Funkcionální analýza I - LS 2000/2001

1. TEORIE DISTRIBUCÍ

1.A. Prostor testovacích funkcí
- prostor testovacích funkcí a konvergence na něm

1.B. Distribuce
- pojem distribuce
- příklady distribucí : lokálně integrovatelné funkce, Radonovy míry, 1/x

1.C. Operace s distribucemi
- derivace distribucí
- Banach-Steinhausova věta pro distribuce
- derivování řad ve smyslu distribucí
- násobení distribucí hladkou funkcí, Schwartzova věta

1.D. Fourierova transformace distribucí
- Fourierova transformace pro funkce z L^1
- Fourier-Plancherelova transformace (Parsevalova rovnost, existence, pojem unitárního operátoru)
- Schwartzův prostor a konvergence v něm
- temperované distribuce a jejich Fourierova transformace

2. BANACHOVY ALGEBRY

2.A. Banachovy algebry
- pojem Banachovy algebry, příklady ($C(K)$, lineární operátory na Banachově prostoru, disková algebra, $L^1(\mathbf{R})$ s konvolucí, $l^1(\mathbf{Z})$)
- otázka existence jednotky
- spojitost násobení
- vlastnosti množiny regulárních prvků (topologická grupa, otevřenost, vyjádření inverzního prvku a jeho norma)
- spektrum, rezolventa a spektrální poloměr
- rezolventní funkce
- kompaktnost a neprázdnost spektra
- Gelfand-Mazurova věta
- Beurlingův vzoreček

2.B. Gelfandova reprezentace
- charaktery jako multiplikativní funkcionály, prostor charakterů a Gelfandova topologie na něm
- Gelfandova transformace a její základní vlastnosti
- příklady ($\mathcal{C}(K)$, $l^1(\mathbf{Z})$)
- kdy je Gelfandova reprezentaze prostým zobrazením (radikál algebry), kdy izometrií a kdy je na (Gelfand-Naimarkova věta)

2.C. Základy harmonické analýzy
- topologická grupa, příklady
- Haarova míra na kompaktních či lokálