinsèques.* C. R. Acad. Sci. Paris 221 (1945), 83–86.

[38] *Ensembles singuliers et structure des ensembles mesurables pour les mesures de Hausdorff.* Bull. Soc. Math. France 74 (1946), 1–14.

[39] *Sur des ensembles cartésiens paradoxaux et la théorie de la mesure.* Bull. Soc. Math. France 74 (1946), 15–25.

[40] *Application à la théorie des réseaux, d'un théorème sur la structure des permutations d'un ensemble.* J. Math. Pures Appl. (9) 25 (1946), 161–172.

[41] *Caractérisation topologique des équations differentielles $y' = f(x, y)$ admettant un groupe transitif de transformations.* C. R. Acad. Sci. Paris 222 (1946), 718–719.

[42] *Étude des propriétés tangentielles à partir de la notion d'invariance par translation.* Bull. Sci. Math. (2) 70 (1946), 12–21 (spoluautor: Pauc, Chr.).

[43] *Sur les notions de filtre et de grille.* C. R. Acad. Sci. Paris 224 (1947), 171–173.

[44] *Application des propriétés descriptives de la fonction "contingent" à la théorie des fonctions de variable réelle et à la théorie différentielle des variétés cartésiennes.* J. Math. Pures Appl. (9) 26 (1947), 115–226 (1948).

[45] *Sur un théorème récent de M. Denjoy.* C. R. Acad. Sci. Paris 226 (1948), 1670–1672.

[46] *Convergences.* Ann. Univ. Grenoble. Sect. Sci. Math. Phys. (N.S.) 23 (1948), 57–112.

[47] *Lignes de Green et mesure harmonique.* C. R. Acad. Sci. Paris 228 (1949), 1556–1557 (spoluautor: Brelot, M.).

[48] *Application des propriétés descriptives de la fonction "contingent" à la théorie des fonctions de variable réelle et à la géometrie différentielle des variétés cartésiennes.* Arch. Math. 1 (1949), 464–467.

[49] *Espaces et lignes de Green.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 3 (1951), 199–263 (1952) (spoluautor: Brelot, M.).

[50] *Ensembles boréliens et analytiques dans les espaces topologiques.* C. R. Acad. Sci. Paris 232 (1951), 2174–2176.

[51] *Difficultés d'une théorie de la catégorie dans les espaces topologiques quelconques.* C. R. Acad. Sci. Paris 232 (1951), 2281–2283.

[52] *Les capacités, fonctions alternées d'ensemble.* C. R. Acad. Sci. Paris 233 (1951), 904–906.

[53] *Capacités. Premières définitions.* C. R. Acad. Sci. Paris 234 (1952), 35–37.

[54] *Extension et restriction d'une capacité.* C. R. Acad. Sci. Paris 234 (1952), 383–385.

[55] *Propriétés fonctionnelles des capacités alternées ou monotones. Exemples.* C. R. Acad. Sci. Paris 234 (1952), 498–500.

[56] *Capacitabilité. Théorèmes fondamentaux.* C. R. Acad. Sci. Paris 234 (1952), 784–786.

[57] *Polynômes harmoniques et polyharmoniques.* Sborník: Second colloque sur les equations aux derivées partielles, Bruxelles 1954, 45–66. Georges Thone, Liège; Masson & Cie, Paris 1955 (spoluautor: Brelot, M.).

[58] *Theory of capacities.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 5 (1953/54), 131–295.

[59] *Sur le théorème des points-selle de la théorie des jeux.* Bull. Sci. Math. (2) 79 (1955), 48–53.

[60] *Aspects linéaires de la théorie du potentiel. Étude des modèles finis.* C. R. Acad. Sci. Paris 242 (1956), 222–225 (spoluautor: Deny, J.).

[61] *Fonctions analytiques et surfaces de Riemann.* Enseignement Math. (2) 2 (1956), 1–11.

[62] *Unicité des représentations intégrales au moyen de points extrémaux dans les cônes convexes réticulés.* C. R. Acad. Sci. Paris 243 (1956), 555–557.

[63] *Les noyaux réguliers en théorie du potentiel.* C. R. Acad. Sci. Paris 243 (1956), 635–638.

[64] *Existence des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes.* C. R. Acad. Sci. Paris 243 (1956), 699–702.

[65] *Existence des représentations intégrales dans les cônes convexes.* C. R. Acad. Sci. Paris 243 (1956), 736–737.

[66] *Aspects linéaires de la théorie du potentiel. Théorème de dualité et applications.* C. R. Acad. Sci. Paris 243 (1956), 764–767 (spoluautor: Deny, J.).

[67] *Modèles finis en théorie du potentiel.* J. Analyse Math. 5 (1956-57), 77–135.

[68] *Sur les fondements de la théorie fine du potentiel.* C. R. Acad. Sci. Paris 244 (1957) 1606–1609.

[69] *Potentiels sur un ensemble de capacité nulle. Suites de potentiels.* C. R. Acad. Sci. Paris 244 (1957), 1707–1710.

[70] *Ensembles semi-réticulés et ensembles réticulés de fonctions continues.* J. Math. Pures Appl. (9) 36 (1957), 179–189 (spoluautor: Deny, J.).

[71] *Le théorème de convergence en théorie du potentiel.* J. Madras Univ. Sect. B. 27 (1957), 277–286 (spoluautor: Brelot, M.).

[72] *Capacitabilité en potentiel logarithmique.* Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. (5) 44 (1958), 321–326.

[73] *Une classe régulière d'espaces de Baire.* C. R. Acad. Sci. Paris 246 (1958), 218–220.

[74] *Espaces vectoriels, formes et équations linéaires.* Structures algébriques et structures topologiques (1958), 29-41.

[75] *La droite numérique; propriétés topologiques fondamentales.* Structures algébriques et structures topologiques (1958), 101-115.

[76] *Notions liées à la structure d'espace métrique.* Structures algébriques et structures topologiques (1958), 127-136.

[77] *Ensembles $\mathcal{K}$-analytiques et $\mathcal{K}$-sousliniens. Cas général et cas métrique.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 9 (1959), 75–81.

[78] *Forme abstraite du théorème de capacitabilité.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 9 (1959), 83–89.

[79] *Sur les points d'effilement d'un ensemble. Application à l'étude de la capacité.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 9 (1959), 91–101.

[80] *Sur les G_δ de capacité nulle.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 9 (1959), 103–109.

[81] *A plane continuum no two of whose nondegenerate subcontinua are homeomorphic: An application of inverse limits.* Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), 347–353 (spoluautor: Anderson, R. D.).

[82] *Sur l'équation de convolution $\mu = \mu * \sigma$.* C. R. Acad. Sci. Paris 250 (1960), 799–801 (spoluautor: Deny, J.)

[83] *Limites projectives d'ensembles convexes et éléments extrémaux.* C. R. Acad. Sci. Paris 250 (1960), 2495–2497.

[84] *Aspects linéaires de la théorie du potentiel. Noyaux de composition satisfaisant au principe du balayage sur tout ouvert.* C. R. Acad. Sci. Paris 250 (1960), 4260–4262 (spoluautor: Deny, J.).

[85] *Le théorème de représentation intégrale dans les ensembles convexes compacts.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 10 (1960), 333–344.

[86] *Modern mathematics and teaching* (polsky). Wiadom. Mat. (2) 4 (1960), 43–57.

[87] *Représentations intégrales dans les cônes convexes sans base compacte.* C. R. Acad. Sci. Paris 253 (1961), 1901–1903.

[88] *L'analyse et Bourbaki.* Enseign. Math., II. Sér. 8 (1962), 109-135. Překlady: Math. Phys. Semesterber. 9 (1962), 1–21 (německy), Bol. Soc. Paranaense Mat. 6 (1963), 1–18 (portugalsky) a Wiadom. Mat. (2) 7 (1963), 99–120 (polsky).

[89] *Ensembles et cônes convexes faiblement complets I.* C. R. Acad. Sci. Paris 254 (1962), 1908–1910.

[90] *Ensembles et cônes convexes faiblement complets II.* C. R. Acad. Sci. Paris 254 (1962), 2123–2125.

[91] *Axiomatique des mesures maximales. Application aux cônes convexes faiblement complets.* C. R. Acad. Sci. Paris 255 (1962), 37–39.

[92] *Étude des mesures coniques. Cônes convexes saillants faiblement complets sans génératrices extrémales.* C. R. Acad. Sci. Paris 255 (1962), 445–447.

[93] *Frontière associée à un espace vectoriel de fonctions continues à valeurs vectorielles.* C. R. Acad. Sci. Paris 255 (1962), 816–818.

[94] *Frontière fine réduite. Esquisse du cas localement compact.* C. R. Acad. Sci. Paris 255 (1962), 1055–1057.

[95] *Recherche d'une axiomatique commode pour le premier enseignement de la géométrie élémentaire* (polsky). Wiadom. Mat. 5 (1962), 87–108.

[96] *Mesures coniques maximales sur les cônes convexes faiblement complets.* Sémin. Théorie Potentiel (M. Brelot, C. Choquet et J. Deny) 6 (1962), No. 12, 15 s.

[97] *Remarques à propos de la démonstration d'unicité de P.-A. Meyer.* Sémin. Théorie Potentiel (M. Brelot, G. Choquet et J. Deny) 6 (1962), No. 8, 13 s.

[98] *Sur la meilleure approximation dans les espaces vectoriels normés.* Rev. Math. Pures Appl. (Bucarest) 8 (1963), 541–542.

[99] *Les cônes convexes faiblement complets dans l'analyse.* Sborník: Proc. Internat. Congr. Mathematicians (Stockholm, 1962), 317–330. Inst. Mittag-Leffler, Djursholm 1963.

[100] *Existence et unicité des représentations intégrales dans les convexes compacts quelconques. Errata: EA 30.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 13 (1963), 139–154 (spoluautor: Meyer, P-A.).

[101] *Étude des espaces uniformes à partir de la notion d'écart.* Enseignement Math. (2) 11 (1965), 170–174.

[102] *Démonstration non probabiliste d'un théorème de Getoor.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 15 (1965), fasc. 2, 409–413.

[103] *Exposed points of convex sets.* Pacific J. Math. 17 (1966), 33–43 (spoluautoři: Corson, H., Klee, V.).

[104] *Cardinaux 2-mesurables et cônes faiblement complets.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 17 (1967), fasc. 2, 383–393.

[105] *Une démonstration élémentaire du théorème du minimax.* Enseignement Math. (2) 13 (1967), 153–155.

[106] *Construction d'ultrafiltres sur N.* Bull. Sci. Math. (2) 92 (1968), 41–48.

[107] *Deux classes remarquables d'ultrafiltres sur N.* Bull. Sci. Math. (2) 92 (1968), 143–153.

[108] *Mesures coniques, affines et cylindriques: structure et opérations.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A B 266 (1968), A567–A569.

[109] *Mesures coniques et affines invariantes par isométries: Zonoformes, zonoèdres et fonctions de type négatif.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A B 266 (1968), A619–A621.

[110] *Sur un théorème de Keldych concernant le problème de Dirichlet.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 18 (1968), fasc. 1, 309–315.

[111] *Mesures coniques, affines et cylindriques.* Sborník: Symposia Mathematica, Vol. II (INDAM, Rome, 1968), 145–182. Academic Press, London, 1969.

[112] *Deux exemples classiques de représentation intégrale.* Enseignement Math. (2) 15 (1969), 63–75.

[113] *Sur les ensembles uniformément négligeables.* Séminaire Choquet, 9e année, Initiation à l'Analyse, Commun. No. 6, 15 s., Secrétariat Mathématique, Paris 1970.

[114] *Formes linéaires positives sur les espaces de fonctions. Espaces sous-stoniens et pseudo-mesures.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A B 271 (1970), A164–A166.

[115] *Un ensemble paradoxal en théorie de la mesure.* Bull. Sci. Math. (2) (1970), 247–250.

[116] *Le caractère faiblement complet des cônes à chapeau universel.* Bull. Sci. Math. (2) 94 (1970), 281–288.

[117] *Formes linéaires positives sur les espaces de fonctions. Pseudo-mesures; éléments extrémaux; théorèmes de densité.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A B 271 (1970), A828–A831.

[118] *Opérations sur les espaces vectoriels topologiques métrisables.* Séminaire Choquet, 10e année, Initiation à l'Analyse, Fasc. 2, Commun. No. 2, 5 s., Secrétariat Mathématique, Paris 1971.

[119] *Une propriété des germes suivant un ultrafiltre.* Séminaire Choquet, 10e année, Initiation à l'Analyse, Fasc. 2, Commun. No. 1, 4 s., Secrétariat Mathématique, Paris 1971.

[120] *Résultats récents sur les formes positives sur des espaces de fonctions.* Séminaire Choquet 11e-12e années, Initiation à l'Analyse, Exp. No. 6, 3 s., Secrétariat Mathématique, Paris 1973.

[121] *Détermination and study of positive forms on spaces of functions I.* J. Approximation Theory 7 (1973), 325–333.

[122] *Modern mathematics, and education. I, II.* Gaz. Mat. Ser. A 78 (1973), 17–24; ibid. 78 (1973), 65–72.

[123] *Solution d'un problème sur les itérés d'un opérateur positif sur $C(K)$.* Séminaire Choquet, 11e-12e années, Initiation à l'Analyse, Exp. No. 7, 2 s., Secrétariat Mathématique, Paris 1973.

[124] *Frontière-module et représentation intégrale.* Séminaire Choquet, 11e-12e années, Initiation à l'Analyse, Exp. No. 8, 4 s., Secrétariat Mathématique, Paris 1973.

[125] *Determination and study of positive forms on spaces of functions II.* J. Approximation Theory 10 (1974), 358–378.

[126] *Noyaux de convolution et balayage sur tout ouvert.* Sborník: Théorie du potentiel et analyse harmonique (Journées Soc. Math. France, Inst. Recherche Math. Avancée, Strasbourg, 1973), 60–112. Lecture Notes in Math., Vol. 40, Springer, Berlin 1974 (spoluautor: Deny, J.).

[127] *Sur certaines moyennes associées à un opérateur positif.* Séminaire Choquet, 14e année, Initiation à l'Analyse, Exp. No. 11, 3 s., Secrétariat Mathématique, Paris 1975.

[128] *Sur un théorème du type Banach-Steinhaus pour les convexes topologiques.* Séminaire Choquet, 13e année, Initiation à l'Analyse, Commun. No. C4, 5 s., Secrétariat Mathématique, Paris 1975.

[129] *Sur la séparation des cônes faiblement complets.* Séminaire Choquet, 13e année, Initiation à l'Analyse, Commun. No. C3, 5 s., Secrétariat Mathématique, Paris 1975.

[130] *Notice sur les travaux scientifiques* (avec un avant propos par Pierre Dugac). Historia Math. 2 (1975), 153–160.

[131] *Avant propos.* Biography: Brelot, Marcel. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 25 (1975), no. 3-4, ix–xii.

[132] *Solution d'un problème sur les itérés d'un opérateur positif sur $C(K)$ et propriétés de moyennes associées.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 25 (1975), no. 3-4, 109–129 (spoluautor: Foias, C.).

[133] *Convergence vague et suites de potentiels newtoniens.* Bull. Sci. Math. (2) 99 (1975), no. 3, 157–164.

[134] *Sur un problème lié à la stabilité des données initiales en relativité générale.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A B 287 (1978), no. 15, A1047–A1049 (spoluautor: Choquet-Bruhat, Y.).

[135] *Noyaux de convolution sur-exponentiels sur $\mathbb{R}^n$.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A B 288 (1979), no. 19, A903–A905.

[136] *Noyaux de convolution a croissance exponentielle sur $\mathbb{R}^n$.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A B 288 (1979), no. 21, A975–A979.

[137] *Variétés riemanniennes de petites classes.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A B 289 (1979), no. 10, A527–A531.

[138] *Répartition des nombres $k(3/2)^n$ et ensembles associées.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A B 290 (1980), no. 13, A575–A580.

[139] *Algorithmes adaptés aux suites $(k\theta^n)$ et aux chaînes associées.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A B 290 (1980), no. 16, A719–A724.

[140] *θ-jeux récursifs et application aux suites $(k\theta^n)$; solénoïdes de $\mathbf{T}^{\mathbf{Z}}$.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A B 290 (1980), no. 19, A863–A868.

[141] *Construction effective de suites $(k(3/2)^n)$. Étude des mesures $(3/2)$-stables.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A B 291 (1980), no. 2, A69–A74.

[142] *Les fermés $(3/2)$-stables de $\mathbf{T}$; structure des fermés dénombrables; applications arithmétiques.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A B 291 (1980), no. 4, A239–A244.

[143] *Epistémologie du transfini.* Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques 1, 1–17, Inst. Henri Poincare, Paris 1980.

[144] *θ-fermés; θ-chaînes et θ-cycles (pour $\theta = 3/2$).* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 292 (1981), no. 1, 5–10.

[145] *θ-fermés et dimension de Hausdorff. Conjectures de travail. Arithmétique des θ-cycles (où $\theta = 3/2$).* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 292 (1981), no. 6, 339–344.

[146] *Plongement d'ensembles dénombrables dans des espaces métriques compacts.* Bull. Sci. Math. (2) 105 (1981), no. 3, 225–228.

[147] *Représentation intégrale.* Sborník: Measure theory and its applications (Sherbrooke, Que., 1982), 114–143. Lecture Notes in Math. 1033, Springer, Berlin-New York 1983.

[148] *Allocution introductive au colloque Deny.* Sborník: Théorie du potentiel (Orsay, 1983), 1–9. Lecture Notes in Math. 1096, Springer, Berlin-New York 1984.

[149] *Nombres* 3/2*-constructibles.* Publ. Math. Univ. Pierre Marie Curie 78 (1985), Sémin. Initiation Anal. 24e Année 1984/85, Exp. 9, 3 s.

[150] *Une démonstration du théorème de Bochner-Weil par discrétisation du groupe.* Publ. Math. Univ. Pierre Marie Curie 78 (1985), Sémin. Initiation Anal. 24e Année 1984/85, Exp. 23, 3 s.

[151] *Integral representation theory.* Adv. in Math. (Beijing) 14 (1985), no. 2, 116–126.

[152] *La naissance de la théorie des capacités: réflexion sur une expérience personnelle.* C. R. Acad. Sci. Sér. Gen. Vie Sci. 3 (1986), no. 4, 385–397. Překlad: Pokroky Mat. Fyz. Astronom. 34 (1989), 71 – 83.

[153] *Une démonstration du théorème de Bochner-Weil par discrétisation du groupe.* Resultate Math. 9 (1986), no. 1-2, 1–9.

[154] *Quelques outils pour l'étude des attracteurs.* Publ. Math. Univ. Pierre Marie Curie 86 (1987), Exp. 18, 9 s.

[155] *Le Hénon, moins étrange qu'on ne le croit.* Publ. Math. Univ. Pierre Marie Curie 86 (1987), Exp. 19, 7 s.

[156] *Itération de diffeomorphismes; attracteurs globaux et ponctuels.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 305 (1987), no. 13, 617–621.

[157] *La vie et l'œuvre de Marcel Brelot* (*1903–1987*). Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques 11, 1–31, Univ. Paris VI, Paris 1990.

[158] *Peut-on renouveler ses champs d'intérêt? Essai de réponses concrètes.* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 38 (1990), no. 1, 241–255.

[159] *Applications récentes du théorème "contingent-paratingent" à l'analyse non-réguliere.* Recent developments in mathematical analysis and its applications (Italian) (Bari, 1990), Confer. Sem. Mat. Univ. Bari (1991), No. 237-244, 1–11.

[160] *La vie et l'œuvre de Marcel Brelot.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. Gen., Vie Sci. 9 (1992), 387-397.

[161] *Le continu, le discret, et ... tout le reste.* Sborník: Le labyrinthe du continu (Cerisy-la-Salle, 1990), 267–278, Springer, Paris 1992.

[162] *Sur les homéomorphies harmoniques d'un disque D sur D.* Complex Variables Theory Appl. 24 (1994), no. 1-2, 47–48.

[163] *Existence et unicité des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes.* Séminaire Bourbaki, Vol. 4, Exp. No. 139, 33–47, Soc. Math. France, Paris 1995.

[164] *Les travaux de Nash et Kuiper sur le plongement isométrique des C^1-variétés riemanniennes dans l'espace euclidien.* Séminaire Bourbaki, Vol. 4, Exp. No. 147, 139–149, Soc. Math. France, Paris 1995.

[165] *Hommage à Paul André Meyer et Jacques Neveu.* Gaz. Math. (1996), No. 68, 4–30 (se spoluautory).

[166] *Les processus mentaux de la création.* Sborník: Potential theory - ICPT '94, Kouty, Czech Republic, August 13-20, 1994 (ed. Král, J. et al.), 27-49. de Gruyter, Berlin 1996. Viz též Séminaire d'Analyse, 1993–1994 (Aubière), Exp. No. 26, 29 s. Sémin. Anal. Univ. Blaise Pascal 9, Univ. Blaise Pascal (Clermont II), Clermont-Ferrand 1996.

[167] *Le centenaire de l'intégrale de Lebesgue.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 332 (2001), 85–90 (spoluautoři: Bony, J.-M., Lebeau, G.).

G. Choquet: vlastní charakteristika

Moje matematické dílo se rozvíjelo v různých směrech: topologie, míra, studium diferenciálních vlastností množin, teorie potenciálu, funkcionální analýza.

Přesto většina mých prací vykazuje určité společné rysy: přímé a geometrické vidění problémů, zkoumání hlubokých příčin platnosti získaných výsledků a zaujetí pro principiální problémy, jejichž vyřešení otevírá cestu k rozsáhlé partii analýzy.

Není to ale obtížnost sama o sobě, za kterou bych se tvrdošíjně hnal. Často bývám považován za představitele jemné analýzy a tohoto označení se nezříkám. Stále více jsem si však uvědomoval, že jsem se nezačal zabývat jemnými a obtížnými problémy, dokud mi potenciálně nenabízely příležitost vytvoření nových, jednoduchých a účinných matematických nástrojů. Po vytvoření takových nástrojů jsem usiloval o jejich zdokonalení.

Zejména mé výzkumy ve funkcionální analýze byly průběžně provázeny snahou po jednoduchosti a účinnosti. Tento hlavní zájem a zároveň skutečnost, že tato bádání měla obecně vzato kořeny v některé z teorií souvisejících s četnými oblastmi fyziky, jsou bezesporu vysvětlením, proč výsledky mých výzkumů docela přirozeně nalezly uplatnění v teoretické fyzice, teorii pravděpodobnosti a ve statistice.

Má vlastní záliba v globálním intuitivním chápání předmětů mého studia nalezla odraz v mých pedagogických koncepcích. Myslím, že přehnaně vytříbené a učeně pojaté vyučování by se vyučováním, a to na jakékoli úrovni, ani nazývat nemělo. Jenže nyní naše vyučování na všech stupních klade přílišný důraz na důležitost rigoróznosti a průzračnosti učitelského výkladu. Za nesrovnatelně důležitější však osobně považuji, aby s konkrétní vykládanou látkou žák experimentoval sám.

Po celou dobu počátečních ročníků se matematika na gymnáziu musí držet role služebnice empirických věd a geometrie musí být chápána jako postupná matematizace reálného světa, což samozřejmě nevylučuje její algebraizaci, ovšem také ale postupnou.

Převzato z G. Choquet: *Notice sur les travaux scientifiques*, Paris, Septembre 1974. Přeložil Ivan Netuka.

Gustave Choquet: vzpomínky a názory

Článek věnovaný Gustavu Choquetovi je jednou z kapitol knihy *Hommes de Science*, Vingt-huit portraits, Hermann, Paris, 1990. Kniha obsahuje rozhovory s 28 vynikajícími osobnostmi francouzské biologie, fyziky, chemie a matematiky, které uskutečnil (a fotografiemi doprovodil) Marian Schmidt.

M. Schmidt je polského původu, žil ve Francii, Venezuele a USA. Vystudoval matematiku (Ph.D. na Brandeis University, Massachusetts v r. 1969). Vždy ho přitahovala žurnalistika, fotografie a film. V této oblasti také nyní pracuje pro agenturu Rapho v Paříži.

Předmluvu ke knize napsal Hubert Curien, francouzský ministr výzkumu.

Další kapitoly knihy jsou věnovány těmto francouzským matematikům: Henry Cartan, Jean Dieudonné, Jean Leray, André Lichnerowicz, Laurent Schwartz, Jean-Pierre Serre a René Thom.

Všichni moji předkové pocházejí z valencijského kraje, vlasti Froissarta, Watteaua a Carpeauxe, kraje rozkládajícího se na cestě invazí, často pustošeného, ale vždy znovu nacházejícího život.

Můj dědeček z otcovy strany byl tkadlec v Solesmes, venkovském městečku, které leží mezi Valenciennes a Cambrai; jeho žena byla kuchařka a pradlena. Můj děd z matčiny strany byl číšníkem ve Valenciennes; podle vyprávění matky byl statný, žoviální a sršel vtipem; jeho žena zemřela při narození mé matky.

Můj otec Gustave měl široké zájmy, byl to člověk jasného ducha a měl vysoké mínění o práci a povinnosti. Na základní škole v Solesmes mu byla s vysvědčením udělena první oblastní cena. Avšak v Solesmes bylo možno po základní škole navštěvovat pouze tzv. malý seminář, jehož námluvy otec tvrdošíjně odmítal. A tak vstoupil do světa práce, nejdříve do tkalcovny, poté do mlynářství. Prožíval velkou radost, když se mohl stát klarinetistou v místní kapele; práce a hudba byly dvěma póly jeho mládí. Celé mé dětství bylo zpříjemňováno měkkými i štěbetavými tóny jeho klarinetu; dodnes si na ně uchovávám nostalgickou vzpomínku.

Moje matka Marie byla vychována tetou nedaleko od Solesmes, v malé vesnici obklopené ovocnými sady, loukami a poli. I když se jí tam nedostalo školní výchovy na vysoké úrovni, nalezla tam lidské teplo, které si tolik přála přenést na nás. Ráda snila a našla zalíbení v poezii. Milovala krásné věci, hudbu, květy v zahradě i v domě. Psala krátké básně a já vždy s dojetím otvírám její sešitek, kde za několika básničkami nám, v předvečer své smrti, dává své poklidné sbohem.

Tato dvě dědictví ze strany otce i matky, která se více doplňují než aby se potírala, spolužila ve mně bez konfliktů a přinášela mi současně přísný ideál intelektuálního a morálního života i sklon ke snění, k poezii a k cestám intuice, nepočítaje v to dědictví bezpochyby po dědovi z matčiny strany — vyžívat se ve slovních hříčkách a spřádat páté přes deváté, což konečně vychází z procesu asociace myšlenek.

Narodil jsem se v Solesmes 1. března 1915, rok po mé sestře. Můj otec byl na frontě od července 1914. Zprávy přicházely zřídka. Matka mě tedy po něm pojmenovala Gustave.

Za německé okupace byl život tvrdý. Přišla zima, strastiplná evakuace do Vendée přes Švýcarsko a Paříž. Ve Vendée jsme našli útočiště v malé osadě několik kroků od Marais. Odtud se datují moje první vědomé vzpomínky: byly mi pouze tři roky, ale uchovávám si s naprosto plnou svěžestí představu luk, dvorů ve statcích, řeky, jejího vylévání z břehů, naší jizby s utlučenou hlínou i s ohništěm. Myslím, že tato dobrá vizuální paměť je původem mého smyslu pro geometrii a geometrickou intuici, která mi otevřela nové přístupové cesty k různým oblastem matematiky, do té doby považovaným za dosti vzdálené od geometrie; tato intuice vizuálního původu kombinovaná s lehkostí myšlenkových asociací, zvídavostí a schopností dlouhotrvající koncentrace představuje podle mého názoru to, co ve mně nejvíce odráží dědičné faktory a částečně vysvětluje, proč jsem se dal na matematický výzkum.

Po válce to byl krátký pobyt ve Valenciennes. Pak nás již vidím usazené s trochou našeho nábytku na káře, která nás vezla do Saultain, vesnice napůl rolnické, napůl dělnické, odkud bylo možné zdálky pozorovat zvony Valenciennes, haldy a občas na nebi večer odrazy záře vysokých pecí. Byly mi 4 roky a byl to čas třešní ...

V Saultain byl můj otec hlavním účetním v podniku na výrobu pytlů a plachtoviny. Jeho práce odměřovala celý jeho rozvrh hodin; v poledne ho zdálky ohlašovaly jeho kroky hlasitě se rozléhající na dlažbě. Dopřával si na oběd jednu hodinu, nikdy více. Večer, když bylo ještě světlo, pracoval na zahradě; jakmile mi bylo sedm nebo osm let, měl jsem na starosti pikýrování póru a salátové čekanky a také pletí. Bylo to hodně nudné, ale uchoval jsem si z toho silnou zálibu pro práci na zahradě.

Zhruba ve stejném věku mě otec nechal učit hrát na flétnu pod vedením jednoho soustružníka, dirigenta místní kapely. Brzo jsem mohl doprovázet otce s jeho klarinetem na koncertech a slavnostech v sousedních vesnicích s jednou nebo druhou ze svých dvou příčných fléten, velkou a malou. Tak jsem se postupně seznámil s kapelou, pěveckým sborem i divadelní skupinou.

Bylo mi sedm let, když se narodila moje nejmladší sestra, a tím se uzavřel náš rodinný kruh. Ve stejném měsíci zavedli do vesnice elektřinu. Až do té doby pouze kruhová záře petrolejové lampy osvětlovala rodinný stůl a umožňovala prodloužení večerů.

V Saultain jsem poznal život všech chlapců svého věku. Každý čtvrtek a každou neděli jsme se toulali po okolí a hledali pulce, housenky, motýly a chrousty; vzpomínám si také na hry více méně zakázané, od petardy přes roztáčení káči nebo na lupy v ovocných sadech. S děvčaty jsme se setkávali pouze při katechismu, kdy jsme si vyměňovali kradmé nevinné pohledy.

Měl jsem to štěstí, že jsem po dobu tří let měl výjimečného učitele, pana Flamanta. Jeho vášní bylo experimentování ve fyzice, chemii a biologii. Z jeho rukou, které nikdy nezůstaly v klidu, vycházely fyzikální přístroje, chemické pomůcky, drátěné klece pro housenky bource morušového a motýly. S ním jsem měl možnost pozorovat více jevů než během celého svého studia na gymnáziu nebo na univerzitě. Svoji vášeň nám předal. Vzpomínám si, jak jsem si doma vyrobil z hrdla lahve šampaňského „mikroskop“; ale především na vzrušení, které jsem pocítil, když jsem otevřel břicho a hrudník žáby, připíchnuté na prkýnku.

U něho jsem pochopil, že vyučující musí nejdříve věc ukázat a pak o ní mluvit: když se mu podařilo pomocí obyčejné hliněné dýmky zasunuté do kamen vyrobit svítiplyn, dehet a koks, nebo když nám dal ochutnat alkohol pocházející z destilování zkvašených řízků cukrovky, teorii jsme už více nepotřebovali. Také jsem pochopil důležitost příkladu: „od dobrého učitele, dobrý žák“; člověk se formuje na základě vzorů. To není náhoda, když se zrodí výjimečná vědecká nebo umělecká škola. Kromě příznivého společenského ovzduší je třeba člověka nebo malé skupiny lidí, kteří otevřou cestu. Připomeňme si matematické školy z období mezi dvěma válkami v Polsku nebo v Maďarsku, na rozmach Göttingen za Hilberta nebo ionské školy pět set nebo šest set let před Kristem, na filozofy a umělce Periklova století.

Pan Flamant nám také doporučoval či vnucoval převádět všechny úlohy z aritmetiky do geometrických obrázků. Této radě jsem byl v různých formách věren během celého svého života a předal jsem ji svým studentům.

Svá středoškolská studia jsem absolvoval na gymnáziu ve Valenciennes na latinsko-anglické větvi. Také tam jsem měl štěstí na několik vynikajících profesorů, kteří rádi opouštěli učební osnovy a hovořili s námi o předmětech svého vlastního zájmu. Na přírodní vědy jsme měli jednoho profesora nadšeného posledními objevy o živočišné buňce; v historii a geografii nám pan profesor Ficheux vyprávěl o svých cestách po Rumunsku a vykládal nám Wegenerovu teorii v době, kdy jí geologové nevěřili. Ve filozofii pan profesor Deixonne — stoupenec svobodné přátelské diskuse; pan profesor Fabureau, něžný dadaistický básník, a v matematice pan Mas, jehož elegantní styl mě uchvátil.

Ve třetím ročníku jsem si již oblíbil četbu dvou starých *Slovníků přírodních věd*, když mi spolužák tajně půjčil *Kurs analýzy a mechaniky* z *École Universelle* na úrovni předmětu nazvaného základní matematika. To byla pro začátečníka v algebře dřina; začal jsem s knihou od konce vzhledem k četným obrázkům, potom jsem četl na přeskáčku a postupně jsem se přibližoval k začátku, kde definice limity zůstávala stále nepokořeným ostrůvkem. Četné příklady mi nicméně umožnily udělat si určitou představu. Touto četbou jsem byl fascinován a myslím si, že to byl okamžik, kdy jsem se rozhodl, pokud to bude možné, dělat matematiku celý život.

V průběhu roku, kdy jsem byl ve třídě zaměřené na matematiku, mě pan profesor Mas, ač mě už tehdy neučil, přesvědčil k účasti v celostátní soutěži vybraných středoškoláků. Dal mi několik velmi solidních soukromých lekcí a já jsem získal první cenu. Vzpomínám si, že jsem si tehdy řekl: „Protože jsem dobrý v matematice, mohl bych v ní pokračovat a zároveň se vedle ní dát do studia humanitních či přírodních věd“. Zrnko zdravého rozumu mě ale vedlo ke sledování mého přirozeného sklonu, tím spíše, že mé soutěžní úlohy opravoval pan profesor Chenevier, který mi nabídl přijetí do své matematické třídy pro pokročilé, aniž bych musel absolvovat obvyklou přípravku; kostky byly vrženy.

Chenevierovy přednášky byly jasné, přesné a dosti lehké, takže jsem je mohl bez nesnází vstřebat; sparťanský režim na internátu tomu též napomohl! Je třeba ještě uvést, že nedeformovaný dvěma, třemi či více lety prožitými mezi pokročilými adepty matematiky, jsem vymýšlel přímé geometrické metody, které „mazáky“ udivovaly. Společně se svým spolužákem Félicim jsme vytvořili geometrickou metodu, při níž nekonečně malé veličiny byly skutečná čísla či vektory, dokonce i nekonečně malé druhého řádu; prostě to byla nestandardní analýza před A. Robinsonem!

Kurs fyziky a chemie ve mně nezanechal oslnivou vzpomínku. Naštěstí naše fyzika byla konec konců jen trocha geometrie zpestřená několika vzorci z termodynamiky a elektřiny, tedy vše, co jsem ovládal. Chemie, velmi popisná, mě silně odpuzovala a ústní přijímací zkoušku na École Normale Supérieure jsem jen díky shovívavosti examinátora z chemie a výsledku písemné zkoušky nemusel podstoupit.

Čtyři roky na École splnily moje očekávání; ale mnozí jiní již půvaby tohoto thélemského opatství opěvovali. Vděčím mu zvláště za každodenní a neformální kontakty s nejrůznějšími a originálními spolužáky a za návyk nezávislého myšlení. Při svém bloumání ve vědecké knihovně špatně ochraňované zaprášenou kostrou pravěké nestvůry, jsem objevil francouzský překlad Cantorovy knihy o nekonečnu a Baireovy přednášky o nespojitých funkcích. Četl jsem již v létě 1933 Borelovy přednášky o teorii funkcí, ale právě tato dvě díla potvrdila, k čemu mám sklony. Povzbuzen a utvrzen takto ve víře, vyložil jsem krásy těchto děl svým spolužákům v „miniseminaři“, při němž jsme se střídali s Laurentem Schwartzem, který se s námi dělil o svoje znepokojení nad rozdílností chování rovnic $\Delta u = 0$ a $\partial^2 u/\partial x \partial y = 0$; toto znepokojení ho nemělo opustit až do roku 1944.

Na École bylo tradicí pouze spoře zaplňovat lavice amfiteátru v Institutu Henri-Poincaré. Nahrazovali jsme tyto nedostatky četbou prvního dílu Goursatova *Traité*, ale měli jsme „doma“ profesory, kteří nám, i když s nestejnými úspěchy, předkládali solidní duševní potravu. Georges Darmois, jehož geometrickou představu jsem sdílel, mě ovlivnil nejvíce. Přibližoval nám elegantním způsobem prakticky bez kalkulu krásy teorie ploch, která se mi zalíbila už při postupném čtení Darbouxových *Leçons sur la théorie générale des surfaces*. Právě u něho jsem po absolvování konkursu pro budoucí středoškolské profesory hledal radu. Jako prázdninovou četbu mi doporučil *Theory of functions* od Hobsona a *Vorlesungen über reelle Variablen* od Carathéodoryho. Bylo to krásné léto, protože když jsem nebyl do půl těla ponořen v Hobsonovi, tak mě nadchl Carathéodory a já jsem z toho usoudil, že můj nejnaléhavější úkol spočívá ve vyčerpávajícím studiu uzavřených množin a kontinuí v rovině. Tomuto krásnému programu se dostalo jen částečného naplnění, dostatečného natolik, abych získal dobré intuitivní poznatky o těchto složitých pojmech.

Ve čtvrtém ročníku na École, kde jsem pokračoval ve svém programu, jsem se náhodou prostřednictvím svého o pět let staršího spolužáka Chabautyho dozvěděl o existenci stipendia Jane Eliza Proctorové na Graduate College v Princetonu. On sám využil tohoto stipendia a o svém pobytu v Princetonu hovořil s nadšením. Podal jsem žádost a stipendium jsem získal. Vůbec jsem toho nelitoval.

Amerika právě vyšla z krize a život se mi tam zdál snadný a obohacující. Pokračoval jsem ve vlastní práci a přitom jsem navštěvoval Lefschetzovy přednášky (těch jsem využil jen málo), ale především Churchovy přednášky o teorii lambda–kalkulu, který byl téměř zapomenut a vzat znovu na milost díky informatice. Byla to doba, kdy velké diskuse o pojmu konstruovatelného ordinálu hýbaly světem logiků. Tak jsem přišel do kontaktu s Churchovou tezí a s pracemi Gödela, Rószy Péter(ové), Turinga a Kleenea.

Po ročním pobytu ve Spojených státech jsem přijel strávit léto 1939 do Francie se svou rodinou, pevně rozhodnut znovu odjet do Princetonu v září. V září ale byla vyhlášena mobilizace, válka. A tak jsem zůstal ve Francii. Během této „podivné války“ jsem byl vyslán spolu s asi stovkou absolventů Grandes Écoles do tábora Boscarosse, abych tam při minimu vojenské disciplíny získal ponětí o „protiletecké obraně“. Postrádal jsem smysl pro disciplínu; považoval jsem výzbroj a způsob jejího použití za neužitečné a své přesvědčení jsem neskrýval, což se nelíbilo instruktorům z řad důstojníků. Využili první záminky, neškodné písně v naší světnici, a vyexpedovali mě k bojové jednotce koňmi taženého dělostřelectva, k 7. R. A. D., abych se, jako voják druhé třídy, blíže seznámil s realitou války.

Tento nový život, občas drsný, někdy nebezpečný, ale plný poučení a nikdy ne nudný, se mi líbil a dodnes jsem rád, že jsem ho poznal. Muži jednotky tvořili dvě skupiny dosti od sebe oddělené: ti z doprovodného personálu byli venkovského původu a starali se o koně; dělostřelci byli z Paříže a věnovali se střelbě a pozorování. Byl jsem pozorovatelem. Byly těžké chvíle ústupu, ostrých rozporů mezi těmito skupinami, ale měl jsem vynikající přátele a netrpěl jsem tím. Všichni řadoví vojáci i důstojníci plnili své úkoly. Účastnil jsem se, řečeno slovy mé vojenské knížky, operací „Lorrainská rovina v březnu 1940, Bitva o Francii mezi Aisne a Creuse v květnu–červnu 1940“.

V srpnu 1940 jsem byl demobilizován v Limoges a krátce nato jsem přijel do Paříže se svou snoubenkou; vzali jsme se v lednu 1941.

Dříve než budu mluvit o svých matematických výzkumech během války, chtěl bych zde říci, do jaké míry jsem byl, stejně jako většina ostatních Francouzů, nevědomý a neznalý ve věcech této války. Roztržitě jsem přečetl *Mein Kampf*, aniž bych mu uvěřil, a do doby, než se po válce odhalily hrůzy nacismu a koncentračních táborů, jsem si neuvědomoval, že se naše svoboda a morální hodnoty naší civilizace málem zhroutily. Celou dobu ústupu, která přinášela svědectví o rychlém rozkladu armády i morálky civilistů, jsme vlastně doufali v zastavení palby, aniž bychom přitom chápali, že to bude naše kapitulace. Dobírali jsme si naše židovské kamarády, kteří žili s úzkostí v těle, protože věděli něco, o čem jsme my neměli ani ponětí.

Po celou válku jsme v Paříži žili v malém dvoupokojovém bytě, kde se v roce 1941 a 1945 narodili naši dva synové. Život tam byl prostý, ale bohatě vyplněný. Pro mou ženu sháněním obživy a mateřskou péčí, pro mne matematikou. Od r. 1941 do r. 1945 jsem byl stipendistou CNRS, Národního střediska vědeckých výzkumů. Stipendium bylo skromné, ale pro mé kolegy i pro mne to kupodivu byla podružná starost. Dosyta jsem se těšil z naprosté svobody, kterou mi CNRS ponechávalo, a své zaujetí pro věc jsem postupně tříbil na nejrůznějších oblastech bádání.

V říjnu 1945 jsem se od Georgese Bouliganda, s nímž jsem se často stýkal, dozvěděl o možnosti jednoročního či dvouročního pobytu v Polsku, a to ve funkci profesora na Institut Français. Bylo ovšem potřeba mít doktorát. V té době takřka veškerá moje matematická kultura byla založena na četbě *Fundamenta Mathematicae*, věhlasného polského časopisu, jehož všechny předválečné svazky jsem si sehnal. Jet do Polska tak pro mne bylo nejen nádherným únikem, ale také cestou do matematického ráje. Zbývalo překonat psychologickou překážku, kterou představovalo sepsání disertace. Už jsem publikoval na třicet prací, povětšinou v *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, ale disertace jako taková mě děsila: chápal jsem ji encyklopedicky a měl jsem přehnaně vysokou představu o její úrovni. Ani přátelské výtky Henri Cartana a mého přítele Arnauda Denjoya mě k tomuto kroku nerozhoupaly. Bylo to Polsko, které mě zachránilo od tohoto přízraku. Během tří měsíců jsem disertaci sepsal a na začátku roku 1946 jsem dostal doktorát.

Za několik měsíců jsme se usadili v Krakově. Hodně jsem cestoval po Polsku a navštěvoval hlavní univerzity, tj. ve Varšavě, Vroclavi, Toruni a Poznani, kde Sierpiński, Kuratowski, Steinhaus a mnozí jiní pracovali na obnově matematického života. Nehledě na ztrátu prvotřídních matematiků, Polsko mě nezklamalo. Všude jsem nacházel příjemné lidské vztahy, zaměření výzkumu blízké mému a velkou rozmanitost zájmů. V Krakově se každý týden po pravidelném semináři scházeli matematici jako Nikodym, Leja, Ważewski, Gołab, a to v kavárně Europejski na Tržním náměstí. Pilo se capuccino a povídalo se o matematice. Život se tehdy Polákům zdál velmi slibný i přes rostoucí policejní nátlak a tichou ruskou vojenskou přítomnost.

V říjnu 1947 se v Grenoblu naskytlo místo docenta. V té šťastné době bylo více míst než uchazečů a Albert Chatelet, děkan pařížské univerzity, zajistil svým rozvážným přístupem jejich rozdělení. Polsko jsem tak s lítostí opustil, abych přešel do Grenoblu, dokonce v okamžiku, kdy mi univerzita v Krakově nabídla katedru.

Skvělé vzpomínky si uchovávám na dva roky strávené v Grenoblu, obzvláště na spolupráci s Marcelem Brelotem. Tam se také v roce 1948 narodila moje dcera Claire. Poté, co jsem jako docent na pařížské univerzitě zajišťoval po dva roky výuku matematiky pro obory matematika, fyzika a chemie, musel jsem zastoupit ochořelého Georgese Valirona, který přednášel kurs diferenciálního a integrálního počtu. Do té doby se přednáška v zásadě opírala o základní partie Goursatova díla *Traité d'Analyse.* Rázně jsem upravil zaměření i obsah kursu a dostalo se mi tak příležitosti být při tom, když se začala obrozovat výuka matematiky ve Francii, nejprve ve vyšších ročnících a pak vlivem nákazy v prvním dvouletí.

Profesorem jsem se stal v roce 1952. Později, v roce 1960, jsem se kromě působení na univerzitě ujal docentských povinností na École Polytechnique, nejprve z finančních důvodů a později ze zájmu o studenty prokazující vysokou úroveň. Profesorem jsem tam byl jmenován v roce 1965.

V květnu 1968 se přes zákazy mnozí posluchači École Polytechnique zúčastnili studentského hnutí a ustavila se skupina profesorů, v podstatě Laurent Schwartz, Louis Leprince-Ringuet a já, aby se zabývala novými přístupy k organizaci vzdělávání. Tato iniciativa, kterou schvalovali studenti, ale neschvalovala část vyučujících, dostala podporu náčelníka školy, člověka liberálního a osvíceného. Za dva roky tyto plány, více či méně upravené, vyústily v dosti hluboké strukturální přeměny. Nová nařízení neumožňovala souběžné působení v École a na univerzitě. Tak jsem se v r. 1970 rozhodl zůstat na univerzitě, zatímco Laurent Schwartz si vybral polytechniku, kde desítku let organizoval a řídil matematickou laboratoř.

Moje kursovní přednášky na univerzitě se až do r. 1960 soustřeďovaly v Institutu Henri-Poincaré, ale od tohoto roku jsme se usídlili v nových budovách na Jussieu, kterým se říkalo „vinná tržnice“ [1]) — tím došlo k rozštěpení matematické obce, jehož historie ještě nebyla napsána. Bylo to období, kdy se na rozdělení pomýšlelo, neboť pařížská univerzita se stala obrovským monstrem. Květen 1968 tomu napomohl a Edgar Faure rozhodl o rozdělení univerzity na třináct částí, z nichž Paříž VI, Paříž VII, Paříž Dauphine, Paříž–Jih (Orsay) a Paříž–Sever mají nyní důležitá matematická pracoviště. Byla to především Paříž VI, Paříž VII a v menší míře Paříž–Jih, kam se tehdejší pařížští matematici rozešli podle často nejasného výběru motivovaného napůl politicky, napůl vědecky. Znásobení počtu matematických center bylo vynikajícím faktorem pro rozmanitost výzkumů a dávalo mladým možnost prokázat jejich originalitu, protože se octli z dosahu těch starších s často tyranskými sklony.

V průběhu své odborné dráhy jsem absolvoval několik dlouhodobých pobytů na amerických univerzitách, které nakonec znám lépe než evropské: byly to Kansas, Cornell, Washington (Seattle), California (Berkeley), Maryland a Utah, Institute for Advanced Study v Princetonu, kde jsem spolupracoval s J. Denym. Také jsem navštívil Anglii, Austrálii, Afriku, Japonsko a Koreu. V nedávné době jsem se vydal dvakrát do Číny, jejíž lid a civilizace mě uchvátily. Číňané jsou pohostinní a otevření, zapomínají zlé skutky a pamatují si ty dobré. V současné době, kdy to ještě potřebují, by nás štědrost a dobře míněný zájem měly pobízet ke znásobení pomoci, kterou jim prokazujeme.

V čem tkví podstata vašich prací?

Určitě jsem nejvíce znám díky svým pracím věnovaným vytvoření teorie kapacit a díky větám o integrální reprezentaci. Přispěl jsem ale k řadě dalších teorií, jako jsou obecná topologie a teorie množin, míra, teorie funkcí reálné proměnné, lineární funkcionální analýza, infinitezimální geometrie („géométrie infinitésimale directe“), variační počet atd. Celkem nedávno, v r. 1981, jsem se nechal unést teorií čísel a v současné době (v roce 1987) mě zajímá teorie *podivných atraktorů*.

Jaký je styl vašeho bádání?

Jsem intuitivní typ a jsem geometr. Počínaje obecnou školou a gymnáziem jsem si každý matematický problém snažil geometricky představit, přeložit ho co nejvíce do zjednodušených obrázků, aby vynikla funkční kostra. Tento zvyk mě dovedl v pokročilejším věku k přijetí následujícího stylu vědecké práce: pokud je to možné, pohybuji se v nejobecnějším kontextu, v němž má problém ještě smysl a přitom se opírám o důkladnou znalost jednoho nebo více speciálních případů; podle potřeby postupně přecházím k méně obecným případům. To mi dovoluje dát problému zároveň maximální flexibilitu a dospět, pokud problém vyřeším, k matematickým nástrojům upotřebitelným za jiných okolností, než za nichž vznikly.

Dá se říci, že v matematice, stejně jako ve válce, jsou stratégové a taktici. Vojenský stratég má určitou intuitivní představu, jak vést tažení, ponětí o velkých masách a jejich vzájemných vztazích. Taktik se drží terénu, má technické znalosti a zřetelnou

---

[1]) podle původního určení místa (pozn. překl.)

zálibu v organizační činnosti. Spíše bych byl stratég v tom smyslu, že mám přehled o velkých masách a nemám rád a nepraktikuji hromadění znalostí o známých postupech. Často říkám, že žádnou část matematiky neznám do hloubky a snad proto, že nemám žádnou opravdovou specializaci, jsem mohl být úspěšný ve více matematických disciplínách.

Kdo vedl vaši disertaci?

V době po absolvování konkursu pro získání způsobilosti učit na gymnáziu, kdy jsem začínal své výzkumy, většina univerzitních profesorů své žáky nevedla. Pouze někteří z nich, jako Paul Montel, předkládali svým studentům témata výzkumu a blíže je sledovali. Bez velkého zesměšňování lze říci, že profesor vídal svého žáka jednou nebo dvakrát za rok. Při těchto vzácných příležitostech se ho zeptal: „Jak jdou vaše výzkumy?“, a pak dodal: „Čtěte mé práce, mohly by vás inspirovat.“

Na radu Georgese Darmoise jsem si za svého učitele vybral Arnauda Denjoy. Bezpochyby bych tuto volbu udělal sám kvůli intelektuální příbuznosti Denjoya s Bairem a Borelem, jejichž práce jsem obdivoval. Při žádné příležitosti jsem ho nepožádal, aby mi naznačil zaměření mých výzkumů a on se nikdy nepokusil mi téma vnutit. Přečetl jsem však mnoho jeho prací napsaných obdivuhodným jazykem. Vyprávěl mi o tom, nad čím bádá a zajímal se o moje výzkumy. Moje kontakty s ním, zpočátku řídké, se postupně stávaly čím dál více častějšími. Při své první návštěvě v říjnu 1937, několik měsíců po konkursu, jsem mu předložil své první výsledky, k nimž jsem dospěl o letních prázdninách. Některé nebyly nové, ale ty ostatní jsem na jeho rady shrnul do tří sdělení, které Elie Cartan přijal a prezentoval v Akademii.

V první polovině svého vědeckého života publikoval Denjoy většinou jen sdělení v Comptes Rendus de l'Académie des Sciences a svým žákům radil, aby ho napodobovali, což jsem udělal. Často jsem toho litoval, protože ne vždy jsem měl chuť rozvinout a prohloubit výsledky již ohlášené ve sděleních. Mimoto někteří matematici věří pouze větám podrobně dokázaným. A konečně je snadnější podrobně sepsat teorii, kterou člověk právě dokončil, než dělat tutéž práci o několik let později. V dalších letech jsem vždy radil svým žákům, aby nepublikovali sdělení, dokud nedokončili konečnou verzi ohlašovaných výsledků.

Přesto bylo toto sedmileté období velmi užitečné pro rozvinutí mé intuice ve velmi rozdílných oblastech, jako jsou konvexní tělesa, teorie her, teorie grafů, Finslerovy prostory, topologie roviny a diferenciální rovnice.

Litujete ještě něčeho jiného?

Zmíním se o jedné události podobné těm, které popisuje Paul Lévy ve své knize *Některé aspekty myšlení matematika*. Jde o kapitolu, v níž připomíná teorie, které mu jen o vlásek unikly.

V r. 1944 jsme s Jacquesem Denym napsali práci o polyharmonických funkcích; v ní jsme rozřešili určitý problém pro dvojrozměrný případ, ale nemohli jsme ho rozřešit pro vyšší dimenzi, neboť nám scházely přiměřené prostředky. Proto jsem předložil problém Laurentu Schwartzovi, o němž jsem věděl, že se soustavně zajímá o regularitu řešení parciálních diferenciálních rovnic. Problém ho zaujal a přivodil krystalizaci určitých jeho myšlenek, zatím dřímajících v zárodku. Zakrátko nato začal budovat základy své teorie distribucí. V průběhu své spolupráce s Jacquesem Denym jsem také v jedné přípravné studii, která se později neuplatnila, sestrojil rozvoj harmonické funkce do řady, v níž se objevují dipóly, tripóly atd., prostě to, co se dnes nazývá distribuce s bodovým nosičem. Fascinovalo mě to, ale pod tlakem potřeby dokončit naši práci jsem tuto stopu opustil. Samozřejmě je dnes jasné, že tento postřeh mohl vést jinou cestou, než se vydal Schwartz, k určité teorii distribucí.

Co si myslíte o vyučování matematiky?

Můj zájem o problémy vyučování byl vyvolán v padesátých letech zejména díky mým kontaktům s Calebem Gattegno, který patrně ze všech pedagogů nejlépe pochopil problémy učení. Při setkáních v Mezinárodní komisi pro studium a zdokonalování vyučování matematiky, kterou založil, jsem se hodně naučil z jeho příkladu a také z našich neformálních diskusí.

Rychle jsem si uvědomil, jak je pro každého vědce nutné podílet se na výuce; to nazývám *povinností angažovat se*. Pak jsem pochopil, že každý vyučující musí bez přestání bojovat se stále se vracejícím pokušením spokojit se s průzračnou a vybroušenou přednáškou, aniž by bral v úvahu znalosti žáků, jejich reakce či neporozumění. Takové nebezpečí existuje ve všech disciplínách, ale je obzvláště velké v matematice, kde by pokrok poslední stovky let umožnil v abstraktním a sterilizovaném světě elegantně vykládat základní pojmy a věty *ab ovo*, a to způsobem rychlým a přesným, zbaveným odkazu na zkušenost a geometrickou intuici. Právě to se stalo na konci šedesátých let ve Francii i v řadě dalších zemí při dramatickém nástupu *moderní matematiky*: Slavný Dieudonného výkřik „*Pryč s Eukleidem!*“ docela dobře vyjadřoval zaměření ministerské komise pověřené vypracováním nových učebních plánů matematiky na základních školách a gymnáziích. Ústřední myšlenka reformy vycházela z představy, že základy matematiky jsou nepostradatelné pro jakoukoli logickou konstrukci, a tak se zdůrazňovala potřeba začít ve výuce právě s nimi. Šlo o logiku, množiny, algebru a lineární algebru. Výsledek nemohl dopadnout jinak než katastrofálně, protože se odsunuly na vedlejší kolej veškeré pedagogické aspekty: motivace a předchozí znalosti žáků, výchova učitelů, tvorba rozumných učebnic, nemluvě o jistém souladu s fyziky a techniky.

Vysokoškolská výuka není tohoto nebezpečí ušetřena ani dnes a věk studentů není omluvou pro sterilizovaný výklad teorií, jejichž důležitost není vždy zřejmá. Nedlouho před rokem 1968 se objevila nová pohroma: *rozdrobení* výuky. Matematika je od té doby rozdělena na malé úseky. Každý z nich je svěřen specialistovi, který jej vykládá elegantně a úsporně, pokud jde o užívané prostředky. Takové dělení matematiky dává studentům útržkovitou představu, málo vhodnou pro rozvoj jejich motivace, a to i v případě, že vyučující neopomene naznačit původ užívaných pojmů, přiblížit jejich obtížný zrod a uvede plodné i přesvědčivé aplikace. Navíc příliš formalizovaný výklad určité teorie neposkytuje žádnou představu o zdrojích duševní činnosti matematika, jako jsou pozorování, matematizace, řešení problému v rámci vytvořeného modelu, návrat k původnímu nápadu, zobecnění a aplikace.

Vyučování se nesmí vzdalovat od toho, čím nás oslovují naše smysly: dítě už umí pozorovat, zkoumat hmatem, přemísťovat četné „předmatematické“ objekty: přímky, trojúhelníky, krychle, koule atd. Toho se musí využít, v tom se lze poučit od Marie Montessori. Už mezi osmým a čtrnáctým rokem věku je žák schopen rozvíjet a užívat svou intuici řešením nejrůznějších úloh za pomoci trochy počítání: jde o otáčení a úhly, obsahy a objemy, sférické trojúhelníky atd. Zároveň umí své matematické znalosti využívat v experimentálních vědách.

V určité míře se můžeme ve vyučování matematiky inspirovat závěry, k nimž dospěl Gattegno ve svých studiích o učení: *Intelektuální pochopení nepomáhá učení: inteligence je zde na překážku.* V naší situaci bych spíše řekl: nejdůležitější je vlastní aktivita žáka. Člověk se nenaučí dělat matematiku *posloucháním* vybroušených výkladů při vyučovacích hodinách, nýbrž *samostatnou prací* s matematickými pojmy. Stejné zásady platí pro uvádění do vědecké práce. Napadá mě příklad amerického matematika R. L. Moorea (1882–1970). Aniž by zatěžoval své svěřence předběžnými znalostmi, spokojil se s tím, že na začátku roku každému z nich zadal malý problém a připojil stručnou literaturu. Pak se s nimi setkával teprve, když dosáhli určitého pokroku. Tito studenti se tak naučili orientovat se v literatuře a samostatně pracovat. Metoda to musela být dobrá, neboť mnozí z jeho žáků se stali slavnými matematiky.

Co si myslíte o vlivu skupiny Bourbaki na matematiku ve Francii?

Byl velmi důležitý a posléze se rozšířil do Evropy; na druhé straně Američané byli ovlivněni pouze částečně a většina Angličanů zaujímala dlouho k tomuto vlivu nepřátelský postoj. Jejich situace je zajímavá: pod vlivem velkého specialisty v matematické analýze G. H. Hardyho (1877–1947) byla v Anglii zakořeněna myšlenka, že existuje na jedné straně dobrá matematika, tzv. *těžká, tvrdá* (týkající se konkrétních problémů, často početního typu, často obtížných, k jejichž vyřešení je třeba užít metod *ad hoc*), na druhé straně tzv. matematika *poddajná, měkká* (týkající se studia obecných struktur a problémů řešitelných za pomoci obecných vět). Toto odmítnutí obecných struktur nadlouho odřízlo anglické matematiky od velkých matematických myšlenkových proudů; teprve nedávno se mladá anglická škola, např. v osobě Michaela Atiyaha, postavila proti tomuto Hardyovu štěpení a osvojila si to nejlepší z bourbakistického myšlení.

K pochopení zrodu Bourbakiho je nutno říci několik slov o historii. Ve třicátých letech potřebovala francouzská matematická škola chytit nový dech: válka si vyžádala mnoho mladých obětí a přerušila kontakty se sousedními státy. V téže době v Německu, kde se lidský vědecký kapitál zachoval, zaznamenala algebra a topologie neobyčejný rozmach. S vědomím našich nedostatků se mnozí mladí absolventi École Normale Supérieure, v čele s André Weilem, naučili v Německu algebru a topologii a po návratu do Francie si předsevzali odvážný úkol napsat dílo prezentující matematiku na solidních základech a shrnout podstatu nástrojů, které se osvědčily v dobře zmapovaných oblastech matematiky.

Většina francouzských matematiků mé generace získala značnou část matematické kultury díky Bourbakimu, který ovlivňoval jejich styl i jejich dílo. Převzali v určité míře kvality i nedostatky. Jaké nedostatky? Zdá se, že každá skupina, která dlouhodobě pracuje v izolaci, je odsouzena k dogmatismu. Připadá mi, že to je největší námitka, kterou lze Bourbakimu vytknout. Definice a základní věty jsou nastoleny bez odůvodnění a bez heuristického přiblížení. Jsou suché a holé jako kostra, z níž je i šťavnaté maso odhozeno do cvičení. Čtenář, který je ignoruje, může získat nakonec velmi zkreslenou představu o matematické aktivitě.

Tento dogmatismus se u bourbakistů projevuje také mimo jejich spisy, a to vyhraněnými prohlášeními o žádoucím rozvoji matematiky: propaguje se bourbakistická „*správná volba*“, která směřuje k obecným, dobře etablovaným teoriím a je hlásán nezájem o disciplíny, které se teprve utvářejí, nejsou zcela rozvinuté nebo jsou těžko formalizovatelné. Jean Dieudonné je určitě tím bourbakistou, který své výhrady vyhlašuje nejrozhodněji. Je to velký matematik, jehož dílo, schopnosti a upřímnost obdivuji, ale jeho vyhraněné názory měly opakovaně neblahé následky. Jde zejména o jeho odpor k abstraktním mírám používaným v teorii pravděpodobnosti, jeho nedůvěru k formální logice, jeho odmítání spočetnosti v topologii, pak jeho pozdější zamítnutí axiómu výběru, jeho odmítnutí geometrických axiómů v elementární geometrii.

Teorie pravděpodobnosti vděčí za svoje obrození pařížskému pobytu francouzsko-amerického specialisty v pravděpodobnosti Michela Loèveho v šedesátých letech. Měl štěstí, že jeho zaníceným žákem byl Paul-André Meyer, který společně s Jacquesem Neveu uměl znovu vybudovat francouzskou pravděpodobnostní školu, a to v zemi Pascala, Laplace a Paula Lévyho! V logice byl ve stejné době významný pobyt logika Georgea Kreisela, Američana rakouského původu, který nechal znovu rozhořet plamen uhaslý bohužel smrtí Herbrandovou.

Francouzská matematika posledního desetiletí se vydala různými cestami a mladí matematici se necítí vázáni bourbakistickými výhradami. Přejme si, aby uměli zachovat z tohoto dědictví znalost a oblibu obecných matematických nástrojů spolu s jasností stylu a přitom aby byli přístupni rozmanitosti inspirace a byli schopni se naučit psát matematiku pro lidské bytosti.

Jakou má vědec odpovědnost?

Vědec se jistě nemůže nezajímat o možné využití svých objevů. Musí neustále aktivně bojovat proti případnému zneužití; v tom je nám dobrým příkladem Einstein. Na druhé straně, pokud by se nechal ovládnout myšlenkou, že by snad jednoho dne mohly jeho objevy mít osudné důsledky, hrozila by mu ztráta schopnosti tvořit. Skutečný vědec se musí cítit zcela svobodným. Je třeba se vyhnout tomu, aby problémy dobra a zla zasahovaly do oblastí poznání.

Existuje nějaký důležitý psychologický aspekt v procesu bádání?

Vaše otázka není bez souvislosti s tím, co jsem právě řekl: úspěch při bádání vyžaduje vedle velké dávky soustředění úplnou svobodu ducha. Často jsem uváděl, že mezi vědci na první pohled stejně inteligentními nemají úspěch ti, kteří trpí zábranami, mají myšlenky příliš systematické nebo příliš puntičkářské, dále ti, kteří si pletou zatvrzelost s odhodlaností.

Je třeba také určité skromnosti: znal jsem jednoho dobrého vědce, který prokázal své kvality, ale který naprosto selhal poté, co se rozhodl vytvořit velikou teorii v matematické fyzice.

Chování vědce připomíná chování průzkumníka na pochodu napínajícího všechny smysly, využívajícího postranní pěšinky a připraveného přijmout všechny podněty, které se mu nabízejí. Ve více či méně uspořádaném pletivu formálních vyjádření svázaných pravidly logické dedukce, se badatel nechává vést k objevu a pak k důkazu zajímavého výsledku pouze úzkým světelným paprskem svých znalostí a své intuice, které mu napovídají, aby dal přednost určité cestě před jinou. Správné rozhodnutí, které činí na základě svých znalostí a své intuice, připomíná udivujícím způsobem umění malíře; jeho *objev* je plodem houževnaté *nápaditosti*.

Máte svou osobní filozofii?

Toto slovo oplývá tolika významy a tolik lidí se vydává za filozofy, že moje odpověď musí být stručná. Skutečnost, že mnozí filozofové jsou upovídaní a mluví dlouze o věcech, které neznají, ospravedlňuje takovou stručnost jen částečně. Existovali a stále existují pozoruhodní filozofové. Pokud se filozofie stává opravdovým rozvažováním o myšlenkových pochodech člověka, zaslouží si veškerou naši pozornost. Ovšem je nutné, aby filozof mluvil pouze o tom, co zná, a aby se nepokoušel do příliš rozsáhlé syntézy zahrnovat celý svět myšlení.

Ani Platón není této kritiky ušetřen: je skvělý, pokud mluví o matematice, upadá do rozvláčnosti a omylů, když se dotýká fyziky a biologie. Jeho pohrdání experimentováním a pozorováním, jeho zábrany před experimentálními metodami ionské školy, přispěly k pozdržení zrodu opravdové fyziky o více než patnáct století. Lidský duch je bezesporu velkolepý, ale slabý a potřebuje opory: pozorování a experimentování. Právě lidská mysl tyto nezbytné nástroje vytváří, třídí je a využívá. Také matematika ke svému obnovování potřebuje opory. Přestože je schopna sama růst v rámci formálního světa, její obnova přichází z podnětů, které jí přinášejí experimentální vědy anebo prostě kontakty s vnějším světem a se životem. Pravděpodobně víte, že tento názor nesdílí René Thom.

Před tímto rozhovorem přišla řeč na filozofy jako K. Krishnamurti, který hovoří o zkušenosti mimo hranice myšlení. Jaký je na to váš názor?

Pro mne osobně není Krishnamurti (1895–1986) filozof, ale mudrc. Patří mezi vzácné výjimky lidí, kteří od věku dospívání spojují velikou znalost světa s mimořádným zvládnutím svého ducha a jejichž pomoc je vyhledávána těmi, kteří se sami neumí zbavit svých úzkostí a vášní. Jeho díla, *Commentaries on Living* a *The only Revolution* jsou stručné sbírky rozhovorů s jeho návštěvníky. Skvěle umí popsat často překrásnou atmosféru svých rozhovorů a načrtnout portrét osoby, s níž rozmlouval. (*Tolik toho přečetl, že je mu zatěžko rozeznat, kde začíná jeho vlastní myšlení.*) Má společné rysy s jiným mudrcem, se Spinózou. Oba dospěli postupně k řídícímu principu a ten se pro ně stal vlastně hlavním majákem, který osvětluje jejich vidění světa. U Spinózy zakrývá matematická forma falešnou přesnost, ale je koneckonců nepodstatné, že *teorémy*, které odvozuje, byly ve skutečnosti založeny na vadném důkaze. Jeho *Etika* tím není nikterak ochuzena. Pro Krishnamurtiho není řídícím principem božská podstata, ale ideální stav ducha, *meditace*, kterou popisuje letmými doteky. Meditace přichází nehledána, neboť každé hnutí mysli ji zahání. *Je to pohyb v nehybnosti; je to nevinnost této chvíle a spočívá v osvobození ducha od stálého tlaku zkušenosti . . . ; nikdy to není modlitba . . .*

Krishnamurti chce člověka osvobodit od každého náboženství stejně jako od každé doktríny; bohy neuznává: *Boha nelze nalézt, k tomu neexistuje žádná cesta; hledáme-li ho, nalezneme jen svůj vlastní obraz; nenajdeme pravdu, ale jen výsledek našeho přání.* Nepopírá Boha, ale soudí, že *organizovaná náboženství nastavují ducha pouze na určitý způsob myšlení.* Odmítá duchovní vůdce (guru) a nechce jím sám být: *každá moc zaslepuje a zabíjí veškeré myšlení.* Svým návštěvníkům pomáhá rozhovorem vedeným v sokratovském duchu a spokojuje se s tím, že odstraňuje některé z překážek, které by bránily v cestě k řešení, aniž toto řešení podává. Když mluví o objevech, nejde o vědu, i když jeho uvažování je obecné a týká se nás všech: *Problém není nikdy rozřešen na své vlastní úrovni. Protože je složitý, je třeba jej chápat v globálních souvislostech.* Dále soudí *Čas je prazvláštní úkaz; prostor a čas tvoří jednotu. Každý ji pojímá podle sebe.*

Člověk by se tedy, pokud jde o Krishnamurtiho, úplně mýlil, kdyby na základě toho, že je Ind, od něj očekával buď potvrzení parapsychismu, nebo nové cesty vědeckého poznání, anebo víru v převtělování. *Je zvláštní, že usilujeme tolik o neměnnost, o pokračování . . . Není obnovy bez konce bytí; převtělení neznamená pokračování.* Ale někteří v ně věří, neboť víra podmiňuje zkušenost a ta posléze posiluje víru. Obecněji vzato, duch ovládá a vysvětluje zkušenost, avšak duch sám je výsledkem zkušenosti.

Udělejme závěr: je-li meditace vrcholem štěstí, ale nelze ji přivolat naším úsilím, silně se podobá milosti, jak ji chápali jansenisté. Čím je pak tato myšlenka zajímavá? Zdá se mi, že její postupné rozpracování a vlastní zkušenost dovedla Krishnamurtiho, stejně jako Spinózu, k pochopení zákonitostí vývoje univerzálních lidských hodnot.

Jste nábožensky založen?

Jsem z katolické rodiny a mé dvě sestry patří mezi aktivní katolíky. V École Normale jsem se zajímal o výklad bible a dějiny náboženství. Styl a myšlení Ernesta Renana mě uchvátily. Snad proto, že ve svých *Vzpomínkách na dětství a mládí* mluví bez vášně o svém duchovním vývoji. Jejich prostřednictvím jsem si kupodivu uvědomil, že v sobě už nemám žádnou víru. Přestal jsem tak věřit v božskost Ježíše, ale setrvával jsem ve víře v podstatu jeho učení a mravní síla Evangelistů mi byla vždy vodítkem. Myslím, že *Miluj bližního svého* je nejkrásnější přikázání, které kdy bylo člověku dáno.

Ve stejné době jsem se přirozeným způsobem dosti zajímal o jiná náboženství a zejména o život jejich zakladatelů. Obdivuhodný mi připadal Buddhův život a první buddhistické texty. Na druhé straně jsem nemohl proniknout do učení Mohamedova, částečně jen proto, že se obrací k lidem drsným, že se k nám dostalo v roztříštěné podobě a především proto, že je vzdáleno logickému myšlení židovsko–řecko–křesťanskému. Ostatně se zdá, že Korán nelze číst či odříkávat jinak než arabsky! V poslední době jsem si oblíbil posvátné texty Bahaismu, který mi připadá jako nejtolerantnější náboženství. Žádnou potřebu náboženství nepociťuji, myslím však, že zakladatelé významných náboženství byli pozoruhodní lidé. Jejich mnohem méně pozoruhodní následovníci bohužel jejich poselství zdeformovali a organizované církve a sekty velice často podlehly fanatismu a netoleranci.

Jak vás zajímá politika?

Řízení záležitostí naší vlasti se týká nás všech. Způsob, jakým se provádí, sleduji zblízka a často s politováním. Těžce nesu *politikaření* a jsem nepřátelský k jakémukoli sloganu. Také jsem se nikdy nestal členem žádné strany. Pokud volím, volím obvykle socialistu, avšak pokud by se objevil nezávislý kandidát, jehož kvalitu bych znal, hlasoval bych pro něj, i když vím a mrzí mě to, že při současné organizaci politického života je takřka nemožné, aby se nezávislý kandidát prosadil.

Kniha Karla Poppera *Otevřená společnost a její nepřátelé* dosti dobře odráží moje politické krédo. Nejlepší formou řízení státu je demokracie, která lidi podněcuje k tomu, aby uchopili osud do svých rukou a respektovali přitom osud ostatních. Nejlepší obranou demokracie je zákon, demokraticky odhlasovaný a důsledně uplatňovaný. Nejhorší státní uspořádání je diktatura, ať už vojenská junta nebo policejní *nomenklatura*. Je předzvěstí útlaku a smrti ducha.

Jsem přesvědčeným antirasistou. Rasista je ten, kdo odmítá odlišnost a ze sobeckého důvodu nebo ze strachu z neznámého chce za každou cenu setrvat ve své ulitě. Genetika a nejušlechtilejší náboženství nás utvrzují v tom, abychom respektovali jinakost.

Čím se zabýváte kromě vědy?

Stává se, že nedělám matematiku několik měsíců, ale nejsou to období nečinnosti: zahradničím, chodím na procházky, podnikám horské túry, čtu ve francouzštině či angličtině nejrůznější knížky. Zároveň však přemýšlím, nikoli o smrti, ta mě nikterak neznepokojuje, ale o různých filozofických otázkách: co je čas, co je svět a jaké jsou naše vztahy k němu, co je vlastně Bůh atd.

Jaký máte smysl pro umění?

Jsem vizuální typ, vnímám vůně a mám cit pro rytmus a krásu slova. Matematika a poezie mají podle mne mnoho společného v jejich inspiraci a výstavbě. Byl jsem uchvácen Rimbaudem, Mallarmém, Baudelairem, Paulem Valérym, Waltem Whitmanem, Tagorem. Z malířství na mne nejvíce působí impresionismus. Z literatury nejvíce poznamenali mé dospívání spisovatelé s poetickou vnímavostí, jako Alain-Fournier, Marcel Proust. Bezpochyby ze stejného důvodu jsem vášnivým čtenářem science fiction. Mám rád Raye Bradburyho a Johna Wyndhama.

Kteří jsou vaši oblíbení skladatelé?

Klasikové, jako Mozart a Beethoven a z novějších Ravel a Debussy. Na druhé straně si rozhodně méně cením některých děl moderní hudby, jejímiž disonancemi doslova trpím.

Do jaké míry vaše vědecká dráha ovlivnila váš rodinný život?

Podstata mé existence byla soustředěna na matematické bádání. Tím bylo přirozeně vše v mém životě prostoupeno, tím více, že jsem vždy pracoval na svých výzkumech doma. Rodinné povinnosti mi nikdy nebránily v práci a kupodivu ji často stimulovaly.

Vzpomínám si na dobu — už je to dávno — kdy moje první žena byla nemocná a já jsem se staral o domácnost, vařil jsem a přitom jsem úspěšně pracoval na dvou různých vědeckých problémech. Na druhé straně napětí v manželství, které vyústilo v rozvod, neprospívalo ani mé práci a patrně ani výchově našich dětí k vědecké dráze: první syn, doktor chemie, si zvolil řídící funkce; druhý syn, doktor geologie, dělá aplikovanou geologii a naše dcera po studiu literatury a působení v Armádě spásy vybudovala se svým manželem středisko pro šíření křesťanské literatury.

V r. 1961 jsem se oženil s Yvonne Bruhatovou, která je také matematička. Nesblížili jsme se díky matematické spolupráci, ale v rámci odborných setkání. Moje žena se věnuje intenzívně vědecké práci zaměřené na parciální diferenciální rovnice, obecnou relativitu a v širším slova smyslu na matematickou fyziku. Její volba za členku Akademie věd v r. 1978 znamenala konec tuhé antifeministické tradice.

Spolupracujete odborně se svou paní?

Často se o matematice bavíme a moje určité znalosti o relativitě pocházejí z těchto diskusí. Dokonce jsme spolu napsali sdělení pro *Comptes Rendus*. Oba jsme si však vědomi těžkostí s naší spoluprací, neboť máme jinou intuici a pracujeme odlišnými postupy. Je zde podobnost s důvody, které činí obtížnou spolupráci mezi fyziky a matematiky.

Naše společné povolání nám často umožnilo využít spolu s našimi malými dětmi pozvání k dlouhodobým pobytům v USA: Cornell, Seattle, Berkeley. Naše děti mezitím vyrostly. Náš první syn Daniel po skončení École Centrale má zájem o biologické výzkumy a nyní pracuje v Pasteurově ústavu. Naše dcera Geneviève je ve třetím ročníku medicíny a ráda by později pracovala v lékařském výzkumu. Jejich zaměření nás těší, neboť z vlastní zkušenosti víme, jak hlubokou radost přináší vědecký život.

Extrait de: *Hommes de Science*, Vingt-huit portraits, Entretiens et photographies de Marian Schmidt. © Hermann, Paris 1990. Přeložil Ivan Netuka.

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, ročník 37 (1992), č. 2, 65–79.

Choquetova teorie a Dirichletova úloha

Jaroslav Lukeš, Ivan Netuka a Jiří Veselý, Praha

Pojem konvexní množiny prostupuje značnou část klasické i moderní matematiky a je také důležitý v aplikacích. Naším cílem je ilustrovat užitečnost tohoto pojmu v části matematiky, kde se stýká teorie potenciálu a funkcionální analýza.

Nejprve nabízíme v úvodní části čtenáři několik tvrzení, která na první pohled mají málo společného. Jejich podrobné zvládnutí není pro další čtení nutné. Užitečné je však postřehnout, že jde o projev obecného principu: podobně jako se látky skládají z molekul, molekuly z atomů, atomy z elementárních částic, přirozená čísla z prvočísel, i zde jde o vyjádření složitého pomocí jednoduchého. V pozadí vět, které uvádíme, je pak obecný matematický pohled, který vyložíme v částech 2 a 3. Části 4 a 5 jsou věnovány aplikacím.

1. Několik příkladů

1.1. Elementární geometrie

Připomeňme, že *konvexní kombinací* bodů $x_1, \dots, x_n$ ve vektorovém prostoru rozumíme lineární kombinaci $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$, kde všechny koeficienty λ_j jsou nezáporné a $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$.

Věta. *Nechť P je rovinný uzavřený konvexní mnohoúhelník. Potom je každý bod z P konvexní kombinací vrcholů mnohoúhelníku P.*

1.2. Konvexní funkce reálné proměnné

Borelovskou mírou na metrickém prostoru rozumíme (nezápornou) míru definovanou alespoň na σ-algebře borelovských množin a konečnou na kompaktních podmnožinách.

Věta [1]**.** *Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *funkce $f\colon [0,1] \to [0,\infty)$ je konvexní;*

(ii) *existují borelovské míry μ a ν na $[0,1]$ takové, že*

$$f(x) = \int_0^x (1-y)^{-1}(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y) + \int_x^1 (1-x/y)\,\mathrm{d}\nu(y), \quad x \in [0,1].$$

[1]) Důkaz tohoto tvrzení lze nalézt u R. M. Rakestrawa [Ra].

Vidíme, že každá konvexní funkce je „kombinací“ dvou základních typů konvexních funkcí závislých na parametru y. Jsou to funkce

$$\varphi_y(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x \in [\,0, y\,]\,, \\[2ex] \dfrac{x-y}{1-y} & \text{pro} \quad x \in (y, 1)\,, \end{cases} \qquad \text{a} \quad \psi_y(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{y} & \text{pro} \quad x \in (0, y\,]\,, \\[2ex] 0 & \text{pro} \quad x \in (y, 1\,]\,. \end{cases}$$

Funkce φ_y, ψ_y jsou velmi jednoduché konvexní funkce: jejich graf je sjednocením dvou úseček.

1.3. Dvojitě stochastické matice

Čtvercová matice $P = (p_{jk})_{j,k=1}^m$ se nazývá *dvojitě stochastická*, jestliže pro každé $j, k \in \{1, \dots, m\}$ platí

$$p_{jk} \geqq 0\,, \qquad \sum_{r=1}^m p_{rk} = 1 \qquad \text{a} \qquad \sum_{s=1}^m p_{js} = 1\,.$$

Označme Π množinu všech permutací množiny $\{1, \dots, m\}$, takže Π má $m!$ prvků. Připomínáme Kroneckerův symbol: δ_k^l je 1 pro $k = l$ a 0 pro $k \neq l$. Pro $\pi \in \Pi$ definujme

$$P_\pi = \bigl(\delta_k^{\pi(j)}\bigr)_{j,k=1}^m\,.$$

Pak má matice P_π v každém řádku a každém sloupci právě jednu jedničku a jinak nuly a vznikne permutací sloupců jednotkové matice. Je to tedy velmi speciální dvojitě stochastická matice.

Věta[2]**.** *Nechť P je dvojitě stochastická matice. Potom ke každé $\pi \in \Pi$ existuje nezáporné číslo t_π tak, že $\sum_{\pi \in \Pi} t_\pi = 1$ a*

$$P = \sum_{\pi \in \Pi} t_\pi P_\pi.$$

1.4. Typicky reálné holomorfní funkce

Označme U otevřený jednotkový kruh v komplexní rovině $\mathbb{C}$. Připomeňme, že funkce $f\colon U \to \mathbb{C}$ je *holomorfní* v U, právě když je v U součtem mocninné řady o středu v počátku a poloměru konvergence větším nebo rovném jedné.

Holomorfní funkce $f\colon U \to \mathbb{C}$ se nazývá *typicky reálná*, jestliže $f(z)$ je reálné číslo, právě když $z \in U$ je reálné. Například je snadno vidět, že pro každé $t \in [\,-1, 1\,]$ je funkce

$$z \longmapsto \frac{z}{1 + 2tz + z^2}\,, \quad z \in U, \tag{$*$}$$

typicky reálná holomorfní funkce.

---

[2]) Odkažme čtenáře na článek K. Jacobse [Ja].

Věta [3]**).** *Nechť f je typicky reálná holomorfní funkce v U. Potom existuje reálné číslo α a borelovská míra μ na $[-1,1]$ takové, že*

$$f(z) = \alpha + \int_{[-1,1]} \frac{z}{1+2tz+z^2}\,\mathrm{d}\mu(t), \quad z \in U.$$

V jistém smyslu lze tedy libovolnou typicky reálnou holomorfní funkci vyjádřit jako „kombinaci“ funkcí tvaru $(*)$.

1.5. Úplně monotónní funkce

Funkce $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ se nazývá *úplně monotónní*, jestliže má derivace všech řádů a pro každé $n = 0,1,2,\dots$ platí $(-1)^n f^{(n)} \geqq 0$; samozřejmě $f^{(0)}$ znamená f. Pro každé $t \geqq 0$ jsou např. funkce $x \mapsto x^{-t}$ a $x \mapsto \mathrm{e}^{-tx}$, $x \in (0,\infty)$, úplně monotónní.

Bernsteinova věta [4]**).** *Nechť $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ je úplně monotónní funkce. Potom existuje právě jedna borelovská míra μ na $[0,\infty]$ taková, že*

$$f(x) = \int_{[0,\infty]} \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}\mu(t), \quad x \in (0,\infty).$$

1.6. Řešení Helmholtzovy rovnice

Nechť

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}$$

je *Laplaceův operátor* v $\mathbb{R}^m$ a $\alpha > 0$. Funkci u třídy C^2 na $\mathbb{R}^m$ nazveme *řešením Helmholtzovy rovnice*, jestliže na $\mathbb{R}^m$ platí

$$\Delta u - \alpha^2 u = 0.$$

Není těžké uhodnout speciální řešení této rovnice. Označme $S = \{y \in \mathbb{R}^m : |y| = 1\}$ a $\langle x, y\rangle$ skalární součin vektorů $x, y \in \mathbb{R}^m$. Je-li $y \in S$ a $u(x) = \mathrm{e}^{\alpha\langle x,y\rangle}$, $x \in \mathbb{R}^m$, pak u je zřejmě nezáporné řešení Helmholtzovy rovnice.

Věta [5]**).** *Nechť u je nezáporné řešení Helmholtzovy rovnice. Potom existuje borelovská míra μ na S taková, že*

$$u(x) = \int_S \mathrm{e}^{\alpha\langle x,y\rangle}\,\mathrm{d}\mu(y), \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

1.7. Fourierova transformace měr

V matematické analýze a teorii pravděpodobnosti se pro konečnou borelovskou míru μ na $\mathbb{R}^m$ definuje

$$\widehat{\mu}(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x,y\rangle}\,\mathrm{d}\mu(y), \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

---

[3]) Viz G. A. Edgar [Ed] a M. S. Robertson [Rob].

[4]) Důkaz této klasické věty pocházející od S. N. Bernsteina [Be] je např. možno nalézt u R. R. Phelpse [Ph].

[5]) Různé důkazy lze nalézt např. v [CaLi] či [Ko].

Funkce $\widehat{\mu}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ je zřejmě spojitá a nazývá se *Fourierův obraz* nebo *charakteristická funkce míry* μ. Přímým výpočtem se snadno ověří, že funkce $f = \widehat{\mu}$ je *pozitivně semidefinitní*, to znamená, že platí

$$\sum_{j,k=1}^{n} \lambda_j \overline{\lambda}_k f(x_j - x_k) \geqq 0\,,$$

kdykoli $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou komplexní čísla a $x_1, \dots, x_n$ jsou body z $\mathbb{R}^m$.

Bochnerova věta [6]**).** *Nechť $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ je spojitá pozitivně semidefinitní funkce. Potom existuje právě jedna konečná borelovská míra μ na $\mathbb{R}^m$ taková, že $f = \widehat{\mu}$.*

1.8. Harmonické funkce na kouli

Nechť $m \geqq 2$, $U = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| < 1\}$ a $S = \{z \in \mathbb{R}^m : |z| = 1\}$. Pro každé $z \in S$ je funkce

$$P_z\colon x \longmapsto \frac{1 - |x|^2}{|x - z|^m}\,, \quad x \in U,$$

(nazývaná *Poissonovo jádro* s pólem v bodě z) harmonická na U, tj. platí $\Delta P_z = 0$. Derivování za integračním znamením ukazuje, že funkce

$$h(x) = \int_S P_z(x)\,\mathrm{d}\mu(z), \quad x \in U, \tag{$*$}$$

je nezáporná harmonická na U, kdykoli μ je borelovská míra na S.

Rieszova-Herglotzova věta [7]**).** *Nechť $h\colon U \to \mathbb{R}$ je nezáporná harmonická funkce. Potom existuje právě jedna borelovská míra μ na S taková, že platí $(*)$.*

Případ $m = 2$ souvisí s holomorfními funkcemi na U. Je-li totiž h harmonická funkce na $U \subset \mathbb{R}^2$, potom existuje harmonická funkce k na U taková, že $f = h + \mathrm{i}k$ je holomorfní funkce na U. Z Cauchyových-Riemannových podmínek vyplývá, že reálná a imaginární část holomorfní funkce na U jsou harmonické funkce na U.

Věta [8]**).** *Nechť $f\colon U \to \mathbb{C}$ je holomorfní funkce a nechť reálná část f je nezáporná funkce na U. Potom existují právě jedna borelovská míra μ na jednotkové kružnici T a právě jedno reálné číslo c takové, že*

$$f(x) = \mathrm{i}c + \int_T \frac{z + w}{z - w}\,\mathrm{d}\mu(z), \quad w \in U.$$

1.9. Invariantní a ergodické míry

Nechť K je metrizovatelný kompaktní prostor, $\mathcal{B}$ je σ-algebra všech borelovských podmnožin K a $\mathcal{T}$ je neprázdný systém spojitých zobrazení K do K.

---

[6]) Důkaz této věty je hezkou aplikací Choquetovy teorie a lze jej nalézt přímo u G. Choqueta [Cho1].

[7]) Důkaz je uveden v L. L. Helmsovi [He]; jiný, využívající přímo Choquetovu teorii, je v článku D. A. Armitage [Ar].

[8]) Lze se podívat třeba na články G. A. Edgara [Ed] anebo F. Hollanda [Ho].

Říkáme, že borelovská míra μ na K je $\mathcal{T}$*-invariantní*, jestliže μ je *pravděpodobnostní*, tedy $\mu(K) = 1$, a $\mu(T^{-1}(B)) = \mu(B)$ pro každou množinu $B \in \mathcal{B}$ a každé $T \in \mathcal{T}$.

Nechť ν je borelovská míra na K. Množina $B \in \mathcal{B}$ se nazývá ν*-invariantní* (vzhledem k $\mathcal{T}$), jestliže symetrická diference množin B a $T^{-1}(B)$ je ν-nulová množina pro každé $T \in \mathcal{T}$. Říkáme, že $\mathcal{T}$-invariantní míra μ je *ergodická*, jestliže $\mu(B) = 0$ nebo $\mu(B) = 1$ pro každou μ-invariantní množinu B.

Dá se dokázat, že množina X všech $\mathcal{T}$-invariantních měr na K je uzavřená podmnožina kompaktního prostoru pravděpodobnostních měr na K opatřeného obvyklou topologií (tedy X je kompaktní prostor) a množina E všech ergodických měr je G_δ-podmnožina[9]) (obecně ne uzavřená!) prostoru X. Následující věta ukazuje, že každá $\mathcal{T}$-invariantní míra je v jistém smyslu „vystavěna“ z ergodických měr.

Věta[10]). *Nechť X je množina všech $\mathcal{T}$-invariantních měr na metrizovatelném kompaktu K a $E \subset X$ je množina všech ergodických měr. Potom ke každé míře $\mu \in X$ existuje právě jedna pravděpodobnostní borelovská míra m na X taková, že $m(X \setminus E) = 0$ a $\mu = \int_E \nu \,\mathrm{d}m(\nu)$, tj. $\int_K f \,\mathrm{d}\mu = \int_E \bigl(\int_K f \,\mathrm{d}\nu\bigr) \,\mathrm{d}m(\nu)$ pro každou spojitou funkci f na K.*

2. Geometrie konvexních množin

2.1. Krejnova-Milmanova věta

Připomeňme, že *konvexní množiny* v obecném kontextu vektorových prostorů jsou ty, které s každými dvěma body obsahují i úsečku, která je spojuje. *Extremálním bodem* konvexní množiny C je pak takový její prvek, který není středem žádné úsečky s různými krajními body ležícími v C. Množinu všech extremálních bodů množiny C budeme značit $\operatorname{ext} C$.

Zaměřme se nyní na geometrii konvexních množin v eukleidovském m-rozměrném prostoru $\mathbb{R}^m$. V rovině $\mathbb{R}^2$ jsou kupříkladu extremálními body uzavřeného konvexního mnohoúhelníku právě jeho vrcholy. Množina extremálních bodů kompaktní konvexní podmnožiny $\mathbb{R}^2$ je vždy uzavřená[11]). Jednoduchý příklad[12]) v $\mathbb{R}^3$ ukazuje, že v prostorech vyšší dimenze tomu tak nemusí být.

Výsadní postavení množiny extremálních bodů vyjadřuje Minkowského věta[13]): *V prostoru $\mathbb{R}^m$ je každý bod kompaktní konvexní množiny konvexní kombinací extremálních bodů.* Ve skutečnosti vystačíme s nejvýše $m + 1$ extremálními body.

S extremálními body různých konvexních množin jsme se již vlastně setkali na začátku článku. Například matice P_π v odst. 1.3 jsou právě všechny extremální

---

[9]) Pro úplnost dodejme, že nějaká množina v metrickém nebo topologickém prostoru je *typu* G_δ, je-li průnikem spočetného systému otevřených množin.

[10]) Opět R. R. Phelps [Ph] může posloužit pro důkaz této věty pomocí Choquetovy teorie.

[11]) Toto tvrzení lze nalézt u G. B. Priceho [Pr].

[12]) Příklad je uveden např. v [Cho], 2. díl, s. 106.

[13]) H. Minkowski dokázal větu patrně v období 1901–1903. Výsledek byl poprvé publikován v kapitole o konvexních tělesech zařazené v sebraných spisech vydaných v r. 1911. Důkaz lze nalézt v [Ja].

body konvexní množiny všech dvojitě stochastických matic [14]). Tuto množinu lze považovat za podmnožinu prostoru $\mathbb{R}^{m\times m}$ a věta o reprezentaci dvojitě stochastických matic z odst. 1.3 je tak důsledkem Minkowského věty. Uvažujeme-li např. konvexní množinu K všech úplně monotónních funkcí f na $(0,\infty)$, pro něž $f(0+) \leqq 1$ (viz odst. 1.5), a definujeme-li pro $t \in [0,\infty]$ funkci $f_t\colon x \mapsto \mathrm{e}^{-tx}$, $x \in (0,\infty)$, potom $\operatorname{ext} K = \{f_t\colon t \in [\,0,\infty\,]\}$ [15]). Jsou také známy extremální body konvexní množiny všech spojitých pozitivně semidefinitních funkcí, jejichž absolutní hodnota je nejvýše rovna jedné. Jsou to právě funkce tvaru $y \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x,y\rangle}$, $x \in \mathbb{R}^m$ [16]). Uveďme ještě jeden příklad: ergodické míry z odst. 1.9 jsou právě všechny extremální body konvexní množiny všech $\mathcal{T}$-invariantních měr.

Nyní již je jasný společný rys výsledků z odst. 1.1 – 1.9 : jsou to věty o integrální reprezentaci pomocí extremálních bodů. Tento typ vět je předmětem dalšího výkladu.

Označme pro libovolnou množinu A symbolem $\operatorname{co} A$ nejmenší konvexní množinu obsahující A; ta vždy existuje a je rovna průniku všech konvexních množin, které obsahují A. Je-li $C \subset \mathbb{R}^m$ kompaktní konvexní množina, lze Minkowského větu formulovat tak, že $C = \operatorname{co}\operatorname{ext} C$. Otázkou je, zda analogická věta platí i v prostorech nekonečné dimenze. V dalším textu se zaměříme na řešení tohoto problému. Nejdříve si však ujasněme, v jakých prostorech se budeme pohybovat. Pro čtenáře seznámeného s hlubšími partiemi funkcionální analýzy bude dále X znamenat lokálně konvexní prostor (samozřejmě Hausdorffův). Pod X si lze třeba představit libovolný Banachův prostor či třeba Banachův prostor opatřený slabou topologií. Na příkladech lze ukázat, že v těchto prostorech již rovnost $C = \operatorname{co}\operatorname{ext} C$ pro kompaktní konvexní podmnožinu C obecně neplatí. Nicméně označíme-li symbolem $\overline{\operatorname{co}}\, A$ *uzavřený konvexní obal* množiny A, což je nejmenší uzavřená konvexní množina obsahující A, lze vyslovit následující významnou větu.

Krejnova-Milmanova věta [17]**).** *Je-li C kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru X, potom $C = \overline{\operatorname{co}}\operatorname{ext} C$.*

Myšlenka důkazu. Především je nutné ukázat, že neprázdná množina C obsahuje alespoň jeden extremální bod. Ten získáme tak, že uvažujeme systém všech extremálních množin v C. Přitom *extremální množinou* v C rozumíme každou její neprázdnou uzavřenou podmnožinu F s následující vlastností: Pokud $x, y \in C$, $\lambda \in (0,1)$ a $\lambda x + (1-\lambda)y \in F$, potom otevřená úsečka s krajními body x, y leží celá v F. Z Zornova lemmatu se poměrně jednoduše ukáže, že v C existuje minimální extremální množina, tj. množina, která již neobsahuje žádnou vlastní extremální podmnožinu.

---

[14]) Pěkný důkaz, využívající tzv. Heiratssatz, lze nalézt opět v [Ja]. Tamtéž lze nalézt i podrobnější vysvětlení ztotožnění prostoru matic s m^2-rozměrným eukleidovským prostorem.

[15]) Důkaz není úplně snadný, viz [Ph], [Cho].

[16]) Pokud se čtenář zajímá o detaily, lze doporučit druhý díl monografie [Cho], kde se v odst. 33 tyto otázky vyšetřují dokonce v mnohem obecnějším kontextu lokálně kompaktních komutativních grup.

[17]) První verzi věty v méně obecném kontextu dokázali M. Krejn a D. Milman v r. 1940.

Pomocí Hahnovy-Banachovy věty pak odvodíme, že taková minimální extremální množina musí být jednobodová. A jednobodové extremální množiny jsou právě extremální body.

Máme-li tedy již dokázáno, že $\operatorname{ext} C \neq \emptyset$, lze dále postupovat sporem. Je totiž jasné, že $\overline{\operatorname{co}} \operatorname{ext} C \subset C$, a pokud by zde nenastala rovnost, využili bychom geometrickou verzi Hahnovy-Banachovy věty o oddělování a dostali bychom spor. ∎

2.2. Integrální reprezentace

Pokusíme se nyní ukázat, jak z Krejnovy-Milmanovy věty lze odvodit obecnou větu o integrální reprezentaci. Důležitou roli bude hrát prostor $\mathcal{A}(K)$ všech spojitých afinních funkcí na K. Přitom reálná funkce f na konvexní množině K je *afinní*, jestliže $f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ pro každou trojici $x, y \in K$ a $\lambda \in [0,1]$. Problém je následující: Je dán bod x v kompaktní konvexní podmnožině K lokálně konvexního prostoru X; snažíme se najít borelovskou míru μ, která by jej reprezentovala ve smyslu, že rovnost $f(x) = \int_K f \,\mathrm{d}\mu$ by měla platit pro každou spojitou afinní funkci na K. Takových měr je obecně více, Diracova míra ε_x soustředěná v bodě x je určitě jednou z nich. Nám půjde o to, aby hledaná míra μ byla soustředěna na co nejmenší části hranice množiny K.

Udělejme zde malou odbočku. Je-li μ borelovská míra na kompaktu K, řekneme, že μ je *soustředěna* na borelovské množině $S \subset K$, jestliže $\mu(K \setminus S) = 0$. Poznamenejme, že míra může být soustředěna na více různých množinách. Připomeňme ještě, že nosič $\operatorname{supp} \mu$ míry μ je definován jako nejmenší uzavřená množina, na které je μ soustředěna.

Vraťme se opět k našemu problému. Hledáme tedy míru μ tak, aby platila výše uvedená reprezentace a přitom μ

(a) měla nosič v uzávěru množiny extremálních bodů $\overline{\operatorname{ext} K}$, či dokonce aby

(b) byla soustředěna na množině extremálních bodů $\operatorname{ext} K$.

Samozřejmě nás také bude zajímat otázka jednoznačnosti reprezentujících měr, která povede k pojmu simplexu.

Dále se omezíme pouze na případ, kdy kompaktní konvexní množina K je metrizovatelná. Prostor všech borelovských pravděpodobnostních měr na K označíme symbolem $\mathcal{M}^1(K)$. Protože kompaktní množina K je metrizovatelná, je prostor $\mathcal{C}(K)$ všech reálných spojitých funkcí na K separabilní. Tudíž $\mathcal{M}^1(K)$ je metrizovatelná množina měr, a to takovou metrikou ϱ, že posloupnost měr μ_n v ní konverguje k míře μ, což symbolicky budeme zapisovat $\mu_n \to \mu$, právě když $\int_K f \,\mathrm{d}\mu_n \to \int_K f \,\mathrm{d}\mu$ pro každou funkci $f \in \mathcal{C}(K)$. Míru $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ nazýváme *diskrétní*, jestliže μ je konvexní kombinací Diracových měr. Je známo[18]), že ke každé míře $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ existuje posloupnost pravděpodobnostních diskrétních měr $\{\mu_n\}$ tak, že $\mu_n \to \mu$.

A nyní zpět k naší úloze. Bod $x \in X$ nazveme *těžištěm* míry $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$, jestliže

$$f(x) = \int_K f \,\mathrm{d}\mu, \quad f \in \mathcal{A}(K).$$

[18]) Tvrzení plyne mj. z Krejnovy-Milmanovy věty, neboť $\operatorname{ext} \mathcal{M}^1(K)$ splývá s množinou Diracových měr soustředěných v bodech z K.

Protože v lokálně konvexních prostorech prvky duálu X^* *oddělují body*, tj. ke každé dvojici x, y různých bodů z X lze nalézt $f \in X^*$ tak, že $f(x) \neq f(y)$, a protože restrikce funkcionálů z X^* na množinu K jsou afinní spojité funkce, nemůže mít míra μ dvě různá těžiště. Těžiště míry μ budeme označovat symbolem $r(\mu)$. Je-li $x = r(\mu)$, říkáme též, že *míra μ reprezentuje* bod x, což jinými slovy znamená, že platí věta o integrální reprezentaci. Je jasné, že Diracova míra ε_x vždy reprezentuje bod x. Naskýtají se nám následující otázky:

(a) Má každá míra nějaké těžiště?

(b) Je každý bod z množiny K těžištěm nějaké míry, která má nosič v množině $\overline{\operatorname{ext} X}$?

Na první otázku je odpověď celkem snadná, na druhou již komplikovanější. Začněme s následujícím tvrzením.

Věta. *Nechť $K \neq \emptyset$ je kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru X. Potom každá míra z $\mathcal{M}^1(K)$ má právě jedno těžiště $r(\mu)$ ležící v K.*

Důkaz. Otázku jednoznačnosti jsme již vyřešili, jde tedy o existenci těžiště. Je-li míra μ diskrétní, $\mu = \sum_i \lambda_i \varepsilon_{x_i}$, kde $x_i \in K$, $\lambda_i \geqq 0$, $\sum_i \lambda_i = 1$, je zřejmě $r(\mu) = \sum_i \lambda_i x_i \in K$ těžištěm μ. Nechť tedy $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ je obecná pravděpodobnostní míra na K. Jak jsme již zmínili, existuje taková posloupnost diskrétních měr $\mu_n \in \mathcal{M}^1(K)$, že $\mu_n \to \mu$. Protože však $\{r(\mu_n)\}$ je posloupnost obsažená v kompaktu K, existuje vybraná posloupnost $\{r(\mu_{n_k})\}$, konvergující k nějakému prvku $z \in K$. Je-li nyní $f \in \mathcal{A}(K)$, je

$$f(z) = \lim_{k \to \infty} f(r(\mu_{n_k})) = \lim_{k \to \infty} \int_K f \, \mathrm{d}\mu_{n_k} = \int_K f \, \mathrm{d}\mu,$$

čili z je těžištěm míry μ. ∎

Nyní můžeme zformulovat základní větu o integrální reprezentaci.

Věta o integrální reprezentaci. *Buď K kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru X a $x \in K$. Potom existuje míra $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ tak, že $r(\mu) = x$ a $\operatorname{supp} \mu \subset \overline{\operatorname{ext} K}$.*

Důkaz. Z Krejnovy-Milmanovy věty plyne následující postřeh: Je-li $f \in \mathcal{A}(K)$ spojitá afinní funkce a $f = 0$ na $\overline{\operatorname{ext} K}$, potom $f = 0$ na K. Označme $\mathcal{B}$ prostor restrikcí funkcí z $\mathcal{A}(K)$ na $\overline{\operatorname{ext} K}$. Potom pro každé $h \in \mathcal{B}$ existuje podle předcházejícího postřehu právě jedna funkce $\widehat{h} \in \mathcal{A}(K)$, která s h splývá na $\overline{\operatorname{ext} K}$. Volme $x \in K$ a položme

$$\varphi \colon h \longmapsto \widehat{h}(x), \quad h \in \mathcal{B}.$$

Zřejmě $\varphi \in \mathcal{B}^*$ a $\|\varphi\|_{\mathcal{B}} = 1$. Funkcionál φ lze rozšířit pomocí Hahnovy-Banachovy věty z $\mathcal{B}$ na funkcionál $\Phi \in (\mathcal{C}(\overline{\operatorname{ext} K}))^*$ se zachováním normy. Protože navíc $\Phi(1) = \varphi(1) = 1$, je Φ nezáporný funkcionál. Je-li totiž $f \in \mathcal{C}(\overline{\operatorname{ext} K})$, $f \geqq 0$, $a = \frac{1}{2} \sup f(\overline{\operatorname{ext} K})$, potom $\|a - f\| \leqq a$, tudíž

$$a - \Phi(f) = \Phi(a) - \Phi(f) = \Phi(a - f) \leqq \|a - f\| \leqq a.$$

Odtud dostáváme $\Phi(f) \geqq 0$. Podle Rieszovy věty o reprezentaci existuje pravděpodobnostní míra μ na $\overline{\operatorname{ext} K}$ tak, že $\Phi(f) = \int_K f \, d\mu$ pro každou funkci $f \in \mathcal{C}(\overline{\operatorname{ext} K})$. Míru μ můžeme chápat jako míru na K soustředěnou na množině $\overline{\operatorname{ext} K}$, prostě míra $\mu(B)$ borelovské množiny $B \subset K$ je rovna $\mu(B \cap \overline{\operatorname{ext} K})$. Protože zřejmě platí rovnosti $\int_K h \, d\mu = \Phi(h) = \varphi(h) = h(x)$ pro každé $h \in \mathcal{A}(K)$, vidíme, že těžištěm míry μ je právě bod x. ■

Poznamenejme ještě, že věta o integrální reprezentaci je pouze přeformulovaná Krejnova-Milmanova věta. Je-li již dokázána věta o integrální reprezentaci, odvodí se z ní snadno Krejnova-Milmanova věta.

Krejnova-Milmanova věta je jednou ze základních vět funkcionální analýzy a má bohaté aplikace. Připomeňme si třeba její použití při de Brangesově důkazu Stone-ovy-Weierstrassovy věty, Lindenstraussově důkazu Ljapunovovy věty o oboru hodnot vektorové míry či při důkazu Banachovy-Stoneovy věty o izometricky izomorfních prostorech spojitých funkcí apod.

V konkrétních aplikacích se, pokud jsme úspěšní, podaří charakterizovat množinu $\operatorname{ext} K$, ovšem povaha prvků množiny $\overline{\operatorname{ext} K} \setminus \operatorname{ext} K$ je obecně pramálo průhledná. Informace o nosiči míry z věty o integrální reprezentaci je tudíž problematická, pokud množina $\operatorname{ext} K$ není uzavřená. Je zde pak ještě jiná potíž. Představme si, že množina extremálních bodů nějaké kompaktní konvexní množiny K je v této množině hustá, tedy že $\overline{\operatorname{ext} K} = K$. Potom samozřejmě Krejnova-Milmanova věta nic neříká, a rovněž nic neříkající je věta o integrální reprezentaci. Stačí totiž za míru reprezentující bod x vzít přímo Diracovu míru ε_x v bodě x. Tato situace může skutečně nastat. Jako příklad nám může posloužit uzavřená jednotková koule B v libovolném nekonečně dimenzionálním Hilbertově prostoru, který ovšem uvažujeme se slabou topologií. Extremální body B pak tvoří jednotková sféra a její (slabý) uzávěr je roven celé kouli B. Jiným netriviálním příkladem je *Poulsenův simplex*[19]) v Hilbertově prostoru l^2. Je však známo mnohem více. Uvažujeme-li totiž na množině $\mathcal{F}$ všech neprázdných kompaktních konvexních podmnožin daného Banachova prostoru X nekonečné dimenze tak zvanou Hausdorffovu metriku, je v ní prostor $\mathcal{F}$ úplný a množina $\{C \in \mathcal{F} : \overline{\operatorname{ext} C} \neq C\}$ je pouze 1. kategorie v $\mathcal{F}$[20]). V jistém smyslu pro většinu kompaktních konvexních množin tedy platí $\overline{\operatorname{ext} C} = C$.

Otázka, zda ve větě o integrální reprezentaci lze nalézt míru μ, která je soustředěna pouze na množině extremálních bodů, je tudíž zásadní. Problém byl úspěšně vyřešen G. Choquetem v padesátých letech a tím byl položen základ k jedné z nejhezčích teorií poslední doby, *Choquetově teorii*. Budeme se jí věnovat, a to v obecnějším hávu prostorů funkcí, v následující kapitole. Choquetova teorie poskytla mnoho podnětů pro abstraktní analýzu, nekonečně rozměrnou geometrii, deskriptivní teorii množin, teorii potenciálu a další části matematiky. Je dodnes živá a nachází stále nové aplikace: princip maxima se uplatnil při odvození nových výsledků o Liouvilleově vlastnosti

---

[19]) Konstrukce Poulsenova simplexu je uvedena v [Li] nebo [FoLiPh]. Tam je také objasněna vlastnost jednoznačnosti a vlastnost univerzality Poulsenova simplexu.

[20]) Toto tvrzení lze nalézt u V. Kleeho [Kl]. V prostorech konečné dimenze samozřejmě $\overline{\operatorname{ext} C} \neq C$ pro každou konvexní množinu obsahující více než jeden bod.

sférických průměrů v rovině [21]), o reflexivitě pro separabilní Banachovy prostory [22]), s Choquetovou teorií se setkáváme v teorii optimalizace, při studiu laminátů či řešení nelineárních parciálních diferenciálních rovnic (Youngovy míry apod.) [23]).

3. Choquetova teorie v prostorech testovacích funkcí

3.1. Choquetova věta

V dalším textu $K \neq \emptyset$ bude značit kompaktní metrický prostor. *Prostorem testovacích funkcí*, krátce *testovacím prostorem*, budeme rozumět vektorový podprostor $\mathcal{H}$ prostoru $\mathcal{C}(K)$ spojitých (reálných) funkcí na K, který obsahuje konstantní funkce a *odděluje body* K, neboli ke každé dvojici $x, y \in K$ existuje funkce $h \in \mathcal{H}$ tak, že $h(x) \neq h(y)$.

Jako příklad testovacího prostoru nám poslouží prostor $\mathcal{A}(K)$ všech spojitých afinních funkcí na (podle naší úmluvy metrizovatelné) kompaktní konvexní podmnožině lokálně konvexního prostoru, který jsme vyšetřovali v předcházející části. Pak mluvíme o *konvexním případě*. Anebo také celý prostor $\mathcal{C}(K)$. Dalšímu důležitému případu se budeme věnovat níže, příkladem bude prostor všech spojitých funkcí na uzávěru omezené otevřené množiny $U \subset \mathbb{R}^m$, které jsou harmonické na U.

Řekneme, že (pravděpodobnostní) míra $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ *reprezentuje bod* $x \in K$, anebo také že x je *těžištěm míry* μ, jestliže

$$h(x) = \int_K h \,\mathrm{d}\mu \quad \text{pro každou testovací funkci} \quad h \in \mathcal{H}.$$

Množinu všech měr reprezentujících bod x označme $\mathcal{M}_x(\mathcal{H})$. Všimněme si hned, že Diracova míra ε_x vždy reprezentuje bod x, tedy že $\varepsilon_x \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$.

Nyní bychom potřebovali zavést analogii pojmu extremálního bodu, přičemž nemáme k dispozici příslušné geometrické pojmy. Přesněji: nevíme, jak v testovacích prostorech definovat úsečku. Naštěstí nám pomůže následující věta dokázaná právě v konvexním případě. Její důkaz vynecháme [24]), i když není příliš obtížný.

Bauerova charakteristika $\operatorname{ext} K$**.** *Nechť K je kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru. Potom x je extremálním bodem množiny K, právě když jedinou $\mathcal{A}(K)$-reprezentující mírou bodu x je Diracova míra ε_x. Tedy*

$$\operatorname{ext} K = \big\{x \in K : \mathcal{M}_x(\mathcal{A}(K)) = \{\varepsilon_x\}\big\}.$$

---

[21]) Viz Hansenův výsledek [Ha].

[22]) Připomeňme Jamesovu větu, podle které reálný Banachův prostor X je reflexivní, právě když každý funkcionál $f \in X^*$ nabývá na uzavřené jednotkové kouli v X svého maxima. Pro separabilní případ je důkaz obsažen v příspěvku [FoLiPh], připraveném k publikaci.

[23]) Podrobný výklad lze nalézt v [Rou]. Viz též [Kr].

[24]) Čtenáře lze opět odkázat na Phelpsovu knihu [Ph]; využívá se regularita borelovských měr.

V souladu s touto charakteristikou extremálních bodů můžeme zavést analogii množiny extremálních bodů v situaci testovacího prostoru na kompaktním prostoru K. Definujme

$$\operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K = \big\{x \in K : \mathcal{M}_x(\mathcal{H}) = \{\varepsilon_x\}\big\}.$$

Množina $\operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K$ se nazývá *Choquetova hranice* testovacího prostoru $\mathcal{H}$. Abychom uměli popsat Choquetovu hranici různých testovacích prostorů, zavedeme nyní další pojmy.

Pro $f \in \mathcal{C}(K)$ označme

$$f^* = \inf\{h \in \mathcal{H} : h \geqq f\}, \quad f_* = \sup\{h \in \mathcal{H} : h \leqq f\}.$$

Pro odvození hlubších vlastností bude výhodné nejdříve dokázat následující tvrzení.

Klíčové lemma. *Nechť $x \in K$ a $f \in \mathcal{C}(K)$. Potom*

$$\big[f_*(x), f^*(x)\big] = \left\{\int_K f \,\mathrm{d}\mu : \mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})\right\}.$$

Důkaz. Volme $x \in K$ a $f \in \mathcal{C}(K)$. Důkaz jedné implikace je snadný. Je-li $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$, $g, h \in \mathcal{H}$ a $g \leqq f \leqq h$ na K, je $g(x) = \int_K g \,\mathrm{d}\mu \leqq \int_K f \,\mathrm{d}\mu \leqq \int_K h \,\mathrm{d}\mu = h(x)$. Odtud ihned dostáváme $f_*(x) \leqq \int_K f \,\mathrm{d}\mu \leqq f^*(x)$.

Předpokládejme nyní, že $\alpha \in [f_*(x), f^*(x)]$. Zpočátku si uvědomíme, že zobrazení $p : \varphi \mapsto \varphi^*(x)$, $\varphi \in \mathcal{C}(K)$, je sublineární funkcionál na prostoru $\mathcal{C}(K)$. Lehko totiž zjistíme, že

$$(g + h)^* \leqq g^* + h^* \quad \text{a} \quad (\lambda g)^* = \lambda g^*$$

pro kterékoliv $g, h \in \mathcal{C}(K)$ a $\lambda \geqq 0$. Použijeme nyní algebraickou verzi Hahnovy-Banachovy věty. Podle ní existuje lineární funkcionál F na $\mathcal{C}(K)$ s vlastnostmi $F \leqq p$ na $\mathcal{C}(K)$, $F(f) = \alpha$. Funkcionál F je také nezáporný. Je-li totiž $g \in \mathcal{C}(K)$, $g \leqq 0$ na K, je $F(g) \leqq p(g) = g^*(x) \leqq 0$ (připomeňme, že $0 \in \mathcal{H}$). Podle Rieszovy věty o reprezentaci existuje borelovská míra μ na K tak, že $\int_K g \,\mathrm{d}\mu = F(g)$ pro každou funkci $g \in \mathcal{C}(K)$. Je-li však $h \in \mathcal{H}$, je samozřejmě $h_* = h^* = h$, a tudíž

$$\int_K h \,\mathrm{d}\mu = F(h) \leqq p(h) = h^*(x) = h(x).$$

Protože však zároveň je $-h \in \mathcal{H}$, platí i $-\int_K h \,\mathrm{d}\mu \leqq -h(x)$. Volíme-li speciálně $h = 1$, je $\mu(K) = \int_K h \,\mathrm{d}\mu = h(x) = 1$. A jsme s důkazem hotovi. Našli jsme totiž $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ tak, že $\int_K f \,\mathrm{d}\mu = F(f) = \alpha$. ■

Klíčové lemma nám umožňuje charakterizovat body Choquetovy hranice. Jako jeho bezprostřední důsledek dostáváme následující tvrzení pocházející opět od H. Bauera.

Důsledek. *Bod $x \in K$ leží v Choquetově hranici* $\operatorname{Ch}_{\mathcal{H}}(K)$, *právě když $f_*(x) = f^*(x)$ pro každou funkci $f \in \mathcal{C}(K)$. Tedy*

$$\operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K = \bigcap\nolimits_{f \in \mathcal{C}(K)} \{x \in K : f_*(x) = f^*(x)\}.$$

Tento důsledek nám umožňuje dokázat, že Choquetova hranice je vždy borelovská množina. Platí dokonce silnější tvrzení.

Tvrzení. *Nechť $\mathcal{H}$ je testovací prostor na kompaktním metrickém prostoru K. Potom Choquetova hranice $\operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K$ je množina typu G_δ.*

Důkaz. Především si musíme rozmyslet, že existuje spočetná hustá množina $M \subset \mathcal{C}(K)$, $M = -M$ a že

$$\operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K = \bigcap\nolimits_{f \in M} \{x \in K : f(x) = f^*(x)\}.$$

To odvodíme z toho, že v případě metrického kompaktu K je Banachův prostor $\mathcal{C}(K)$ separabilní. Označíme-li potom pro $f \in M$

$$G_n(f) = \left\{x \in K : f^*(x) - f(x) < \frac{1}{n}\right\},$$

jsou $G_n(f)$ otevřené množiny (funkce f^* je infimem množiny spojitých funkcí) a platí $\operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K = \bigcap\limits_{f \in M} \bigcap\limits_{n} G_n(f)$. ■

Uvedený popis Choquetovy hranice je užitečný, ale v konkrétních případech stěží umožňuje rozhodnout, které body do Choquetovy hranice padnou. K tomu se nám bude hodit následující nový pojem. Bodu $x \in K$ budeme říkat *$\mathcal{H}$-exponovaný*, existuje-li takové $h \in \mathcal{H}$, že $0 = h(x) < h(y)$ pro každé $y \in K \setminus \{x\}$. O funkci h mluvíme jako o *$\mathcal{H}$-exponující* funkci. Postačující podmínka pak vypadá takto:

Tvrzení. *Každý $\mathcal{H}$-exponovaný bod leží v Choquetově hranici* $\operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K$.

Důkaz. Předpokládejme, že $x \in K$ a $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$. Nechť $h \in \mathcal{H}$ je taková funkce, že $0 = h(x) < h(y)$ pro každé $y \in K$, $y \neq x$. Potom ovšem $0 = h(x) = \int_K h \,\mathrm{d}\mu$ a vidíme, že nosič míry μ musí být obsažen v jednobodové množině $\{x\}$. A protože $\mu(K) = 1$, musí být $\mu = \varepsilon_x$. ■

Než přejdeme k důkazu hlavní Choquetovy věty, zavedeme další pojmy. Symbolem $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ označíme množinu všech (spojitých) *$\mathcal{H}$-konvexních funkcí* na K, tedy

$$\mathcal{K}(\mathcal{H}) = \left\{f \in \mathcal{C}(K) : f(x) \leqq \int_K f \,\mathrm{d}\mu \text{ pro všechna } x \in K \text{ a } \mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})\right\}.$$

O funkci $h \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ řekneme, že je *striktně $\mathcal{H}$-konvexní*, jestliže

$$h(x) < \int_K h \,\mathrm{d}\mu, \quad x \in K, \quad \mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H}) \quad \text{a} \quad \mu \neq \varepsilon_x.$$

Následující tvrzení bude základem pro slibovanou větu.

Tvrzení. *Na K existuje striktně $\mathcal{H}$-konvexní funkce.*

Náznak důkazu. Protože je prostor $\mathcal{C}(K)$ separabilní, můžeme najít spočetnou hustou podmnožinu $\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$ množiny $\{h \in \mathcal{H} : 0 \leqq h \leqq 1\}$. V prvním kroku ukážeme, že každá z funkcí h_n^2 je $\mathcal{H}$-konvexní. To není obtížné. Volíme-li $x \in K$ a $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$, dostaneme použitím Hölderovy nerovnosti

$$h_n^2(x) = \left(\int_K h_n \,\mathrm{d}\mu\right)^2 \leqq \int_K 1 \,\mathrm{d}\mu \int_K h_n^2 \,\mathrm{d}\mu = \int_K h_n^2 \,\mathrm{d}\mu.$$

Je-li navíc $\mu \neq \varepsilon_x$, existuje takové n, že $h_n^2(x) < \int_K h_n^2 \,\mathrm{d}\mu$. Kdyby totiž takové n neexistovalo, platila by pro každé n v uvedené Hölderově nerovnosti rovnost. Odtud bychom dostali, že $h_n = h_n(x)$ μ-skoro všude na K. Protože μ není Diracova míra, rozmysleli bychom si, že musí existovat bod $y \in K$, $y \neq x$ tak, že $h_n(x) = h_n(y)$ pro každé n. A to by bylo ve sporu s tím, že $\mathcal{H}$ odděluje body K. Položíme-li pak $h = \sum_n 2^{-n} h_n$, je h hledaná striktně $\mathcal{H}$-konvexní funkce. ■

Nyní již máme připravenou cestu k důkazu mimořádně významné Choquetovy věty.

Choquetova věta. *Nechť $\mathcal{H}$ je testovací prostor na metrizovatelném kompaktu K a $x \in K$. Potom existuje borelovská míra μ soustředěná na Choquetově hranici $\operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K$ taková, že $h(x) = \int_K h \,\mathrm{d}\mu$ pro každou funkci $h \in \mathcal{H}$.*

Důkaz. Nechť $x \in K$ a nechť h_0 je striktně $\mathcal{H}$-konvexní funkce na K. Podle klíčového lemmatu existuje $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ tak, že $\int_K h_0 \,\mathrm{d}\mu = h_0^*(x)$. Pokud $h \in \mathcal{H}$, $h \geqq h_0$, je

$$h_0^*(x) = \int_K h_0 \,\mathrm{d}\mu \leqq \int_K h_0^* \,\mathrm{d}\mu \leqq \int_K h \,\mathrm{d}\mu = h(x)\,.$$

Přechodem k infimu dostaneme rovnost $\int_K h_0 \,\mathrm{d}\mu = \int_K h_0^* \,\mathrm{d}\mu$. A protože $h_0 \leqq h_0^*$, je

$$\mu\big(\{t \in K : h_0^*(t) > h_0(t)\}\big) = 0\,.$$

K dokončení důkazu si stačí uvědomit, že

$$K \setminus \operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K \subset \{t \in K : h_0^*(t) > h_0(t)\}\,.$$

Pokud by totiž $h_0(t) = h_0^*(t)$ a současně $t \notin \operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K$, existovala by reprezentující míra $\mu \in \mathcal{M}_t(\mathcal{H})$, $\mu \neq \varepsilon_t$. Z definice striktní konvexity bychom pak pomocí klíčového lemmatu dostali

$$h_0^*(t) = h_0(t) < \int_K h_0 \,\mathrm{d}\mu \leqq h_0^*(t)\,,$$

což je samozřejmě spor. Choquetova hranice je borelovská množina a můžeme tedy uzavřít, že $\mu(K \setminus \operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K) = 0$. A to jsme chtěli ukázat. ■

3.2. Principy maxima

Choquetova hranice hraje také význačnou roli v následujícím abstraktním *principu maxima.*

Princip maxima. *Nechť $\mathcal{H}$ je testovací prostor na $K \neq \emptyset$ a f je (spojitá) $\mathcal{H}$-konvexní funkce na K. Potom f nabývá svého maxima na K v nějakém bodě Choquetovy hranice.*

Důkaz. Jakožto spojitá funkce na kompaktní množině nabývá f svého maxima v nějakém bodě $z \in K$. Podle Choquetovy věty nalezněme takovou reprezentující míru $\mu \in \mathcal{M}_z(\mathcal{H})$, aby $\mu(K \setminus \operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K) = 0$. Potom

$$f(z) \leqq \int_K f \,\mathrm{d}\mu = \int_{\operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K} f \,\mathrm{d}\mu.$$

Vidíme, že $\int_{\operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K} (f - f(z)) \,\mathrm{d}\mu \geqq 0$. Protože však $f - f(z) \leqq 0$ na K a $\mu(\operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K) = 1$, musí existovat $x_0 \in \operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K$ tak, že $f(x_0) = f(z)$ $(= \max\{f(t) : t \in K\})$. ■

Důsledek. *Jestliže f je $\mathcal{H}$-konvexní funkce na K a $f \leqq 0$ na $\operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K$, potom $f \leqq 0$ na K.*

Vrátíme-li se ke konvexnímu případu a využijeme-li předchozí abstraktní princip maxima, dostaneme tvrzení, které se dnes všeobecně označuje jako Bauerův princip maxima.

Bauerův princip maxima. *Nechť K je neprázdná kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru X a f spojitá konvexní funkce na K. Potom f nabývá svého maxima v nějakém extremálním bodě K, tj. existuje $x \in \operatorname{ext} K$ tak, že*

$$f(x) = \max\{f(t) : t \in K\}.$$

Podotkněme ještě, že z Bauerova principu maxima lze získat vcelku snadnou úvahou využívající Hahnovu-Banachovu větu důkaz Krejnovy-Milmanovy věty[25]).

3.3. Simpliciální prostory

Dále potřebujeme zavést pro obecný případ testovacích prostorů pojem analogický pojmu afinní funkce z konvexního případu. To nás vede k následující definici. Funkcím, které jsou současně $\mathcal{H}$-konvexní i $\mathcal{H}$-konkávní ve zřejmém smyslu, říkejme *$\mathcal{H}$-afinní*. Označíme-li $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ množinu všech $\mathcal{H}$-afinních funkcí na K, je tedy

$$\mathcal{A}(\mathcal{H}) = \left\{ f \in \mathcal{C}(K) : f(x) = \int_K f \,\mathrm{d}\mu \text{ pro každé } x \in K \text{ a } \mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H}) \right\}.$$

Dále označme

$$\widehat{\mathcal{H}} = \{ f \in \mathcal{C}(K) : f_* = f^* \}.$$

Vztah těchto dvou systémů funkcí a jejich vlastnosti shrnuje následující věta.

Věta. *Prostor $\mathcal{H}$-afinních funkcí $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ je uzavřený podprostor $\mathcal{C}(K)$ obsahující $\mathcal{H}$. Přitom $\mathcal{A}(\mathcal{H}) = \widehat{\mathcal{H}}$.*

Důkaz. Evidentně $\mathcal{H} \subset \mathcal{A}(\mathcal{H})$ a $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ tvoří vektorový prostor. Lebesgueova věta o limitním přechodu za integračním znamením ihned dá uzavřenost $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ v $\mathcal{C}(K)$. Další tvrzení o rovnosti $\mathcal{A}(\mathcal{H}) = \widehat{\mathcal{H}}$ vyplývá bezprostředně z klíčového lemmatu. ■

Prostor $\mathcal{H}$-afinních funkcí má také důležitou úlohu ve větách Korovkinova typu[26]).

---

[25]) Tak postupuje například G. Choquet v [Cho], 2. díl, s. 102–106.

[26]) Byla by škoda na tomto místě se nezmínit ještě o další zajímavé vlastnosti prostoru $\mathcal{A}(\mathcal{H})$. Před několika lety vyšel v Pokrocích matematiky, fyziky a astronomie článek H. Bauera o Korovkinových větách. Čtenáře odkážeme na [Ba1] a pouze připomeneme některé definice. Uvažujme posloupnost $\{L_n\}$ lineárních nezáporných operátorů $L_n \colon \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(K)$ na metrickém kompaktu K. Tuto posloupnost nazveme *$\mathcal{H}$-přípustnou*, jestliže $L_n h \to h$ stejnoměrně na K pro každou funkci $h \in \mathcal{H}$. Dále označme symbolem $\operatorname{Kor}(\mathcal{H})$ množinu všech funkcí $f \in \mathcal{C}(K)$, pro něž $L_n f \to f$ stejnoměrně na K, kdykoliv $\{L_n\}$ je $\mathcal{H}$-přípustná posloupnost operátorů, a nazvěme tuto množinu *Korovkinovým uzávěrem* testovacího prostoru $\mathcal{H}$. Vztah Korovkinova uzávěru a prostoru afinních funkcí vyjadřuje následující věta: *Platí rovnost* $\operatorname{Kor}(\mathcal{H}) = \mathcal{A}(\mathcal{H}) = \widehat{\mathcal{H}}$.

Testovací prostor $\mathcal{H}$ na metrizovatelném kompaktu K se nazývá *simpliciální*, jestliže ke každému $x \in K$ existuje právě jedna $\mathcal{H}$-reprezentující míra z $\mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ soustředěná na Choquetově hranici $\mathrm{Ch}_{\mathcal{H}}\, K$. Simpliciální prostory se dají charakterizovat mnoha způsoby. Uvedeme pouze jeden z nich, který naznačuje souvislost s řešením Dirichletovy úlohy diskutovaným v odst. 4.2–4.6. Důkaz následujícího tvrzení je poměrně obtížný, proto jej vynecháme [27]).

Charakteristika simpliciálních prostorů. *Nechť $\mathcal{H}$ je testovací prostor na metrizovatelném kompaktu K. Potom $\mathcal{H}$ je simpliciální, právě když je splněna následující podmínka: Kdykoliv F je uzavřená podmnožina Choquetovy hranice $\mathrm{Ch}_{\mathcal{H}}\, K$ a f spojitá funkce na F, existuje $h \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$ tak, že $h = f$ na F, $\max\{h(x) : x \in K\} = \max\{f(x) : x \in F\}$ a $\min\{h(x) : x \in K\} = \min\{f(x) : x \in F\}$.*

Uvedená podmínka říká, že ke každé spojité funkci f (*okrajové podmínce*) definované na uzavřené podmnožině Choquetovy hranice existuje její spojité rozšíření na funkci ze systému $\mathcal{A}(\mathcal{H})$. Tedy vlastně řešení *Dirichletovy úlohy.* Takové rozšíření však zdaleka není jednoznačné (za F můžeme brát i jednobodové množiny!). Často se mluví proto o *zeslabené Dirichletově úloze.*

V tvrzení z odst. 3.1 jsme ukázali, že $\mathcal{H}$-exponované body leží v Choquetově hranici. U simpliciálních prostorů většinou tyto dvě množiny splývají. Platí totiž následující tvrzení.

Věta. *Je-li $\mathcal{H}$ simpliciální testovací prostor na K, potom každý bod z Choquetovy hranice je $\mathcal{A}(H)$-exponovaný.*

Důkaz. Poznamenejme, že Choquetova hranice nemůže být v případě kompaktu K (obsahujícího alespoň dva body) jednobodová. To plyne třeba z principu maxima a z toho, že funkce ze systému $\mathcal{H}$ oddělují body. Volme nyní $x \in \mathrm{Ch}_{\mathcal{H}}\, K$. Je-li $y \in \mathrm{Ch}_{\mathcal{H}}\, K \setminus \{x\}$, získáme řešením zeslabené Dirichletovy úlohy pro dvoubodovou množinu $F = \{x, y\}$ funkci $h_y \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$ s vlastnostmi

$$h_y(x) = 0, \quad h_y(y) = 1, \quad 0 \leqq h_y \leqq 1 \quad \text{na } K.$$

Potom

$$\mathrm{Ch}_{\mathcal{H}}\, K \setminus \{x\} \subset \bigcup_{y \in \mathrm{Ch}_{\mathcal{H}}\, K \setminus \{x\}} \{t \in K : h_y(t) > 0\}.$$

Využitím separability $\mathcal{H}$ dostaneme body $y_n \in \mathrm{Ch}_{\mathcal{H}}\, K \setminus \{x\}$ tak, že

$$\mathrm{Ch}_{\mathcal{H}}\, K \setminus \{x\} \subset \bigcup_n \{t \in K : h_{y_n}(t) > 0\}.$$

Položíme-li $h = \sum_n 2^{-n} h_{y_n}$, je $h \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$, $h \geqq 0$ na K, $h > 0$ na $\mathrm{Ch}_{\mathcal{H}}(K) \setminus \{x\}$ a $h(x) = 0$. Zbývá ukázat, že $h(z) > 0$ pro každé $z \in K$, $z \neq x$. Nechť tedy $h(z) = 0$ pro

[27]) Tuto charakteristiku lze odvodit z věty 28.6 uvedené v druhém dílu Choquetovy monografie [Cho].

jisté $z \in K$. Pomocí Choquetovy věty najdeme $\mu \in \mathcal{M}_z(\mathcal{H})$ tak, aby $\mu(K \setminus \mathrm{Ch}_{\mathcal{H}} K) = 0$. Využijeme-li toho, že $h \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$ je $\mathcal{H}$-afinní funkce, dostaneme

$$0 = h(z) = \int_K h \, \mathrm{d}\mu = \int_{\mathrm{Ch}_{\mathcal{H}} K} h \, \mathrm{d}\mu.$$

Odtud vyplývá, že $\operatorname{supp} \mu \subset \{x\}$, a protože μ je pravděpodobnostní míra, je nutně $\mu = \varepsilon_x$. Tudíž pro každou funkci $\varphi \in \mathcal{H}$ dostáváme rovnost

$$\varphi(x) = \int_K \varphi \, \mathrm{d}\varepsilon_x = \int_K \varphi \, \mathrm{d}\mu = \varphi(z).$$

Funkce z testovacího prostoru $\mathcal{H}$ však oddělují body K, musí tedy být $z = x$. A to jsme vlastně chtěli ukázat. ∎

V předešlé větě se nám pro simpliciální prostory podařilo sestrojit v každém bodě Choquetovy hranice $\mathcal{A}(\mathcal{H})$-exponující funkci. Rovněž tak v případě zeslabené Dirichletovy úlohy lze nalézt pouze řešení z prostoru $\mathcal{A}(\mathcal{H})$. Nás by samozřejmě více uspokojilo, kdyby se nám podařilo nalézt dokonce funkce z původního testovacího prostoru $\mathcal{H}$. To však není vždy možné. Nicméně další tvrzení nám alespoň napoví, kdy množina $\mathcal{H}$-afinních funkcí splývá s funkcemi z $\mathcal{H}$.

Bauerovo tvrzení[28]**).** *Nechť $\mathcal{H}$ je testovací prostor na K. Potom $\mathcal{A}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$, právě když existuje uzavřená množina $\mathcal{W} \subset \mathcal{C}(K)$ stabilní na tvoření konečných minim taková, že $\mathcal{H} = \mathcal{W} \cap (-\mathcal{W})$.*

3.4. Konkrétní příklady

Vraťme se nyní k triviálnímu příkladu testovacího prostoru. Uvažujme tedy kompaktní metrický prostor K a na něm testovací prostor $\mathcal{H} = \mathcal{C}(K)$. V tomto případě je zajisté každý bod K jeho $\mathcal{C}(K)$-exponovaným bodem. Tudíž Choquetova hranice $\mathrm{Ch}_{\mathcal{C}(K)} K = K$. Protože $\mathcal{M}_x(\mathcal{C}(K)) = \{\varepsilon_x\}$ v každém bodě $x \in K$, je prostor $\mathcal{C}(K)$ simpliciální. Co nám vlastně říká charakteristika simpliciálních prostorů v termínech zeslabené Dirichletovy úlohy o tomto speciálním případě? Podmínka v něm uvedená není zde vlastně nic jiného než Tietzeho věta o rozšíření spojité funkce z uzavřené podmnožiny na spojitou funkci na celém prostoru.

V klasickém případě, kdy K je konvexní kompaktní metrizovatelná podmnožina lokálně konvexního prostoru X a $\mathcal{H}$ je množina $\mathcal{A}(K)$ všech spojitých afinních funkcí na K, splývá, jak jsme již poznamenali, Choquetova hranice $\mathrm{Ch}_{\mathcal{H}} K$ s množinou $\operatorname{ext} K$ všech extremálních bodů. Pokud je prostor $\mathcal{A}(K)$ simpliciální, nazýváme K krátce *Choquetovým simplexem*. Pokud ještě více specifikujeme a za K vezmeme kompaktní konvexní množinu s neprázdným vnitřkem v $\mathbb{R}^m$, je K Choquetův simplex, právě když K je konvexní obal $m+1$ lineárně nezávislých bodů[29]). Tedy Choquetovy simplexy v rovině jsou právě uzavřené trojúhelníky či v prostoru uzavřené čtyřstěny.

---

[28]) Věta náleží H. Bauerovi a její důkaz lze nalézt v Bauerově článku [Ba2], kde je vyjasněna souvislost simpliciálních prostorů a simplexů ve smyslu geometrické Choquetovy teorie.

[29]) Pěkný výklad o simplexech lze nalézt v Choquetově knize [Cho], 2. díl, s. 156–161.

Dalším důležitým příkladům vycházejícím z teorie potenciálu jsou věnovány následující části.

4. Dirichletova úloha v teorii potenciálu

4.1. Harmonické a hyperharmonické funkce

Pro úplnost uveďme, že funkce h definovaná na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^m$ se nazývá *harmonická*, jestliže má spojité parciální derivace 2. řádu na U a splňuje na U *Laplaceovu rovnici* $\Delta h = 0$. Množinu všech harmonických funkcí na U budeme značit $\mathcal{H}(U)$. Zřejmě je $\mathcal{H}(U)$ vektorový prostor.

Harmonické funkce lze charakterizovat pomocí *vlastnosti průměru.* Pro $x \in \mathbb{R}^m$ a $r > 0$ označíme $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^m : |y - x| < r\}$ a dále symbolem $\lambda_{x,r}$ normalizovanou Lebesgueovu míru na $B(x,r)$. Tedy $\lambda_{x,r}$ je restrikce Lebesgueovy míry na $B(x,r)$ násobená převrácenou hodnotou objemu koule $B(x,r)$. Platí následující tvrzení:

Věta[30]**.** *Nechť $f\colon U \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Potom $f \in \mathcal{H}(U)$, právě když platí rovnost*

$$f(x) = \int_{B(x,r)} f \,\mathrm{d}\lambda_{x,r},$$

kdykoli uzávěr koule $B(x,r)$ je obsažen v U.

Připomeňme ještě pojem hyperharmonických funkcí, které v určitém smyslu plní pro teorii potenciálu úlohu konkávních funkcí. Funkce $u\colon U \to (-\infty, \infty]$ se nazývá *hyperharmonická*, jestliže u je zdola polospojitá[31] a platí $\int_{B(x,r)} u \,\mathrm{d}\lambda_{x,r} \leqq u(x)$, kdykoli je uzávěr koule $B(x,r)$ obsažen v U. Systém všech hyperharmonických funkcí na U označíme $\mathcal{H}^*(U)$.

V případě $m = 1$ je $h \in \mathcal{H}(U)$, právě když je h lineární na každém intervalu obsaženém v U. Podobně $u \in \mathcal{H}^*(U)$, právě když je u konkávní na každém intervalu obsaženém v U.

Dále se omezíme na zajímavější případ a budeme předpokládat, že pro dimenzi prostoru $\mathbb{R}^m$ platí $m \geqq 2$.

4.2. Klasická Dirichletova úloha

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je neprázdná omezená otevřená množina a ∂U je její hranice. Funkce $g \in \mathcal{H}(U)$ se nazývá *řešení klasické Dirichletovy úlohy* pro funkci $f \in \mathcal{C}(\partial U)$, tzv. *okrajovou podmínku*, jestliže pro každý bod $z \in \partial U$ platí

$$\lim_{x \to z} g(x) = f(z). \tag{$*$}$$

Klasická Dirichletova úloha tedy bezprostředně souvisí s testovacím prostorem

$$H(U) = \{h \in \mathcal{C}(\overline{U}) : h|_U \in \mathcal{H}(U)\}.$$

---

[30]) Důkaz věty lze nalézt v [He] či [KNV]. Problematice vět o průměru je věnován článek [NeVe2].

[31]) Říci, že u je *zdola polospojitá*, je zde ekvivalentní podmínce: u je limitou neklesající posloupnosti spojitých funkcí.

Funkce z prostoru $H(\partial U) = H(U)|_{\partial U}$ jsou totiž právě ty spojité funkce na ∂U, pro něž existuje řešení klasické Dirichletovy úlohy. Pro každé $x \in U$ a každé $r > 0$ takové, že uzávěr koule $B(x,r)$ leží v U, je $\lambda_{x,r}$ reprezentující míra (vzhledem k $H(U)$) pro bod x. Zřejmě $\lambda_{x,r} \neq \varepsilon_x$ a z principu maxima (viz odst. 3.2) dostáváme: *Pro každou funkci $h \in H(U)$ existuje $z \in \partial U$ takové, že $h(z) = \max h(\overline{U})$. Jsou-li tedy $h_1, h_2 \in H(U)$ a $h_1 \leqq h_2$ na ∂U, potom $h_1 \leqq h_2$, a tak pro každou funkci $f \in C(\partial U)$ existuje nejvýše jedno řešení klasické Dirichletovy úlohy.*

Množina U se nazývá *regulární*, jestliže pro každou okrajovou podmínku $f \in C(\partial U)$ existuje řešení klasické Dirichletovy úlohy. Z teorie potenciálu je známo, že každá omezená otevřená množina s hladkou (či obecněji lipschitzovskou) hranicí je regulární[32].

Existují množiny, které nejsou regulární. Je-li $U = B(0,1) \setminus \{0\}$ a $f = 0$ na $\partial B(0,1)$ a $f(0) = 1$, pak neexistuje $h \in H(U)$ taková, že $h|_{\partial U} = f$. Pro každou takovou funkci h by (podle věty o odstranitelné singularitě) platilo $h \in H(B(0,1))$, a tudíž $1 = h(0) \leqq \max h(\partial B(0,1)) = 0$. Složitější je ukázat, že např. pro tzv. *Lebesgueův hrot*

$$L = \{0\} \cup \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 > 0, \ \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \leqq \mathrm{e}^{-1/x_1} \right\}$$

není množina $B(0,1) \setminus L$ regulární podmnožinou $\mathbb{R}^3$.

V těchto případech $H(\partial U) \neq C(\partial U)$, a tudíž $H(\partial U)$ jako uzavřený podprostor je pak řídký, je to tedy „topologicky malá“ podmnožina v $C(\partial U)$.

4.3. Zobecněná Dirichletova úloha

Existence neregulárních množin vede k přirozené otázce: bylo by možné každé okrajové podmínce $f \in C(\partial U)$ přiřadit „rozumným způsobem“ funkci $g \in \mathcal{H}(U)$ tak, aby rovnost $(*)$ z odst. 4.2 platila alespoň ve „většině“ hraničních bodů? S ohledem na linearitu Laplaceova operátoru a na platnost uvedeného důsledku principu maxima je vcelku přirozené za zobecnění klasické Dirichletovy úlohy považovat úlohu nalézt zobrazení $A\colon C(\partial U) \to \mathcal{H}(U)$ s těmito vlastnostmi:

(a) A je lineární;

(b) A je nezáporné, tj. $Af \geqq 0$ pro $f \geqq 0$;

(c) pokud pro f existuje řešení g klasické Dirichletovy úlohy, platí $Af = g$; jinak řečeno, $A(h|_{\partial U}) = h|_U$, kdykoli $h \in H(U)$.

Zobrazení s uvedenými vlastnostmi se nazývá *Keldyšův operátor* (na U). Vzniká samozřejmě otázka: existuje pro každou omezenou otevřenou množinu $U \subset \mathbb{R}^m$ Keldyšův operátor na U? Odpověď nalezneme v odst. 4.4 a 4.6.

4.4. Perronovo řešení

Pro funkci $f\colon \partial U \to \mathbb{R}$ označme

$$\mathcal{U}(f) = \{u \in \mathcal{H}^*(U) : \ \liminf_{x \to z} u(x) \geqq f(z), \ z \in \partial U\}.$$

Dále pro $x \in U$ definujeme

$$\overline{H} f(x) = \inf\{u(x) : u \in \mathcal{U}(f)\}, \quad \underline{H} f(x) = -\overline{H}(-f)(x).$$

[32]) Geometrická kritéria regularity lze nalézt u L. L. Helmse v [He] a v [KNV].

Potom platí (z principu minima pro hyperharmonické funkce) $\underline{H}f \leqq \overline{H}f$. Funkce f se nazývá *resolutivní*, když $\underline{H}f = \overline{H}f$ a tato společná hodnota, kterou značíme Hf, je konečná funkce. Potom již $Hf \in \mathcal{H}(U)$ a je to tzv. *Perronovo řešení* zobecněné Dirichletovy úlohy. Uveďme tento důležitý výsledek: *každá spojitá funkce na ∂U je resolutivní* [33]) *a zobrazení A: $f \mapsto Hf$, $f \in C(\partial U)$, je Keldyšův operátor.*

Pro $x \in U$ je tudíž zobrazení $f \mapsto Hf(x)$, $f \in C(\partial U)$, nezáporný lineární funkcionál, a tedy podle Rieszovy věty o reprezentaci existuje borelovská míra μ_x na ∂U taková, že

$$Hf(x) = \int_{\partial U} f \,\mathrm{d}\mu_x, \quad f \in C(\partial U).$$

Míra μ_x se nazývá *harmonická míra* příslušná bodu x.

Poznamenejme, že *funkce f: $\partial U \to \mathbb{R}$ je resolutivní, právě když je integrovatelná vzhledem ke každé míře μ_x, $x \in U$* [34]).

Říkáme, že bod $z \in \partial U$ je *regulární*, jestliže $Hf(x) \to f(z)$ pro $x \to z$, $x \in U$, kdykoli $f \in C(\partial U)$. Jinak řečeno: právě když $\mu_x \to \varepsilon_z$ pro $x \to z$, $x \in U$. Množinu všech regulárních bodů označíme $\partial_{\mathrm{reg}} U$. Tato množina je vždy typu G_δ, obecně není uzavřená. Doplněk množiny $\partial_{\mathrm{reg}} U$ je zanedbatelný v tomto smyslu: $\mu_x(\partial U \setminus \partial_{\mathrm{reg}} U) = 0$ pro každé $x \in U$, tedy míra μ_x je nesena množinou regulárních bodů. Odtud se dá dokázat tento výsledek o jednoznačnosti: *jsou-li $h_1, h_2 \in \mathcal{H}(U)$ omezené a*

$$\lim_{x \to z} h_1(x) = \lim_{x \to z} h_2(x), \quad z \in \partial_{\mathrm{reg}} U,$$

potom $h_1 = h_2$.

Definice regulárního bodu neposkytuje žádnou informaci geometrického charakteru. Uveďme proto, že například bod $z \in \partial U$ je regulární, pokud je možno se ho dotknout z doplňku množiny U kuželem [35]).

4.5. Prostor $H(U)$ a Choquetova teorie

Nyní se podíváme na prostor $H(U)$ z pohledu Choquetovy teorie. Už víme (úvaha o reprezentující míře $\lambda_{x,r}$ z odst. 4.2), že $\mathrm{Ch}_{H(U)} \overline{U} \subset \partial U$. Protože $h(x) = \int h \,\mathrm{d}\mu_x$ pro každou funkci $h \in H(U)$ a každé $x \in U$, je $\mu_x \in \mathcal{M}_x(H(U))$. Nechť $z \in \mathrm{Ch}_{H(U)} \overline{U}$, $\nu \in \mathcal{M}^1(\overline{U})$ a nechť $x_n \in U$ jsou takové body, že $x_n \to z$ a $\mu_{x_n} \to \nu$ pro $n \to \infty$. Pro každou funkci $h \in H(U)$ potom platí

$$h(x_n) = \int_{\partial U} h \,\mathrm{d}\mu_{x_n}, \quad h(x_n) \to h(z) \quad \text{a} \quad \int_{\partial U} h \,\mathrm{d}\mu_{x_n} \to \int_{\partial U} h \,\mathrm{d}\nu.$$

Dostáváme $h(z) = \int h \,\mathrm{d}\nu$, $h \in H(U)$, a protože $z \in \mathrm{Ch}_{H(U)} \overline{U}$, je $\nu = \varepsilon_z$. Odtud se odvodí, že $\mu_x \to \varepsilon_z$ pro $x \to z$, $x \in U$, takže $z \in \partial_{\mathrm{reg}} U$. Dokázali jsme, že $\mathrm{Ch}_{H(U)} \overline{U} \subset \partial_{\mathrm{reg}} U$. Tuto informaci podstatně doplňuje následující tvrzení.

---

[33]) To dokázal N. Wiener v r. 1924 pro jinak konstruované řešení, které však splývá s Perronovým; viz také [He].

[34]) Toto tvrzení dokázal v r. 1939 M. Brelot. Proto se často užívá označení *PWB-řešení Dirichletovy úlohy* k připomenutí jmen Perron, Wiener a Brelot.

[35]) Další geometrická kritéria jsou uvedena v [KNV], kde je také dokázána nutná a postačující podmínka pro regularitu bodu (Wienerovo kritérium).

Věta[36]**.** *Platí* $\mathrm{Ch}_{H(U)}\,\overline{U} = \partial_{\mathrm{reg}}U$ *a prostor* $H(U)$ *je simpliciální.*

Speciálně pro každé $x \in U$ je harmonická míra μ_x jediná $H(U)$-reprezentující míra nesená $\mathrm{Ch}_{H(U)}\,\overline{U}$. Podle definice Choquetovy hranice je zřejmě ε_z jediná reprezentující míra pro $z \in \partial_{\mathrm{reg}}U$ a je užitečné poznamenat, že jediná reprezentující míra nesená Choquetovou hranicí se pro $z \in \partial U \setminus \partial_{\mathrm{reg}}U$ získá speciální konstrukcí, nesmírně důležitou v teorii potenciálu: vymetením (*balayage*) míry ε_z na $\mathbb{R}^m \setminus U$.

Přehledný je zejména případ, kdy $\partial_{\mathrm{reg}}U$ je uzavřená množina. Podle tvrzení o zeslabené Dirichletově úloze z odst. 3.3 existuje pro každou funkci $f \in C(\partial_{\mathrm{reg}}U)$ funkce $h \in H(U)$ taková, že $f = h|_{\partial_{\mathrm{reg}}U}$. Tato funkce je podle principu maxima (viz odst. 3.2) právě jedna. Máme tak prosté nezáporné lineární zobrazení prostoru $C(\partial_{\mathrm{reg}}U)$ na $H(U)$. Odtud plyne, že $H(U)$ je *svaz*[37], jestliže pro uspořádání $\prec$ na $H(U)$ platí: pro $h_1, h_2 \in H(U)$ je $h_1 \prec h_2$, pokud je $h_1 \leqq h_2$ na $\partial_{\mathrm{reg}}U$. Při této definici uspořádání označíme pro prvky $h_1, h_2 \in H(U)$ jejich infimum symbolem $h_1 \curlywedge h_2$.

Naprosto jiná situace nastává, pokud množina $\partial_{\mathrm{reg}}U$ není uzavřená.

Věta[38]**.** *Nechť* U *je oblast a množina* $\partial_{\mathrm{reg}}U$ *není uzavřená. Potom je* $H(U)$ *antisvaz v tomto smyslu: je-li* $h_1, h_2 \in H(U)$ *a* $h_1 \curlywedge h_2 \in H(U)$*, potom buďto* $h_1 \leqq h_2$ *nebo* $h_1 \geqq h_2$*.*

4.6. Keldyšova věta

Keldyšův operátor A: $f \mapsto Hf$, $f \in C(\partial U)$, byl výsledkem *speciální konstrukce.* Není zřejmé, zda existují jiné Keldyšovy operátory na U, které by dávaly příznivější řešení zobecněné Dirichletovy úlohy. Např. v tom smyslu, že by příslušná množina „regulárních bodů“ byla eventuálně větší než $\partial_{\mathrm{reg}}U$.

Choquetova teorie poskytuje snadný přístup k důkazu této pozoruhodné věty.

Věta[39]**.** *Na* U *existuje právě jeden Keldyšův operátor.*

Důkaz. Nechť A je Keldyšův operátor na U. Chceme dokázat, že $Af = Hf$ pro každou funkci $f \in C(\partial U)$. K tomu stačí dokázat, že omezené harmonické funkce Af a Hf mají stejné hraniční hodnoty v každém bodě z $\partial_{\mathrm{reg}}U$. Zvolme tedy $f \in C(\partial U)$ a $z \in \partial_{\mathrm{reg}}U$. Protože prostor $H(U)$ je simpliciální, $z \in \mathrm{Ch}_{H(U)}\,\overline{U}$ a pro min-stabilní uzavřený kužel $S(U) = \{s \in \mathcal{C}(\overline{U}) : s|_U \in \mathcal{H}^*(U)\}$ platí $H(U) = S(U) \cap (-S(U))$, bod z je $H(U)$-exponovaný podle věty z odst. 3.3. Tudíž existuje funkce $h \in H(U)$ taková, že $h(z) = 0$ a $h > 0$ na $\overline{U} \setminus \{z\}$. Zvolme $\varepsilon > 0$ a okolí V bodu z takové, že $f \leqq \varepsilon + f(z)$ na $\partial U \cap V$. Dále zvolme $a > 0$ takové, že $f \leqq ah$ na $\partial U \setminus V$ a položme $k = \varepsilon + f(z) + ah$.

---

[36]) Více informací může získat čtenář v článku [Ne]; podstatně obecnější výsledek v rámci teorie harmonických prostorů byl získán J. Bliedtnerem a W. Hansenem v [BlHa1] a [BlHa2].

[37]) Tedy $H(U)$ je uzavřený vzhledem k tvoření infim a suprem konečných množin.

[38]) Věta je poprvé dokázána v článku E. G. Effrose a J. L. Kazdana [EfKa].

[39]) Větu dokázal M. V. Keldyš v [Ke2]. Důkaz je založen na existenci $H(U)$-exponující funkce, jejíž velmi složitou konstrukci využitím Wienerova kritéria podal Keldyš v [Ke1]. V důkazu věty se linearita operátoru A nevyužívá, věta tudíž platí pro nerostoucí operátory splňující podmínku (c) z odst. 4.3. Čtenáře odkazujeme na články [Ne], [NeVe1].

Potom $f \leqq k|_{\partial U}$ a $A(k|_{\partial U}) = \varepsilon + f(z) + ah|_U$. Operátor A je lineární a nezáporný, tudíž neklesající, proto platí

$$Af \leqq A(k|_{\partial U}) = \varepsilon + f(z) + ah|_U .$$

Dostáváme

$$\limsup_{x \to z} Af(x) \leqq \varepsilon + f(z) + a \lim_{x \to z} (h|_U)(x) = \varepsilon + f(z) .$$

Odtud snadno (přechodem k funkci $-f$) vyplývá, že

$$\lim_{x \to z} Af(x) = f(z) = \lim_{x \to z} Hf(x).$$

Tím je dokázáno, že $Af = Hf$ pro každou funkci $f \in C(\partial U)$. ■

5. Integrální reprezentace harmonických funkcí

V odst. 1.8 byla popsána reprezentace nezáporných harmonických funkcí v $\mathbb{R}^m$, $m \geqq 2$, pomocí Poissonova integrálu. Jak tato reprezentace souvisí s Choquetovou teorií?

Rozdíly nezáporných harmonických funkcí na omezené oblasti U tvoří lineární podprostor E prostoru $\mathcal{C}(U)$. Uvažujeme-li na tomto prostoru E topologii lokálně stejnoměrné konvergence na U, je tato topologie metrizovatelná. Zvolme pevně $x_0 \in U$ a uvažujme konvexní množinu

$$X = \{h \in \mathcal{H}(U) : \ h \geqq 0, \ h(x_0) = 1\}.$$

Kompaktnost množiny X je důsledkem tzv. Harnackovy konvergenční věty pro harmonické funkce. Dá se dokázat, že X je (metrizovatelný) Choquetův simplex. Proto ke každé funkci $h \in X$ existuje právě jedna pravděpodobnostní míra ν nesená množinou $\operatorname{ext} X$ taková, že pro každý spojitý lineární funkcionál f na E platí rovnost

$$f(h) = \int_{\operatorname{ext} X} f(g) \, \mathrm{d}\nu(g).$$

Zvolíme-li $x \in U$ a uvažujeme-li funkcionál $u \mapsto u(x)$, $u \in E$, dostaneme speciálně

$$h(x) = \int_{\operatorname{ext} X} g(x) \, \mathrm{d}\nu(g).$$

Dá se dokázat, že $g \in \operatorname{ext} X$, právě když pro každou harmonickou funkci k vyhovující nerovnosti $0 \leqq k \leqq g$ platí $k = \alpha g$ pro vhodné $\alpha \in [0,1]$. Prvky $\operatorname{ext} X$ se proto nazývají *minimální harmonické funkce* (normalizované rovností $g(x_0) = 1$).

V případě, že U je jednotková koule o středu $x_0 = 0$, platí $\operatorname{ext} X = \{P_z : z \in \partial U\}$, kde Poissonovo jádro P_z bylo zavedeno v odst. 1.8. Protože je v tomto případě zobrazení $z \mapsto P_z$, $z \in \partial U$, homeomorfní zobrazení hranice ∂U na $\operatorname{ext} X$, lze míru ν přenést přirozeným způsobem na míru μ na ∂U a platí

$$h(x) = \int_{\partial U} P_z(x) \, \mathrm{d}\mu(z)$$

pro každou funkci $h \in X$ a každé $x \in U$, a to odpovídá Rieszově-Herglotzově větě z odst. 1.8.

V popsaném případě reprezentace nezáporných harmonických funkcí na kouli U byla výsledkem velmi jednoduché situace: množiny $\operatorname{ext} X$ a ∂U jsou homeomorfní. V případě otevřeného jednotkového kruhu $U \subset \mathbb{R}^2$ lze (při ztotožnění $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{C}$) podle Riemannovy věty zobrazit U konformně na $V = U \setminus \{z \in \mathbb{C} : 0 \leqq \operatorname{Re} z < 1, \operatorname{Im} z = 0\}$. Pokud zvolíme $x_0 \in V$ a zopakujeme předchozí úvahy pro nezáporné funkce z $\mathcal{H}(V)$ a X definujeme obdobně, nelze již $\operatorname{ext} X$ homeomorfně zobrazit na ∂V. Protože U a V jsou konformně ekvivalentní a konformní zobrazení zachovává harmonicitu, každému bodu množiny $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1, \operatorname{Im} z = 0\}$ odpovídají dvě normalizované minimální funkce, a tedy i dva prvky v množině $\operatorname{ext} X$. Názorně řečeno, z pohledu harmonických funkcí není již eukleidovská hranice přirozená, body odstraněného poloměru je třeba „zdvojit“.

R. S. Martin ve čtyřicátých letech ukázal [40]), že pro omezenou oblast $U \subset \mathbb{R}^m$ se zvoleným referenčním bodem $x_0 \in U$ má důležitou úlohu jádro

$$K\colon (x,y) \mapsto G(x,y)/G(x,x_0), \quad (x,y) \in U \times U,$$

vytvořené jako podíl Greenových funkcí pro U. Dá se dokázat, že U lze vnořit do kompaktního prostoru U^* (v zásadě jednoznačně určeného, je to tzv. *Martinova kompaktifikace* U) a pro každý bod množiny $z \in U^* \setminus U$ (to je tzv. *Martinova hranice*) a pro každé $x \in U$ existuje $\lim_{y \to z} K(x,y)$. Tuto limitu označíme $K_z(x)$; pro případ koule je U^* homeomorfní s $\overline{U}$ a $K_z = P_z$, $z \in \partial U$.

Obecně však není pravda, že funkce K_z je minimální pro každé z. Body $z \in U^*$, pro které to platí, se nazývají *minimální body* Martinovy hranice. Označíme-li $\partial_1 U^*$ množinu všech takových bodů, poskytuje nám Choquetova teorie tuto větu:

Věta [41]). *Pro každou nezápornou funkci $h \in \mathcal{H}(U)$ existuje právě jedna míra μ na $\partial_1 U^*$ taková, že*

$$h(x) = \int_{\partial_1 U^*} K_z(x) \, \mathrm{d}\mu(z), \quad x \in U.$$

Podíl Greenových funkcí zde může působit poněkud mysticky a je užitečné poskytnout intuitivní vysvětlení. Jestliže je eukleidovská hranice oblasti dostatečně hladká a h je hladká funkce na uzávěru $\overline{U}$ a harmonická na U, pak se na základě Gaussovy-Greenovy formule dokáže vzorec

$$h(x) = \frac{1}{c_m} \int_{\partial U} \frac{\partial G(x,z)}{\partial n(z)} h(z) \, \mathrm{d}\sigma(z), \quad x \in U,$$

kde c_m je konstanta související s normováním singularity Greenovy funkce, σ povrchová míra na ∂U a $n(z)$ je vnitřní normála v bodě $z \in \partial U$. Pro jednotkovou

---

[40]) Viz [Ma]. Význam průkopnické práce [Ma] byl rozpoznán až po r. 1950, zejména díky M. Brelotovi a J. L. Doobovi.

[41]) Důkaz lze nalézt v [He] nebo [KNV]. Souvislost s Choquetovou teorií je naznačena v [Cho], 3. díl, s. 69–79.

kouli U je tedy $(1/c_m)\partial G(x,z)/\partial n(z)$ (normálová derivace Greenovy funkce) hodnota Poissonova jádra P_z v bodě x.

Zvolme nyní $z \in \partial U$, $x \in U$ a pro $y \in U$ označme $d(y)$ vzdálenost bodu y od ∂U. Potom se, zhruba řečeno, normálová derivace $\partial G(x,z)/\partial n(z)$ dostane jako $\lim_{y\to z} G(x,y)/d(y)$. Je známo, že pro množiny s hladkou hranicí je $G(x_0,y)$ pro body blízko hranice přibližně rovno $d(y)$, tedy

$$\lim_{y\to z} \frac{G(x,y)}{G(x_0,y)}$$

je přirozenou analogií normálové derivace. Důležité je, že podíl Greenových funkcí má smysl pro zcela obecné otevřené množiny U, zatímco pojem normálové derivace klade nároky na hladkost hranice množiny U.

V $\mathbb{R}^2$ existuje úzká spojitost s konformním zobrazením a Carathéodoryho teorií prvokonců. V prostorech $\mathbb{R}^m$ pro $m \geqq 3$ postrádáme analogii Riemannovy věty, ale jak jsme viděli, Choquetova teorie dává i v tomto případě integrální reprezentaci nezáporných funkcí z $\mathcal{H}(U)$. Je přirozené ptát se po případech, kdy $\partial_1 U^*$ má přirozený vztah k eukleidovské hranici ∂U, podobně jako tomu je u koule. Jinak řečeno, jde o vztah eukleidovské a Martinovy hranice množiny U. Je např. známo[42]), že pokud U má lipschitzovskou hranici, jsou obě — eukleidovská i Martinova — hranice homeomorfní a každému $z \in \partial U$ odpovídá právě jedna minimální funkce K_z.

Popsaná reprezentace není samoúčelná, může být klíčem k velmi hlubokým výsledkům. Její použití k problematice tzv. „jednoprůměrových vět" sahá do sedmdesátých let. Tyto věty si na příkladu zhruba přiblížíme.

Z věty z odst. 4.1 víme, že harmonické funkce lze charakterizovat pomocí objemového průměru. Podobně je-li $f\colon U \to \mathbb{R}$ spojitá funkce, je $f \in \mathcal{H}(U)$, právě když platí rovnost $f(x) = \int_{\partial B(x,r)} f \,\mathrm{d}\sigma_{x,r}$, kdykoli je uzávěr koule $B(x,r)$ obsažen v U. Zde $\sigma_{x,r}$ je normalizovaná povrchová míra na $\partial B(x,r)$.

Dlouho neřešený problém spočíval v tom, za jakých podmínek stačí vlastnost průměru ověřit v každém bodě $x \in U$ pro *jedinou* kouli či sféru o poloměru $r(x)$. Částečné řešení bylo nalezeno pravděpodobnostními metodami, analytické řešení využívá Choquetovu teorii, totiž srovnání extremálních bodů normalizovaných systémů funkcí, jednak harmonických, jednak spojitých s „jednoprůměrovou" vlastností. Lze tak dokázat následující tvrzení[43]).

Věta. *Nechť $h \in \mathcal{H}(U)$, f je měřitelná, $0 \leqq f \leqq h$, nechť f má v každém bodě $x \in U$ vlastnost objemového průměru pro kouli s poloměrem $r(x)$ a nechť pro každou kompaktní množinu $K \subset U$ existuje $m_K > 0$ tak, že $r(x) \geqq m_K$ pro každé $x \in K$. Potom $f \in \mathcal{H}(U)$.*

Pokud se navíc předpokládá, že f je zdola polospojitá na U, platí tvrzení věty bez dalších omezení na $r(x)$. Bylo též dokázáno, že podmínka majorizace harmonickou

[42]) Důkaz tvrzení pochází od R. R. Hunta a R. L. Wheedena [HuWh].

[43]) Věta pochází od W. Hansena a N. Nadirashviliho [HaNa2].

funkcí h je podstatná a že bez ní věta neplatí [44]). Obdobný problém pro sférické průměry (a spojité omezené funkce) na jednotkovém kruhu v $\mathbb{R}^2$ odolával řadu let. Výsledek, že sférická jednoprůměrová vlastnost v tomto případě necharakterizuje harmonické funkce, představuje řešení mimořádně obtížného problému [45]).

Literatura:

Omezení na rozsah článku neumožňuje zařadit obsáhlý seznam literatury a podrobnější popis cest, které vedly k prezentovaným výsledkům. V uváděných odkazech se však najdou další bibliografické údaje. Následující prameny obsahují podrobnější výklad odpovídajících partií z funkcionální analýzy, míry a integrálu a teorie potenciálu: [Al], [Cho], [Ph], [LM], [KNV] a [LMZ].

[Al] Alfsen, E. M.: *Compact convex sets and boundary integrals.* Springer-Verlag, Berlin 1971.

[Ar] Armitage, D. A.: *The Riesz-Herglotz representation for positive harmonic functions via Choquet's theorem.* In: Potential Theory — ICPT 94, de Gruyter, Berlin 1996, 229–232.

[Ba1] Bauer, H.: *Aproximace a abstraktní hranice.* Pokroky Mat. Fyz. Astronom. 26 (1981), 305–326.

[Ba2] Bauer, H.: *Simplicial function spaces and simplexes.* Expo. Math. 3 (1985), 165–168.

[Be] Bernstein, S.: *Sur les fonctions absolument monotones.* Acta Math. 51 (1928), 1–66.

[BlHa1] Bliedtner, J., Hansen, W.: *Simplicial cones in potential theory.* Inventiones Math. 29 (1975), 83–110.

[BlHa2] Bliedtner, J., Hansen, W.: *The weak Dirichlet problem.* J. Reine Angew. Math. 348 (1984), 34–39.

[BlHa3] Bliedtner, J., Hansen, W.: *Potential theory — An analytic and probabilistic approach to balayage.* Springer-Verlag, Berlin 1986.

[Bo] Bochner, S.: *Harmonic analysis and the theory of probability.* University of California Press, Berkeley and Los Angeles 1955.

[CaLi] Caffarelli, L. A., Littman, W.: *Representation formulas for solutions to* $\Delta u - u = 0$ *in* $\mathbb{R}^n$*.* In: Studies in partial differential equations. MAA Stud. Math. 23, Math. Assoc. America, Washington, D. C. 1982, 249–263.

[Ed] Edgar, G. A.: *Two integral representations.* In: Measure theory and its applications (Sherbrooke, Que., 1982). Lecture Notes in Math. 1033, Springer-Verlag 1983, 193–198.

[44]) Příbuzný výsledek prezentoval jako domněnku W. Veech; viz [Ve]. Ve formě zdánlivě jednoduchého problému pro spojité omezené funkce na jednotkovém kruhu (v $\mathbb{R}^2$) a objemové a sférické průměry formuloval analogický problém J. E. Littlewood v r. 1968. Negativní řešení pro sférický průměr bylo sice očekáváno, ale ukázalo se, že jde o velice obtížný problém. Viz [HaNa1], [HaNa2], resp. další články stejných autorů.

[45]) Viz [HaNa1]. O krocích, které předcházely řešení tohoto problému, a o problematice související s vlastností průměru se lze dočíst v [NeVe2].

[EfKa] Effros, E. G., Kazdan, J. L.: *Applications of Choquet simplexes to elliptic and parabolic boundary value problems.* J. Diff. Eq. 8 (1970), 95–134.

[FoLiPh] Fonf, V. P., Lindenstrauss, J., Phelps, R. R.: *Infinite dimensional convexity.* Preprint (1999).

[Ha] Hansen, W.: *A Liouville property for spherical averages in the plane.* Preprint (1999).

[HaNa1] Hansen, W., Nadirashvili, N.: *Littlewood's one circle problem.* J. London Math. Soc. (2) 50 (1994), 349–360.

[HaNa2] Hansen, W., Nadirashvili, N.: *On Veech's conjecture for harmonic functions.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl.-Sci. (4), 22 (1995), 137–153.

[He] Helms, L. L.: *Introduction to potential theory.* Pure and Applied Mathematics, Vol. XXII, Wiley-Interscience, New York – London – Sydney 1969.

[Ho] Holland, F.: *The extreme points of a class of functions with positive real part.* Math. Ann. 202 (1973), 85–87.

[HuWh] Hunt, R. R., Wheeden, R. L.: *Positive harmonic functions on Lipschitz domains.* Trans. Amer. Math. Soc. 147 (1970), 505–527.

[Cho] Choquet, G.: *Lectures on analysis I–III.* W. A. Benjamin, Inc., New York– –Amsterdam 1969.

[Cho1] Choquet, G.: *Deux exemples classiques de représentation intégrale.* Enseignement Math.(2) 15 (1969), 63–75.

[Ja] Jacobs, K.: *Extremalpunkte konvexer Mengen.* In: Selecta Mathematica, III. Selecta Math., Heidelberger Taschenbücher 86 (1971), 90–118.

[Ke1] Keldyš, M. V.: *On the solubility and stability of the Dirichlet problem* (rusky). Uspechi Mat. Nauk. 8 (1941), 171–292.

[Ke2] Keldyš, M. V.: *On the Dirichlet problem* (rusky). Dokl. Akad. Nauk SSSR 32 (1941), 308–309.

[Kl] Klee, V.: *Some new results on smoothness and rotundity in normed linear spaces.* Math. Ann. 139 (1959), 51–63.

[Ko] Korányi, A.: *A survey of harmonic functions on symmetric spaces.* In: Harmonic analysis in Euclidean spaces (Proc. Sympos. Pure Math., Williams Coll., Williamstown, Mass., 1978), Part 1. Amer. Math. Soc., Providence, R.I. 1979, 323–344.

[KNV] Král, J., Netuka, I., Veselý, J.: *Teorie potenciálu IV.* SPN, Praha 1977.

[Kr] Kružík, M.: *Bauer's maximum principle and hulls of sets.* Preprint (2000).

[Li] Lindenstrauss, J.: *Some useful facts about Banach spaces.* In: Geometric aspects of functional analysis, Lecture Notes in Math. 1317, Springer-Verlag, Berlin 1988, 185–200.

[LM] Lukeš, J., Malý, J.: *Measure and integral.* Matfyzpress, Praha 1995.

[LMZ] Lukeš, J., Malý, J., Zajíček, L.: *Fine topology methods in real analysis and potential theory.* Lecture Notes in Math. 1189, Springer-Verlag, Berlin – New York 1986.

[Ma] Martin, R. S.: *Minimal positive harmonic functions.* Trans. Amer. Math. Soc. 49 (1941), 137–172.

[Ne] Netuka, I.: *The Dirichlet problem for harmonic functions.* Amer. Math. Monthly 87 (1980), 621–628.

[NeVe1] Netuka, I., Veselý, J.: *Dirichletova úloha a Keldyšova věta.* Pokroky Mat. Fyz. Astronom. 24 (1979), 77–88.

[NeVe2] Netuka, I., Veselý, J.: *Mean value property and harmonic functions.* In: Classical and modern potential theory and applications (Chateau de Bonas, 1993). Kluwer Acad. Publ., Dordrecht 1994, 359–398.

[Ph] Phelps, R. R.: *Lectures on Choquet's theorem.* D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N. J. – Toronto, Ont. – London 1966.

[Pr] Price, G. B.: *On the extreme points of convex sets.* Duke Math. J. 3 (1937), 56–67.

[Ra] Rakestraw, R. M.: *A representation theorem for real convex functions.* Pac. J. Math. 60 (1975), 165–168.

[Rob] Robertson, M. S.: *On the coefficients of a typically-real functions.* Bul. Amer. Math. Soc. 41 (1935), 565–572.

[Rou] Roubíček, T.: *Relaxation in optimization theory and variational calculus.* de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications 4, de Gruyter, Berlin – New York 1997.

[Ve] Veech, W. A.: *A converse to the mean value theorem for harmonic functions.* Amer. J. Math. 97 (1975), 1007–1027.

Prof. RNDr. Jaroslav Lukeš, DrSc. (1940), vedoucí katedry matematické analýzy MFF UK, e-mail: `lukes@karlin.mff.cuni.cz`; prof. RNDr. Ivan Netuka, DrSc. (1944), děkan MFF UK, e-mail: `netuka@karlin.mff.cuni.cz`; doc. RNDr. Jiří Veselý, CSc. (1940), zástupce ředitele Matematického ústavu MFF UK, e-mail: `jvesely@karlin.mff.cuni.cz`; Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8 – Karlín.
Podporováno grantem GAUK 165/99 a výzkumným záměrem MSM 1132 00007.

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, ročník 45 (2000), č. 2, 98–124.

Successive averages

Gustave Choquet

Let μ_r be the normalized Lebesgue measure on the ball $B(0, r)$ of $\mathbb{R}^n$. For any $f \in (\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ put $f_r = f * \mu_r$; and more generally: $f_{r_1, r_2, \ldots, r_n} = (f_{r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}}) * \mu_{r_n}$ where $(r_1, r_2, \ldots)$ is an infinite sequence of positive numbers. Under what conditions on f and the sequence $(r_1, r_2, \ldots)$ is it true that $(f_{r_1, r_2, \ldots, r_n})$ converges to a harmonic function (resp. belongs to some quasi-analytic class)?

Převzato ze sborníku konference: Potential theory - ICPT '94, Kouty, Czech Republic, August 13-20, 1994 (ed. Král, J. et al.), de Gruyter, Berlin 1996.

Choquetova teorie kapacit

Jaroslav Lukeš, Ivan Netuka a Jiří Veselý, Praha

1. Newtonova kapacita

Jednou ze základních otázek klasické teorie potenciálu je problém existence rovnovážného rozložení. Z pohledu elektrostatiky problém spočívá v nalezení rozložení elektrického náboje na vodiči umístěném uvnitř uzemněné sféry. Náboj se rozloží na povrchu vodiče tak, že jeho potenciál je na vodiči konstantní. Protože vně vodiče není žádný náboj, potenciál rovnovážného rozložení je vně vodiče harmonickou funkcí a je na uzemněné sféře roven nule. Ve fyzice se podíl celkového náboje rovnovážného rozložení na vodiči a (konstantní) hodnoty rovnovážného potenciálu na vodiči nazývá kapacita (kondenzátoru tvořeného vodičem a sférou) [1]).

V našem matematickém výkladu bude roli vodiče hrát kompaktní podmnožina K eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^m$ dimenze $m > 2$ a za náboj na K budeme považovat borelovskou míru μ s nosičem $\operatorname{supp}\mu \subset K$. Abychom se vyhnuli zavádění Greenova potenciálu, místo vnitřku sféry budeme uvažovat celý prostor. Připomeňme, že *Newtonův potenciál* míry μ s kompaktním nosičem v K je funkce

$$N\mu : x \mapsto \int_K \frac{\mathrm{d}\mu(y)}{|\,x-y\,|^{m-2}}\,, \quad x \in \mathbb{R}^m\,.$$

Předpokládejme, že pro kompaktní množinu $K \subset \mathbb{R}^m$ existuje míra μ s nosičem v K taková, že $N\mu = 1$ na K. Potom je $N\mu$ rovnovážný potenciál pro K a v souladu s elektrostatikou se kapacitou $\operatorname{cap}(K)$ kompaktu K rozumí „velikost náboje“, tj. $\mu(K)$. Je-li K např. uzavřená koule $B(0,r)$ o středu v počátku a poloměru r, rovnovážný potenciál má v bodě $x \in \mathbb{R}^m$ hodnotu [2])

$$r^{m-2}\min\left(|x|^{2-m},\, r^{2-m}\right)$$

a je r^{m-2}-násobkem potenciálu normalizované povrchové míry na sféře $S(0,r)$. Proto tedy $\operatorname{cap}(B(0,r)) = r^{m-2}$. Z toho je již vidět, jak daleko má kapacita jako množinová funkce, zatím definovaná na kompaktech, od vlastnosti aditivity [3]).

[1]) Podrobnější výklad lze nalézt např. v [SeŠt] nebo [We].

[2]) Toto tvrzení je dokázáno např. v [ArGa], s. 135.

[3]) V dalším výkladu ukazujeme, jak se přirozeným způsobem zavádí pojem kapacity pro každou borelovskou množinu. Následující tvrzení dokázané v [BlHa] ukazuje, že pojem kapacity je protipólem aditivních množinových funkcí: *Každá borelovská množina kladné kapacity je disjunktním sjednocením nespočetně mnoha borelovských množin stejné kapacity.*

Pro kompaktní množinu K obecně neexistuje míra μ na K taková, že $N\mu = 1$ na K, např. pokud má kompakt K „ostré hroty“. Pro kompakt $K \subset \mathbb{R}^m$ se definuje *Newtonova kapacita* K rovností [4])

$$\operatorname{cap}(K) = \sup\{\nu(K) : \operatorname{supp}\nu \subset K, N\nu \leqq 1 \text{ na } K\}.$$

Významné místo v teorii potenciálu zaujímají množiny nulové kapacity. Hrají roli zanedbatelných množin [5]), podobně jako množiny nulové Lebesgueovy míry v teorii integrálu.

Připomeňme, že $P \subset \mathbb{R}^m$ se nazývá *polární*, jestliže pro každou kouli $B \subset \mathbb{R}^m$ existuje míra ν s kompaktním nosičem taková, že $P \cap B \subset \{x \in \mathbb{R}^m : N\nu(x) = \infty\}$. Pro kompakt $K \subset \mathbb{R}^m$ platí toto tvrzení: $\operatorname{cap}(K) = 0$, právě když K je množinou „pólů“ určitého Newtonova potenciálu, tedy právě když existuje míra ν na K taková, že $K = \{x \in \mathbb{R}^m : N\nu(x) = \infty\}$ [6]). Tedy kompaktní množina je polární, právě když má nulovou kapacitu. Množina „pólů“ Newtonova potenciálu není však obecně kompaktní, takže zatím nemůžeme o její kapacitě nic říci. Pro libovolnou množinu $M \subset \mathbb{R}^m$ lze samozřejmě definovat *vnitřní kapacitu*

$$\operatorname{cap}_*(M) = \sup\{\operatorname{cap}(K) : K \text{ kompaktní}, K \subset M\}.$$

Potom platí, že *množina P je polární, právě když má nulovou vnitřní kapacitu.* Ve skutečnosti však platí daleko silnější výsledek: polární množiny splývají s množinami vnější kapacity nula [7]), kde se, v analogii s teorií míry, pro $M \subset \mathbb{R}^m$ definuje

$$\operatorname{cap}^*(M) = \inf\{\operatorname{cap}_*(V) : V \text{ otevřená}, V \supset M\}.$$

Vnitřní kapacita se v teorii potenciálu často vyskytuje. Např. se dokazuje, že vnitřní kapacita množiny iregulárních bodů pro Dirichletovu úlohu na omezené otevřené množině je rovna nule [8]). Také platí, že infimum každé neprázdné množiny potenciálů

---

[4]) Pojem kapacity byl matematicky poprvé zaveden r. 1924 N. Wienerem v [Wi]. Pro kompaktní množinu $K \subset \mathbb{R}^m$ se uvažuje otevřená množina S s hladkou hranicí ∂S a vnější normálou n^S taková, že $K \subset S$. Kapacitou množiny K Wiener rozumí číslo

$$-c_m \int_{\partial S} n^S \cdot \operatorname{grad} u \, \mathrm{d}\sigma\,,$$

kde c_m je kladný normalizační faktor a σ je povrchová míra na ∂S. V uvedeném článku užívá Wiener pojem kapacity k důkazu nutné a postačující podmínky pro regularitu hraničního bodu pro Dirichletovu úlohu (tzv. Wienerovo kritérium).

[5]) Klasická teorie potenciálu má svůj pravděpodobnostní protějšek založený na studiu Brownova pohybu; viz [PoSt], [Do]. V něm pak polární množiny vystupují, intuitivně řečeno, jako ty, které brownovská částice „nevidí“: *P je polární, právě když s pravděpodobností* 1 *trajektorie žádné brownovské částice nenarazí na P.* Matematickou formulaci lze nalézt např. v [PoSt], s. 20 a 144, nebo [BlHa], s. 283 či [Do], s. 636.

[6]) Tzv. Evansova věta; viz [He], s. 152. Elementární přístup lze nalézt v [Ars].

[7]) Historické poznámky o polárních množinách a jejich vztahu k množinám vnitřní a vnější nulové kapacity lze nalézt v [He], [ArGa] či [KNV].

[8]) Elementární důkaz je uveden v [Ars].

se liší od jistého potenciálu pouze na množině nulové vnitřní kapacity [9]). Je možné výsledky tohoto typu zesílit tím, že zaměníme vnitřní kapacitu za vnější? Tato otázka nás vede k problému kapacitability [10]): které množiny jsou *kapacitabilní*, tj. pro které množiny $M \subset \mathbb{R}^m$ platí rovnost $\operatorname{cap}_*(M) = \operatorname{cap}^*(M)$?

2. Choquetova kapacita a vnější kapacita

Problémem kapacitability se budeme zabývat v obecnějším kontextu. V dalším budeme místo $\mathbb{R}^m$ uvažovat lokálně kompaktní (Hausdorffův) topologický prostor X se spočetnou bází a symbolem $\mathcal{K}(X)$ nebo jen $\mathcal{K}$ označíme systém všech kompaktních podmnožin prostoru X. Následující definice Choquetovy kapacity je motivována dvěma skutečnostmi:

(1) vlastnosti z její definice má Newtonova kapacita;

(2) pokud přirozeným způsobem rozšíříme Choquetovu kapacitu na vnější a vnitřní kapacitu, tvoří kapacitabilní množiny velice rozsáhlý množinový systém.

Říkáme, že funkce $\gamma : \mathcal{K} \to [0,\infty)$ je *Choquetova kapacita*, jestliže platí:

(a) jsou-li $K, L \in \mathcal{K}$ a $K \subset L$, pak $\gamma(K) \leqq \gamma(L)$;

(b) jsou-li $K_n \in \mathcal{K}$, $K_n \searrow K$, pak $\gamma(K_n) \to \gamma(K)$;

(c) jsou-li $K, L \in \mathcal{K}$, pak $\gamma(K \cup L) + \gamma(K \cap L) \leqq \gamma(K) + \gamma(L)$.

Jinými slovy: Choquetova kapacita je neklesající nezáporná (reálná) množinová funkce definovaná na kompaktech, která je zprava spojitá a silně subaditivní.

Pro Choquetovu kapacitu se *vnitřní* a *vnější kapacita* vytvářejí přirozeným způsobem, podobně jako pro Newtonovu kapacitu: pro $A \subset X$ klademe

$$\gamma_*(A) = \sup\{\gamma(K) : K \in \mathcal{K},\ K \subset A\},$$
$$\gamma^*(A) = \inf\{\gamma_*(U) : U \text{ otevřená},\ U \supset A\}.$$

Množina A se nazývá *kapacitabilní*, jestliže $\gamma_*(A) = \gamma^*(A)$. Snadno se odvodí, že pro $K \in \mathcal{K}$ platí $\gamma(K) = \gamma^*(K)$, takže kapacitabilitu lze vyjádřit pomocí vnější kapacity takto: množina $A \subset X$ je kapacitabilní, právě když

$$\gamma^*(A) = \sup\{\gamma^*(K) : K \in \mathcal{K}, K \subset A\}. \qquad (*)$$

Z vlastností (a), (b) a (c) G. Choquet odvodil [11]), že uvedeným postupem vytvořená množinová funkce γ^* definovaná na systému $\mathcal{P}(X)$ všech podmnožin prostoru X je vnější kapacita ve smyslu následující definice:

---

[9]) Obecnější tvrzení lze nalézt např. v [ArGa], [He], či [KNV].

[10]) V článku *Vznik teorie kapacit: zamyšlení nad vlastní zkušeností* G. Choquet zajímavě popisuje, jak k větě o kapacitabilitě dospěl. Viz [Cho3] a s. 89 v této publikaci.

[11]) Věta o rozšíření Choquetovy kapacity na vnější kapacitu je dokázána např. v [Cho2], Volume I, [ArGa], [He], [KNV].

Říkáme, že funkce $c : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ je *vnější kapacita* (na X), jestliže má tyto dvě vlastnosti:

(a) $\sup c(A_n) = c\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big)$ pro každou neklesající posloupnost $\{A_n\}$ podmnožin prostoru X;

(b) $\inf c(K_n) = c\big(\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n\big)$ pro každou nerostoucí posloupnost $\{K_n\}$ kompaktních podmnožin prostoru X.

Pro vnější kapacitu c se v souladu s podmínkou $(*)$ množina $A \subset X$ nazývá *c-kapacitabilní*, jestliže

$$c(A) = \sup\{c(K) : K \in \mathcal{K}, K \subset A\}.$$

Dále budeme množinu $A \subset X$ nazývat *univerzálně kapacitabilní*, když A je c-kapacitabilní pro každou vnější kapacitu c na X.

V části 3 dokážeme, že každá analytická množina [12]) v X je univerzálně kapacitabilní [13]) a v části 4 ukážeme, že každá borelovská množina je analytická. Systém kapacitabilních množin je tedy překvapivě bohatý.

3. Choquetova věta o kapacitabilitě

Před definicí analytické množiny zavedeme toto označení. Pro lokálně kompaktní prostor Z označíme $K_{\sigma\delta}(Z)$ systém všech spočetných průniků množin, které jsou spočetnými sjednoceními kompaktních podmnožin prostoru Z. Platí tedy

$$K_{\sigma\delta}(Z) = \big\{ \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} K_{ij} : K_{ij} \text{ kompaktní, } K_{ij} \subset Z \big\}.$$

Pokud bychom v této definici navíc předpokládali, že pro každé přirozené i je posloupnost $\{K_{ij}\}_{j=1}^{\infty}$ neklesající, dostali bychom opět stejný systém.

Nechť X je lokálně kompaktní topologický prostor se spočetnou bází. Množina $A \subset X$ se nazývá *analytická*, jestliže existují lokálně kompaktní prostor Y se spočetnou bází a množina $B \in K_{\sigma\delta}(X \times Y)$ takové, že A je obrazem B při projekci π_X prostoru $X \times Y$ na X. Systém všech analytických množin na X označíme $\mathcal{A}(X)$.

Protože každý lokálně kompaktní prostor se spočetnou bází je podprostorem kompaktního prostoru se spočetnou bází, v definici analytické množiny lze předpokládat, že Y je dokonce kompaktní prostor.

---

[12]) Poznamenejme, že neexistuje terminologická jednota: *analytické* množiny se často nazývají *suslinovské*. Kořenům těchto a dalších názvů je věnován článek [Lo], který obsahuje pokus o zhodnocení podílu P. S. Aleksandrova, F. Hausdorffa, N. N. Luzina a M. Ya. Suslina na vytvoření tohoto pojmu. O různých přístupech k analytickým množinám se lze poučit např. z [Do], [Cho2], Volume I, [KNV], díl III.

[13]) Věta o kapacitabilitě je pro obecnější kontext Hausdorffových topologických prostorů vyložena např. v [Cho2], Volume I. Tamtéž je studována také zcela abstraktní (netopologická) teorie kapacitability. Z dalších pramenů uvádíme [Me], [De], [DeMe], [Kö]. Náš výklad sleduje přístup, jehož autorem je C. Dellacherie, a který je prezentován v [BlHa]; viz též tam uvedené citace.

Další postup bude tento: pomocí topologické hry zavedeme pojem hyperkapacitabilní množiny. Pak dokážeme, že každá hyperkapacitabilní množina je univerzálně kapacitabilní a že každá analytická podmnožina prostoru X je hyperkapacitabilní.

Pro popis topologické hry je účelné zavést pojem kapacitance. Podmnožina $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ se nazývá *kapacitance* (na X), splňuje-li tyto dvě podmínky:

(a) je-li $A \in \mathcal{C}$, $A \subset A' \subset X$, pak $A' \in \mathcal{C}$;

(b) je-li $\{A_n\}$ neklesající posloupnost podmnožin X, pro kterou $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$, pak existuje přirozené číslo n takové, že $A_n \in \mathcal{C}$.

Jednoduchými příklady kapacitancí jsou např. $\mathcal{P}(X)$, dále systém všech neprázdných podmnožin X nebo systém nespočetných podmnožin X. Velmi důležitý je tento příklad: jestliže c je vnější kapacita na X a $a \in \mathbb{R}$, pak $\{A \in \mathcal{P}(X) : c(A) > a\}$ je kapacitance. Pojem kapacitance intuitivně popisuje systém dostatečně „masivních“ množin.

Protože prostor X má spočetnou bázi, existují kompaktní množiny $K_n \subset X$, pro něž $K_n \nearrow X$. Je-li tedy $\mathcal{C}$ kapacitance na X a $A \in \mathcal{C}$, pak pro vhodné n platí $A \cap K_n \in \mathcal{C}$ podle (b), tudíž A obsahuje relativně kompaktní podmnožinu z $\mathcal{C}$.

Nyní popíšeme *topologickou hru*: hrají ji dva hráči, Hráč α, který volí kapacitance, a Hráč β, který volí podmnožiny prostoru X.

Nechť $A \subset X$. Nejprve Hráč α zvolí kapacitanci $\mathcal{C}_1$ takovou, že $A \in \mathcal{C}_1$. Hráč β odpoví volbou relativně kompaktní množiny $A_1 \subset A$, pro niž $A_1 \in \mathcal{C}_1$. Nato Hráč α zvolí kapacitanci $\mathcal{C}_2$ tak, aby $A_1 \in \mathcal{C}_2$ a Hráč β vybere množinu $A_2 \subset A_1$, pro niž $A_2 \in \mathcal{C}_2$. Hra pokračuje analogicky tímto způsobem dále. Řekneme, že Hráč β ve hře zvítězil, když je kompaktní množina $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$ částí množiny A. Množina A se nazývá *hyperkapacitabilní*, když Hráč β může zvítězit nezávisle na tom, jak Hráč α volí kapacitance.

3.1 Tvrzení. *Každá hyperkapacitabilní podmnožina prostoru X je univerzálně kapacitabilní.*

Důkaz. Nechť $A \subset X$ je hyperkapacitabilní množina, c je vnější kapacita a nechť $a < c(A)$. Protože Hráč α může pokaždé volit nezávisle na n kapacitanci

$$\mathcal{C}_n = \{B \in \mathcal{P}(X) : c(B) > a\},$$

existuje nerostoucí posloupnost relativně kompaktních množin $A_n \subset A$ takových, že $c(A_n) > a$ pro všechna n a pro množinu $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$ platí $K \subset A$. Zřejmě K je kompaktní množina, pro niž platí

$$c(K) = \inf c(\overline{A_n}) \geqq \inf c(A_n) \geqq a\,.$$

Tím jsme dokázali, že A je c-kapacitabilní množina. ■

3.2 Věta. *Každá analytická podmnožina prostoru X je hyperkapacitabilní.*

Důkaz. Nechť $A \in \mathcal{A}(X)$. Podle předpokladu existuje kompaktní prostor Y se spočetnou bází a pro každé $i, j \in \mathbb{N}$ existuje kompaktní množina K_{ij} v $X \times Y$ tak, že pro každé $i \in \mathbb{N}$ je posloupnost $\{K_{ij}\}_{j=1}^{\infty}$ neklesající a pro množinu

$$B = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} K_{ij}$$

platí $\pi_X(B) = A$. Nechť $\mathcal{C}_1$ je kapacitance na X, pro niž $A \in \mathcal{C}_1$. Posloupnost $\{B \cap K_{1j}\}_{j=1}^{\infty}$ je neklesající a její sjednocení je rovno B, takže posloupnost $\{\pi_X(B \cap K_{1j})\}_{j=1}^{\infty}$ je neklesající a její sjednocení je rovno množině A. Protože $\mathcal{C}_1$ je kapacitance, existuje $m_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $A_1 = \pi_X(B \cap K_{1m_1}) \in \mathcal{C}_1$.

Hráč α volí nyní kapacitanci $\mathcal{C}_2$, pro niž $A_1 \in \mathcal{C}_2$. Protože je $B \cap K_{1m_1}$ sjednocením neklesající posloupnosti $\{B \cap K_{1m_1} \cap K_{2j}\}_{j=1}^{\infty}$, existuje $m_2 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$A_2 = \pi_X(B \cap K_{1m_1} \cap K_{2m_2}) \in \mathcal{C}_2 \, .$$

Hráč β tedy vždy může zvolit posloupnost $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ množin typu

$$A_n = \pi_X(B \cap K_{1m_1} \cap K_{2m_2} \cap \ldots \cap K_{nm_n})$$

pro vhodnou posloupnost $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ přirozených čísel. Definujeme-li

$$K_n = \bigcap_{i=1}^{n} K_{im_i} \, ,$$

je $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ nerostoucí posloupnost podmnožin $X \times Y$. Přitom jsou všechny K_n kompaktní, a proto

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \pi_X(K_n) = \pi_X\bigl(\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n\bigr) \, ,$$

a tedy platí

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \pi_X(K_n) = \pi_X\bigl(\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n\bigr) \subset \pi_X(B) = A$$

a množina A je hyperkapacitabilní. ■

3.3 Korolár. *Každá analytická podmnožina prostoru X je univerzálně kapacitabilní.*

3.4 Poznámka. Je známo [14]), že systém analytických podmnožin splývá se systémem hyperkapacitabilních množin.

---

[14]) O vztahu analytických a hyperkapacitních množin se lze poučit v [De].

3.5 Příklad. Označme λ^* vnější Lebesgueovu míru na $\mathbb{R}$ a π nechť je ortogonální projekce $\mathbb{R}^2$ na osu x. Pro $M \subset \mathbb{R}^2$ definujeme

$$c(M) = \lambda^*\bigl(\pi(M)\bigr)\,.$$

Není obtížné si rozmyslet, že c je vnější kapacita. Nechť $N \subset [\,0,1\,]$ je množina, která není lebesgueovsky měřitelná a nechť

$$M_1 = N \times \{0\}\,, \quad M_2 = [\,0,1\,] \times \{0\} \;\text{ a }\; M_3 = [\,0,1\,] \times \{1\}\,.$$

Množiny $M_1 \cup M_3$ a M_2 jsou zřejmě kapacitabilní, avšak $M_1 = (M_1 \cup M_3) \cap M_2$ kapacitabilní není. Příklad ukazuje, že systém všech kapacitabilních množin není uzavřený ani na konečné průniky. Snažit se tedy dokazovat kapacitabilitu borelovských množin podle klasického schématu (dokázat kapacitabilitu otevřených množin a odvodit uzavřenost systému kapacitabilních množin na spočetná sjednocení a spočetné průniky) je beznadějné.

4. Analytické a borelovské množiny

V této části ukážeme, že každá borelovská podmnožina prostoru X je analytická. Nejprve dokážeme, že $\mathcal{A}(X)$ je systém uzavřený na spočetné průniky a spočetná sjednocení.

4.1 Tvrzení. *Nechť $\{A_n\}$ je posloupnost množin z $\mathcal{A}(X)$. Potom $\bigcap_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}(X)$ a $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}(X)$.*

Důkaz. Zvolme kompaktní prostory Y_n se spočetnou bází a množiny $B_n \in K_{\sigma\delta}(X \times Y_n)$ takové, že $\pi_X(B_n) = A_n$. Potom je topologický součin $Y = \prod_{n=1}^\infty Y_n$ kompaktní prostor se spočetnou bází. Pro $n \in N$ označme φ_n projekci prostoru $X \times Y$ na $X \times Y_n$. Vzor každé kompaktní podmnožiny prostoru $X \times Y_n$ při zobrazení φ_n je kompaktní podmnožina v prostoru $X \times Y$, takže

$$B_n' = \varphi_n^{-1}(B_n) \in K_{\sigma\delta}(X \times Y) \;\text{ a }\; B' = \textstyle\bigcap_{n=1}^\infty B_n' \in K_{\sigma\delta}(X \times Y)\,.$$

K důkazu, že $\bigcap_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}(X)$, stačí ověřit rovnost $\pi_X(B') = \bigcap_{n=1}^\infty A_n$. Jedna inkluze je zřejmá, neboť $\pi_X(B') \subset \pi_X(B_n') = A_n$ pro každé n. Nechť tedy $x \in \bigcap_{n=1}^\infty A_n$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $y_n \in Y_n$ tak, že $(x, y_n) \in B_n$. Tudíž pro $y = \{y_n\}_{n=1}^\infty$ platí $(x,y) \in X \times Y$ a $\varphi_n(x,y) = (x,y_n) \in B_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, neboli $(x,y) \in B'$. Dokázali jsme, že $x \in \pi_X(B')$ a rovnost je ověřena.

Není těžké si rozmyslet, že

$$B'' = \bigl(\textstyle\bigcup_{n=1}^\infty B_n' \times \{n\}\bigr) \in \mathcal{K}_{\sigma\delta}(X \times Y \times \mathbb{N})\,,$$

takže $\bigcup_{n=1}^\infty A_n = \pi_X(B'') \in \mathcal{A}(X)$. ■

4.2 Korolár. *Každá borelovská podmnožina prostoru X je analytická.*

Důkaz. Pro $B \subset X$ označme B^c doplněk množiny B. Definujme

$$\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{A}(X) : A^c \in \mathcal{A}(X)\}.$$

Pak $A \in \mathcal{D}$, právě když $A^c \in \mathcal{D}$. Je-li $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost množin z $\mathcal{D}$, je podle tvrzení 4.1

$$\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}(X), \quad \left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^\infty A_n^c \in \mathcal{A}(X),$$

tudíž $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{D}$. Jestliže $K \subset X$ je kompaktní množina, potom je zřejmě $K \times \{1\} \in \mathcal{K}_{\sigma\delta}(X \times \{1\})$, a proto $K = \pi_X(K \times \{1\}) \in \mathcal{A}(X)$. Protože systém $\mathcal{D}$ je uzavřený na spočetná sjednocení a pro každou otevřenou množinu U je U a také U^c spočetným sjednocením kompaktních množin, každá otevřená množina je prvkem $\mathcal{D}$. Pro systém $\mathcal{B}(X)$ borelovských podmnožin X tudíž platí $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{A}(X)$. ■

4.3 Poznámky. (a) Je známo [15]), že systém borelovských množin splývá s $\mathcal{D}$, neboli že borelovské množiny jsou právě všechny analytické množiny, jejichž doplněk je analytický.
(b) Obraz borelovské podmnožiny $\mathbb{R}^2$ při projekci na $\mathbb{R}$ nemusí být borelovská množina [16]), avšak je to vždy analytická množina. Ve skutečnosti se analytické množiny chovají rozumně i při obecnějších zobrazeních [17]): *Je-li $A \in \mathcal{A}(X)$, Y lokálně kompaktní prostor se spočetnou bází a $\varphi : X \to Y$ borelovsky měřitelné zobrazení, potom $\varphi(A) \in \mathcal{A}(Y)$.*

Odtud vyplývá toto důležité tvrzení: *Pro množinu $A \subset X$ jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) *množina A je analytická;*
(ii) *existuje lokálně kompaktní prostor Y se spočetnou bází, borelovská množina $B \subset Y$ a spojité zobrazení $\varphi : Y \to X$ takové, že $\varphi(B) = A$;*
(iii) *existuje lokálně kompaktní prostor Y se spočetnou bází, borelovská množina $B \subset Y$ a borelovsky měřitelné zobrazení $\varphi : Y \to X$ takové, že $\varphi(B) = A$.*

5. Aplikace

5.1 Teorie míry. Nechť μ je borelovská míra na lokálně kompaktním prostoru X se spočetnou bází, která je konečná na všech kompaktech v X. Definujme obvyklým způsobem vnější míru: pro $M \subset X$ položme

$$\mu^*(M) = \inf\{\mu(G) : G \text{ otevřená}, G \supset M\}.$$

---

[15]) Tvrzení vyplývá např. z oddělovací věty pro analytické množiny; viz [BlHa], s. 33.
[16]) Obecnější situace je studována v [Ku] v § 38. Poznamenejme, že právě chyba v Lebesgueově důkazu nesprávného tvrzení, že projekce borelovské množiny je borelovská, vedla k zavedení analytických množin.
[17]) Důkaz tvrzení, že *borelovský obraz borelovské množiny je analytický*, je pro lokálně kompaktní prostory X, Y se spočetnou bází uveden např. v [BlHa], s. 32–33.

Snadno se dokáže, že μ^* je vnější kapacita. Podle věty o kapacitabilitě platí pro každou borelovskou množinu $B \subset X$

$$\sup\{\mu(K) : K \text{ kompaktní}, K \subset B\} = \mu(B) = \inf\{\mu(G) : G \text{ otevřená}, G \supset B\},$$

takže míra μ je regulární.

5.2 Hausdorffovy míry. Připomeňme definici h-Hausdorffovy (vnější) míry v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^m$. Nechť $h\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ je rostoucí spojitá funkce, $h(0) = 0$. Systém všech uzavřených koulí v prostoru $\mathbb{R}^m$ označme $\mathcal{B}$ a pro $B \in \mathcal{B}$ označme $r(B)$ poloměr koule B. Pro $M \subset \mathbb{R}^m$ a $\varrho > 0$ definujme

$$m_h^\varrho(M) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^\infty h(r(B_n)) : B_n \in \mathcal{B},\, r(B_n) \leqq \varrho,\, M \subset \bigcup_{n=1}^\infty B_n \right\}.$$

Potom

$$m_h(M) = \lim_{\varrho \to 0+} m_h^\varrho(M)$$

se nazývá *h-Hausdorffova míra* množiny M. Aplikace věty o kapacitabilitě umožňuje dokázat toto pozoruhodné tvrzení[18]): *Je-li $M \subset \mathbb{R}^m$ borelovská (nebo obecněji analytická) množina, pro kterou $m_h(M) > 0$, potom existuje uzavřená množina $F \subset M$, pro niž je*

$$0 < m_h(F) < \infty .$$

5.3 Aproximace kapacit mírami. Je známo, že Newtonovu kapacitu lze vyjádřit jako horní obálku množiny Radonových měr. Podobnou otázkou pro obecnější kapacity se zabývali kupříkladu V. Strassen, C. Dellacherie či B. Anger. Platí např. následující věta o aproximaci:

Věta. *Nechť C je Choquetova kapacita na lokálně kompaktním prostoru X se spočetnou bází, $\mathrm{C}(\emptyset) = 0$ a nechť $\mathcal{M}$ je systém všech borelovských měr μ na X takových, že $\mu(L) \leqq \mathrm{C}(L)$ pro každou kompaktní množinu $L \subset X$. Potom pro každé $K \in \mathcal{K}(X)$ je*

$$\mathrm{C}(K) = \sup\{\mu(K) : \mu \in \mathcal{M}\} .$$

Obecně však supremum (dokonce ani konvexní kompaktní) množiny Radonových měr není Choquetova kapacita. Problém je v tom, že nemusí být splněna podmínka (c) silné subaditivity v definici Choquetovy kapacity uvedené v kapitole 2. Použitím Choquetova integrálu (viz odstavec 5.7) dospěl B. Anger k charakteristice těch množin měr, pro něž je jejich supremum Choquetova kapacita[19]).

5.4 Klasická teorie potenciálu. Nechť M je podmnožinou eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^m$ dimenze $m > 2$ a nechť (pro jednoduchost) u je nezáporná spojitá superharmonická funkce na $\mathbb{R}^m$. Infimum všech nezáporných superharmonických funkcí, které

---

[18]) Důkaz pro $M \subset \mathbb{R}$ je uveden v [Ca], s. 11; pro obecnější situaci je dán podrobný návod.

[19]) Problematice kapacity jakožto horní obálky množiny měr jsou věnovány např. práce [An1], [An2].

majorizují u na M, se nazývá *redukce* (funkce u na M) a značí se $\mathbf{R}_u^M$. Největší zdola polospojitá funkce minorizující $\mathbf{R}_u^M$ se nazývá *výmet* (balayage) funkce u na M. Je to superharmonická funkce, která se značí $\widehat{\mathbf{R}}_u^M$. Z Choquetovy věty o kapacitabilitě plyne pro borelovskou (obecněji analytickou) množinu tento výsledek o aproximaci [20]):

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_u^M &= \sup\left\{\mathbf{R}_u^K : K \text{ kompaktní, } K \subset M\right\},\\ \widehat{\mathbf{R}}_u^M &= \sup\left\{\widehat{\mathbf{R}}_u^K : K \text{ kompaktní, } K \subset M\right\}.\end{aligned}$$

Poznamenejme, že v obecnějším kontextu teorie potenciálu (např. v teorii potenciálu pro rovnici vedení tepla, v teorii harmonických nebo výmetových prostorů) se zavádí pojem *podstatného výmetu.* Přestože takový výmet již nevede obdobným způsobem ke kapacitě, platí pro borelovské množiny analogické tvrzení o aproximaci zdola pomocí kompaktů [21]). K důkazu se hodí užít faktu, že podle vět 3.2 a 4.2 jsou borelovské množiny hyperkapacitabilní.

5.5 L_p-teorie potenciálu s obecným jádrem. Jako ukázku z *nelineární teorie potenciálu* uvažujme tuto situaci: $1 < p < +\infty$, K je jádro, tj. zdola polospojitá nezáporná funkce na $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, $m \geqq 1$. Pro měřitelnou funkci f na $\mathbb{R}^m$ označme, jako obvykle,

$$\|f\|_p = \left(\int |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

a pro měřitelnou nezápornou funkci f definujeme

$$Kf\colon x \mapsto \int K(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Pro libovolnou množinu $M \subset \mathbb{R}^m$ se *L_p-kapacita vzhledem ke K* definuje takto:

$$c_K(M) = \inf\left\{\|f\|_p^p : f \geqq 0,\ Kf \geqq 1 \ \text{ na } M\right\}.$$

Lze dokázat [22]) (není to však úplně jednoduché), že c_K je vnější kapacita. Proto je každá analytická množina c_K-kapacitabilní.

5.6 Stochastické procesy. Široké uplatnění nalezla věta o kapacitabilitě (v abstraktnějším pojetí) při důkazech měřitelnosti nejrůznějších veličin svázaných se stochastickými procesy. Klíčem bývá často tato věta [23]):

Nechť $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je prostor s úplnou pravděpodobnostní mírou, X lokálně kompaktní prostor se spočetnou bází a π je projekce $X \times \Omega$ na Ω. Jestliže je M množina měřitelná vzhledem k součinu borelovské σ-algebry podmnožin X a σ-algebry $\mathcal{F}$, potom $\pi(M) \in \mathcal{F}$.

---

[20]) Důkaz lze nalézt např. v [BlHa], s. 248.

[21]) Odpovídající tvrzení v kontextu výmetových prostorů, které pokrývají i případ nelokální teorie tzv. *α-harmonických funkcí*, lze nalézt v [BlHa], s. 300.

[22]) Důkaz je uveden v [AiEs], s. 112. V této publikaci lze nalézt mj. výklad o logaritmické kapacitě a analytické kapacitě.

[23]) Čtenáře odkazujeme na [De], [Me] a [Do].

5.7 Choquetův integrál. Pro prostor s mírou $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ umíme, a to ať již jakýmkoliv způsobem, definovat Lebesgueův integrál

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu$$

pro dosti širokou třídu funkcí f. Není však již příliš obvyklé definovat integrál vzhledem k vnější míře na Ω [24]). V dalším ukážeme, jak je možno definovat integrál dokonce vůči vnější kapacitě. Pak nelze očekávat, že příslušný integrál, zavedený G. Choquetem v jeho fundamentální práci o teorii kapacit [25]), bude aditivní. Nicméně z množinové funkce zdědí jisté strukturální vlastnosti, jako je spojitost vzhledem k monotónním limitním přechodům anebo jisté formy subaditivity.

Než přejdeme k dalšímu výkladu, udělejme ještě malou odbočku. Při budování teorie kapacit jsme se z důvodů srozumitelnosti omezili převážně na jejich popis v lokálně kompaktních prostorech. Tento omezující požadavek je možno vynechat a uvažovat kapacity na jiných množinových systémech, které již nejsou nikterak svázány s topologickou strukturou. Abstraktně můžeme uvažovat na dané množině X zcela libovolný systém $\mathcal{C}$ jejích podmnožin, pro nějž pouze požadujeme, aby obsahoval prázdnou množinu. Pojem $\mathcal{C}$-analytické množiny lze definovat analogicky jako v předešlé části: Množina $A \subset X$ je *$\mathcal{C}$-analytická* [26]), existuje-li kompaktní (Hausdorffův) prostor Y se spočetnou bází a množina $B \subset X \times Y$, která je spočetným průnikem množin, z nichž každá je spočetným sjednocením množin tvaru $C \times K$, kde $C \in \mathcal{C}$ a K je kompaktní podmnožina Y, taková, že $A = \pi_X(B)$. Zde je π_X opět projekce $X \times Y$ na X.

V dalším budeme předpokládat, že systém $\mathcal{C}$ je uzavřený na tvoření konečných sjednocení a průniků. *Vnější kapacitou vzhledem k systému $\mathcal{C}$* na $\mathcal{P}(X)$ nazýváme každou množinovou funkci $\mathrm{C} : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ splňující následující požadavky:

(a) $\sup \mathrm{C}(A_n) = \mathrm{C}(\bigcup_{n=1}^\infty A_n)$ pro každou neklesající posloupnost $\{A_n\}$ podmnožin prostoru X,

(b) $\inf \mathrm{C}(K_n) = \mathrm{C}(\bigcap_{n=1}^\infty K_n)$ pro každou nerostoucí posloupnost $\{K_n\}$ množin z $\mathcal{C}$.

Množinu $M \subset X$ nazveme C-*kapacitabilní*, jestliže

$$\mathrm{C}(M) = \sup \{\mathrm{C}(K) : K \subset M, \, K \in \mathcal{C}_\delta\} \ .$$

Zde samozřejmě $\mathcal{C}_\delta$ značí systém všech spočetných průniků množin z $\mathcal{C}$. Choquetova věta o kapacitabilitě pak platí i v tomto obecnějším kontextu: *Každá $\mathcal{C}$-analytická množina je* C*-kapacitabilní* [27]).

Konečně řekneme, že vnější kapacita C je *silně subaditivní* na $\mathcal{C}$, jestliže

$$\mathrm{C}(A \cup B) + \mathrm{C}(A \cap B) \leqq \mathrm{C}(A) + \mathrm{C}(B)$$

pro libovolnou dvojici množin A, B z $\mathcal{C}$.

---

[24]) Jeden z prvních pokusů zavést pojem integrálu vzhledem k vnější míře náleží S. C. Fanovi [Fa].

[25]) Tato práce [Cho1] se svým rozsahem přes 160 stran je spíše knihou než článkem.

[26]) Podotkněme jenom, že $\mathcal{C}$-analytické množiny vznikají ze suslinovské operace na systému $\mathcal{C}$, viz [Ra], s. 385.

[27]) Důkaz je proveden v knize [Ra], s. 397.

Nechť tedy C je vnější kapacita na systému $\mathcal{P}(X)$ všech podmnožin dané množiny X. Je-li $\mathcal{H}^+$ systém nezáporných funkcí s hodnotami v $[0,\infty]$, pak pro $f \in \mathcal{H}^+$ definujme

$$\int_X f \; \mathrm{dC} = \int_0^\infty \mathrm{C}\big(\{x \in X : f(x) \geqq t\}\big) \; \mathrm{d}t \, .$$

Tento integrál se nazývá *Choquetův*, někdy též *horizontální*.

Řekněme si nejprve pár slov k existenci integrálu na pravé straně uvažované rovnosti. Především, funkce

$$t \mapsto \mathrm{C}\big(\{x \in X : f(x) \geqq t\}\big) \, , \quad t \in (0,\infty) \, ,$$

je nerostoucí a shora polospojitá na intervalu $(0,\infty)$. Každá z těchto vlastností již stačí k tomu, aby integrál na pravé straně existoval jako Lebesgueův. Dokonce existuje i jako nevlastní Riemannův integrál [28]).

Jsou známy způsoby, jak přirozeně rozšířit definici Choquetova integrálu na funkce s hodnotami v $[\,-\infty,\infty\,]$ [29]).

Ihned je vidět, že funkcionál $\Phi : f \mapsto \int_X f \; \mathrm{dC}$ je pozitivně homogenní a neklesající na $\mathcal{H}^+$. Platí totiž

$$\int_X \lambda f \; \mathrm{dC} = \lambda \int_X f \; \mathrm{dC} \quad \text{pro} \quad \lambda \geqq 0 \text{ a } f \in \mathcal{H}^+ \, , \text{ a}$$

$$\int_X f \; \mathrm{dC} \leqq \int_X g \; \mathrm{dC} \, , \quad \text{pokud} \quad f, g \in \mathcal{H}^+ \text{ a } f \leqq g \, .$$

Nelze očekávat, že by Φ byl obecně aditivní funkcionál na $\mathcal{H}^+$. Na druhé straně se lehce ukáže, že

$$\int_X (f+g) \; \mathrm{dC} \leqq 2 \Big(\int_X f \; \mathrm{dC} + \int_X g \; \mathrm{dC} \Big)$$

pro libovolné funkce $f, g \in \mathcal{H}^+$. Vzniká přirozená otázka, zda Φ je dokonce subaditivním funkcionálem na $\mathcal{H}^+$, tj. zda pro $f, g \in \mathcal{H}^+$ je

$$\int_X (f+g) \; \mathrm{dC} \leqq \int_X f \; \mathrm{dC} + \int_X g \; \mathrm{dC} \, .$$

Vlastnost subaditivity funkcionálu Φ se těší velkému zájmu, řada autorů ji dokázala za různých dodatečných předpokladů [30]). Původní důkaz věty o subaditivitě pro kapacity v lokálně kompaktních prostorech náleží G. Choquetovi. Zde uvedeme abstraktní verzi

---

[28]) Čtenář může konzultovat článek [Lu], kde se podobná definice Lebesgueova integrálu vyšetřuje.

[29]) Viz např. monografii [Den], věnovanou systematickému výkladu neaditivních množinových funkcí.

[30]) Uveďme například několik jmen: F. Topsøe (1974), B. Anger (1977), P. J. Huber (1981), R. C. Bassanezi a G. H. Greco (1984), A. Buja (1984), J. Kindler (1986) či D. Schmeidler (1986). Původní Choquetův důkaz je v [Cho1]. Abstraktní verzi, kterou uvádíme, lze nalézt v [Den].

věty o subaditivitě: *Funkcionál Φ je na prostoru $\mathcal{H}^+$ subaditivní, právě když vnější kapacita* C *je silně subaditivní na* $\mathcal{C}$.

Choquetova kapacita a integrál nacházejí, zejména v poslední době, uplatnění v málo očekávaných oblastech. Vyskytují se často ve statistice, teorii rozhodování, umělé inteligenci, teorii her, ekonomii a finančnictví [31]).

5.8 Reprezentace Daniellova integrálu. Uvažujme na dané množině P *vektorový svaz* $\mathcal{Z}$ reálných funkcí, tj. takový vektorový prostor, který s každou funkcí obsahuje i její absolutní hodnotu a předpokládejme, že $\mathcal{Z}$ splňuje ještě *Stoneovu podmínku* (s každou funkcí f obsahuje $\mathcal{Z}$ i funkci $\min(f,1)$). *Daniellovým integrálem* na $\mathcal{Z}$ rozumíme lineární nezáporný funkcionál A, který je spojitý v následujícím smyslu:

$$\text{je-li } \{f_n\} \text{ posloupnost nezáporných funkcí ze } \mathcal{Z} \text{ a } f_n \searrow 0, \text{ potom } A(f_n) \to 0\,.$$

Jako příklad uveďme třeba Riemannův integrál na prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ nebo na prostoru $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^m)$ všech spojitých funkcí s kompaktním nosičem na $\mathbb{R}^m$.

Cesta, jak Daniellův integrál, který je zprvu definován jen na „malém“ systému funkcí, rozumným způsobem rozšířit na mnohem širší systém funkcí, je vcelku obecně známa. Lze ji nalézt ve skoro každé monografii, která obsahuje partie o abstraktní integraci. Užití Choquetovy teorie kapacit nabízí jiný přístup.

Než větu o reprezentaci vyslovíme, uveďme ještě jednu definici. Je-li $\mathcal{L}$ vektorový prostor reálných funkcí na množině P, označíme σ-algebru generovanou $\mathcal{L}$ symbolem $\sigma(\mathcal{L})$. Je to tedy nejmenší σ-algebra obsahující množiny typu $\{x \in P : f(x) > a\}$, kde f probíhá množinu $\mathcal{L}$ a $a \in \mathbb{R}$.

Daniellova-Stoneova věta o reprezentaci. *Nechť A je Daniellův integrál na vektorovém svazu $\mathcal{Z}$ funkcí definovaných na množině P a nechť $\mathcal{Z}$ splňuje Stoneovu podmínku. Potom existuje právě jedna míra μ na $\sigma(\mathcal{Z})$ taková, že*

$$A(f) = \int_P f \, \mathrm{d}\mu \quad \text{pro} \quad f \in \mathcal{Z}\,.$$

Myšlenka důkazu. Ukážeme cestu, jak využít v důkazu této věty Choquetovu teorii kapacit. Pro jednoduchost předpokládejme, že systém $\mathcal{Z}$ obsahuje konstanty. Označme $X = P \times [0,\infty)$ a

$$L_f = \{(x,t) \in X : f(x) > t\}$$

[31]) Klíčová slova *Choquet integral* nás v Mathematical Reviews vedou k pojmům jako *fuzzy measures, decision processes, multimedia information retrieval, voting schemes, Choquet bargaining solutions, preferential independence, representation of excessive functions, Ellsberg's paradox, Savage's theory*; v recenzích lze číst např. *market prices can be represented by the Choquet integral with respect to a non-additive measure, the price of an insurance risk has a Choquet representation with respect to a distorted probability.* O významu Choquetova integrálu se lze poučit např. v práci [Ad], která je mimo jiné i rozsáhlou studií různých kapacit v teorii prostorů funkcí a potenciálu; viz též [Fu]. Z knižních publikací můžeme doporučit [Den].

pro každou nezápornou funkci f na P. Je-li $\mathcal{C} = \{L_f : f \in \mathcal{Z}, f \geqq 0\}$, definujme

$$\mathrm{C}(L_f) = A(f) \quad \text{pro} \quad L_f \in \mathcal{C}\,.$$

Musíme si ovšem uvědomit, že tato definice je korektní. To vyplývá z toho, že zobrazení $f \mapsto L_f$ je prosté. Díky svazovým vlastnostem $\mathcal{Z}$ je systém $\mathcal{C}$ uzavřený na konečná sjednocení a průniky. Není těžké ukázat, že C má na systému $\mathcal{C}$ vlastnosti obdobné vlastnostem Choquetovy kapacity na $\mathcal{K}$ z druhé kapitoly. Obdobně jako v „lokálně kompaktním případě“ vytvoříme z C množinovou funkci C^* na $\mathcal{P}(X)$. V dalším kroku se pak dokáže, že C^* je vnější kapacita vzhledem k $\mathcal{C}$.

Nejtěžší část důkazu spočívá v ověření, že pro charakteristickou funkci χ_A každé množiny A ze systému $\sigma(\mathcal{Z})$ množina L_{χ_A} je $\mathcal{C}$-analytická. Potom se definuje

$$\mu(A) = \mathrm{C}^*(L_{\chi_A})$$

a poměrně snadno se dokáže, že míra μ má požadované vlastnosti.[32]) ■

Literatura:

[Ad] Adams, D. R.: *Choquet integrals in potential theory.* Publ. Mat. (1) 42 (1998), 3–66.

[AdHe] Adams, D. R., Hedberg, L. I.: *Function spaces and potential theory.* Springer-Verlag, Berlin 1999.

[AiEs] Aikawa, H., Essén, M.: *Potential Theory – selected topics.* Lecture Notes in Math. 1633, Springer-Verlag, Berlin 1996.

[An1] Anger, B.: *Approximation of capacities by measures.* In: Lecture Notes in Math. 226, Springer-Verlag, Berlin 1971, 152–170.

[An2] Anger, B.: *Representation of capacities.* Math. Ann. 229 (1977), 245–258.

[ArGa] Armitage, D. H., Gardiner, S. J.: *Classical potential theory.* Springer-Verlag, London 2001.

[Ars] Arsove, M. G.: *The Wiener-Dirichlet problem and the theorem of Evans.* Math. Z. 103 (1968), 184–194.

[BlHa] Bliedtner, J., Hansen, W.: *Potential theory — An analytic and probabilistic approach to balayage.* Springer-Verlag, Berlin 1986.

[Ca] Carleson, L.: *Lectures on exceptional sets.* Van Nostrand, Princeton 1967.

[De] Dellacherie, C.: *Capacités, rabotages et ensembles analytiques.* Séminaire on Analysis: Choquet, G., Rogalski, M., Saint-Raymond, J., 19e année, Publ. Math. Univ. Pierre et Marie Curie 41, Univ. Paris VI, Paris 1980.

[DeMe] Dellacherie, C., Meyer, P.-A.: *Probabilités et potentiel.* Chapitres I à IV, Hermann, Paris 1975.

[Den] Denneberg, D.: *Non-additive measure and integral.* Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht 1994.

[Do] Doob, J. L.: *Classical potential theory and its probabilistic counterpart.* Springer-Verlag, New York 1984.

[32]) Detaily lze nalézt v [Ra].

[Fa] Fan, S. C.: *Integration with respect to an upper measure function.* Amer. J. Math. 63 (1941), 319 – 338.

[Fu] Fuglede, B.: *Capacity as a sublinear functional generalizing an integral.* Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd. (7) 38 (1971).

[He] Helms, L. L.: *Introduction to potential theory.* Wiley-Interscience, New York – London – Sydney 1969.

[Cho1] Choquet, G.: *Theory of capacities.* Ann. Inst. Fourier 5 (1953/54), 131–295.

[Cho2] Choquet, G.: *Lectures on analysis I–III.* W. A. Benjamin, Inc., New York– –Amsterdam 1969.

[Cho3] Choquet, G.: *Vznik teorie kapacit: zamyšlení nad vlastní zkušeností.* Pokroky Mat. Fyz. Astronom. 34 (1989), 71–83; viz též s. 89 této publikace.

[Kö] König, H.: *Measure and integration. An advanced course in basic procedures and applications.* Springer-Verlag, Berlin 1997.

[KNV] Král, J., Netuka, I., Veselý, J.: *Teorie potenciálu II., III., IV.* SPN, Praha 1972, 1976, 1977.

[Ku] Kuratowski, K.: *Topology I.* Academic Press, New York 1966.

[Lo] Lorentz, G. G.: *Who discovered analytic sets?* Math. Inteligencer (4) 23 (2001), 28–32.

[Lu] Lukeš, J.: *Lebesgueův integrál.* Časopis Pěst. Mat. (4) 91 (1966), 371–383.

[LM] Lukeš, J., Malý, J.: *Measure and integral.* Matfyzpress, Praha 1995.

[LMZ] Lukeš, J., Malý, J., Zajíček, L.: *Fine topology methods in real analysis and potential theory.* Lecture Notes in Math. 1189, Springer-Verlag, Berlin – New York 1986.

[Me] Meyer, P.-A.: *Probabilités et potentiel.* Hermann, Paris 1966.

[PoSt] Port, S. C., Stone, C. J.: *Brownian motion and classical potential theory.* Academic Press, New York 1978.

[Ra] Rao, M. M.: *Measure theory and integration.* Wiley-Interscience, New York 1987.

[SeŠt] Sedlák, B., Štol, I.: *Elektřina a magnetismus.* Academia, Praha 2002.

[We] Wermer, J.: *Potential theory.* Lecture Notes in Math. 408, Springer-Verlag, Berlin 1974.

[Wi] Wiener, N.: *Certain notions in potential theory.* J. Math. Phys. M.I.T. 3 (1924), 24–51.

Prof. RNDr. Jaroslav Lukeš, DrSc. (1940), vedoucí katedry matematické analýzy MFF UK, e-mail: `lukes@karlin.mff.cuni.cz`; prof. RNDr. Ivan Netuka, DrSc. (1944), děkan MFF UK, e-mail: `netuka@karlin.mff.cuni.cz`; doc. RNDr. Jiří Veselý, CSc. (1940), zástupce ředitele Matematického ústavu MFF UK, e-mail: `jvesely@karlin.mff.cuni.cz`; Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8 – Karlín.
Podporováno výzkumným záměrem MSM 1132 00007.

Vznik teorie kapacit: zamyšlení nad vlastní zkušeností

Gustave Choquet, Paříž

Gustave Choquet patří mezi vynikající matematiky. V analýze je skutečným mistrem a ačkoli je vysoce vzdělán, jeho tvůrčí přístup se vyznačuje nápadnou úsporností užívaných prostředků. Jeho dílo v průběhu více než třicetiletého období odkrylo matematickému myšlení nové cesty.

Matematikové se již dlouho zajímají o teorii potenciálu, která má svůj původ v elektrostatice a v gravitačním zákonu; o potenciál velice konkrétní, smím-li tak říci, definovaný v trojrozměrném eukleidovském prostoru pomocí elementárního potenciálu $1/r$. Zajímají se však o problémy potenciálu související nikoliv s fyzikálními tělesy (se vší vágností, která tento pojem obklopuje), ale s co nejobecnějšími množinami. Jak se v tomto kontextu objeví pojem elektrostatické kapacity, neaditivní množinové funkce s poněkud paradoxním chováním? Zdá se, že na konci čtyřicátých let tento pojem přinášel otevřené problémy i pro nejvýznamnější specialisty, jako byl např. Henri Cartan. Pro které množiny lze vůbec smysluplně mluvit o kapacitě?

Jestliže je jméno Gustava Choqueta již zapsáno do historie matematiky, stalo se tak zejména díky jeho teorii zobecněných kapacit. Tato teorie samozřejmě vyřešila speciální problém týkající se elektrostatické kapacity, byla však také základní hnací silou, která vedla již mimo rámec trojrozměrného prostoru k teoriím zobecněných potenciálů, k vazbě teorie potenciálu a pravděpodobnosti. Přinesla též nové pohledy na problém integrálních reprezentací a učinila z nich účinný nástroj. Je známo, že toto sblížení a interakce teorie potenciálu a pravděpodobnosti jsou v současné době zdrojem četných a zásadních prací. Jedním ze zakladatelů systematického zkoumání těchto vzájemných vztahů je americký matematik J. L. Doob. Náš kolega Paul Malliavin přispěl zcela nedávno do této oblasti přínosem zásadní důležitosti.

Teorie kapacit není rozhodně projevem samoúčelného matematického perfekcionismu, je totiž určitou křižovatkou matematiky a zdrojem nových myšlenek a metod přístupných na úrovni větší či menší náročnosti širokému okruhu.

Svědectví vynikajících matematiků o cestách k objevům jsou vzácná a cenná, a to nejen pro samotné matematiky, ale také pro všechny, kteří se zamýšlejí nad klikatými cestami vedoucími ke konečnému odhalení pravdy. Nad cestami se všemi jejich slepými uličkami, které však ukazují díky představivosti určitý návod, jak obcházet skutečné nebo zdánlivé překážky. Slavná svědectví takového charakteru jsou známa např. od Henri Poincarého nebo Jacquese Hadamarda. Považovali jsme za zajímavé k nim zde připojit Choquetovu svědeckou výpověď o tématu prvořadé důležitosti.

André Lichnerowicz

Moderní teorie poznání věnovala velkou pozornost duševním procesům objevování. Historikové vědy podrobili minulost rozboru s očekáváním, že v ní najdou kámen mudrců velikých objevů. Právě prostřednictvím takových objevů dochází k pokroku ve vědě.

Přímé svědectví autorů objevů, třebaže nemusí odhalovat tento kámen mudrců, je vždy fascinující, i když se často opírá o dávné vzpomínky a i když je těžké vystupovat zároveň jako divák a herec. Ocitne-li se už člověk v roli takového herce, je jeho povinností pokusit se při plném vědomí obtížnosti úkolu své svědectví podat.

Zde bude řeč o matematice. Objevování v matematice, přes udivující podobnost s cestou k objevům v experimentálních vědách, v umění, poezii nebo filozofii, má svá specifika. Ostatně je jedinou oblastí, ve které se trochu vyznám, ať už díky sledování práce mladých vědeckých pracovníků anebo ze své vlastní zkušenosti.

Pro studenta začínajícího s vědeckou prací znamená první vlastní výsledek nádherné odhalení toho, co je to objevovat nové a jak na to jít. Tento první krok je rozhodující, některým se nikdy nepodaří.

Žádná zcela spolehlivá metoda, aby se člověk naučil objevovat, neexistuje. Každý se musí k takovému tajemství propracovat sám. V matematice je však nutné splnit přinejmenším určité minimální podmínky, aby bylo možné přistoupit v jisté oblasti k výzkumu. Je především nutné poznat všechny bytosti, které tuto oblast obývají a seznámit se s nejrůznějšími z nich natolik, aby se daly předvídat jejich reakce a podařilo se proniknout do jejich vnitřního života. Pak si člověk začíná klást otázky: jak se tyto bytosti za těch či oněch okolností zachovají? Jinak řečeno, dostáváme se k vlastním problémům, ať už je zformulujeme sami, nebo je v současnosti či dříve položili jiní.

Pak vstupuje do hry osobní založení vědce. Ten se nachází v podobné situaci jako horolezec, který chce z úpatí hory zdolat její vrchol. Někteří horolezci se hoře budou přizpůsobovat, vyhlédnou si nejjednodušší nebo nejelegantnější cesty. Jiní naopak bez váhání užijí metodu buldozeru: vytvoří přístupový svah mírného sklonu, který mohou opakovaně bez nebezpečí využívat všichni, kteří přijdou po nich. Podle Dieudonného to byl postup, kterému dával přednost Grothendieck, postup, který ho ve skutečnosti dovedl k vytvoření algebraické geometrie. Není tedy pouze jediný způsob, jak problém rozřešit nebo jak začít jeho zkoumání.

Sám dávám přednost této metodě: první krok je *rozšíření kontextu*. Problém se formuluje v nejobecnějším kontextu, v němž mají příslušné pojmy stále ještě přesný smysl. Pak se studují dobře zvolené speciální případy obecné formulace. Když je lze vyřešit postupem, který má smysl v obecném případě, zbývá ho přizpůsobit původnímu problému. To je metoda analogická přístupu, který zvolili někteří algebraici při pokusu o zdolání Riemannovy hypotézy o rozložení komplexních kořenů analytické funkce $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^z$. Zavedou se funkce ζ nad tělesy algebraických čísel, která nahrazují klasické těleso $\mathbb{C}$ komplexních čísel. Problému se dá vhodný smysl a člověk se ho pak pokouší rozřešit s využitím specifik nového kontextu.

Když je vyřešen některý z těžkých problémů stojících v popředí pozornosti a příslušný důkaz je dostatečně vyjasněn, často se pozastavujeme nad tím, že se řešení nenašlo už dříve. Je to proto, že lidský duch má slabiny. Nevznáší se jako orel, naopak, potřebuje stálou oporu, kterou mu poskytuje důkladné studium dobře vybraných speciálních případů.

Chování vědce, ať již v matematice či v experimentálních vědách, připomíná chování průzkumníka v lese, který hledá pramen nebo vzácný druh hmyzu. Kráčí stezičkou s napnutými smysly připravenými vnímat podněty. Bez umdlení využívá postranní pěšinky. A někdy se stane zázrak. Vydal se za motýlem a objevuje potůček, v němž se povalují valouny zlata.

Start je tedy mírný a pak se tempo stupňuje. Příliš velký spěch nebo špatně odhadnutá ctižádost by mohly dílo zmařit.

Znal jsem znamenitého matematika, který se jednoho dne rozhodl změnit své odborné zaměření a věnovat se hledání velké myšlenky v oblasti matematické fyziky. Velké plodné myšlenky jsou bohužel vzácné. Tento matematik se uzavřel podnětům každodenního života, které mu skromný, ale cílevědomý přístup mohl přinést. Nakonec ve své nové oblasti bádání nenašel ani velkou ani malou myšlenku.

*

Nyní však chci podat své osobní svědectví o vzniku jedné teorie, kterou jsem vytvořil okolo roku 1950, teorie kapacit.

Okolnosti doprovázející tento výtvor byly pro mé bádání v jeho různých etapách příznivé. Vše se odehrálo v několikaměsíčním období nepřetržité práce, v němž jsem si byl neustále vědom svých motivací, užívaných metod, vývoje teorie. Proto věřím, že tento příklad může zajímat zároveň matematicky laděné filozofy i matematiky se smyslem pro filozofii.

Původní problém se týkal elektrostatické kapacity; jak ale brzy vysvětlím, přivedl mě rychle ke studiu široké třídy neaditivních množinových funkcí, které jsem pak nazval *kapacity*. V roce 1950, kdy jsem na problematice pracoval, existovaly četné knihy a práce věnované neaditivním množinovým funkcím. Z nich jsem však nemohl nic vytěžit, neboť záměr jejich autorů byl získat z neaditivní situace vše, co aditivního v ní bylo ukryto. Např. z funkce přiřazující každé části E_3 její průměr definovali tyto obvyklé aditivní funkce: délku, povrch, objem.

Ovšem v případě elektrostatické kapacity, který mě především zajímal, jediná aditivní funkce, kterou lze těmito metodami přiřadit, nabývá hodnotu 0 nebo ∞, a je tedy zcela nezajímavá. Bylo proto třeba pozměnit kontext, který se stal příliš omezujícím.

Uvedu jednoduchý příklad, dosti analogický elektrostatické kapacitě, který má též velmi daleko k aditivitě: v rovině $\mathbb{R}^2$ označme $p(X)$ projekci množiny X na vodorovnou osu. Množina $p(X)$ má na této ose vnější Lebesgueovu míru $m^*(p(X))$, kterou budu označovat $f(X)$. Tato funkce má k aditivitě daleko. Jsou-li totiž X_1, X_2 dvě vodorovné úsečky v $\mathbb{R}^2$, jejichž projekce $p(X_1), p(X_2)$ splývají, platí $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) = f(X_2)$, nikoli však $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) + f(X_2)$.

Poznamenejme, že i za této jednoduché situace se již objevují obtížné problémy, které předznamenávají starosti s elektrostatickou kapacitou. Uvedu příklad. Především se dohodněme, že podmnožinu A roviny $\mathbb{R}^2$ nebo prostoru $\mathbb{R}^n$ nazveme *kompaktní*, jestliže A je průnikem posloupnosti *elementárních množin* (tj. konečných sjednocení n-rozměrných uzavřených intervalů; dále množinu A nazveme borelovskou, když lze A získat pomocí spočetných sjednocení a spočetných průniků, vycházíme-li z elementárních množin. Kompaktní množiny jsou po množinách elementárních nejjednodušší borelovské množiny. Zde je pak jeden ze zmíněných obtížných problémů: Jestliže X je borelovská omezená část $\mathbb{R}^2$, existuje pro každé $\varepsilon > 0$ kompaktní množina $K \subset X$ taková, že $|f(X) - f(K)| < \varepsilon$?

Když v našem obyčejném prostoru, tedy v prostoru experimentátorů, připojíme vodič K (např. kovovou kouli) k indukční elektrice, vodič se nabije určitým elektrickým nábojem Q a získá potenciál V. Experimentálně se zjistí, že Q je úměrný V, tedy $Q = k \cdot V$. Konstanta k se nazývá kapacita vodiče K.

Toto je definice fyzika; pro matematika je v ní příliš mnoho špatně definovaných termínů: obyčejný prostor, vodič, potenciál a dokonce elektřina. Proto podám matematickou definici elektrostatické kapacity, a to nejen pro koule či vodiče, ale pro libovolnou kompaktní podmnožinu trojdimenzionálního Eukleidova prostoru E_3. Ten představuje matematický model našeho obyčejného prostoru (po zvolení počátku a ortonormální báze lze ztotožnit E_3 s prostorem $\mathbb{R}^3$ trojic reálných čísel opatřeným skalárním součinem $(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)$ a z něj odvozenou vzdáleností).

Připomeňme především, že v tomto prostoru jsou četné fyzikální zákony vyjádřeny pomocí převrácené hodnoty čtverce vzdálenosti: elektrické, magnetické, gravitační síly. Je třeba vzít v úvahu, že takové síly mají potenciál. Jinak řečeno, jejich silové pole má charakter pole centrálních sil a není nic jiného než gradient $1/r$, kde r označuje vzdálenost od středu. Tento základní poznatek dovoluje nahradit studium silového pole studiem skalární funkce, které se říká potenciál.

Přesněji řečeno: jestliže označíme μ míru nesenou kompaktní částí K prostoru, tj. rozložení (kladné) hmoty na K, budeme potenciálem míry μ nazývat součet P_μ elementárních potenciálů vytvořených elementy míry μ. Přesněji, hodnota funkce P_μ v bodě x je $P_\mu(x) = \int (1/r(x,y))\, \mathrm{d}\mu(y)$, kde $r(x,y)$ je vzdálenost x od proměnného bodu y probíhajícího K.

Funkce P_μ nabývá hodnot z $[0, \infty]$; její vlastnosti zde nechám stranou.

Když kompaktní množina K není příliš tenká, např. když K je koule, existují nenulové míry μ nesené množinou K takové, že $P_\mu \leqq 1$ všude. Na chvíli nazvěme „dobrou mírou“ na K každou míru μ na K, pro niž $P_\mu(x) \leqq 1$ pro každé x a symbolem $\|\mu\|$ označme celkovou velikost míry μ.

Elektrostatickou kapacitou množiny K nazveme supremum velikosti všech dobrých měr na K:

$$\operatorname{cap}(K) = \sup\{\|\mu\| : \mu \text{ je dobrá míra nesená } K\}.$$

Lze dokázat, že na K existuje dobrá míra, jejíž potenciál je v podstatě roven 1 všude na K. Taková míra je ve skutečnosti jediná a je nesena vnější hranicí množiny K; nazývá se rovnovážným rozložením pro množinu K [1]). Je tedy celkem jasné, že pokud

[1]) Totožnost elektrických a gravitačních potenciálů si zde říká o připomenutí I. Newtona a jeho výpočtu gravitační síly uvnitř a vně Země (která se pro jednoduchost předpokládá homogenní). Z tvrzení, která jsme právě připomněli, dosti snadno vyplývá, že v každém bodě vzdáleném r od středu Země je gravitační síla rovna newtonovské přitažlivosti hmoty soustředěné ve středu a rovnající se hmotě části Země obsažené v soustředné kouli o poloměru r. Např. vně Země intenzita pole gravitačních sil je úměrná $1/r^2$, zatímco uvnitř je úměrná r^3/r^2, tedy r. Někteří historikové se kloní k názoru, že Newton vyčkával s publikováním *Principií* dvacet let proto, že tyto vlastnosti, které se dnes považují za elementární, neuměl uspokojivě dokázat.

K je obyčejný vodič, např. plná nebo dutá koule, splývá tato míra μ_0 s elektrostatickým rovnovážným rozložením z fyziky, které má potenciál na vodiči rovný 1 (pro elektrický potenciál c by to byla míra $c \cdot \mu_0$).

Přejděme na okamžik ke srovnání $\operatorname{cap}(K)$ s Lebesgueovou mírou $m(K)$. Obě množinové funkce m a cap jsou naprosto odlišné: jestliže K_1 a K_2 jsou dvě disjunktní kompaktní množiny, platí $m(K_1 \cup K_2) = m(K_1) + m(K_2)$. To je takřka opak toho, s čím se setkáváme u kapacity: např. pro dvě různé soustředné (tedy disjunktní) sféry K_1, K_2 (kde K_2 je větší z nich) platí: $\operatorname{cap}(K_1 \cup K_2) = \operatorname{cap}(K_2)$.

Přesněji řečeno, kapacita má udivující vlastnost *dichotomie*. To znamená, že každou dosti slušnou množinu X (např. každou borelovskou množinu) lze rozdělit na dvě slušné množiny se stejnou kapacitou jako X. Tato vlastnost je přesným opakem aditivity. Proto je vyloučeno kapacitu studovat pomocí tradičních metod teorie míry.

Přesto užijeme myšlenku, kterou Eudoxos použil před více než dvěma tisíci lety k měření obsahu rovinné oblasti A: jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ (Eudoxos toto neříkal, ale jistě to měl na mysli) lze nalézt mnohoúhelníky, jeden obsahující A a druhý obsažený v A, s rozdílem jejich obsahů menším než ε, řekneme, že oblast A má obsah. Její obsah je podle definice infimum obsahů mnohoúhelníků obsahujících A, které je také rovno supremu obsahů mnohoúhelníků obsažených v A.

Tento postup se také nazývá *Eudoxova exhaustivní metoda*. Dobré myšlenky jsou nejživotnější a nejužitečnější, dokonce i po více tisíciletích. V teorii Lebesgueovy míry získala Eudoxova metoda oblibu díky Denjoyovi, který definoval vnitřní míru $m_*(X)$ jako supremum měr kompaktů K obsažených v X a vnější míru $m^*(X)$ jako infimum měr otevřených množin ω obsahujících X. Rovnost těchto dvou čísel znamená pak podle definice měřitelnost takové množiny X.

Na základě tohoto Eudoxova-Denjoyova modelu přiřadíme každé množině $X \subset E_3$ její vnitřní kapacitu a vnější kapacitu takto:

$$\begin{aligned} \operatorname{cap}_*(X) &= \sup\{\operatorname{cap}(K) : K \text{ kompaktní } \subset X\}, \\ \operatorname{cap}^*(X) &= \inf\{\operatorname{cap}(\omega) : \omega \text{ otevřená } \supset X\}. \end{aligned}$$

V posledním vzorci bereme $\operatorname{cap}(\omega)$ jako $\operatorname{cap}_*(\omega)$. Metoda je tedy jasná: vychází se z kapacity kompaktních množin; přejde se k otevřeným množinám; potom se pomocí kompaktních a otevřených množin definuje cap_* a cap^*. Jinak řečeno: funkce, která je definována na systému všech kompaktních množin, se dvojím způsobem rozšíří na systém vůbec všech podmnožin prostoru E_3.

Je zřejmé, že $\operatorname{cap}_* \leqq \operatorname{cap}^*$; je tedy přirozené vyslovit tuto definici:

Definice: *Říkáme, že množina X je kapacitabilní, jestliže* $\operatorname{cap}_*(X) = \operatorname{cap}^*(X)$. *Společná hodnota těchto čísel se pak označí* $\operatorname{cap}(X)$.

Tato definice je uspokojivá, neboť lze výpočet elektrostatické kapacity kapacitabilní množiny X v E_3 provést bez zavádění „dobrých měr“ přiřazených množině X. Totiž prostřednictvím aproximace se vystačí s „dobrými mírami“ pro kompaktní množiny.

Vzniká ovšem otázka, zda kromě kompaktních množin a otevřených množin, u nichž je kapacitabilita takřka zřejmá, existují ještě jiné kapacitabilní množiny.

Tento problém je zajímavý dokonce i pro množiny nulové vnitřní kapacity. Role, jakou hrají v teorii lebesgueovské integrace množiny míry nula a jim odpovídající pojem skoro všude, je dobře známa. V teorii potenciálu není základním pojmem míra, ale kapacita. *Skoro všude* je nahrazeno *kvazi všude*: říká se, že určitá vlastnost platí *kvazi všude*, platí-li všude s výjimkou množiny X nulové kapacity.

Zde však vzniká otázka: jde v této definici o vnitřní nebo vnější kapacitu? Jistě tato otázka nevzniká pro kompaktní množiny, protože každá taková množina je kapacitabilní. Bohužel množiny X, které se přirozeně vyskytují, nejsou obecně kompaktní. Zde jsou nyní možné dva přístupy: buď se dokáže (dosti snadno), že $\mathrm{cap}_*(X) = 0$ a dostane se věta, kterou nazvu slabou. Nebo se odpracuje mnohem více, aby se ukázalo, že $\mathrm{cap}^*(X) = 0$ a získá se silnější věta. Je lepší dokázat snadno slabou větu než obtížně silnou větu? Takové dilema nevznikne, když X je kapacitabilní. *Pak se totiž získají snadné důkazy silných vět.*

Přesněji řečeno, konkrétní problém, vznikající u pojmu kvazi všude, zní: jestliže pro množinu X obvyklého typu (řekněme borelovskou) platí $\mathrm{cap}_*(X) = 0$, platí pak již $\mathrm{cap}^*(X) = 0$? Obecněji vzniká otázka, zda každá borelovská množina v E_3 je kapacitabilní.

*

Tento problém považovali kolem roku 1950 Marcel Brelot a Henri Cartan za obtížný (a důležitý). Dal jsem se jím nakonec strhnout v přesvědčení, že odpověď by měla být kladná. (Kde se bere toto zaujetí? Tam někde je tajemství spojování demokritovských atomů.)

Prakticky jsem však tehdy nic z teorie potenciálu neznal. Když nad tím uvažuji, *myslím si nyní, že to právě byla příčina, která mi dovolila vyřešit problém vzdorující specialistům.* Zde je zajímavý moment pro filozofy. Trochu se u něj pozastavím.

Moje neznalost mě vlastně zachránila před předsudky, zapověděla mi užít příliš vznešené nástroje teorie potenciálu a donutila mě zapomenout na nahodilé aspekty daného problému. Skutečný stav mých znalostí byl tento:

Znal jsem dobře konstrukci Lebesgueovy míry propagovanou Denjoyem a založenou na Eudoxově myšlence, jak jsem ji vyložil před chvilkou.

Vůbec jsem nevěděl, jak využít faktu, že základní prostor je E_3, natož pak na můj vkus technickou definici kapacity příslušné newtonovskému jádru $1/r$.

Proto jsem zvolil nejobecnější možný rámec, v němž nezbytné pojmy mají smysl. Rámec příliš rozsáhlý může samozřejmě skýtat nebezpečí, že nejsou k dispozici žádné nástroje a v důsledku toho se dospěje k pouhým trivialitám. Sám jsem však pociťoval svobodu v postupném omezování obecnosti podle potřeby.

Nahradil jsem tedy E_3 libovolným Hausdorffovým topologickým prostorem [2]) E (Hausdorffův prostor dovoluje příjemné zacházení s kompaktními množinami) a

[2]) Čtenář – nematematik, který neví, co je Hausdorffův topologický prostor, kompaktní množina, a *tudíž* ani borelovská množina v takovém prostoru, ztrácí v další četbě pouze částečně, setrvá-li v eukleidovském prostoru. Přesto však musí vědět, že záměna E_3 prostorem mnohem obecnějším byla rozhodujícím faktorem při mém myšlenkovém pochodu v labyrintu, kde mě k východu nevedla žádná Ariadnina nit.

elektrostatickou kapacitu $\mathrm{cap}(X)$ jsem nahradil neklesajícím zobrazením f definovaným na systému $\mathcal{K}(E)$ všech kompaktních podmnožin prostoru E. Problém samotný i příslušné základní pojmy lze již v tomto silně primitivním kontextu vyjádřit:

Pro každé $X \subset E$ položme $f_*(X) = \sup\{f(K) : K$ kompaktní obsažená v $X\}$ a $f^*(X) = \inf\{f_*(\omega) : \omega$ otevřená obsahující $X\}$. Řekneme, že množina X je f-kapacitabilní, jestliže $f_*(X) = f^*(X)$.

Pro kapacitabilní množinu X se jeví lákavé označit $f(X)$ společnou hodnotu $f_*(X) = f^*(X)$. To je v pořádku pro případ otevřené množiny X, ale rovnost neplatí pro kompaktní množinu X, pokud f není *zprava spojitá* v tomto smyslu: pro každý kompakt K a pro každé $\varepsilon > 0$ existuje otevřená množina ω obsahující K taková, že $f_*(\omega) \leqq f(K) + \varepsilon$. Jinak řečeno: zvětší-li se málo kompakt, jeho kapacita vzroste o málo.

Toto je klasická vlastnost Lebesgueovy míry a každé Radonovy míry. Specialisté v teorii potenciálu ji znali pro Newtonovu kapacitu (třebaže ji předtím jasně neformulovali).

Rozhodl jsem se tedy v dalším předpokládat, že f je neklesající a zprava spojitá; takovou funkci f nazývám kapacitou.

V tomto velice obecném kontextu mnohé příklady ukazují, že E může obsahovat borelovské množiny, které nejsou kapacitabilní. K tomu je hned přinejmenším tento pádný důvod: funkce f_* a f^* jsou definovány pomocí hodnot na kompaktních množinách, zatímco mnohé borelovské podmnožiny prostoru E (a dokonce uzavřené množiny) obsahují jenom velmi malé kompaktní množiny. Přestože kompaktní část prostoru E je krásná množina, její doplněk může speciálně obsahovat hrozné uzavřené podmnožiny.

Bylo proto třeba zúžit problém kapacitability na ty borelovské podmnožiny E, které jsou z kompaktů zkonstruovány pomocí obvyklých jednoduchých spočetných operací *s výjimkou* přechodu k doplňku.

Přesněji řečeno, zavedl jsem systém $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ všech $\mathcal{K}$-borelovských podmnožin prostoru E, tj. nejmenší množinový systém v E obsahující $\mathcal{K}(E)$ a uzavřený na spočetná sjednocení a spočetné průniky. Ten obsahuje kompakty, množiny typu K_σ (spočetná sjednocení kompaktů), množiny typu $K_{\sigma\delta}$ (spočetné průniky množin typu K_σ), množiny typu $K_{\sigma\delta\sigma}$ a transfinitně definované další typy.

Navíc je toto zúžení problému rozumné, neboť v $\mathbb{R}^3$ je každá borelovská množina také $\mathcal{K}$-borelovská, protože každá otevřená množina je v tomto případě typu K_σ. Přitom takové omezení na regularitu X samozřejmě nevyžaduje žádná omezení na E nebo na f. Teprve v dalším se omezení, přinejmenším na f, mohou ukázat *nutná*.

Ve skutečnosti tato nutnost vyvstala rychle. Pro $E = \mathbb{R}^2$ a pro subaditivní kapacity (tj.: $f(K_1 \cup K_2) \leqq f(K_1) + f(K_2)$) jsem uměl bez potíží sestrojit velmi jednoduché borelovské, a tedy také $\mathcal{K}$-borelovské množiny, které nebyly f-kapacitabilní.

Velmi cíleně jsem se sám sebe ptal: jaký typ omezení musím na f požadovat? Musí to být takové omezení, které umožní snadno dokázat kapacitabilitu množin typu K_σ, tedy nejjednodušších $\mathcal{K}$-borelovských množin hned po kompaktech.

Nechť tedy $X = \bigcup_n K_n$, kde (K_n) je neklesající posloupnost kompaktů. Musím dokázat, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje otevřená množina ω obsahující X taková, že

$f(\omega) \leqq f(X) + \varepsilon$. Je přirozené takovou ω sestrojit jako sjednocení otevřených množin ω_n, kde ω_n obsahuje K_n, a takových, že pro každé n, $f(\omega_n)$ bude velmi blízko k $f(K_n)$, např. $f(\omega_n) < f(K_n) + \varepsilon_n$. Ideální by samozřejmě bylo, kdyby $\varepsilon \geqq \sum \varepsilon_n$. Protože je to pravda pro Radonovu míru f, není to nerozumná myšlenka.

Pro větší názornost začněme vyšetřováním posloupnosti dvou kompaktů K_1, K_2 místo nekonečné posloupnosti (K_n). Chtěli bychom pro případ $K_1 \subset \omega_1$ a $K_2 \subset \omega_2$ nebo obecněji $a_1 \subset A_1$ a $a_2 \subset A_2$ dokázat, že rozdíl

$$f^*(A_1 \cup A_2) - f^*(a_1 \cup a_2)$$

je malý, pokud jsou malé rozdíly

$$[\, f^*(A_1) - f^*(a_1)\,] \ \text{a} \ [\, f^*(A_2) - f^*(a_2)\,]\,,$$

např. odvodit nerovnost

$$f^*(A_1 \cup A_2) - f^*(a_1 \cup a_2) \leqq (\, f^*(A_1) - f^*(a_1)\,) + (\, f^*(A_2) - f^*(a_2)\,)\,. \tag{1}$$

Velmi jednoduchý limitní přechod ostatně ukazuje, že tato nerovnost platí vždy, pokud platí pro kompakty.

Avšak pro další postup bylo třeba zjistit, zda tato velmi přesná nerovnost (platná pro *Radonovy míry*, tj. kapacity splňující $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$ pro disjunktní kompakty A, B) je splněna také pro elektrostatickou kapacitu.

Díky své nešikovnosti jsem při výpočtech počmáral hodně stránek. Podařilo se mi však uvést nerovnost na ekvivalentní tvary, z nichž jeden byl tento:

$$f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \leqq f(X) + f(Y), \quad (X, Y \text{ kompaktní})\,. \tag{2}$$

Tato nerovnost je elegantní a o to více žádoucí, že přechází v rovnost pro Radonovu míru f. Na druhé straně je větším omezením než obyčejná subaditivita, neboť $f \geqq 0$. Tuto vlastnost jsem pojmenoval *silná subaditivita*.

Kolegové zabývající se teorií potenciálu mi řekli, že nevědí, zda elektrostatická kapacita takovou vlastnost má. Musel jsem se naučit trochu z teorie potenciálu a nakonec jsem ukázal — jaký to zázrak — že newtonovská kapacita je silně subaditivní.

Menší úsilí mi odhalilo, že silná subaditivita implikuje obecnější nerovnost

$$f^*\big(\textstyle\bigcup_i A_i\big) - f^*\big(\bigcup_i a_i\big) \leqq \sum_i \big(\, f^*(A_i) - f^*(a_i)\,\big) \tag{3}$$

pro každý konečný soubor dvojic (a_i, A_i) takových, že $a_i \subset A_i$. Ideální nerovnost, kterou jsem měl na zřeteli, byla tedy pravdivá. Zbývalo ji užít k původnímu cíli, k důkazu kapacitability množin typu K_σ.

Zde mě však čekalo příjemné překvapení. Obecný tvar nerovnosti (3) mi poskytl následující jednoduché a obecné tvrzení.

Věta. *Nechť f je silně subaditivní kapacita. Potom pro každou neklesající posloupnost (X_n) libovolných množin platí*

$$f^*\big(\textstyle\bigcup_n X_n\big) = \lim_{n\to\infty} f^*(X_n)\,. \tag{4}$$

Toto tvrzení bylo dobře známo (a používáno) v teorii míry, kde se odvozuje na základě *aditivity* míry. Dokázal jsem tedy, že k jeho platnosti stačí *silná subaditivita*. Odtud plyne důležitý důsledek.

Korolár. *Sjednocení každé posloupnosti kapacitabilních množin je také kapacitabilní; zejména je kapacitabilní každá množina typu* K_σ.

Moje práce měla však ke svému završení daleko, neboť po množinách typu K_σ přicházejí množiny typu $K_{\sigma\delta}$, pak typu $K_{\sigma\delta\sigma}$ atd. a celá plejáda borelovských množin.

Pro množiny typu $K_{\sigma\delta}$, které jsou průniky nerostoucích posloupností množin typu K_σ, nelze uvedenou větu přímo aplikovat. Snadno si povšimneme, že dokonce žádná věta stejného typu pro nerostoucí posloupnosti (X_n) a jejich průniky ani neplatí. Každá jakkoli špatná omezená část X prostoru E_3 je totiž (pro elektrostatickou kapacitu f) průnikem vhodné nerostoucí posloupnosti f-kapacitabilních množin. (Je-li (C_n) nerostoucí posloupnost otevřených kulových vrstev s poloměry k, $k+1/n$ obklopujících X, posloupnost $(C_n \cup X)$ dává takový příklad.)

Naštěstí sice technicky náročnější a poněkud zamotaný, nicméně však krátký důkaz mi poskytl na základě uvedené věty očekávanou odpověď pro množiny typu $K_{\sigma\delta}$. Odpověď pro množiny typu $K_{\sigma\delta\sigma}$ byla důsledkem koroláru.

Nemusím říkat, že tento první úspěch mi silně dodal odvahu k dokazování obecné věty.

Jenomže další krok se týkal množin typu $K_{\sigma\delta\sigma\delta}$. Metoda užitá pro množiny typu $K_{\sigma\delta}$ se již nehodí na tyto množiny mnohem složitější než kompakty. Provedl jsem tedy velmi cíleně tuto úvahu: protože jsem uměl dokázat kapacitabilitu množin typu $K_{\sigma\delta}$ pomocí nerovnosti z definice silné subaditivity, mohl bych ji pro množiny typu $K_{\sigma\delta\sigma\delta}$ dokázat z nerovností stejného typu, avšak silnějších. Jak ale takové nerovnosti hledat?

Musel jsem počmárat mnoho papírů, než jsem je našel: jejich zápis vypadá jako modifikovaná nerovnost (1) a objevuje se v nich druhý člen nekonečné posloupnosti nerovností odvozených z f klasickým postupem postupných diferencí. Užíval se kdysi v *diferenčním počtu* a někdy při studiu derivací reálných funkcí. Vysvětlím to podrobněji.

Buď f reálná množinová funkce $X \to f(X)$. Jestliže k X přidáme „přírůstek“ A_1, f se zvětší o přírůstek, který označíme

$$\Delta_1(X; A_1) = f(X \cup A_1) - f(X)\,.$$

Např. podmínka $\Delta_1 \geqq 0$ vyjadřuje, že f je neklesající funkce.

Dále se definuje:

$$\begin{aligned}\Delta_2(X; A_1, A_2) &= \Delta_1(X \cup A_2; A_1) - \Delta_1(X; A_1) = \\ &= f(X \cup A_1 \cup A_2) - f(X \cup A_1) - f(X \cup A_2) + f(X)\,.\end{aligned}$$

Posloupnost (Δ_n) se pak definuje indukcí užitím postupných přírůstků $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vztahem

$$\Delta_{n+1}(X; A_1, \ldots, A_{n+1}) = \Delta_n(X \cup A_{n+1}\,; A_1, \ldots, A_n) - \Delta_n(X; A_1, \ldots, A_n)\,.$$

Podmínka, že f je neklesající a silně subaditivní, se pak zapíše pomocí nerovností[3])

$$\Delta_1 \geqq 0 \quad \text{a} \quad \Delta_2 \leqq 0\,.$$

Tato formulace mě podnítila k pátrání, zda snad postupné diference příslušné elektrostatické kapacitě nejsou střídavě nezáporné; jinak řečeno, zda vždy platí $(-1)^n \Delta_n \leqq 0$. A přitom se stal nový zázrak: podobný důkaz jako při silné subaditivitě mi ukázal, že pro elektrostatickou kapacitu f je skutečně $(-1)^n \Delta_n \leqq 0$ pro každé přirozené n.

Elektrostatická kapacita tak připomínala ty reálné funkce, jejichž derivace střídavě mění znaménko, tedy funkce nazývané *úplně monotónní*. Ty jsou ve skutečnosti totožné s Bernsteinovými funkcemi tvaru $\int(1-\mathrm{e}^{-tx})\,\mathrm{d}\mu(t)$, kde μ je nezáporná Radonova míra na $\mathbb{R}^*_+ = [\,0,\infty\,]$.

Zmíněné množinové funkce jsem nazval *alternujícími funkcemi nekonečného řádu*. Jejich podobnost s Bernsteinovými funkcemi mě přivedla na myšlenku, že mají také integrální reprezentaci pomocí funkcí $g(X)$ analogických exponenciále, tj. splňujících vztah $g(X \cup Y) = g(X) \cdot g(Y)$. Takové funkce se dostanou záměnou sčítání čísel za operaci množinového sjednocení.

Zmíněná analogie stála za zacházku, a tak jsem na určitou dobu nechal stát kapacitabilitu a studoval jsem více zblízka Bernsteinův vzorec. Ze známé jednoznačné reprezentující míry μ zřejmě vyplývá, že pro každé t je funkce $(1-\mathrm{e}^{-tx})$ minimální, dokonce extremální prvek konvexního kužele úplně monotónních funkcí.

Krajně lákavým se stalo vyjasnění podobného jevu pro kužel alternujících kapacit nekonečného řádu. Očekávání se přesně splnilo a bylo to dokonce relativně jednoduché. Bylo zejména možné lehce charakterizovat kapacity g odpovídající *nerostoucím exponenciálám.* Ze vztahu $g(X \cup Y) = g(X) \cdot g(Y)$ se totiž při volbě $X = Y$ dostane, že g nabývá jen hodnot 0 nebo 1.

Odtud jsem odvodil snadnou aplikací teorie konvexních množin jednoduchou reprezentaci pro každou alternující kapacitu nekonečného řádu. Postupujme přesněji. Předpokládejme pro jednoduchost, že E je kompaktní prostor, pro nějž $f(E) = 1$. Potom na $\mathcal{K}(E)$, což je kompaktní množina kompaktních podmnožin prostoru E, existuje pravděpodobnostní míra μ taková, že pro každý kompakt $K \subset E$ je hodnota $f(K)$ rovna μ-pravděpodobnosti průniku K s proměnným kompaktem z E. Když speciálně je f elektrostatická kapacita v $E = E_3$, dostane se analogické tvrzení s mírou μ nesenou trajektoriemi Brownova pohybu. To poukazuje na těsný vztah mezi teorií potenciálu a teorií pravděpodobnosti, na vazbu, která se stále více potvrzuje.

Zmíněná zacházka mě však především přivedla poprvé k otázkám integrální reprezentace v konvexních množinách a konvexních kuželích.

Moje pozdější výzkumy o integrální reprezentaci měly fakticky za výchozí motivaci jednak popsané studium kapacit, jednak jednu větu, pocházející od R. S. Martina.

---

[3]) Pro upřesnění dokažme, že pro neklesající a silně subaditivní f jsou příslušné diference nekladné. Nerovnost $\Delta_2 \leqq 0$ lze totiž přepsat do tvaru $f(X \cup A_1 \cup A_2) + f(X) \leqq \leqq f(X \cup A_1) + f(X \cup A_2)$. Jestliže položíme $Y_1 = X \cup A_1$, $Y_2 = X \cup A_2$ a uvážíme, že $Y_1 \cup Y_2 = X \cup A_1 \cup A_2$, dostaneme ze silné subaditivity $f(X \cup A_1 \cup A_2) + f(Y_1 \cap Y_2) \leqq \leqq f(X \cup A_1) + f(X \cup A_2)$, odkud $\Delta_2 \leqq 0$, neboť $X \subset Y_1 \cap Y_2$ a f je neklesající.

Mám na mysli větu o integrální reprezentaci pro nezáporné harmonické funkce na oblasti v $\mathbb{R}^n$. Nelze zapomenout na další přání, které jasně vyjádřil R. Godement v jedné práci o reprezentaci nezáporných operátorů v Hilbertově prostoru: v zájmu větší obecnosti formulovat tvrzení, které by ušetřilo jednou provždy stohy papíru. Ale to je jiný příběh; vraťme se raději k původnímu problému kapacitability. Ke zkoumání dodatečných nerovností jsem přešel kvůli důkazu kapacitability množin typu $K_{\sigma\delta\sigma\delta}$ a dalších typů. Skutečně jsem nalezl $\Delta_3 \geqq 0$, $\Delta_4 \leqq 0$ atd. Bylo možné doufat, že $\Delta_3 \geqq 0$ poskytne výsledek pro množiny typu $K_{\sigma\delta\sigma\delta}$, dále $\Delta_4 \leqq 0$ výsledek pro množiny typu $K_{\sigma\delta\sigma\delta\sigma\delta}$ atd. Vrhl jsem se do práce, ale tvrdě jsem narazil. Je to nedostatek představivosti a techniky, nebo to je v podstatě věci? Velice uvážlivě jsem si řekl toto: představme si, že se dopracuji k důkazu, že $\Delta_3 \geqq 0$ dává kapacitabilitu pro množiny typu $K_{\sigma\delta\sigma\delta}$ a pak podobně s $\Delta_4 \leqq 0$ atd. Tím však má práce neskončí, neboť po těchto borelovských množinách přijdou složitější: např. množiny typu K_ω, které jsou spočetnými průniky borelovských množin konečných tříd, pak množiny typu $K_{\omega\sigma}$, $K_{\omega\sigma\delta}$ atd. Existují však nové nerovnosti, které bych ke zkoumání takových množin potřeboval? Dospěl jsem tedy k novému problému: jsou kromě nerovností $(-1)^n\Delta_n \leqq 0$ k dispozici další nerovnosti platné pro elektrostatickou kapacitu? Dokázal jsem, že takové nerovnosti neexistují v tomto smyslu: každý vztah mezi kapacitami libovolného konečného systému množin je důsledkem již nalezených nerovností $(-1)^n\Delta_n \leqq 0$.

Bylo to sice zajímavé, ale dostal jsem se do slepé uličky. Tehdy se moje podvědomí, bezesporu již po nějaký čas podrážděné, vynořilo na hladinu mého vědomí. Vybavil jsem si, že alespoň u borelovských množin v eukleidovském prostoru existují jiné způsoby jejich konstrukce, než postupné opakování kroků spočívajících ve vytváření spočetných průniků a sjednocení z již sestrojených borelovských množin. Polští matematici již dávno totiž ukázali, že každá borelovská podmnožina $\mathbb{R}^n$ je spojitým obrazem vhodné množiny typu G_δ z $\mathbb{R}$, tj. spočetného průniku otevřených podmnožin $\mathbb{R}$, dokonce spojitým obrazem množiny typu G_δ tvořené všemi iracionálními čísly v $\mathbb{R}$.

Toto není příliš rafinovaný způsob konstrukce borelovských množin, ale za zkoušku to stálo. (Necháváme stranou, že stejný postup lze užít na množiny obecnější než borelovské, totiž na analytické množiny.)

Především jsem dokázal, že každá $\mathcal{K}$-borelovská množina je spojitým obrazem množiny typu $K_{\sigma\delta}$. Obecněji: nazval jsem $\mathcal{K}$-analytickou množinou každý spojitý obraz množiny typu $K_{\sigma\delta}$. Tím jsem získal solidní vztah mezi množinami typu $K_{\sigma\delta}$ a libovolnými $\mathcal{K}$-borelovskými množinami, dokonce $\mathcal{K}$-analytickými množinami.

Zbývalo nalézt, jak přejít od už dokázané kapacitability množin typu $K_{\sigma\delta}$ ke kapacitabilitě jejich spojitých obrazů.

Nechť tedy X je množina typu $K_{\sigma\delta}$ v prostoru E a φ nechť je spojité zobrazení množiny X do prostoru F, v němž je definována silně subaditivní kapacita f. Má se dokázat, že množina $Y = \varphi(X)$ je f-kapacitabilní. Pokusil jsem se na E definovat pomocnou kapacitu e svázanou s kapacitou f vztahem $e(A) = f[\varphi(A)]$ pro $A \subset E$ kompaktní a využít pak e-kapacitabilitu množiny X v E. Brzy jsem však pochopil, že pro uplatnění této myšlenky je třeba dvojici (E, X) nahradit dvojicí $(E \times F, \Gamma)$, kde Γ je graf zobrazení φ. Pak je třeba použít místo φ projekci $E \times F$ na F, tedy položit $g(C) = f(pr_F C)$ pro každý kompakt C v $E \times F$.

Jestliže si povšimneme, že g je dobře definovaná kapacita, Γ je (stejně jako X) množina typu $K_{\sigma\delta}$ a že pro každou g-kapacitabilní část prostoru $E \times F$ je její projekce f-kapacitabilní a má stejnou kapacitu, důkaz je hotov, protože Y je projekcí grafu Γ.

Cesta k získání tohoto důkazu byla velmi dlouhá a nakonec mohl být důkaz vyložen na několika stránkách. Ale to je obecně platné: po dokončení obrazu se obraz zarámuje a skici zahodí. Nikdo již nemůže vidět dlouhou cestu, která k jeho vytvoření vedla. Chtěl jsem zde na chvilku oživit a v největší možné míře zrekonstruovat všechny dlouhé okliky, kterými jsem musel projít.

Koneckonců byly tyto okliky užitečné, neboť v průběhu svého myšlenkového pochodu jsem nalezl nové pravdy, někdy pro původně vytčený cíl neužitečné, ale zajímavé o sobě nebo svými důsledky: nekonečná posloupnost nerovností $(-1)^n \Delta_n \leqq 0$; třída $\mathcal{K}$-borelovských a $\mathcal{K}$-analytických množin; první zabočení do oblasti integrálních reprezentací; díky integrální reprezentaci alternujících kapacit nekonečného řádu spojovací článek mezi těmito funkcemi a teorií pravděpodobnosti; a metoda využívání součinových prostorů.

Poznámka překladatele: Gustave Choquet se narodil 1. 3. 1915. Mimořádné nadání pro matematiku projevoval již při studiu na gymnáziu; obzvláště měl v oblibě geometrii. Přestože později vynikl především v matematické analýze, geometrická představivost, intuitivní smysl pro axiomatizaci, mimořádná schopnost abstrakce a lehkost, s níž uměl „vidět prostor“, stojí v pozadí jeho matematických úspěchů.

Láska ke geometrii přerostla u G. Choqueta v aktivní zájem o vyučování této disciplíny na škole.

Poznamenejme, že v letech 1950 – 1960 byl G. Choquet prezidentem mezinárodní komise pro výzkum a zlepšení výuky matematiky. Publikoval řadu odborných prací z didaktiky geometrie a své názory s odhodláním prosazoval. Pro zajímavost uveďme jeden z nich z r. 1974:

V současné době silný didaktický proud směřuje k nahrazení geometrie v gymnaziální výuce trochou lineární algebry. K tomu dochází v představě, že lineární algebra je královská cesta umožňující bez úsilí pochopit podstatu geometrických vlastností. V tom je poněkud utilitární přístup. Přehlíží tvořivou úlohu geometrických úvah a důležitost geometrické intuice. Tu nelze rozvíjet a upevňovat jinak než bezprostředním kontaktem s jednoduchými geometrickými objekty. Připustit takové nahrazení geometrie algebrou by bylo totéž, jako kdyby horolezec považoval za horolezectví zdolání Everestu helikoptérou.

V letech 1934 – 38 studoval G. Choquet na pařížské École Normale Supérieure a školní rok 1938/39 strávil jako stipendista v Princetonu. Bylo to období velkých Gödelových objevů, o nichž se mj. dovídal z přednášek A. Churche. V Princetonu vznikl zárodek Choquetova trvalého zájmu o matematickou logiku.

Období 1941 – 46 zasvětil G. Choquet intenzívní vědecké práci. Byl stipendistou Centre National de la Recherche Scientifique a zabýval se topologickými a metrickými vlastnostmi množin v eukleidovských prostorech, teorií míry, konformním zobrazením, teorií potenciálu, variačním počtem, diferenciální geometrií, ale také parciálními diferenciálními rovnicemi, teorií křivek a teorií grafů.

V r. 1946 obhájil G. Choquet disertační práci, jejíž téma je na pomezí teorie reálných funkcí a geometrie křivek i ploch.

Léta 1946 – 47 prožil G. Choquet na *Institut Français de Pologne* v Krakově, v období 1947 – 49 byl docentem na univerzitě v Grenoblu. Tam zahájil plodnou spolupráci s M. Brelotem v teorii potenciálu. V r. 1949 přichází do Paříže, kde působil na univerzitách i na polytechnice. O tomto období říká:

Moje vědecká práce se dělila mezi teorii potenciálu a lineární funkcionální analýzu a také četné další oblasti, které mají k těmto disciplínám vztah. Ale takřka všechna moje vědecká činnost vychází z teorie potenciálu. Jsem natolik přesvědčen o plodotvorné síle této teorie, že se výzkumné pracoviště, které v Paříži vedu, zformovalo kolem dvou seminářů, a to z funkcionální analýzy a z teorie potenciálu. Teorie potenciálu ve své bohaté minulosti zrodila nebo v novém světle uvedla mnohé další teorie: Hilbertovy prostory a metodu projekce, teorii míry a v pozdější době distribuce a pravděpodobnostní počet.

G. Choquet absolvoval na deset dlouhodobých zahraničních pobytů (USA, Velká Británie, Austrálie). Je znám jako vynikající vysokoškolský pedagog. Jeho vědecká práce byla oceněna v letech 1945, 1951, 1956 a 1968 cenami pařížské Akademie věd, v r. 1976 byl zvolen řádným členem této vědecké instituce. V r. 1966 byl poctěn titulem Rytíř čestné legie.

G. Choquet je autorem na 150 prací, 7 monografií a řady učebnic. Ve svém textu *Notice sur les travaux scientifiques* z r. 1974 (ze kterého jsou převzaty výše uvedené pasáže) věnuje okolo 70 stran výkladu svých vědeckých výsledků, jejich genezi i významu a aplikacím. Patrně nejznámější jsou Choquetovy výsledky v teorii kapacit a v oblasti integrální reprezentace konvexních množin. Necháme-li stranou jeho práce z reálných a komplexních funkcí, variačního počtu, geometrie a její didaktiky a teorie grafů, stále máme podstatnou část Choquetova díla před sebou: teorie potenciálu (vlastnosti průměru pro harmonické a polyharmonické funkce, Greenovy prostory, harmonické a polyharmonické polynomy, velikost množiny bodů tenkosti, míry na polárních množinách typu G_δ, existence jemného nosiče míry, nové důkazy Keldyšovy věty o iregulárních bodech, teorie potenciálu pro obecná jádra, integrál energie, věty o konvergenci potenciálů, teorie vymetání atd.); funkcionální analýza (cylindrické a kónické míry, adaptované prostory, reprezentace lineárních forem atd.); teorie množin (např. konstrukce ultrafiltrů význačných vlastností); teorie míry (např. množiny paradoxních vlastností, Prochorovovy prostory); topologie (teorie konvergence, Baireovy prostory, topologické hry, deskriptivní teorie množin, topologie $\mathbb{R}^n$ atd.).

Gustave Choquet: *La naissance de la théorie des capacités: réflexion sur une expérience personelle.* La Vie des Sciences, *Comptes rendus*, série générale, tome 3, n° 4, Juillet – Août 1986, 385–397. Přeložil Ivan Netuka.

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, ročník 34 (1989), č. 2, 71–83.

Spojité, diskrétní a …všechno ostatní

Gustave Choquet

1. Pomalý vývoj

Spojité a diskrétní jsou dvě důležitá témata vědeckého myšlení. Jejich existence nepřestávala zneklidňovat mysl matematiků, fyziků a filozofů. Chtěl bych se zde pokusit o upřesnění jejich místa v moderní vědě a načrtnout studii jejich vzájemných vztahů.

Tato slova, *spojité* a *diskrétní*, evokují mnoho dalších klíčových slov a příbuzných pojmů: *spojitost*, *nespojité*, *nekonečno aktuální či potenciální*, *Achilles a želva*, *dualita*, *vlny – částice*, *fuzzy množiny*, atd. …

Tato témata se pozvolna obohacovala počínaje od Pythagora, Eleatů a Aristotela. A přece jejich studium nešlo kupředu po celá staletí, jako kdyby Aristotelova autorita brzdila tvůrčí elán patrný v Iónské škole, oplývající matematiky a astronomy jako byli Thalés z Milétu a Aristarchos ze Samu.

Je pikantní říci, že kdyby Řekové Periklova století znali z cantorovského světa třeba jen krátkou definici ekvipotence dvou množin prostřednictvím bijekce, celá historie matematiky a filozofie by byla jiná.

Myslím si tedy, že bude zajímavé zastavit se u příčiny tohoto dlouhého spánku. Shledávám ji v konzervatismu lidského myšlení: člověk má tendenci považovat to, co se naučil v mládí, za neměnné pravdy a sám to předávat svým vlastním dětem. Historie vědy a techniky to bohatě dosvědčuje.

Aby se člověk dostal ze zaběhnutých kolejí tradice, potřebuje k tomu pobídku nezbytnosti, setkání s drobným provokujícím pozorováním, které zpochybní jeho získanou intuici, nebo které otřese jeho filozofickými a vědeckými koncepcemi. Často právě slepé uličky vědy jsou na počátku její obnovy, jak nám ukazují četné příklady.

Byl to právě Michelsonův pokus s rychlostí světla, který dovedl Einsteina k opuštění pojmu *éter* a přivedl jej ke speciální teorii relativity. Náhodné pozorování šumu v roce 1964 vedlo Penziase a Wilsona k objevu reliktního pozadí rádiového záření.

Vraťme se ale k matematickému pojmu spojitého, abychom dokreslili naše tvrzení.

(a) Více než 2000 let uplynulo mezi Eukleidem a neeukleidovskými geometriemi (Lobačevskij kolem 1830, dále Bolyai, Gauss). Nejprve bylo třeba o Eukleidově postulátu pochybovat, poté byl již neeukleidovský model objeven dosti rychle.

Rozvoj *geometrie ploch* byl dále rychlý. Nejprve Gauss ve svých *Disquisitiones* (1827) ukázal, jak lze vnitřně studovat plochy, poté Riemann ve své inaugurační přednášce *O hypotézách, které tvoří základ geometrie* v roce 1854 zahajuje studium *velikostí n-krát rozprostraněných.* Scéna je tak připravena k modernímu rozvoji pojmu diferencovatelné variety konečné i nekonečné dimenze.

(b) Vývoj *topologických pojmů* a *pojmu nekonečna* měl podobný průběh. Po rostoucích posloupnostech Zénóna z Elei v souvislosti se šípem či želvou bylo třeba dlouhého přešlapování na místě, než se dospělo k dobré definici konvergence posloupností (Cauchy 1823) a k definici iracionálních čísel (Cantor, Heine, Dedekind kolem 1872).

Poté je vývoj rychlý. O něco později (1878 – 1884) Cantor zavádí v eukleidovských prostorech nám blízké topologické pojmy a především pojem bijekce dvou množin. V roce 1906 Fréchet a později F. Riesz, motivováni prostory funkcí, definovali metrické prostory, čímž opustili tradiční kontext eukleidovských prostorů. V roce 1914 Hausdorff dospívá k elegantní syntéze topologických pojmů, které se od té doby osvědčily. V letech 1920 – 1922 Banach a Hahn podávají obecnou definici normovaných prostorů. Obecnější topologické vektorové prostory se objevují v roce 1935 díky von Neumannovi.

Krásná syntéza navržená Hausdorffem ve své zdánlivě definitivní formě podané bourbakisty poskytuje dobrý příklad toho, co znamená tíha tradice. V letech 1930 – 1950 bylo vskutku možno věřit, že tento topologický kontext je natolik vhodný, aby postihl všechny pojmy konvergence užitečné pro analýzu. Ale v roce 1948 malý detail ukázal, že tomu tak není. Konvergenci na množině $\mathcal{F}(E)$ uzavřených podmnožin topologického prostoru E nelze vyjádřit pomocí topologie na $\mathcal{F}(E)$ (pokud E není lokálně kompaktní). Na $\mathcal{F}(E)$ je nutno zavést strukturu nového typu, takzvanou pseudotopologii. Od té doby se zjistilo, že tyto struktury, přestože nejsou tak užitečné jako topologie, jsou nezbytné rovněž ke studiu diferencovatelných variet nekonečné dimenze.

(c) Pojem křivky je pro nás spojen s topologií, ale u našich předků tomu tak nebylo. Křivkami byly především kružnice a kuželosečky a později několik dalších křivek, jako například Dioklova kisoida nebo Nikomedova konchoida.

Bylo třeba počkat na Descartovy souřadné osy (1660), aby byla naráz k dispozici celá třída algebraických křivek. A teprve za dalších 200 let podal Jordan (1866) obecnou definici jednoduché uzavřené křivky a formuloval svou větu o rozdělení roviny takovouto křivkou. Tuto větu pak Brouwer (kolem 1920) pozoruhodným způsobem zobecnil na kompakty v $\mathbb{R}^n$.

Pojem křivky se dále rozvíjel několika směry. Jedním z nich jsou jordanovská kontinua, tj. spojité obrazy intervalu $[0,1]$ (což může např. být i eukleidovská krychle). Další je blíže naší intuici a jedná se o souvislé množiny topologické dimenze 1, tedy souvislé kompakty, jejichž každý bod má bázi otevřených množin s diskrétní hranicí. Tyto množiny představují faunu velmi bohatou. L. J. Brouwer jako první zkonstruoval v roce 1910 rovinné kontinuum dimenze 1, které je nerozložitelné v tom smyslu, že není sjednocením dvou vlastních podkontinuí. Například slavný Hénonův atraktor a mnoho dalších atraktorů jsou nerozložitelná kontinua. Existují rovněž rovinná nerozložitelná kontinua, která dělí rovinu na n oblastí (kde $n \geqq 2$) a jsou přitom jejich společnou hranicí.

V této době také vznikají četné příklady zvané „patologické“. Jejich předchůdcem je známá spojitá funkce na intervalu $[0,1]$, která nemá nikde derivaci. Tato funkce zkonstruovaná Weierstrassem (typu $f(x) = \sum_1^\infty \sin(n^{2n}x)/n^n$) velmi provokovala Hermitea (*nenávidím tuto pohromu funkcí bez derivace*). Jednoduché rovinné oblouky nenulové Lebesgueovy míry, Antoineovy kompakty v $\mathbb{R}^3$, které jsou propleteny uzavřenými mnohoúhelníky, aniž by je protnuly, některé jsou dimenze 0 a jiné jsou homeomorfní se sférou, Lebesgueovy rotační plochy, které jsou izometricky (tj. se zachováním délek jednoduchých oblouků) zobrazitelné na rotační kužel a přesto neobsahující žádnou část přímky.

Tyto „jedovaté květy" matematiky se střetávaly s návyky myšlení získanými téměř výhradně prací s analytickými funkcemi. Postupně vnesly trochu čerstvého vzduchu a vytvořily paradigmata nových teorií, pro něž se staly mantinely i hnacími motory. Vedly tak k vytvoření nových nástrojů a nových legitimních objektů.

Tak vznikla Lebesgueova teorie integrálu, provázená plodným metrickým pojmem *skoro všude*. Paralelně, ale v topologickém kontextu, se pak zrodil Baireův pojem *skoro všude*, dnes nazývaný generičnost: Vlastnost $P(x)$ závislá na bodu x topologického prostoru E se nazývá *generickou* v E, jestliže množina těch x, pro které $P(x)$ neplatí, je malá, totiž je sjednocením posloupnosti množin, jejichž uzávěry mají prázdný vnitřek. Pokud E je úplný metrický prostor nebo lokálně kompaktní prostor, pak $\{x\,;\ \text{platí } P(x)\}$ je hustá v E.

Tyto dva pojmy *skoro všude* například umožňují dát smysl následujícím dvěma tvrzením:

(a) Skoro každé reálné číslo je normální (v Borelově smyslu).

(b) Množina spojitých funkcí f na intervalu $[0,1] \times [0,1]$, pro něž je diferenciální rovnice $y' = f(x,y)$ deterministická (jednoznačnost řešení v každém bodě), je generická.

Dnes se při studiu spojitosti setkáváme se třemi tendencemi. První vychází z Riemannových prací o diferencovatelných varietách, druhá pochází od Cantora a třetí vychází z Cauchyových prací o analytických funkcích. Po pozoruhodném rozkvětu, jehož hlavním aktérem byl Poincaré, je dnes ve Francii poslední z těchto tendencí sledována jen málo. Přesto i nás Cauchyův duch nepřestává inspirovat pozoruhodné práce, např. o funkcích více komplexních proměnných, o analytických varietách, atd.

Riemannovy myšlenky, kultivované Sophusem Lie a později Elie Cartanem, měly překvapivá pokračování: diferencovatelné variety, parciální diferenciální rovnice a Lieovy grupy. Teorie Lieových grup prodělala bouřlivý rozvoj jednak pro svou vlastní krásu, jednak pro své úzké vazby na fyziku a četné další matematické teorie.

Cantorovo potomstvo je možno rozpoznat spíše podle jistého přímého geometrického přístupu k problémům než podle předmětu studia. Zajisté existují obory čistě cantorovské, jako je studium velkých kardinálů, deskriptivní teorie množin (borelovské, analytické, projektivní, ...), teorie míry, pravděpodobnost a teorie Banachových prostorů. Ale především tento směr vytvořil nástroje použitelné téměř ve všech odvětvích matematiky.

Ve všech těchto třech proudech se největší extrémisté nerozpakují kategoricky odsuzovat proudy ostatní. Je to lidské, ale politováníhodné: *In medio stat virtus.*

Hodnota určité teorie je koneckonců jen odleskem hodnoty těch, kteří ji vytvářejí. Kdo by v roce 1643 věřil, že Pascalův *aritmetický stroj* povede ke zrodu počítačů, nebo že v roce 1652 Pascalova korespondence s Fermatem o jednom problému z hazardních her zrodí náš mocný pravděpodobnostní kalkul. Dnes lze podceňovat teorii fuzzy množin (ztotožňovaných s funkcemi s hodnotami v intervalu $[0,1]$ namísto v množině $\{0,1\}$), ale možná, že jednoho dne nějaký mladý tvůrce poněkud pozmění její základ, dokáže hluboké věty, a tak z ní učiní plodný nástroj. Takže nezabíjejme kuře už ve vajíčku.

2. Aktéři a modely

1. Spojité a diskrétní

Pro řecké filozofy je *spojité* modelováno jednak časem, který plyne jako voda a který umíme měřit, a jednak úsečkami. U diskrétního se jim zdá vše samozřejmé: rozlišujeme objekty, počítáme jejich počet v určitém souboru.

Pro matematika 20. století jsou dvěma matematickými archetypy uspořádané těleso $\mathbb{R}$ reálných čísel a množina $\mathbb{N}$ celých nezáporných čísel.

Vztahy mezi $\mathbb{R}$ a $\mathbb{N}$ jsou dobře známy: pomocí $\mathbb{N}$ zkonstruujeme těleso $\mathbb{Q}$ racionálních čísel a pak $\mathbb{R}$. Naopak $\mathbb{N}$ je kladná část podokruhu $\mathbb{R}$ generovaného jeho jednotkou 1.

Samotný fakt, že každý topologický prostor, který je dostatečně regulární (takzvaně úplně regulární), je homeomorfní s nějakou částí krychle $[0,1]^I$ konečné nebo nekonečné dimenze, dostatečně ukazuje důležitost $\mathbb{R}$.

Pokud bychom chtěli popsat podstatu, ne-li historickou, tak alespoň psychologickou, zavedení $\mathbb{R}$ a $\mathbb{N}$, můžeme podtrhnout zásadní roli $\mathbb{N}$ při počítání prvků nějaké množiny. Pro $\mathbb{R}$ je to méně jasné. Zdá se mi ale, že nepřítomnost geometrických přímek v našem běžném světě, a naopak zásadní význam plynutí času v každodenním životě, svědčí spíše o postupném, čím dál tím přesnějším, ztotožňování $\mathbb{R}$ s *Časem*. Čas se nám jeví jako orientovaný, rozlišujeme minulost a budoucnost a obě se nám zdají přinejmenším zhruba uspořádané. Je pravdou, že psychologický čas není homogenní a občas máme dojem, že prostor vládne času a ne naopak. Ale společenský život nás nutí měřit čas, a to nás vede k využívání opakujících se přírodních jevů. To je založeno na víře ve stabilitu světa a na principu *tytéž příčiny vedou k týmž důsledkům*. Jedná se především o sled dnů a nocí a ročních období. Dále pak o zjemnění měření v rámci jednoho dne: sluneční hodiny (ty ale mají své slabiny) a především vytékání vody otvorem z nádoby, v níž je udržována konstantní hladina.

Matematickým modelem této situace je $\mathbb{R}$ se svým úplným uspořádáním. Existence tohoto úplného uspořádání a *orientace času* vedly k nesčetným studiím a diskusím. Léon Motchane velice dobře zdůraznil existenci této orientace: Jestliže pozorovatel chce změřit okamžitou rychlost pohybujícího se tělesa v okamžiku t_0, může ji v principu změřit zleva měřeními v okamžicích t_n rostoucích k t_0, ale nemůže ji měřit zprava, protože po pozorování v okamžiku t_0 následuje další pozorování v okamžiku t_1 a již není možné se vrátit zpět a přiblížit se k t_0.

Dříve než budeme studovat vztahy spojitého a diskrétního, chtěl bych učinit poznámku o roli, kterou hrají v $\mathbb{R}$ iracionální čísla. Buď A množina konstruovatelných reálných čísel, tedy čísel, jejichž desítkový rozvoj je vypočitatelný jedním algoritmem, řekněme naprogramovaným počítačem. Jsou to například racionální čísla, algebraická čísla, e, π, atd. Protože A je spočetná, existují $x \in \mathbb{R}$, která nemůžeme explicitně určit a která nám tedy zůstanou navždy neznámá. Jaká je jejich role?

Právě ona ulehčují poznávání konstruovatelných čísel. Jistě, zůstanou vždy nepřístupná pro výpočet, ale bez nich by ty pro analýzu nejužitečnější vlastnosti $\mathbb{R}$ zmizely nebo byly obtížně formulovatelné.

Například cauchyovské posloupnosti by nekonvergovaly, kromě těch, které jsou definovány nějakým algoritmem, $[0, 1]$ by už nebyl kompaktní, metrické i topologické *skoro všude* by zmizelo, protože množina konstruovatelných čísel je metricky i topologicky zanedbatelná.

Je pravda, že $\mathbb{R}$ je jednoznačné v každém modelu teorie množin a tato jednoznačnost se zdá být v rozporu s tím, že některá čísla nejsou definovatelná. Ale fakt, že existuje nekonečně mnoho modelů teorie množin, a tedy i $\mathbb{R}$ a $\mathbb{N}$, umožňuje lépe pochopit, proč jsou prvky z $\mathbb{R} \setminus A$ neuchopitelné.

Ale nyní bych chtěl hovořit o jiných druzích modelů, abychom lépe pochopili, jakým způsobem si diskrétní a spojité vynutilo naši pozornost a jaké jsou jejich vzájemné vztahy.

2. Modely

Aby člověk překonal handicapy spojené s křehkostí svého organismu a aby překročil bezprostřední hnutí svého „krokodýlího mozku" (hlad, žízeň, strach, sexuální popudy) vrhající ho do budoucnosti, vytváří a používá mentální struktury, které nazývám modely. Toho je schopen díky své paměti a výkonnému mozku. Tyto *modely* jsou základem našeho způsobu myšlení a činnosti. Tvoří jakási lešení, na která se snažíme zavěsit zároveň naše znalosti i naše činnosti. Jsou to nástroje našeho předvídání i našich plánovaných činností.

Máme modely pro následující minutu, pro hodinu, pro budoucí dny. Někteří z nás sotva vyšli z puberty a už plánují svůj důchod. Generál, boxer, šachista i poslanec mají své taktiky a strategie.

Jestliže jsou modely dostatečně jednoduché, mohou zůstat ve formě mentální struktury. Jestliže se ale stanou složitějšími, jsme nuceni je konkretizovat na nějakém materiálním podkladě: pomocí obrázku (plány a mapy jsou modely obdivuhodně účinné) nebo pomocí sledu malých obrázků. Třeba také ideogramy nebo písmena, která dnes již zcela ztratila svůj význam, ale která vhodně uspořádána tvoří slova (mající již smysl), a dále věty schopné upřesnit náš mentální model. Jestliže k nim přidáme matematické symboly, jejich pravidla sdružování mají dokonce pozoruhodnou moc rozvinout mentální model, aby byl účinnější, i když je to na úkor jeho jistého počátečního bohatství.

Právě jsem ukázal, jakým způsobem dochází k přechodu od mentálního modelu bohatého na smyslové rezonance, ale obtížně sdělitelného pro svou příbuznost s multidimenzionálním kontinuem, k modelu diskrétnímu, vyjádřitelnému konečným počtem znaků, tedy vlastně pomocí konečné posloupnosti 0 a 1.

Je nepochybné, že čínská báseň, zapsaná v ideogramech, které v sobě ještě mají bohatost vnitřního života svého autora, zůstane navždy nepřeložitelná do písma naší abecedy: na všech polích vítězit nelze.

Diskrétní účinně vstupuje do hry, jakmile chceme zapsat nebo předat nějaký model svého mentálního života. A s touto potřebou se lidé střetávali od chvíle, kdy začali myslet. Zdá se mi tedy marné pokoušet se dokázat ontologické prvenství jednoho či druhého termínu: *Spojité* a *Diskrétní*. Je to s nimi jako s Jing a Jang: jestliže potkáváme jedno z nich, druhé je již přítomno.

Snad by bylo možno říci, že oblast spojitého je oblastí smyslových vjemů (hebkost kůže, vlahost vzduchu, odstíny duhy) a oblast diskrétního je oblastí uspořádání a komunikace.

3. Vztahy mezi spojitým a diskrétním

Tyto dva aspekty jsou neoddělitelné. Je to pravda ve fyzice a snad ještě více v matematice. Ve vlnové a kvantové mechanice tvoří vlny a částice dva vzájemně se doplňující aspekty reálného světa. Teorie plynů, kapalin a pevných látek mohla pokročit jen tím, že užívala jejich atomární nebo molekulární strukturu.

V matematice vystupují spojité a diskrétní propojené buď prostřednictvím duality, nebo prostřednictvím aproximací.

(a) *Dualita*

1. Množina tříd uzavřených smyček na kompaktní ploše bez hranice (sféra, torus s jedním, či několika prstenci) uvažovaných až na spojitou deformaci má v přesném slova smyslu diskrétní strukturu, protože není možno spojitě přejít od jedné třídy k druhé. Navíc zde ovšem máme strukturu aditivní grupy, generované konečným počtem prvků (jedním pro sféru, dvěma pro torus s jedním otvorem).

2. Torická n dimenzionální grupa $\mathbb{T}^n$ má za duál diskrétní grupu $\mathbb{Z}^n$ a naopak.

(b) *Aproximace*

1. Již Řekové uměli vyjádřit úsečku pomocí násobků menší úsečky (původ Eukleidova algoritmu a řetězových zlomků).

2. Přibližný výpočet rovinné plochy pomocí čtverečků rovinné sítě.

3. Integrál spojité funkce jako limita riemannovských konečných součtů.

4. Aproximace harmonické funkce v oblasti roviny D pomocí preharmonických funkcí definovaných ve vrcholech konečné čtvercové sítě obsažené v D.

5. Všeobecně je znám stále rostoucí průmyslový význam metody konečných prvků (vzniklých v roce 1956 u Boeinga), která spočívá v nahrazení křivých ploch trupů letadla nebo lodi soustavou trojúhelníkových prvků, které je možno počítačově zpracovat.

6. Dřívější analogové výpočetní pomůcky, založené na spojitých strukturách (logaritmické pravítko, analogové počítače) jsou dnes téměř bezezbytku nahrazeny počítači založenými na binárním kalkulu. Poskytují sice jen aproximaci studovaných jevů, ale její přesnost je omezena jen výkonem počítače.

7. Televize používá sice *spojité* elektrické povahy, ale její obrazovka má diskrétní strukturu.

8. V matematice je užitečné při studiu problémů analýzy týkajících se spojitých struktur studovat nejprve analogickou diskrétní nebo i konečnou strukturu. Vskutku, někdy lze ve zjednodušeném případě odhalit nové vztahy a důkazy přenositelné do původního kontextu (např. konečné modely teorie potenciálu).

3. Složité diskrétní systémy

V matematice a ještě více v experimentálních vědách je v závěru dvacátého století patrný vzrůst důležitosti struktur budovaných nad konečnou či diskrétní množinou. Díky rozvoji informatiky, umožněnému výkonností počítačů a větším pochopením algoritmů, můžeme tvrdit, že tato tendence v jednadvacátém století ještě poroste.

Matematici, a především Bourbaki, jako první jasně definovali hierarchii množin konstruovaných na základě dané třídy množin (E_i). Jedná se o hierarchii nových množin zkonstruovaných z E_i za pomoci operace součinu $(X, Y) \to X \times Y$ a operace potence $X \to \mathcal{P}(X)$. Například uspořádání na E je možno definovat jako část $E \times E$ obsahující diagonálu. Struktura uspořádání (nebo algebraická struktura či topologie) na E je podmnožina $E \times E$ (nebo $E \times E \times E$, nebo $\mathcal{P}(X)$) splňující jisté axiómy.

Matematikové nečekali se svým zájmem o konečné a diskrétní struktury na éru informatiky. Ostatně diophantovská analýza, kombinatorika, či teorie grafů nezačaly včera. Ale zdá se, že *duch doby* tlačí matematiky právě tímto směrem. Nedávno byly klasifikovány všechny konečné jednoduché grupy. Za pomoci počítače se přistoupilo ke studiu problému čtyř barev. Díky nestandardní analýze se již nebojíme mluvit o nekonečných celých číslech. Boltzmannova rovnice je studována za předpokladu, že množina rychlostí je konečná. Penrose studuje neperiodická dláždění mající jen dva různé typy polygonálních dlaždic a podobná dláždění vysvětlují syntézu neperiodických krystalů.

Samotní neurofyziologové jsou při svých pokusech o vysvětlení záhad mozku vedeni k užití hierarchie množin konstruovaných nad dvěma konečnými množinami — množinou neuronů a množinou dendritů: svazky neuronů, ale také interakce mezi těmito svazky prostřednictvím dendritů, atd.

4. Zrození třetího aktéra

Viděli jsme, že od počátku lidského myšlení se *Spojité* a *Diskrétní* vyvíjelo v průběhu staletí souběžně, ať už jedno v protikladu k druhému nebo ve vzájemném doplňování se či v dualitě. Ale od 17. století se zrodem počtu pravděpodobnosti byly kostky vrženy. Do hry tak vstoupil třetí aktér, který se dnes zdá být nejlepším prostředníkem mezi diskrétním a spojitým a je rovněž nejlepší ilustrací složitého diskrétního.

Na počátku 19. století zaznamenalo spojité v souvislosti s Laplacem takový úspěch, že mohlo být považováno za nejlepší základ determinismu.

Citujme slavný Laplaceův výrok z jeho *Filozofické eseje o pravděpodobnosti* (1814): *Kdyby nějaká inteligence, která by v daném okamžiku znala všechny síly, jimiž je příroda uváděna do pohybu, byla dostatečně pronikavá, aby mohla tyto znalosti vyhodnotit za pomoci matematické analýzy, pak by mohla v jediné formuli vyjádřit všechny pohyby velkých i malých těles a budoucnost i minulost by ležela před jejím zrakem.*

Tato iluze, plodná pro rozvoj studia mechaniky, byla založena na poznatku, že diferenciální rovnice s analytickými vstupními údaji má (až na zanedbatelné výjimky) jen jedno řešení splňující počáteční podmínky.

Je pikantní, že tato pevná víra v determinismus se objevila v záhlaví práce o pravděpodobnosti, když právě pravděpodobnost dávala tušit konec deterministické hegemonie. O sto let později, díky Planckovi, Einsteinovi, N. Bohrovi, de Brogliovi, Heisenbergovi, částice a pravděpodobnost okázale vstoupily do fyziky a nalezly v ní četné aplikace: fotoelektrický efekt, tunelový efekt, …

Determinismus si zachovává své místo ve fyzice a v matematice ve studiu méně složitých systémů a pro vhodná měřítka prostoru a času. Za chvíli se vrátím k významu měřítka, ale přesto bych chtěl již nyní zmínit dva příklady, které zároveň ukáží interakce mezi spojitým a diskrétním.

(a) *První příklad* sahá k počátkům kinetické teorie plynů (1738). Jedná se o plyn obsažený v kulové nádobě. Pro jednoduchost předpokládejme, že molekuly jsou kulového tvaru a srážky jsou elastické. Máme tedy diskrétní deterministický systém. Po dosti krátkém čase, ať už byl počáteční stav jakýkoliv, bude rozdělení molekul a jejich rychlostí odpovídat Maxwellovým pravděpodobnostním zákonům a v makroskopickém měřítku bude mít plyn opět deterministické chování řízené klasickými zákony. Obláček molekul se tedy bude chovat podle následujícího schématu:

$$\text{determinismus} \to \text{diskrétní chaos} \to \text{pravděpodobnostní zákon} \to$$
$$\to \text{determinismus (Mariotte, atd.)}.$$

Tento komplexní systém tedy hraje úlohu prostředníka mezi determinismy na různých úrovních.

(b) *Druhý příklad* nám poskytují podivné atraktory, a konkrétněji slavný Hénonův atraktor související s iterováním kvadratického zobrazení. Buď f zobrazení $\mathbb{R}^2$ do sebe definované rovnicí $f(x,y) = (1 + 0{,}3\,y - 1{,}4\,x^2,\, x)$. Zvolme libovolně bod M_0 s $\|M_0\| \leqq 1$. Posloupnost $M_n = f(M_{n-1})$ postupných iterací M_0 je dobře definována. Přesto je její chování chaotické a nepředvídatelné. Ale překvapivě, jestliže pozorujeme na obrazovce počítače obláček bodů M_n, vidíme, že se seskupují do jednoho z oněch nerozložitelných kontinuí definovaných Brouwerem. Navíc charakter obrazu se po tisícovce iterací stabilizuje, což vytváří rozdělení λ, které je navíc nezávislé na M_0.

Máme zde tedy schéma podobného typu jako u dokonalých plynů, totiž chaotické chování zrozené z deterministického zákona, které po určitém čase podléhá novému deterministickému zákonu (v našem případě míře invariantní vůči zobrazení f).

Tento jev připomíná cesty v džungli, dobře průjezdné při nízké rychlosti, nesnesitelné při střední rychlosti, které jsou opět dobré při vysoké rychlosti (viz rovněž podzvukový, zvukový a nadzvukový let).

Všechny tyto příklady zdůrazňují význam měřítka prostoru i času. Brzy se k tomu vrátím, ale nyní bych chtěl zdůraznit, že rozdílnost mezi *determinismem* a *předvídatelností* je ve fyzice spojena s volbou měřítka času. Nic není více deterministické než diferenciální rovnice $dx/dt = x$, jejímiž řešeními jsou funkce $x = ae^t$. A přece při chybě e^{-10} v čase 0 bude v čase 10 chyba $\geqq 1$. Toto Ruelle nazývá exponenciální citlivost na počáteční podmínky. Jinak řečeno, motýlí efekt: jedno mávnutí jeho křídel může změnit osud jiné sluneční soustavy.

Existence pravděpodobnostního chaosu, spojená s deterministickými procesy, umožňuje hazardní hry, karty, loto, atd. Hra v kostky se mi zdá zvláště zajímavou. Dvě neoznačené kostky jsou umístěny v dostatečně širokém kalíšku, kterým se několikrát zatřese, poté jsou kostky vrženy na stůl, na kterém se několikrát převalí před tím, než se zastaví. Z jakého důvodu hráči věří, že například výskyt dvojice $(3,4)$ je nezávislý na hráči, když všechny pohyby jsou řízeny deterministickými mechanickými zákony?

Je tomu tak proto, že konečný výsledek závisí na velkém množství parametrů, z nichž žádný není přesně znám a které se mění při každé hře. Odskoky kostek v kalíšku, počáteční pozice, rychlost při opuštění kalíšku, nepravidelnosti podložky, pohyb vzduchu. Můžeme jít ještě dále, protože hráčovo gesto je rovněž výslednicí množství nezávislých příčin a tak dále. Kaskáda nezávislých jevů, z nichž každý je řízen nějakým deterministickým zákonem, tedy může přijatelně simulovat náhodnost.

Jak je tomu ve fyzice? Na atomární a subatomární úrovni kvantová teorie postuluje náhodnost neredukovatelnou na deterministické vlivy. Pravděpodobnost přítomnosti fotonů asociovaných s vlnou, elektrony obíhající kolem jádra atomu, náhodná desintegrace radioaktivních atomů. Ale známe Einsteinův výrok: *Bůh nehraje v kostky.* Jak je tomu přesně? Nebylo by, ve světle pravděpodobnostního chaosu deterministického původu, možno rovněž tvrdit: *Protože Bůh nemá rád náhodu, nepřestává hrát v kostky*? Je tomu tak, že slavná Bellova věta a pokus Alaina Aspecta z roku 1982 ukončily hledání deterministických vysvětlení náhodných jevů v kvantové mechanice? Nebo je možno zkonstruovat fyzikální model, který by je vysvětlil pomocí dlouhých kaskád vzájemně se ovlivňujících jevů řízených deterministickými zákony? Nechme to na odbornících. Ale ověřili fyzikové na malém radioaktivním vzorku, že sled rozkladů se děje podle obvyklých pravidel platných pro náhodné posloupnosti? Myslet si, že Bellova věta jednou provždy rozhodla ve prospěch kvantové mechaniky, by znamenalo znovu upadat do iluze, že existují přesné modely světa.

Tyto úvahy mě vedou k otázce zda a do jaké míry je možno napodobit náhodu. Ztotožněme množinu posloupností (a_n) čísel 0,1 s nekonečným součinem $E = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Zaveďme na E součinovou topologii a pravděpodobnostní míru λ, která je součinem měr $(\delta_0 + \delta_1)/2$ na faktorech prostoru E. Vlastnost $P(x)$ na E se bude nazývat *statistická*, pokud je definována konstruovatelnou formulí a je splněna λ-skoro všude na E. Například zákon velkých čísel nebo zákon iterovaného logaritmu. Množina statistických vlastností je spočetná (ale ne efektivně vyčíslitelná), tedy λ-skoro všechna x z E splňují všechny statistické vlastnosti. Přitom je ale nemožné *sestrojit* takovou posloupnost $x = (x_n)$. Jinak řečeno, *není možno napodobit náhodu.* Tato situace je podobná situaci, se kterou jsme se setkali při studiu $\mathbb{R}$. V obou případech skoro žádný bod E není konstruovatelný.

Naproti tomu je možné se více či méně „opičit“ po náhodě v tom smyslu, že pro každou konečnou množinu statistických vlastností můžeme, ovšem ne vždy je to snadné, zkonstruovat posloupnosti $x = (x_n)$, které je splňují. To je to, co dělají statistikové, výrobci počítačů a agronomové tím, že vybírají $P_1, P_2, \ldots, P_n$ vyhovující jejich potřebám.

5. Měřítka a řády velikosti

Užití mikroskopu či teleskopu nám odhaluje netušené aspekty světa, zákony až do té doby neznámé. Není pravda, že to co platilo v konečnu, platí také v nekonečně malém nebo nekonečně velkém. Spermatozoid není homunkulus, hladkost vrstvy sněhu je tvořena miliardami hexagonálních krystalů ledu. Toto pozorování platí i pro změny měřítka času. Film, který zpomalíme nebo zrychlíme, nám odhalí nová fakta.

Kontrakce a dilatace měřítek času a prostoru již hrají, a budou čím dále více hrát, zásadní roli při zkoumání světa. Tvoří novou dimenzi světa. Prostá studie rozlití kapky vody vyžaduje užití dvou různých zákonů pro různé části kapky (de Gennes). Matematikové již mají teoretické nástroje uzpůsobené těmto změnám měřítka: nestandardní analýza, Fourierova analýza, vlnky. Další budou zajisté nezbytné.

Fraktální objekty. Nechci ukončit svou krátkou exkurzi do světa řádů velikostí, aniž bych řekl pár slov o fraktálních objektech, které počínaje Cantorem a Hausdorffem nepřestávají lákat matematiky a fyziky. Myšlenka je následující: Je-li nějaká prostorová struktura, matematická či materiální, zkonstruována čím dál tím jemněji opakovanou aplikací téhož jednoduchého zákona (například kovariantního vzhledem k akci podobností), pak tato struktura bude lokálně vykazovat tentýž charakter ve všech svých zvětšeních a zmenšeních. Například Cantorovo diskontinuum, Kochova *sněhová vločka* a jisté Antoinovy kompakty jsou matematickými fraktály.

Striktně vzato, ve fyzice nemohou existovat fraktální objekty, protože, jak jsem zdůraznil, fyzikální zákony se mění, když přeskočíme jeden nebo více řádů velikosti. Fyzik ovšem má právo prohlásit, že jistá materiální struktura je fraktálním objektem v jistém intervalu velikosti. Toto upřesnění je ovšem nezbytné, jeho opomenutí by bylo profesionální chybou.

Například tvrdit bez takového upřesnění, že fraktální dimenze pobřeží Bretaně je 1,5, nemá žádný smysl. Stejně tak fraktální dimenze trajektorií částic pozorovaných Brownem je srovnatelná s přesnou dimenzí matematických brownovských trajektorií pouze v intervalu velikosti, který musí být upřesněn.

Fraktální dimenze tedy může být pro fyziku zajímavým nástrojem, ale pouze za předpokladu, že bude užívána jasně.

6. Závěry

Bohatství nových matematických nástrojů, rozličnost mocných prostředků vytvořených fyziky, činí stále méně platnými určité filozofické protiklady mezi *Spojitým* a *Diskrétním*. Matematika a fyzika nejsou dominovány ani jedním z nich. Obě totiž zplodila potomstvo tak bohaté a tak spletité, že chtít načrtnout jeho rodokmen by bylo nesmyslné. V této své přednášce jsem kladl důraz na dvojici *složité systémy* a *pravděpodobnost*, jejichž studium je sice obtížné, ale slibné. Zajisté to nebude poslední větev, která vyroste na mohutném stromu *Matematiky* a *Fyziky*.

Již H. Poincaré říkal, když mluvil o fyzikálních zákonech své doby: *To, co nové výzkumy* (*o kvantech*) *zpochybňují, nejsou jen základní principy mechaniky. Jde o to, co se nám až do nynějška zdálo neoddělitelné od samotného pojmu přírodního zákona. Budeme ještě moci vyjadřovat tyto zákony pomocí diferenciálních rovnic*?

Wigner zašel nedávno ještě dále: *Není naše fyzika jen objasněním vytvořeným naším matematickým nástrojem? A nebyla by jiná matematická objasnění pro člověka zajímavější*?

Osobně bych na závěr dodal, že pokud matematika je zdrojem nástrojů, kterých fyzik s úspěchem využívá, není tomu tak právě proto, že naše pravidla dedukce jsou spojena s fyzikálně-chemickými zákony, které řídí náš mozek? Tento návrat k podstatě by učinil méně překvapivou zdánlivě zázračnou shodu mezi matematikou a fyzikou a mohl by objasnit otazníky o svobodě člověka.

Newton napsal: *Vše se děje, jako by v člověku byl jakýsi zdroj svobody.*

Jsme tento zdroj schopni odhalit, nebo je svoboda jen iluzí?

Gustave Choquet: *Le continu, le discret, et … tout le reste*, Le labyrinthe du continu (Colloque de Cerisy-la-Salle, 1990), Eds. Salankis, J.-M., Sinaceur, H., Springer-Verlag, Paris 1992. Přeložil Zbyněk Šír.

G. Choquet: Matematický výzkum — svědectví badatelů

Od 15. do 28. srpna 1993 se konala v Praze a Pasekách nad Jizerou velká mezinárodní letní škola z teorie Banachových prostorů, blízkých oblastí a aplikací. Školy, která navazovala na již desetiletou tradici podobných akcí pořádaných katedrou matematické analýzy, se zúčastnilo na sto převážně mladých matematiků z mnoha zemí celého světa. Tato akce byla podporována evropským programem Tempus a Fondem pro obnovu čs. vysokých škol založeným z iniciativy prezidenta Václava Havla. Úvodní příspěvek přednesl Miroslav Hušek z pořádající Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy. Byl zasvěcen jednomu z našich nejslavnějších matematiků Eduardu Čechovi, jehož sté výročí narození připomněl. V sériích několikahodinových přednášek potom vystoupili vynikající představitelé světové matematiky a její krásné disciplíny — analýzy: Gustave Choquet (Paříž), Stelios Negrepontis (Atény), Vlastimil Pták (Praha), Robert R. Phelps (Washington), Stanimir Troyanski (Sofia), Lior Tzafriri (Jerusalem) a Václav Zizler (Edmonton).

Úvod

Brzy uplynou tři roky od doby, kdy jsem měl naposledy možnost strávit několik dní mezi pražskými matematiky. Proto, když mne v dubnu profesor Lukeš zval na tuto letní školu, byl jsem rozpolcen touhou po novém setkání a lítostí, že nemohu říci kromě definice už vůbec nic dalšího o Banachových prostorech a jejich aplikacích. Navrhl jsem ale téma, které mne zcela fascinuje — myšlenkové pochody výzkumu. Poté, co mne profesor Lukeš ujistil, že půjde o námět zajímavý pro všechny účastníky, mohu mu tedy poděkovat, že jsem nyní mezi vámi s cílem jistě mnohem obtížnějším než by byl výklad vlastních výsledků.

Nemohl jsem očekávat lepší předehru ke svému příspěvku než brilantní vystoupení Miroslava Huška o Eduardu Čechovi, plodném objeviteli a inspirátoru dlouhé řady mladých matematiků. Lidé, zvláště výzkumníci, jsou různí a často také s odlišnými pohledy na matematické náměty hodné studia; rozdíly se ovšem ukryly při sepisování výsledků. Při pozornějším pohledu je ale možné z jejich děl určit i myšlení těchto autorů. Knihovny jsou velká skladiště skryté pravdy, ale abychom našli způsob, jak se nové výsledky rodily, je třeba věnovat velkou pozornost aspoň těm několika svědectvím, jež malý počet badatelů zanechal na cestě ke svým objevům. První část přednášky má tedy název *Matematický výzkum, svědectví badatelů*, druhá část pak *Úvahy na cestě výzkumu* a poslední díl *Formování badatelů.*

Neosobuji si žádné právo dávat recepty mladým výzkumníkům, jak hledat nové poznatky (záleží jen na nich, jak rychle budou postupovat), a tím spíše ani právo radit svým kolegům, jak vést žáky. Toužím jednoduše jen přinést i svoje svědectví.

Mnozí matematici nebo filozofové v minulosti analyzovali postupy výzkumu. Z těchto studií jsou některé obzvláště pozoruhodné, jako například Pólyova kniha o matematických objevech nebo Descartova *Rozprava o metodě* s cílem ještě ctižádostivějším. Každý matematik by si měl přečíst tyto krásné klasické texty a přemýšlet o nich. To je úplný základ — vzpomínám si, že jsem z něj hodně získal v šestnácti letech studiem dvou knížek (jednu z nich napsal velký geometr Lamé) o metodách řešení problémů z elementární geometrie.

Tato díla se ale zřejmě nemohla stát základními kameny filozofie výzkumu: Vždyť jakých vrcholů by matematika dosáhla, kdybychom s jistotou znali metodu, jak vést svá bádání? Potom by kritériem kvality matematiků už nebyla jen zručnost řešit obtížné úlohy, ale spíše schopnost zvolit si úrodnou cestu a formulovat hezké a přínosné problémy — jsme totiž lidé a nezajímají nás pouze věty sestavené obřími superpočítači.

Ale k mému současnému tématu se více hodí svědectví zkušených matematiků hovořící o již ověřených, byť někdy neočekávaných přístupech, které je přivedly k úspěchu. Předchůdcem je vzdálené svědectví Archimedovo v jeho *Metodě*, zapsané v jednom z dopisů Eratosthenovi. Známější je ale podobné svědectví Henri Poincarého o objevu fuchsiánských funkcí (1908). Nedávná minulost se takovými pracemi už přímo hemží — uvedu jen Hadamardovu hezkou syntézu *Esej o psychologii objevu* (1944) s obzvláště zajímavou kapitolou o chybách a nezdarech, Wienerovy knihy (1966), svědectví Hardyho o Ramanujanovi v *Obraně matematika* (1967), knihy Kace a Ulama a knihu Paula Lévyho, málo známou, ale velmi zajímavou a vyčerpávající: *Některé aspekty myšlení matematika* (Blanchard, 1970).

O konzervatismu lidského ducha

Nyní bych chtěl proslovit obecnou poznámku o způsobu vývoje matematiky za posledních více než dva tisíce let: Je-li pravda, jak zdůrazňoval Hilbert, že hledání odpovědí na složité problémy je často příčinou pokroku, pak není řešení samotné tak důležité, jako vytváření silných nástrojů, jimiž se dá vést výzkum — vezměme například velkou Fermatovu větu nebo Kummerovy ideály. Gauss dokonce o velké Fermatově větě říkal, že ho nezajímá, protože by uměl formulovat sto stejně obtížných podobných problémů (celá teorie čísel je vůbec na takové situace velmi bohatá).

Lidský duch je slabý a aby mohl postupovat vpřed, potřebuje se o něco opřít. Lidský duch je rovněž velmi konzervativní; vždyť chopí-li se badatelé nového pojmu nebo aparátu, využívají jej bez ustání a rozptylují se (za jeho pomoci) řešením čím dál speciálnějších cvičení, byť často zcela bez možnosti dalšího uplatnění — až dokud nepřijde člověk s novým pohledem, který je vyvede z těchto zaběhnutých kolejí.

Nejdůležitější pojmy mají skoro vždy jednoduché definice — pojem grupy, tělesa, vektorového prostoru, Baireovy topologie konvergence skoro všude, pozitivních Radonových měr atd. Je velmi zarmucující zjištění, že pokud by už Řekové z Périklova století znali geniálně jednoduchou cantorovskou definici ekvivalence dvou množin pomocí bijekce, pak by se změnily celé dějiny matematiky i filozofie.

Matematika tedy neustále potřebuje změny pojmů a vědci mohou některé další termíny nově vytvářet a dávat jim někdy přednost při pohledech na různé problémy jako zdroje svých koncepcí.

Svědectví

Nyní přejdu přímo k jádru věci — povím vám o dvou matematicích, které jsem snad znal opravdu dobře. Nejprve se však trochu zdržím jejich životopisem a vzděláním, abychom mohli lépe pochopit rozdíly mezi jejich pracovními metodami.

Prvním z nich jsem já sám. Pascal řekl: „Mé já — to je hodno jen opovržení“, ale dva jiní filozofové se proslavili studiem sebe sama — Montaigne: „Jsem jen hmotou své knihy“, J. J. Rousseau: „Chci ukázat svým bližním člověka v nejodkrytější pravdě přírody a ten člověk, to budu já.“

Druhým matematikem, o čtyři dny mladším než já a s naprosto stejným univerzitním vzděláním na École Normale Supérieure [1]), jehož geny a rodinné prostředí ho však ode mne přece jen odlišily, je Laurent Schwartz.

Vybral jsem tyto dva muže, protože i přes mnohé společné jsou velmi různí.

Laurent Schwartz velice brzy navázal matematické kontakty se svým strýcem Hadamardem, pak se svým tchánem Paulem Lévym a zejména se skupinou bourbakistů, jejímž členem, ač pokrevně nespřízněn, se stal brzy po válce. V takovém prostředí se zrodila jeho matematická kultura, kterou viditelně pojal jako síť spletenou z jednotlivých teorií, aby mu umožnila správně pochopit všechna nová a ne zcela probádaná fakta. Laurent Schwartz má také velmi dobrou paměť. Když v něčem „plave“, raduje se z toho, poněvadž to, co až dosud znal, mu nepřináší žádnou odpověď, a může se tedy těšit, že nalezne něco nového — tím je tak odlišný od Dieudonného, obdivuhodného člověka, jenž říkal, že jeho vlastní původní práce byly z hlavní části jen důsledky díla pro skupinu bourbakistů. Laurent Schwartz má rovněž velkou pracovní výkonnost a je zásobárnou duševní energie.

Co se mne týče, já mám naopak matematický základ jen velmi omezený; nečetl jsem vědecké traktáty, natož povinnou četbu o provádění přesného výzkumu. Nikdy jsem nestudoval ani důkazy vět. Mám jen malou pracovní výkonnost, vyjma případu, kdy jsem uchvácen problémem: Tehdy se prudce zvyšuje i má duševní odolnost, neboť akumulátory se mi znovu nabijí do plné síly — jako v letech 1980 – 81, kdy jsem déle než rok zkoumal rozložení posloupností $k\vartheta^n \bmod 1$ (napřed s $\vartheta = \frac{3}{2}$, pak s ϑ libovolným algebraickým). Mám tak děravou paměť, že ji mohu srovnávat nejvýš s houbou, provrtanou velkými i početnými menšími dírami — mohu ilustrovat zábavným příkladem: Počátkem roku 1939, jako stipendista na Graduate College v Princetonu, jsem se několik týdnů zabýval problémem týkajícím se prodloužení homeomorfismu mezi dvěma kontinuy na celou rovinu a v okamžiku, kdy jsem úlohu vyřešil, jsem si vzpomněl, že jsem stejné řešení téhož problému už přesně před rokem publikoval ve své první poznámce v pařížských Comptes Rendus [2]). O několik měsíců později jsem dostal blahopřejný dopis (jsem na něj hrdý a dosud ho mám schovaný) od topologa

---

[1]) Prestižní pařížská vysoká škola.

[2]) Časopis vydávaný pařížskou Akademií věd.

Pavla Sergejeviče Alexandrova, jenž toto řešení dlouho bez úspěchu také hledal. To se týkalo jedné z doslova obřích děr mé „houby“.

Mohl-li jsem i přes tento handicap získat při svém bádání určité výsledky, bylo to tím, jak dobře poznamenal Marcel Brelot, že objevy se dělají ve vrcholech intelektuální aktivity po dlouhém období předběžných prací. Abychom pomohli uvedeným bodům, cítíme-li řešení na dostřel, je třeba „obdělávat“ a Brelot sám si k tomu připravoval čaj opravdu silný. Koneckonců: každá „houba“, ať už třeba nulového objemu, je stejně jako plná koule nosičem nějaké jednotkové Radonovy míry.

Pro vyrovnání onoho handicapu jsem měl ale navíc schopnost zkoumat všechny problémy analýzy z pohledu geometra. Ke každé úloze jsem přistupoval přímo, geometricky a se snahou o její maximální zjednodušení; vždy jsem také usiloval o to, převést její speciální případy zpět k problémům elementární geometrie: Například v mé společné práci s Jacquesem Denym o potenciálech na konečné množině jsme se inspirovali novou interpretací dobře známých principů dominačního, výmetového a pozitivních měr na případu dvou rovinných trojúhelníků, když jeden je uvnitř druhého. Já jsem byl tehdy hlavně geometrem, zatímco můj přítel Deny čistým analytikem, který svých nejlepších výsledků dosáhl dlouhým přemýšlením o jemných rovnostech a nerovnostech algebraického charakteru.

Mám rozvinutou intuici a častá osvícení. Považuji vlastně svůj výzkumný sloh, směs snění a vášně, za velmi blízký slohu básníka či hudebníka; sám jsem prošel určitou badatelskou cestou až k vyjádření svého entuziazmu v básních v próze.

Často jsem cítil, že musím na několik měsíců vysadit a nezabývat se žádným výzkumem. Avšak nepochybuji, že i v těchto zdánlivě prázdných obdobích mé podvědomí stále pracovalo pro další dočasné etapy rozvoje mého bádání. Důležité přitom je, že v mé paměti jsou sice díry, ale díky mému podvědomí nikdy ne úplně prázdné.

Ačkoliv styl výzkumu Arnauda Denjoy, úředně vedoucího mé disertace, mne na počátku velmi ovlivnil, Denjoy se nikdy nesnažil mě nějak usměrňovat. Mohl jsem se tedy přímo v pulzujícím nitru CNRS[3]) za příslib sepsání doktorátu po šest let (1940 – 46) svobodně věnovat matematickému výzkumu světa, který mne obklopoval, a pouštět se — často úspěšně — do úloh vnuknutých každodenním životem nebo stykem s dalšími matematiky z teorie grafů, topologie eukleidovských uzavřených množin, konformních zobrazení, metrických prostorů, variačního počtu, polyharmonických funkcí, Finslerových prostorů, diferenciální geometrie, povrchových měr atd. Zveřejnil jsem pouze malou část výsledků, které jsem v těchto letech získal, navíc bohužel často jen formou poznámek v Comptes Rendus, ačkoliv některé si podle mne zasluhovaly další rozvíjení. (Američané tuto formu příliš neuznávají — chtějí vždy jen celé články.)

Odvolávám se na toto krátké údobí „ohmatávání“, neboť jsem zde použil svou sílu v neobyčejně odlišných směrech, ale bez uváženého strategického výběru — postupoval jsem krok za krokem, ale bez jakéhokoliv plánu. Přesto ale vůbec těchto let nelituji; pracoval jsem pro radost a ohromovalo mě být placen za to, že se oddávám blaženosti pro mne nejvyšší (ostatně i příliš mnoho peněz škodí mozkové činnosti). Toto potěšení mě navíc chránilo před občas i závažným stresem, jímž trpí někteří mladí vědci, jejichž

[3]) Centre National de la Recherche Scientifique = Státní středisko vědeckého bádání.

mistr je příliš náročný. Vedle toho jsem během těchto i přes válku šťastných let získal spojení s početnými matematickými disciplínami v těch nejlepších podmínkách — totiž výzkumem — a nevědomky jsem vypracoval i základy mnohých technik vhodných pro tyto obory.

Ale byla to i doba, kdy jsem se změnil: z taktika jsem se stal stratégem. Tato mutace se objevila v říjnu 1945, když se mi otevřela možnost strávit jeden nebo dva roky na Francouzském institutu v Krakově. To pro mne bylo neočekávané a velmi šťastné, protože mé vzdělání pocházelo zejména právě z Fundamenta Mathematicae od polských matematiků. Do tří měsíců jsem dokončil svou disertaci — rozlousknul jsem zde tři oříšky, zadané po řadě Lebesguem, Fréchetem a Bairem a po sepsání jejich řešení jsem v sobě cítil ještě povinnost napnout poslední síly — tentokrát k filozofickým úvahám, abych ukázal důvod úspěšnosti baireovských metod, které jsem chtěl i nadále používat. K mému velkému překvapení bylo toto úsilí korunováno úspěchem a odchýlilo se až k obecné větě s velmi jasnou formulací, kterou jsem pojmenoval „věta o kontingentě a paratingentě“. Tento výsledek shrnul mé vlastní metody s třemi hlubokými větami, které Denjoy použil pro svůj výpočet koeficientů trigonometrických řad. Filozofický závěr, který jsem chtěl učinit ve své disertaci, se tedy nakonec objevil v podobě elegantní a silné matematické věty. Zalíbilo se mi to a i nadále jsem si ponechal, při uchování vytříbeného vkusu pro obtížné problémy, téměř instinktivně přijatý zvyk vytvářet nové nástroje, které jsem pak používal (nástrojem přitom myslím každý pojem, lemma i větu hodící se v různých oblastech).

Byl jsem tedy obdařen myšlením stratéga. Skoro všechny mé úspěchy se zrodily z problému a „rozjezdové“ myšlenky, která byla zpočátku sice nejasná a zmatená, nakonec se ale stala zcela přesnou a precizní, aby mohla dobře posloužit k obratnému řešení. Pouze u nevelkého počtu dalších výsledků jsem musel při jejich sepisování vynaložit značné úsilí a chtěl bych přitom podtrhnout, že šlo právě o výsledky bez viditelných aplikací, o takové hezké slepé uličky. Jako příklad mohu uvést práci, kde jsem dokázal, že každá G_δ-množina nulové kapacity v eukleidovském prostoru je nosičem nějaké pozitivní pravděpodobnostní míry, jejíž Newtonův potenciál je nekonečný na této množině a konečný všude jinde. Dodnes to ale nenalezlo vůbec žádné použití, ani v teorii potenciálu. Denjoyova práce nabízí obdobný příklad — jeho upnutí sil k výpočtům koeficientů trigonometrických řad a následné třísvazkové dílo obsahující aspoň množství myšlenek a zajímavých lemmat.

Většina mých zbývajících prací, i když si vyžádala mnohaměsíční úsilí, získala při svém vydání nakonec jednoduchou formu. Lze to přirovnat k pěknému obrázku: Poté, co už je jednou dokončený, mažou se postupné náčrtky, dodatečně se upravuje a nikdo už ani netuší, jak dlouhá cesta vedla k jeho realizaci.

Jednou, už dávno, jsem měl referát *Vznik teorie kapacit*[4]), kde jsem popsal náročnou cestu k vytvoření této teorie, zahrnující dlouhý sled údobí uvědomělého a vytrvalého úsilí přerušovaných náhle probleskujícími vnuknutími, která se týkala jak práce už odvedené, tak i směru, jakým v bádání dále pokračovat.

---

[4]) Vyšlo v časopise La Vie des Sciences (Život vědy), vydávaném pařížskou Akademií věd, roku 1986, s. 385 – 397; viz též s. 89.

Zcela jinak to bylo s prací o konvexitě a integrální reprezentaci: Mé studium konvexních kompaktních množin bylo původně podníceno jednou Godementovou poznámkou v článku o pozitivních operátorech na Hilbertově prostoru. Později jsem si uvědomil, jak dobře by tyto techniky mohly posloužit v matematické analýze. Cíle jsem dosáhl po dlouhém vytrvalém úsilí a malých krůčcích ve stále obecnějších situacích. Výsledný důkaz, byť na můj vkus nejprve příliš technický a obtížně čitelný, nakonec přece jen získal elegantní a uspokojivý tvar užitím myšlenky jednoho z výsledků Bishopa a de Leeuwa z jejich prací o algebrách funkcí.

Hledání vhodné definice simplexu, která by dala jednoznačnost integrální reprezentace, mne přivedlo k použití kuželů, jejichž bází je právě simplex. Navíc i mnohé příklady pocházející z teorie potenciálu, harmonické analýzy a ergodické teorie jasně ukázaly, že dobrým rámcem pro definici a zkoumání extremálních bodů budou právě tyto konvexní kužely a nikoli obecné konvexní kompaktní množiny — vždyť pro mnoho typů obecných kuželů nelze vůbec ani hovořit o bázi. Takhle mě například tři postupné kroky vedly k definici slabě úplných kuželů, „čepiček“ konvexních kuželů a kónických měr. Každý z těchto kroků jsem překonal v několika sekundách náhlého osvícení, jimž však předcházela vždy dlouhá inkubační a pracovní období.

Chtěl bych zde vyprávět o tom, jak jsem přišel na myšlenku „čepiček“: Na podzim 1961 jsme pobývali s mou ženou v malém hotýlku v Barbizonu, ohromeni pískem a lesy obklopujícími Fontainebleau. Byl jsem už vtažen do problému, měl jsem hotový i začátek studie — část o slabě úplných kuželech, ale ještě jsem se příliš daleko nedostal. Nevěděl jsem (dokonce ani v metrizovatelném případě), zda tyto kužely mají extremální generátory; několik týdnů jsem se to pokoušel bezvýsledně dokázat pomocí faktu, že takový kužel je projektivní limitou kuželů C_i s kompaktní bází (a tedy určitě i s extremálními generátory); při přechodu od kužele C_i ke kuželu C_j, který je nad ním, ale bohužel některé extremální generátory mizí, zatímco jiné se mohou objevovat — byl jsem velmi zklamán.

Na několik dnů jsem se problémem přestal vážněji zabývat. Jednoho rána jsme se rozhodli vyjít na procházku do lesa a v okamžiku, kdy jsem právě překračoval práh, abych vyšel z našeho pokoje ven na písek, vytryskla v mé duši představa: Nabroušené ostří šikmo krájí kónickou větev. V další sekundě jsem si šikmý řez přeložil na konvexní kompakt s konvexním doplňkem a během následující minuty jsem, aniž bych to potřeboval ověřit, věděl, že tyto šikmé řezy (později jsem je nazval „čepičky“) jsou to pravé, co vyřeší můj problém. Takový jev náhlého osvícení ale není jediným, z něhož jsem kdy těžil.

Už jsem tedy řekl všechno, co mne přivedlo k práci o kapacitách. Zvláštní rozkoš jsem prožíval tehdy, když problém, nad nímž jsem pracoval, nebyl dosud jasně formulován: Tak tomu bylo i v případě bádání, které mi přineslo definici adaptovaných prostorů, topologických her s vítěznou strategií prvního hráče nebo algoritmus určující souvislý graf minimální délky; je však pravdou, že se to vždy týkalo struktur skutečně jednoduchých a snadno geometrizovatelných.

Věta o kontingentě a paratingentě byla také zformulována bleskově, ale předcházely jí tři články, které mě stály mnoho práce.

V roce 1935, když jsme studovali první, respektive druhý, ročník na École Normale Supérieure, napadlo nás — Schwartze a mě — založit vlastní miniseminář. V přednášení jsme se navzájem střídali: Já hovořil o Baireových výsledcích o nespojitých funkcích a o Cantorově knize o nekonečnu — dvou dílech, která jsem zkoumal opravdu velmi náruživě. Schwartz seminář obohatil svými představami o rozdílech chování rovnic $\triangle u = 0$ a $\square u = 0$[5]) — proč první z nich má krásná velmi regulární, ba dokonce analytická řešení, zatímco druhá může mít i řešení extrémně nespojitá; tyto úvahy dokonce úplně neopustil ani dále a o deset let později, roku 1944, ho dovedly až k vytvoření teorie distribucí. Příběh jejího zrodu nyní krátce připomenu.

Jak říkal Schwartz: „Když se objeví nový pojem, často se zjistí, že už existoval i dříve, jen nebyl rozpoznán jako něco užitečného a podstatného.“ [6]) A opravdu, ani zde nechybějí předchůdci: Jsou jimi Hadamardovy „konečné části“; Heavisideovo užívání Laplaceovy transformace (1893); Diracova δ-funkce se svými derivacemi a nekonečně diferencovatelnými transformacemi (1927); Bochnerovy „formální funkce“, nakonec ztotožnitelné s temperovanými distribucemi (1932) — Bochner ale bohužel neviděl nesmírné pole jejich aplikací; Sobolevovy distribuce konečného řádu (1936) definované jako spojité lineární formy na prostoru C_K^m funkcí m-krát spojitě diferencovatelných a s nosičem v daném kompaktu K. Sobolev našel výtečné použití v parciálních diferenciálních rovnicích, ale neobjevil pojmy nosiče, Fourierovy transformace, ani konvoluce. Měl tedy vynikající věc, ale nevyčerpal všechny její možnosti. Na druhé straně jeho práce vyšla v předvečer války, byla málo známá a speciálně Schwartz o ní nevěděl.

De Rham definoval své „toky“ roku 1942 a vytvořil nástroj, který „bude jakýmsi zobecněním Lebesgueova integrálu“. Jeho hezká teorie zůstala ale nedokončena a byly to právě distribuce, které ji umožnily završit.

Tolik tedy (vyjma Soboleva) stav Schwartzových vědomostí roku 1944. U Bourbakiho Schwartz dále nabyl velké znalosti funkcionální analýzy; měl obzvlášť dobře zažitý mocný postup konstrukce nových entit, jako třeba prvků duálu k nějakému známému lokálně konvexnímu prostoru, například Radonových měr na lokálně kompaktních prostorech jako prvků duálu $C_K(X, \mathbb{R})$ prostoru spojitých reálných funkcí s kompaktním nosičem. Věděl tedy hodně — o Fourierově transformaci i o konvoluci. Scházel mu už jen zárodek schopný navodit, aby ve správném okamžiku vykrystalizovalo fluidum jeho znalostí[7]). Tím se stal čerstvý článek Choqueta a Denyho: *O některých vlastnostech průměrů charakteristických pro harmonické a polyharmonické funkce*[8]), kde jsme dokázali použitím trigonometrických polynomů hlavní větu jen v $\mathbb{R}^2$. Bylo tedy třeba

[5]) $\square$ se nazývá d'Alembertův operátor a zadává vlnovou rovnici.

[6]) *De certains processus mentaux dans la découverte en mathématiques* (Jisté myšlenkové procesy v matematickém objevování), Revue des Sciences morales et politiques (Časopis duchovních a politických věd), květen 1987, s. 325 – 340.

[7]) Fyzikální jev zvaný surfusion: Je-li kapalina v klidu, nemrzne dokonce ani pod bodem tuhnutí. Aby se proměnila v led, je třeba vpravit do ní nějaké jádro, na němž vykrystalizuje — za války tento jev pomáhal třeba na Ladožském jezeru.

[8]) Bulletin S. M. F., 1944.

dobře poznat harmonické polynomy v $\mathbb{R}^n$, my jsme pro $n > 2$ jejich vlastnosti ani důkaz obecnějšího tvrzení neznali. Při náhodném setkání na ulici jsem si připomněl Schwartzův zájem o parciální diferenciální rovnice a vyprávěl mu o naší nesnázi. On ji tehdy úspěšně překonal i pro $n > 2$ za několik dní metodou značně rozdílnou oproti té naší — užil regularizaci konvolucí, spočívající hlavně na definici zobecněných řešení lineární parciální diferenciální rovnice s konstantními koeficienty jako limit klasických řešení.

Schwartz tehdy prožil několik týdnů pochybností. Pohyboval se vpřed jen malými krůčky, až se pak, jedné noci, objevilo vnuknutí a velice rychle — snad během hodiny — i jistota, že konečně našel to, co hledal. „Tolik věcí se ve mně soustředilo,“ řekl Schwartz, „že si všemi způsoby žádaly už jen vzájemné propojení“ [9]).

Určitě bylo ale zapotřebí ještě mnoho práce, než se hrubá stavba, jejíž kostra se právě objevila, mohla stát obyvatelnou: dostavení zdí a jejich vyhlazení — tedy nalezení hlavních aplikací nového nástroje, popřípadě výzkum jemnějších prostorů distribucí (například temperovaných). Bylo také třeba určit meze této teorie (oné první noci si Schwartz totiž myslel, že může provést i konvoluci Einsteina s Fermatem, takové bylo jeho nadšení). Objevila se například skutečnost, že nelze obecně definovat součin dvou distribucí, a vyloučila tak například možnost jejich užití v některých nelineárních úlohách. Stavba byla ale nakonec přece jen úspěšně dokončena.

O dvou odlišných strategiích.

Nyní, po této krátké studii přístupů dvou matematiků, mohu konečně objasnit i rozdíl jejich badatelských strategií.

Já jsem se mohl s úspěchem pustit do řady obtížných problémů bezpochyby jen proto, že mé vzdělání bylo pouze velmi povrchní. Neovládal jsem speciální konstrukce užívané při zvládání těchto problémů a dával jsem tedy zpočátku přednost tomu, že jsem se věnoval jen malému počtu poznatků nezbytných k jejich formulaci. Má ne zcela zaplněná mysl pak mohla snadněji uvést do chodu svou geometrickou intuici a utvořit tak příznivou situaci pro má vnuknutí. Například ve studii o newtonovských kapacitách bylo otázkou, zda je třeba použít hilbertovskou strukturu $\mathbb{R}^n$, diferencovatelnost jádra $1/r^{n-2}$ nebo jeho invarianci při rotacích. Dal jsem přednost tomu všechno zapomenout a omezit se jen na použití vlastností jednoduchých a známých — spojitosti kapacity zprava, její monotonie a subaditivity — a oprostil jsem se od následného předpovídání, jaký bude můj další postup nebo jaké doplňkové věci budu ještě potřebovat. Směřoval jsem k jedinému cíli — kapacitabilitě.

Poté, co jsem dostal ve velmi obecném rámci věty elegantní a bohaté na aplikace, nabyl jsem přesvědčení, že byla poprvé konečně zlomena odvěká krutovláda množinových aditivních funkcí, vždyť vše až dosud publikované se týkalo jen těchto typů funkcí!

Zkrátka, místo abych zvolil výzkumný problém s posláním prohloubit znalosti v určitém oboru, vždy jsem dal přednost tématu vyhlášenému svou obtížností, ale

---

[9]) *Historické kořeny a základní pojmy teorie distribucí*, na matematickém semináři v Patrasu (Řecko), říjen 1982, s. 11 – 28.

vyjádřenému jednoduše a poutavě — s nadějí, že může vytvořit nové nástroje, jen vhodně uzpůsobené dané úloze.

Historie vědy ukazuje, že nejsem první, kdo použil tuto strategii — velký pokrok v mnoha oborech byl často dosažen nespecialisty, lidmi s otevřenou myslí (například Cardanem s jeho $\sqrt{-1}$, nebo Koperníkem, který o astronomii nic nevěděl ani nestudoval). V nynějším období, kdy nabyla vrchu přemrštěná specializace, se tento pohled ukazuje dokonce čím dál tím potřebnější.

Velké Schwartzovo vzdělání, ačkoliv je zajisté výborně dovedl použít, pro něho bylo nejprve asi handicapem, neboť ani žádná z jeho částí mu neposkytovala možnost stanovení cíle a jeho následného dosažení.

Ale když už se jednou vpravil do složité sítě jeho vzdělanosti zárodek a pevně se zachytil v jejích početných spojnicích, mohla se projevit velká účinnost matematické kultury, umožňující rychlý rozvoj tohoto zárodku v pevnou kostru nové teorie.

Závěr

Aby se i nadále mohly rodit nové, současně krásné i bohaté matematické teorie, potřebujeme mladé badatele pohledů neotřelých a rozmanitých. Je už jen věcí zkušených učitelů, aby jim dali vzdělání vyvážené a hlavně chránící jejich originalitu.

Z magnetofonového záznamu a psaných poznámek upravil sérii přednášek Gustava Choqueta pro čtenáře Pokroků Vítězslav Babický.

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, ročník 39 (1994), č. 3, 143 – 151.

Setkání s profesorem Gustavem Choquetem

Uvádějící: *Jsem velmi rád, že profesor Gustav Choquet přijal naše pozvání. Doufám, že diskuse s ním bude pro vás všechny zajímavá, profesora Choqueta budou také možná zajímat názory našich studentů. Pokud se týká jazyka, navrhujeme angličtinu, ale můžeme rovněž hovořit francouzsky.*

Prof. Choquet: Budu respektovat většinu, máme demokracii.

Tedy budeme mluvit česky?... Požádal jsem prof. Choqueta, aby řekl pár slov úvodem, takže prosím.

Je obtížné říci několik slov úvodem a přitom nevynechat nic podstatného. Nejprve snad něco o francouzském vzdělávacím systému.

Základní školu navštěvují žáci mezi 6. a 11. rokem. Pak následuje střední vzdělání, které se dělí do dvou stupňů: collège a lycée. Collège studenti ukončí asi ve 14 letech a mohou pokračovat studiem lycea (lycée, něco jako vaše gymnázium), které ukončí asi v 17 letech. Někteří ovšem také až ve 20... Absolventi lycea získávají titul bakaláře a (což je pro Francii specifické) každý, kdo má titul bakaláře, má právo studovat na univerzitě. Nevím, jestli je to správné, ale je to tak.

Bakalářských titulů je mnoho: A, B, C, D, E, F, G, ... asi dvacet či třicet. Ty základní jsou zaměřeny na matematiku a fyziku a spousty dalších jsou v technických směrech. Náš současný ministr vzdělávání vznesl před časem požadavek, aby 80% všech mladých lidí získalo titul bakaláře. Většině rozumně uvažujících lidí se toto procento zdá vysoké, nehledě na to, že fixovat dopředu počet absolventů školy je nesmyslné. Dnes má tento titul jen asi třetina mladých lidí, ale už teď máme problémy, protože i třetina je příliš mnoho. Kdyby 80% všech mladých lidí mělo titul bakaláře a všichni chtěli studovat dál, univerzity by se příliš zvětšily a jejich úroveň by šla zákonitě dolů.

Ve školství u nás platí to, čemu my říkáme demokratické principy: v collège, v lycée i na univerzitách jsou všichni promícháni. Dobří se špatnými — naprosto náhodně. Osobně se domnívám, že nejde o skutečnou demokracii. Demokracie znamená dát každému, co potřebuje a dovést ho tak vysoko, jak jen může. Ne všichni jsou však schopni dosáhnout stejné úrovně ve stejnou chvíli. Různí lidé mají různé sklony či rozdílný talent, a proto není rozumné, aby všichni absolvovali stejný program, a to ani během základní školy. Myslím, že to, co teď povídám, může být důležité i pro vás, protože jednou můžete stát před podobným problémem: V souladu s požadavky stále většího počtu lidí se mnoho středoškolských učitelů snaží, přestože to není oficiálně povoleno, utvořit zvlášť třídy ze studentů lepších a zvlášť z těch, jejichž vývoj není tak rychlý či kteří mají odlišné zájmy. Tato různost zájmů je pochopitelná : Do lyceí přicházejí i lidé z venkova nebo ti, jejichž rodiče jsou dělníci, a prostředí takových domácností přirozeně není nakloněno abstraktnímu studiu. Ideálem takových rodin je dobré technické vzdělání a tímto názorem jsou chlapci a děvčata často silně ovlivněni, přestože se snažíme je usměrnit.

Vydejme se teď na univerzitu. Univerzitní studium matematiky se dělí do tří stupňů. První stupeň je dvouletý; můžeme mu říkat přípravný stupeň. Hlavní náplní studia je pokročilejší kalkulus včetně diferenciálních rovnic, integrování (nikoli lebesgueovského, ale např. riemannovského), nějaké algebry, vektorových prostorů konečné dimenze ... Následuje stupeň druhý, který může trvat jeden nebo dva roky. Absolventi jednoletého druhého stupně obdrží příslušný diplom, na jehož základě už mohou pracovat například v průmyslu, popřípadě jako učitelé na collège. Lepší studenti absolvují dva roky druhého stupně, ve kterých dochází k tzv. atomizaci studia: studijní program je rozdělen do menších úseků. Jde např. o kurs integrování, kurs algebry, topologie atd. Základy matematiky jsou tak rozděleny do 6 jednotek, z nichž ti nejlepší studenti absolvují během dvou let druhého stupně 4 nebo 5. Opravdu dobří studenti dosahují v tomto dvouletí slušných výsledků. Horší je to s těmi, kteří nejsou příliš motivováni.

Podle mého názoru je tento systém atomizace špatný. Proč to tvrdím? Vezměme si například obecnou topologii (což zahrnuje i vektorové prostory a operátory na Banachově prostoru). Studenti, kteří studují tento úsek, dělají to bez jakékoli souvislosti se zbytkem analýzy, neboť tento zbytek analýzy neznají. Totéž se týká všech ostatních jednotek. Na konci každé jednotky, která trvá jeden semestr, je zkouška. Po ní je možno látku zapomenout. Student tedy přijímá matematiku jako když se maluje obraz, který sestává z jednotlivých detailů. Celek vynikne až při pohledu z jisté vzdálenosti. Nevím, zdali je tento přístup vhodný pro lidský mozek. Myslím, že výsledky nejsou dobré; studenti nevidí matematiku jako celek, netuší, proč se co zavádí, proč se věci dělají právě takto a jaké jsou aplikace. Uveďme například větu Hahnovu-Banachovu. Lze ji přednést velmi brzo, protože její důkaz je lehký. Přednesete-li ji ale dřív, než ji studenti skutečně potřebují, naučí se své poznámky k důkazu a co dál? Máte k dispozici krásnou větu, ale pokud ji nezačnete hned k něčemu používat, studenti jí neporozumí a nepochopí, proč je taková věta nutná.

Systém atomizace je velmi těžké opustit, líbí se totiž jak studentům, pro které předmět končí hned po absolvování zkoušky, tak profesorům: ti totiž přednášejí svoji specializaci, což od nich nevyžaduje tolik přípravy; mohou dva či tři roky přednášet totéž. Takže pokud jste tento systém nezavedli, nedělejte to.

Pokud jde o mne, myslím si, že by bylo lepší vrátit se k systému, kdy např. velká část analýzy je přednesena jedním profesorem vcelku. Odráží to přirozený vývoj částí analýzy i způsob, jakým se lidé učí.

Třetí stupeň univerzitního studia je začátkem výzkumné činnosti. Nemyslím tím skutečný výzkum, ale to, že přednášky jsou specializované a na vysoké úrovni. Přednáší se například Lebesgueův integrál a jeho aplikace na Fourierovy řady a Fourierovu transformaci atd. V průběhu třetího stupně musí studenti udělat dvě zkoušky a napsat práci, asi tak deset či dvacet stran. Nejde samozřejmě ještě o Ph.D., jde o to něco samostatně sepsat a pak to ústně vysvětlit a obhájit. Tyto dvě věci, tedy umění psát a umění mluvit, patří rovněž k tomu, co by se studenti měli během třetího stupně naučit. Není to tak jednoduché, jak by si někdo mohl myslet. Umět vysvětlit věc tak, aby byla pochopitelná, je velmi těžké. Někteří studenti jsou docela dobří, mají-li něco nastudovat či přečíst, ale běda když dojde k tomu, aby něco vysvětlili. Sami totiž nikdy nemluvili. Na přednáškách obyčejně mluví profesor sám a studenty ke slovu nepustí. Má to svůj důvod: je totiž obtížné poslouchat v interpretaci začátečníka něco, co sami velmi dobře znáte. Takže mohu dát studentům jednu radu: když budete mluvit před svým profesorem, snažte se být dobře připraveni, aby váš pedagog příliš netrpěl.

I psát je ovšem velmi obtížné. Prezentovat výsledek, sdělit, proč dělám to či ono, zdůraznit závěry… Je to jisté umění. Nesouhlasím například úplně se způsobem práce bourbakistů. Styl bourbakistů může být přijatelný pro jisté části matematiky, ne však pro všechny.

Podívejme se nyní na postgraduální studium, krátce Ph.D. Před několika lety bylo ve Francii dvojí Ph.D.: jedno bylo součástí třetího stupně univerzitního studia a další, tzv. státní, souviselo s napsáním disertační práce. Pokud se student rozhodl pro „třetistupní“ Ph.D., musel s ním být hotov během roku či dvou. V tom případě trval třetí stupeň tři roky. Téma Ph.D. zadával většinou profesor, ale vyskytli se i studenti, které už v době studia zaujal jistý problém a vybrali si téma sami. To se stávalo zřídka, ale například Alain Connes, pozdější nositel Fieldsovy medaile, patřil k těmto výjimečným případům.

Státní Ph.D. bývalo na velmi vysoké úrovni, možno říci, že nejvyšší na světě, vyšší než v USA či v Německu. Trvalo však velmi dlouho, což bylo nevýhodné. Měli jsme pak málo studentů např. z USA, neboť „třetistupní“ Ph.D. nemělo v USA přílišnou váhu a zůstat zde dalších pět let, potřebných k absolvování státního Ph.D., studenti nechtěli. V současnosti už ono „třetistupní“ Ph.D. nemáme a řádné postgraduální studium trvá po absolvování univerzity asi tři roky. Je zhruba na úrovni USA a obecně opět na téma navržené profesorem.

No a co dál? Má-li někdo Ph.D., může se stát asistentem na univerzitě. Nebo také jít do průmyslu a vydělávat dvakrát tolik. Či může dělat základní výzkum. Odborný pracovník se (pokud publikuje několik článků dobré kvality v mezinárodně uznávaných časopisech) může habilitovat a stane se vedoucím pracovníkem. To se děje tak pět (či více) let po získání Ph.D.

Tolik tedy úvodem.

Malou poznámku než začne diskuse. Naše setkání je poměrně výjimečné i tím, že je mezinárodní. Je zde samozřejmě profesor Choquet, ale je tu i účastník ze SSSR, z Polska a zahlédl jsem tu i někoho ze Švédska. Rovněž je výjimečné proto, že profesor Choquet nám donesl kávu a čaj. Bavili jsme se rovněž o koňaku, ale já jsem navrhl odložit koňak na pozdější dobu. Takže máme jen čaj a kávu.

Nejsem předsedajícím v žádném smyslu tohoto slova, takže se můžete ptát sami.

Odpovědi na otázky

Otázka (studenti, pracovníci fakulty, hosté): *Pokud jsem dobře porozuměl, jsou collège a univerzita ve Francii rozdílné instituce.*

Odpověď (prof. Choquet): To, čemu říkáme collège není totéž jako college v USA, je to škola, kam se chodí ve věku od jedenácti do patnácti let.

Aha, takže nejprve collège, potom lyceum a pak univerzita.

Ano.

A bakalář se dělá…

Na konci lycea.

Takže je tomu jinak než v anglosaských zemích.

Ano… Střední vzdělání je rozděleno do dvou stupňů: collège a lycée. Já osobně nemám rád toto dělení. Vede totiž mimo jiné k tomu, že collège a lycée mají samostatné budovy. A jakmile mají dvě školy každá svou budovu, lidé, kteří v nich učí, rovněž nejsou titíž. Za mých dob jsme měli collège a lycée ve stejné budově a profesory, kteří učili na obou úrovních. Dokonce i nejlepší profesoři občas chtěli učit nižší třídy. Teď to není možné nebo to není tak jednoduché.

Slyšela jsem, že studenti francouzských škol nejsou známkováni, ale obdrží na konci školního roku jakýsi certifikát o tom, na jaké jsou úrovni ve srovnání s jinými studenty ve třídě. Je to pravda?

Podívejte se, Francie je země demokracie. (Někdy až nucené demokracie, ale to sem nepatří.) Demokracie říká, že všichni lidé by si měli být rovni. Protože by si měli být rovni, neměli by být známkováni. Když jsem byl mladý, neexistovalo toto pojetí demokracie, a tak jsme mívali na konci roku ceremonii, při které dostávali nejlepší studenti knihy, diplomy atd. Ti nejlepší byli šťastní, ti horší už méně, museli od rodičů snášet výčitky jako: „Pročpak jsi nepracoval tolik jako ostatní?“

Teď už nemáme žádné známky a na konci roku se nerozdávají žádné knihy. Nějak se to musí vyřešit. Myslím si, že řešení je v oceňování rozdílných zásluh. Víte, idea známkování studentů vychází z mylné myšlenky, že všechny lidské bytosti mohou být klasifikovány, seřazeny jako dobře uspořádaná množina. Ale, jak víte, jsou i částečně uspořádané množiny a jsou i extrémy, kdy žádné dva prvky nelze srovnat. (Ale to je jen extrém.)

Jsou jistě i studenti, kteří ve všech hodinách vypadají jako když spí, dokonce i při tělocviku. Důvody toho mohou být různé včetně rodinných. Ale když vyloučíme takové patologické jevy, každý student má jisté zásluhy, které mohou být vhodně oceněny. Takže pokud nebudete měřit všechny stejným metrem, můžete uspokojit každého. Jediné dokonalé měřítko totiž neexistuje.

Ohledně postupu z ročníku do ročníku: Na collège, což jsou nižší třídy střední školy, bylo před několika lety pravidlem, že žák postupoval z ročníku do ročníku víceméně na přání rodičů. Profesoři sice mohli doporučit, že není vhodné, aby ten který student postoupil do vyšší třídy, ale rodiče měli poslední slovo. Nebylo to v pořádku. Představte si, že někdo nezvládl první ročník a přesto postoupil do druhého, ten pak rovněž nezvládl a takto nezvládl všechny ročníky collège. A na konci ho čekala závěrečná zkouška. Žádná jiná zkouška mezi ročníky nebyla. Jen na konci studia. A pokud ji někdo neudělal ve čtyřech po sobě jdoucích letech, znamenalo to neabsolvování collège. Proč někteří studium nezvládali? Někdy proto, že jejich biologické dispozice nebo jejich mentální vývoj neodpovídal přesně požadavkům daného ročníku. A takový student by neměl postupovat dále. Pokud neuspěje v prvním ročníku, není naděje, že by uspěl ve vyšším. V současnosti postupujeme takto : protože opakovat ročník není psychologicky vhodné, rozdělí se každý neúspěšně zvládnutý ročník do dvou let. V těchto rozdělených ročnících se postupuje pomaleji, za rok se studenti naučí jen polovinu programu pomocí speciálních pedagogických metod. Pak postoupí do druhého roku téhož ročníku. Někdy se stává, že až deset procent těch, kteří by jinak beznadějně propadali, postupně úspěšně projdou. Deset procent není mnoho, ale jakýsi výsledek to je. Někdy se nedělí rok do dvou, ale dva po sobě jdoucí roky do tří let, v nichž se pak učí ještě pomaleji a pedagogičtěji. Takové experimenty dělali např. v Grenoblu a měli s tím velký úspěch.

[ke studentům] Vy jste univerzitní studenti? Ze kterého ročníku? Chtěli byste změnit něco v organizaci učení? To není kritika systému, jen organizace. Organizace se může vždy kritizovat.

Faktem je, že se organizace již mění. Byla nám dána jakási svoboda ve výběru předmětů, myslím, že by to mohlo pokračovat.

Vy jste před chvílí naznačil, že ten systém dělení studia na volitelné předměty ve Francii nefunguje moc efektivně. Já si myslím, že i když máte zcela fixovaný sylabus toho, co by studenti měli studovat od prvního do pátého ročníku, stále to ještě nemusí fungovat. Např. ve třetím ročníku se tady používají věci nejen z ročníku druhého, ale i z ročníku prvního, které už studenti většinou zapomněli a všechno záleží na tom, zda student najde své poznámky z prvního ročníku. Myslím, že systém, ve kterém studenti mají spousty svobody ve výběru sice není dokonalý, ale silně pochybuji o tom, že nějaký takový systém existuje.

Ovšemže neexistuje ideální systém. I kdyby se každý učitel staral jen o jednoho studenta, nemůže předem znát jeho skryté možnosti. Myslím si, že vzdělání by mělo připustit různé orientace. Na našich středních školách a ani na univerzitách tomu tak není.

Vezměme to takhle: když jsem byl mladý, navštěvovalo střední školu jen velmi málo studentů. Z naší vesnice jen dva: já a moje sestra. Dva z tisíce. Neříkám, že tehdy chodily na střední školu jen děti bohatých rodičů, to nebyla nutná podmínka. Byly to však děti, které pocházely z jisté intelektuální atmosféry, byly schopny hovořit, ovládali francouzštinu skutečně dobře.

Teď je to jiné: na střední školu jdou všechny děti, a tak se na ni dostanou i studenti, kteří učitele nechápou, protože nerozumí tomu, co říká. Ve Francii opouští základní školu asi 20% dětí, kterým my říkáme „iliterální". Znamená to, že jsou schopny číst všechna písmena, ale stojí je to takové úsilí, že než dočtou odstavec, zapomenou, o čem byl. Je to něco jiného než analfabet. Analfabet je zcela neschopen číst, procento takových je velmi nízké.

A škola musí být schopna poskytnout odlišným typům dětí odlišný přístup. Ve starším systému středních škol a univerzit byla látka pro všechny studenty takřka stejná. Vesměs převažovala teorie. Nyní se naše ministerstvo vzdělání (přestože dobře zná obtíže s tím spojené) snaží dělat přesně totéž ne pro malé procento lidí, ale pro procento téměř dvacetkrát vyšší. Není to nejvhodnější řešení. Podle mého názoru by střední škola měla být organizována tak, že téměř od samého začátku (nebo po roce experimentu) by měli studenti dostat možnost výběru různých směrů. Já vidím alespoň dva takové směry: jeden, který odpovídá starému, klasickému stylu a který by mohl obsahovat latinu, řečtinu, francouzštinu, něco z kultury atd., a druhý — technický. Ovšem, i zde by mělo být trochu teorie, ale jen nezbytně nutné teorie. K porozumění věci, techniky. Ve Francii tyto dva směry pro střední školy pomalu vyvíjíme, ne však dostatečně rychle.

Co je překážkou? Tyto technické školy se totiž považují za něco podřadného. Máte žáka, který zcela zřejmě není schopen studovat klasický směr vzdělání, více by mu vyhovoval směr technický. To by však jeho rodiče nepřenesli přes srdce, cítili by se zahanbeni. Rovněž kvalita učitelů na těchto školách není příliš vysoká, místo na takové škole se totiž nepovažuje za příliš dobré.

Na univerzitách je to víceméně podobné. Převládá větev víceméně klasicky teoretická a nemáme silnější směr pro techniky, pro přípravu inženýrů na vysoké úrovni. Francie potřebuje asi dvojnásobek inženýrů, než má nyní. Máme samozřejmě školy pro inženýry, jako je École Polytechnique a máme i mnoho velmi dobrých technických škol, ale tento počet stále nedostačuje. Jediná možnost jsou univerzity.

Váš systém vůbec neznám, takže nemohu srovnávat.

Je ve Francii dostatek matematiků?

Ano i ne. Na středních školách schází deset tisíc učitelů matematiky, takže je spousta tříd, které musely být sloučeny. Důvod je tento: Kdo úspěšně dokončí třetí ročník univerzity, může začít pracovat a průmysl i soukromé firmy nabízejí až dvojnásobný výdělek, než by měli čerství absolventi jako učitelé matematiky. U vás, jak mi bylo řečeno, tento problém není. Ale dojde-li i zde k liberalizaci průmyslu a k uvolnění mezd, může i u vás tento problém vyvstat. Ve Francii obecně existuje velký rozdíl mezi výplatami učitelů, ať už učí kdekoli, a výplatami v průmyslu. Takže to je první část odpovědi: ne, nemáme dostatek učitelů, kteří by učili matematiku na středních školách.

Na univerzitách jsme měli před deseti lety možná až příliš mnoho matematiků. Každý rok byl vydáván oficiální seznam absolventů Ph.D., kteří čekali na pedagogické místo na univerzitě. Bývala jich stovka a byli velmi dobří.

V současné době je tomu jinak. Pokud se zajdete podívat na přednášku třetího cyklu, zjistíte, že jen třetina posluchačů jsou Francouzi. Zbylé dvě třetiny jsou cizinci. S postgraduálním studiem je to podobné. A cizinci — jde většinou o lidi ze severní Afriky nebo Vietnamu — se po skončení studia většinou vracejí domů. Myslím, že by se měly zlepšit pracovní podmínky a platy na univerzitách (ačkoli jsou poměrně dobré, i když ne tak dobré jako v USA). Pak nastane příliv velmi dobrých lidí.

Francie měla tradičně dobré matematiky. Není tomu tak proto, že by Francouzi byli nějak lepší než ostatní. Důvod je ten, že už od střední školy se u nás učí poměrně hodně matematiky a rovněž je tradicí, že i profesionální matematici se z velké části podílejí na koncepci výuky středních škol. V USA se toto neděje, a to je jeden z důvodů, proč mají střední školy v USA tak nízkou úroveň. Jednu z nejnižších na světě. Účast univerzitních učitelů na výuce ve středních školách je podle mne extrémně důležitá. Například i Lebesgue nebo Borel se velmi zajímali o výuku na střední škole a napsali knihy pro střední školy. I mnoho mých vrstevníků se zúčastnilo kongresů o výuce na středních školách atd. Ve střední Evropě je to tradice. Myslím, že i tady je tomu tak. Je to jeden z důvodů, proč střední Evropa má střední školy na tak vysoké úrovni.

Pro mnoho našich aspirantů je velkou překážkou studia ve Francii jazyk. Podle jakýchsi předpisů musí každý ovládat slušně francouzštinu, aby se mohl stát postgraduálním studentem. Je to skutečně nutné?

Ne, neexistuje žádná překážka, není na to zákon.

Takže je možno se stát postgraduálním studentem bez znalosti jazyka?

Ano. Snad jen s výjimkou Číny. S Čínou máme široké kontakty a protože čínština je dost odlišná od naší řeči, má naše vláda s čínskou vládou dohodu, že Číňané, kteří chtějí u nás studovat, se nejprve učí francouzsky v Číně a po příjezdu do Francie musí ještě absolvovat speciální jednoletou jazykovou přípravku.

A Češi nepatří do této kategorie?

Ne, ne. Kromě toho, kdokoli na univerzitě rozumí anglicky. A pokud pošlete dobrého studenta, bude u nás vždy vítán.

Jen malou poznámku. Možná se situace již změnila, ale když jsem se asi před 16 lety ucházel o stipendium ve Francii, musel jsem jít na francouzskou ambasádu a předvést, že jsem schopen se dohovořit alespoň trochu francouzsky. Byla to jedna z podmínek obdržení stipendia.

Samozřejmě, jakmile chcete po někom peníze… To pak jste zaměstnanec a zaměstnavatelem je stát. A stát chce jisté záruky. Možná, že se to změní ve dvou, třech letech, pak bude patrně stačit mluvit francouzsky nebo anglicky. Ale nyní, když žádáte o stipendia, musíte mluvit francouzsky. Samozřejmě, jste-li dostatečně bohatý a přijedete do Francie s vlastními penězi, můžete mluvit, jakou řečí chcete.

V analýze existuje věta Lebesgueova-Radonova-Nikodymova. Slyšel jsem, že jste se osobně setkal se všemi třemi těmito matematiky.

Ano. Lebesguea jsem potkal jen jednou. Když jsem začínal s matematikou, toužil jsem Lebesguea spatřit. Zašel jsem na jeho přednášku do Collège de France. Asi za rok nato pak Lebesgue zemřel, byl už tehdy velmi nemocný. Mohu vám říct, jakým způsobem přednášel: v průběhu prázdnin si rozmyslel téma a při procházkách si dělal poznámky do deníčků. Těch popsal několik, měl je očíslované 1, 2, 3, … Pak přišel do posluchárny s jedním z nich, začal v něm listovat a někdy nemohl najít správnou stranu. Napsal větu a pak nemohl najít důkaz, který mezitím zapomněl. Někdy bylo těžké mu porozumět. Nicméně, byl to skvělý člověk. Ale na to jsem přišel až později. Vydal jsem kompletní Lebesgueovo dílo a měl jsem díky jeho synovi možnost číst jeho korespondenci s ostatními kolegy, což bylo mimořádně zajímavé.

A teď anekdotu o Radonovi. Bylo to v Rakousku, v Salzburgu či ve Vídni, už si nepamatuji. Měl jsem tam přednášku a několikrát jsem se zmínil o Radonových mírách. Na konci přednášky měli posluchači poznámky a komentáře a jeden z nich mi řekl, že je rád, že jsem mluvil o Radonových mírách, protože si už myslel, že se na ně zapomíná. „Ne, ne,“ řekl jsem, „to je velice důležitý pojem, zejména pro studium lokálně kompaktních prostorů. A jaké je vaše jméno, prosím?“ „Já jsem Radon,“ řekl.

A teď o Nikodymovi. Když jsem byl v Polsku, byl jsem v Krakově. Nikodym a jeho žena bydleli v Krakově. Nikodym mluvil velmi dobře francouzsky a jeho žena také. Vůbec všichni tamější matematikové mluvili perfektně francouzsky. Po mém příjezdu se Nikodym o mne staral, řekl mi: „Nezkoušejte se učit polsky, nemá to cenu.“ Není to pravda, umím říct polsky „děkuji“. A „na shledanou“ … (Tím ovšem nemyslím, abychom se už teď loučili.)

Otto Nikodym byl skvělý člověk, o 26 let starší než já. Zajímal se o teorii míry, hlavně o abstraktní přístup k míře. Neměl rád Radonův přístup, míry na topologickém prostoru, dával přednost abstraktnímu přístupu; věty, které dokázal, jsou slavné.

Bavil se o tom někdy s profesorem Dieudonné, který je znám svým striktním přístupem k abstraktním mírám?

Ne, protože se nikdy nedostal do Paříže. Z Polska odešel do Londýna a potom do USA, na jednu malou, tichou univerzitu v Ohiu a tam se usadil.

Znají ti mladí tady Dieudonného? Asi ne. A bourbakisty? Znáte je? Používáte jejich knihy? Předpokládám, že studujete hlavně z českých knih.

Myslím, že Bourbaki nebyl vydán v Československu, mám jen dvě či tři knihy, zakoupené v Rusku. Tady nejsou příliš rozšířené.

Kdybych měl radit mladým univerzitním studentům (ale může se to hodit i maturantům), řekl bych jim: číst je velmi důležité. Nejen poslouchat přednášky, ale i sám si číst — články i knihy. Nikoli nutně od začátku do konce, někdy může přinést víc čtení na přeskáčku. Sledovat, co říká autor od A až do Z nemusí být totiž nejlepší. Když chcete oponovat, což je jeden z dobrých způsobů, jak se učit, musíte mít jiný úhel pohledu a ten můžete získat čtením v jiném pořadí, než v jakém byla kniha psána.

Jak moc se musí profesor na univerzitě řídit nějakým programem?

V USA, hlavně v prvních ročnících vysoké školy, jsou přednášky číslovány. Má-li kurs číslo 923, ví student přesně, kde je sepsán a může si ho vyhledat. Takže profesor či docent musí přesně sledovat psanou verzi. I kdyby byl génius a měl originální nápady. Ve Francii tomu tak nikdy nebylo. Jestliže profesor učí např. obecnou topologii, nemusí učit podle žádné knihy. Může učit, co chce. Samozřejmě, neměl by přednášet třeba topologické grupy s diskrétní topologií místo obecné topologie, to by nebylo fér. Musí přednášet obecnou topologii, ale způsobem, který si sám zvolí. To je jedna z věcí, která se mi na našem systému líbí, že tento systém připouští úplnou svobodu volby.

Totéž ve výběru cvičení. Ve Francii nevede cvičení profesor, na to je spousta asistentů. První ročník pařížské univerzity má 200 studentů a na cvičení je vyčleněno řekněme 10 asistentů. Tito asistenti se každý týden setkávají s profesorem, který jim poví, jak je daleko a co by se mělo cvičit. Asistenti, kteří nemusí být nutně na nejvyšší úrovni, musí připravit cvičení a dát je profesorovi k schválení. Před třídu pak předstupují asistenti. Každý asistent má tedy asi 20 studentů, které cvičí. V principu by každý asistent měl každý týden dávat úlohu. Je to jako před 40 lety, úlohy byly každý týden. Dnes však se rozmáhá syndikalismus tvrdící, že postačí jedna úloha za 14 dnů.

Byl jste členem skupiny Bourbaki?

Ne, ne.

Je skupina stále aktivní?

Ano. Skupinu Bourbaki zformovalo kdysi 6 mladých matematiků (dnes jsou stále mladí, ale už to nejsou titíž lidé). Zakladatelé skupiny byli velmi mladí, měli tehdy kolem 25–30 let. Jejich cílem bylo původně zlepšit existující systém knih diferenciálního a integrálního počtu a postavit je na solidní základ. Mnohokrát se sešli a prodiskutovávali to. A zjistili, že když chcete například vysvětlit od základů větu Bolzanovu-Weierstrassovu, dojdete až k teorii množin. Ale začnete-li od teorie množin, musíte mluvit i o obecné topologii atd. Stanovili si tedy mnohaletý plán, který zahrnoval napsání knih o algebře, obecné topologii, vektorových prostorech…

Jakmile někdo dosáhne padesáti let, musí tuto skupinu opustit. Což znamená, že již nemůže spolupracovat, účastnit se diskusí a ústně vyjadřovat své názory. Může však spolupracovat korespondenčně, poštou.

Já jsem s nimi nespolupracoval. Jen dvakrát jsem se účastnil radou. Ptali se mě například, jak zavést kapacitu a integrální reprezentaci. Víceméně pak jednali podle mé rady, ale ne zcela. Proto úplně nesouhlasím s tím, jak integrální reprezentaci vykládají. Už je však příliš pozdě napravit to.

Bourbakisté napsali mnoho knih, nevím, snad 20, včetně posledních svazků o Lieových grupách — to jsou velmi dobré knihy. Ale je spousta dalších matematických disciplín, o kterých se nezmínili, např. teorie pravděpodobnosti. Z mnoha důvodů.

Jedním z nich byla od samého začátku i Dieudonného opozice vůči abstraktní teorii míry (míry bez topologického kontextu): Dieudonné trval na tom, že v důležitých případech prostory stejně mají topologii. Tvrdil, že když vezmete množinu s mírou, můžete na ni vždycky zavést topologii, při které to bude Radonova míra. Někteří členové skupiny oponovali: na množině existuje libovolně mnoho měr. Ale: uvažujeme-li jen ty míry, které mohou být na množině vytvořeny, je to v konečném čase jen konečně mnoho měr. Mějme tedy množinu s konečně mnoha mírami. Pak je vždycky možné kompaktifikovat onu množinu tak, že všechny míry budou Radonovy. Proto stačí uvažovat jen Radonovy míry. Takové byly některé jejich argumenty.

Bourbakistům činila potíže teorie pravděpodobnosti a její požadavky takové svobody manipulace s mírou, že topologie s tím nemá nic společného. To byl jeden z důvodů, proč nepublikovali nic o pravděpodobnosti. Bylo to taky proto, že v jejich týmu nebyl nikdo, kdo by pravděpodobnost dobře znal. Po krátký čas byl členem Paul André Meyer, velmi dobrý znalec pravděpodobnosti, který napsal jednu z hezkých knih — o cylindrických mírách. Meyer byl však ve skupině jen krátce, takže žádnou samostatnou knihu o pravděpodobnosti bourbakisté nenapsali.

Je tomu ovšem taky proto, že si záhy uvědomili, že svět matematiky je natolik široký, speciálně v poslední době, že počet knih, které by měly být napsány a počet věcí, které je třeba vysvětlit, roste exponenciálně; počet publikovaných knih roste však jen lineárně. Rozhodli se tedy vydávat jen knihy, které zajímají většinu členů jejich skupiny. Stále ještě pracují, ale jen na věcech, které je zajímají. Mezi jejich knihami rovněž nenajdete knihy o teoriích, které jsou už dobře zpracovány, jako je teorie grafů, teorie her atd.

Mám otázku jiného typu. Zdá se mi, že pro vás osobně byla geometrická intuice velmi důležitá ve vaší práci. Mám pravdu?

Ano, jistě. Moje práce je založena na intuici. Jsem básník. Práce mého mozku, když něco vymýšlím či dělám matematiku, je podobná práci básníka či malíře. To jest vidím věci, jejich geometrickou podstatu. Například jsem schopen si představit konvexní kompaktní množinu nekonečné dimenze. Místo toho, abych postupoval rigorózně krok za krokem (což je pochopitelně možné), dělám místo toho velké kroky; sice nepříliš bezpečné, ale jsem tak schopen velmi rychle dosáhnout cíle. Pak se vrátím a dívám se, zda všechny ty velké kroky byly v pořádku.

Znáte nějakého významného matematika, který takto nepostupuje?

Aha, vy si myslíte, že všichni matematici musí pracovat tímto způsobem. To není pravda, ale hodně z nich tak pracuje. Já například vidím jednotlivé kroky jako velké skály v údolí. Takže já vidím věci, jejich geometrickou podobu.

Často jsem se ptal algebraiků, jak oni pracují. Oni vidí struktury. Můžete tomu taky říkat geometrický styl.

Co si myslíte o nestandardní analýze jako matematické disciplíně na straně jedné a na druhé straně jako o prostředku výuky elementární analýzy? V USA proběhly experimenty, o kterých určitě víte, při kterých po elementární logice přešli přes nekonečně malé přímo ke kalkulu.

To je mnoho otázek najednou, pokusím se je zodpovědět. Je tu někdo, kdo neví, co to je nestandardní analýza? Už Aristoteles či Platón hovořili o nekonečně malých veličinách, ale také o diskrétním a spojitém. V nestandardní analýze jsou reálná čísla, která jsou nekonečně velká a přitom konečná, a také reálná čísla nekonečně malá. A axiómy. Jako příklad typického axiómu nestandardní analýzy lze uvést tento: Když ε je nekonečně malé, všechna čísla menší než ε jsou rovněž nekonečně malá.

Dnes existují mnohem jednodušší axiomatiky než ty původní, jsou slabší, ale jednodušší. Například na konferenci „Spojité a diskrétní“ byla navržena tato koncepce: Vezměme reálná čísla a zaveďme na nich kvalitativní vlastnost omezenosti. Říkejme tedy například: „a je omezené“. Aby to bylo smysluplné, budeme mít axióm, který říká: existují čísla, která nejsou omezená. Bylo by totiž zvláštní, kdybychom požadovali, aby všechna čísla byla omezená. Druhý axióm je: Je-li a omezené a $|b| < |a|$, je i b omezené. To je zcela přirozené. A třetí axióm: Jsou-li a i b omezená, je i $a + b$ a ab omezené. To je všechno. A stačí to k tomu, abyste dospěli k překrásným závěrům. Je to axiomatika, která je mnohem slabší než původní axiomatika Nelsonova. Není v rozporu s axiómy teorie množin, a proto je možné tyto skvělé věci uvažovat.

Teď k mému názoru. Patřil jsem k prvním matematikům ve Francii, kteří podporovali rozvoj nestandardní analýzy. Mnoho matematiků ji tehdy odmítalo. Dnes ji studuje hodně lidí, třeba ve Strasbourgu. To, co tam studují, je založeno na podobném axiómu, jako jsem tu popisoval: Když si vezmu přirozená čísla $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ (nazvěme je „naivní čísla“), pak jediný axióm říká: tato naivní čísla nevyčerpají množinu všech přirozených čísel. Tedy: existují přirozená čísla, která nejsou naivní.

Myslím si, že to má matematickou budoucnost. Vyskytly se už i jakési aplikace na parciální diferenciální rovnice. Veličiny, které fyzici považují za malé, resp. velké, se reprezentují nekonečně malými, resp. velkými a zacházíte s nimi podle normálních algebraických pravidel. Má to tedy jistou budoucnost, ale abychom to zas nepřeháněli. Já neberu nikdy nic moc dogmaticky.

Ohledně učení. Představte si, že byste už žákům základní školy vyprávěli o nekonečně velkých a nekonečně malých číslech. Řekli by: Tak mi nějaké ukažte. Takže když je učíte nestandardní analýzu, byť s velmi slabou axiomatikou, neabsorbují to. Nejsem si jist, zdali by se měla nestandardní analýza vyučovat. Asi ne dříve než na univerzitách. Jsem proti tomu, aby se učila už na středních školách.

Opakem velmi abstraktního způsobu je velmi konkrétní způsob vyučování. Používáte například při vyučování kalkulu software jako Mathematica, který usnadňuje manipulaci s výrazy? Mathematica např. explicitně integruje.

Já software nepoužívám, nepatří zrovna k věcem, které bych měl rád. A ostatní? Nemyslím, že ho v Paříži někdo užívá. Ale mohlo by to být užitečné.

Když totiž rozumíme velmi dobře tomu, co to je Lebesgueův integrál, dospějeme k názoru, že to je zřejmá věc. Zajímavější je však toto: studenti (je-li tomu tady stejně jako ve Francii) například rozumějí velmi dobře obecné topologii. A mají ji rádi. Ale lebesgueovské integraci, která není tak abstraktní, nerozumějí. Možná, že použití softwaru by mohlo být užitečné. Vy ho používáte?

Zatím ne.

Ale zkuste to. Jistěže.

Jaký je váš názor na postavení matematické analýzy v současné matematice? Upřesním to: Jste-li například na mezinárodní matematické konferenci a sledujete nositele Fieldsových medailí, vidíte jasně, které matematické disciplíny bývají odměňovány. Těžko mezi nimi najdete funkcionální analýzu, pravděpodobnost či teorii míry a integrace atd. Je tedy pozice matematické analýzy horší, než byla dříve, anebo tyto mezinárodní kongresy nejsou typickým případem?

Podívejte se, já si myslím, že výběr odpovídá složení komise. A jak je komise složena, nevím.

Ale mou první domněnku jste potvrdil, děkuji.

Je pravda, že se teď bouřlivě rozvíjejí všechny obory, které používají více či méně algebraické struktury, diferencovatelné struktury či variety a ještě více, pokud jde o směs těchto disciplín s teorií grup. To je fakt. Ty všechny obory budou však stále potřebovat analýzu a analýza je stále plná nádherných věcí. Dělejme tedy nadále analýzu.

Ale co se týká Fieldsových medailí, máte pravdu, že výběr kandidátů je orientován víceméně jedním směrem. A i mimo něj jsou velmi dobří matematici.

Pokud se týká role abstrakce v analýze: Například ve třicátých letech bylo populární mluvit o Banachových prostorech, pak se diskutovalo o topologických lineárních prostorech a v šedesátých letech byla pozornost zaměřena na konkrétní věci opět v Banachových prostorech. Způsoby abstrakce se tedy čas od času mění. Myslíte, že je to přirozené ve smyslu, že se to dá vysvětlit, anebo je to otázka vkusu či potřeb aplikace; jaký je tedy váš názor?

Směry vývoje matematiky nejsou diktovány shora, volí si je lidé, kteří tu kterou věc mají rádi. Jakmile se objeví skupina velmi dobrých matematiků, která se rozhodne mít ráda ten který obor, stane se tento obor důležitým. Když bourbakisté psali knihu o topologických vektorových prostorech, učinili na konci historickou poznámku, která pravděpodobně pochází od Dieudonného, že totiž do Banachových prostorů byly vkládány jisté naděje, ale teď se zdá, že neskýtají nic smysluplného. To bylo napsáno dávno, možná před 40 lety.

A vidíte: teorie Banachových prostorů nyní prožívá explozi. Ve světě je mnoho velmi důležitých center pro výzkum Banachových prostorů. Před 20 lety byl centrem Jeruzalém a Polsko, potom se centrum přemístilo do Paříže, což se pochopitelně může opět změnit. Banachovy prostory jsou teď velice důležitou disciplínou. A ačkoli má úzké propojení k mnoha jiným částem analýzy, je důležitá i proto, že je to hezký předmět zkoumání. Koneckonců, proč si myslíme, že teorie čísel je důležitá teorie? Nemůžete říci, že díky aplikacím. To se začíná říkat až v poslední době. Ale v dobách Hardyho? Myslím, že to byl Hardy, který prohlásil, že je hrdý na to, že jeho obor, teorie čísel, je obor, kde o žádné větě neslyšel, že by měla aplikaci. O dvacet let později se ukázalo, že neměl pravdu. Teď se rozvíjí teorie Banachových prostorů a proč ji tedy neuvažovat jako obor pro sebe, jako zajímavou disciplínu? Jako tomu bylo s teorií čísel před nějakým časem.

Ale je fakt, že např. teorie diferencovatelných variet či Lieových grup se bouřlivě rozvíjí díky fyzice. I když Lieovy grupy, které se vyskytují v kvantové teorii, jsou velmi speciální, potřebují obecnou teorii.

Obávám se, že čas uhání.

Ano, tím jsem si jist. Ale zpovídaný není nikdy tak unavený jako zpovídající.

Budu něco jako Žantovský: navrhuji poslední dvě či tři otázky. Nejsou? Chtěl bych tedy poděkovat prof. Choquetovi a … toto je konec.

Z magnetofonové nahrávky besedy konané na katedře matematické analýzy MFF UK v Praze 25.10.1990 přepsal, přeložil a upravil Mirko Rokyta.

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, ročník 37 (1992), č. 1, 30–42.

Professor Gustave Choquet
Doctor Universitatis Carolinae Honoris Causa Creatus

Vydal MATFYZPRESS
Vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty
Univerzity Karlovy v Praze
Ke Karlovu 3, 121 16 Praha 2
jako svou 81. publikaci

Editoři: Jaroslav Lukeš, Ivan Netuka a Jiří Veselý
Obálka a grafická úprava: Alan Záruba, Zdeněk Ziegler
Sazba zlom: Jiří Veselý
Litografie: FPS Repro s. r. o.

Z připravených předloh
vytisklo
Vydání první
Praha 2002
ISBN 80 – 85863 – 79 – 0

VYDAVATELSTVÍ
MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTY
UNIVERZITY KARLOVY

Projev G. Choqueta v Karolinu

Ma courte allocution lors de la cérémonie du 21 Mai

Vaše Magnificence, Spectabiles, váženi hoste, chers collègues et amis,

avant tout je veux vous dire "merci" pour la beauté de la cérémonie que vous venez de m'offrir dans ce splendide monument historique.

Merci aussi pour les éloges que l'amitié a inspirés à Ivan Netuka, doyen de la Faculté des Sciences mathématiques

Vaše Magnificence, spectabiles, vážení hosté, kolegové a přátelé,

nejprve bych vám chtěl poděkovat za překrásný ceremoniál, který jste uspořádali na mou počest v této nádherné historické budově. Děkuji rovněž za přátelské laudatio, které proslovil děkan Matematicko-fyzikální fakulty Ivan Netuka.

Dnes mám příležitost vám sdělit, že můj zájem účastnit se konferencí organizovaných vaší skupinou matematické analýzy, ať se konaly v Praze nebo uprostřed zalesněných kopců na Pasekách či v Koutech, pramenil nejenom z možnosti setkávat se s významnými kolegy, ale rovněž z touhy znovu pociťovat vřelé české přátelství.

Prahu jsem poprvé objevil v dávné minulosti, když jsem zde v květnu roku 1946 na týden přerušil dlouhou cestu kodrcavým vlakem, jenž mě pomalu unášel do Varšavy a Krakova, kde jsem měl s polskými matematiky navázat styky zpřetrhané válkou. Praha, tehdy plná naděje, si začínala hojit rány. Setkal jsem se tu s geometrem Václavem Hlavatým zabývajícím se teorií relativity, nikoliv však s topologem Eduardem Čechem, jehož práce jsem znal.

Později, na konferenci uspořádané na počest nedávno zesnulého matematika Stefana Banacha, na niž se sjelo do Wroclavi mnoho Poláků a Čechoslováků, jsem se seznámil s vitálním a vtipným Vojtěchem Jarníkem z Prahy. Díky jemu jsem se mnohem později dozvěděl z jeho knížky vydané ke dvoustému výročí Bernarda Bolzana, narozeného v Praze 5. října 1781, že Bolzano,

de Prague, plein de vitalité et d'humour. Ce fut grâce à lui que, bien plus tard je découvris dans le petit livre qu'il publia à l'occasion du bicentenaire de Bernard Bolzano, né à Prague le 5 octobre 1781, que Bolzano,

connu de tous nos étudiants par le célèbre théorème de Bolzano-Weierstrass
et les exemples paradoxaux qui l'accompagnent, d'abord en était le
premier découvreur, puis qu'il n'était pas italien, et enfin que ce
prêtre, souvent persécuté pour ses idées sociales avancées, mais souvent
aussi soutenu, était également un philosophe et un excellent logicien d'une
grande intuition géométrique.

La vie de Bolzano montre bien que le coeur de Prague battait
déja au même rythme que celui de nations comme la France,
l'Allemagne et l'Angleterre.

známý všem našim studentům díky slavné Bolzano-Weierstrassově větě, především nebyl Ital, dále že byl prvním objevitelem paradoxních příkladů, a také to, že tento kněz, často pronásledovaný pro své pokrokové sociální myšlení, ale rovněž často podporovaný, byl filozofem a vynikajícím logikem s velkou geometrickou intuicí.

Bolzanův život dokazuje, že srdce Prahy již tehdy bilo ve stejném rytmu jako srdce národů, jakými jsou Francie, Německo a Anglie. Ale to platilo i o 200 let dříve, kdy Praha často poskytovala azyl, jak tomu bylo například u slavného dánského astronoma Tycho Brahe, který se do Prahy uchýlil v roce 1600, aby zde pokračoval ve své práci. Těchto několik příkladů dobře dokresluje skutečnost, že české země po dlouhá staletí, v dobrém i ve zlém, měly své dveře široce otevřeny do Evropy. Jednou obohatila Evropa je, jindy tomu bylo obráceně.

Dovolte mi nyní několik osobních postřehů, které tento vzájemný přínos ilustrují. V roce 1956 byl na École Normale Supérieure přijat vynikající mladý Čech Ivan Kupka, jehož rodina se krátce předtím přistěhovala do Paříže. Jeho spolužáci s údivem sledovali tohoto mimořádně nadaného studenta odjinud, který už před přijetím na tuto školu znal veškerá v té době vydaná díla Bourbakiho.

O deset let později jsem živě korespondoval se Zdeňkem Frolíkem, jiným mladým Čechem, jehož práce navazovala na moji. K našemu prvnímu setkání došlo v březnu 1968 v Římě na jedné mezinárodní konferenci, která úspěšně proběhla vzdor studentským nepokojům. Jednou odpoledne jsme s Frolíkem seděli v římské hospůdce a hovořili o matematice i o studentských nepokojích, když mi řekl: Vy ve Francii, na rozdíl od nás, nevíte, co je opravdová svoboda . Rozhovor se odehrál jen několik měsíců před 21. srpnem 1968.

mai, alors qu'avec Frolik,
assis dans un petit bistro romain, nous échangions des propos variés,
sur les mathématiques et sur l'agitation étudiante, Frolik me dit :
" En France vous ne savez pas, comme nous, ce qu'est la vraie liberté."
Mais cette conversation précédait de plusieurs mois le 20 Août 1968.

Puis-je évoquer pour clore cette courte liste le nom d'un jeune et brillant analyste qui acquit sa formation mathématique en terre tchèque et dont j'eus souvent le plaisir d'écouter les conférences à Paris ou en Angleterre : Il s'agit de D. Preiss dont certainement le pays natal peut regretter le départ, mais dont les travaux continuent à faire respecter l'école mathématique tchèque.

C'est pour une tout autre raison que la vitalité des Analystes tchèques est aujourd'hui reconnue hors de la République tchèque, les mathématiciens ...

Tento krátký výčet uzavřu jménem mladého a skvělého odborníka v matematické analýze, který vystudoval v Čechách a jemuž jsem s potěšením naslouchal na přednáškách v Paříži nebo v Anglii. Jde o Davida Preisse, jehož odchodu do zahraničí rodná země může želet. Jeho práce však nadále budí úctu k české matematické škole.

Životaschopnost představitelů české matematické analýzy je uznávána mimo hranice České republiky ze zcela jiného důvodu. Přítomní matematici ten příběh znají, ale rád bych jej připomenul.

Funkcionální analýza i teorie potenciálu se v bouřlivých poválečných létech v Praze prosazovala pomalu a postupně. Zdá se mi, že zahradníkem, jemuž se podařilo tuto rostlinu v šedesátých letech úspěšně naroubovat, byl profesor Jan Mařík, který správně pochopil plodotvornou úlohu teorie potenciálu, zrozené ve hvězdách s Newtonem, Laplacem a Poincarém. Tento štěp ve svých pravidelných seminářích systematicky ošetřoval Josef Král spolu s aktivním jádrem profesorů, které kolem sebe shromáždil: Jaroslavem Lukešem, Jiřím Veselým, Ivanem Netukou.

Z jejich iniciativy se rok co rok pořádaly jarní a letní školy, které si záhy vydobyly mezinárodní ohlas a přitahovaly renomované přednášející a vědce ze všech evropských i mimoevropských zemí.

Co je ale ona teorie potenciálu, o níž jsem se několikrát zmínil a jíž jsem věnoval valnou část své badatelské činnosti? Klíčových slov, která nacházíme ve všech pracích na toto téma, je mnoho a pro odborníky jsou velmi výmluvná: role ostrých hrotů, kondenzátor, kapacita, Faradayova klec, balayage (vymetání), rovnovážný stav, tok, energie, evoluce atd. Bez matematické definice však tato slova mají nádech záhadnosti.

... spécialistes ; Pouvoir des pointes, condensateur, capacité, cage de Faraday, balayage, équilibre, flux, énergie, évolution, etc...

Mais privés de leur définition mathématique, ces mots gardent leur mystère.

Je dirai donc simplement que le pouvoir d'attraction de la théorie du potentiel s'explique comme celui d'une autre théorie mathématique récemment popularisée par la résolution du dernier théorème de Fermat, la théorie des nombres entiers :

on peut, dans ces deux théories poser des problèmes difficiles en termes simples, donc fascinants, dont la résolution exige à la fois l'utilisation d'outils connus, et la création d'outils nouveaux et de notions nouvelles.

Řeknu tedy pouze, že atraktivitu teorie potenciálu lze vysvětlit stejně jako v případě jiné matematické teorie, která se nedávno stala populární díky důkazu velké Fermatovy věty, totiž teorie čísel. V obou těchto teoriích lze složité problémy formulovat v jednoduchých, a tudíž fascinujících termínech a přitom řešení těchto problémů vyžaduje jak užití nástrojů známých, tak i vytvoření nástrojů a pojmů nových.

Naše teorie je zároveň prubířským kamenem osvědčených nástrojů i vhodnou příležitostí k vytváření nových a nečekaných vztahů k jiným teoriím. Hustý strom rozličných matematických disciplín takto košatí, přitom se ale zjednodušuje a stává se z něj strom matematiky jediné.

Pokusil jsem se poodhalit závoj zakrývající před zraky laiků trpělivou práci rytířů natolik oddaných této překrásné teorii, že se po celý život věnují některé nebo některým z jejích metamorfóz: harmonické analýze, lineárním eliptickým rovnicím, Dirichletovým prostorům, distribucím, kapacitám atd.

Rád bych svůj proslov nyní ukončil zmínkou o osobnosti člověka, který mě po svém boku umožnil vstoupit do širokých alejí teorie potenciálu. Když jsem v roce 1947 dostal v Krakově nabídku stát se docentem v Grenoblu v blízkosti Marcela Brelota, netušil jsem, že mě trpělivě zasvětí do některých svých matematických problémů, jako je například vyjasnění vztahu mezi vnitřní a vnější kapacitou. Sám jsem o teorii potenciálu věděl jen to, co mě naučil přítel Jacques Deny v roce 1944 při sepisování společného článku, ale Brelot uměl být trpělivý.

Všichni odborníci na teorii potenciálu znají skvost zvaný Brelotovy harmonické prostory, ale málokterý z nich poznal Brelota zblízka jako člověka. Jeho skromnost, obrovskou intelektuální poctivost, snahu z každého dostat to nejlepší, jeho odpor vůči kariérismu.

Patří k lidem, jejichž povahu jsem nejvíce obdivoval.

... ses Espaces harmoniques. ... peu ont connu de près l'homme Brelot : Sa modestie, sa grande honnêteté intellectuelle, son souci de tirer de chacun le meilleur, et son horreur de l'arrivisme.

C'est un des hommes dont j'ai le plus admiré le caractère.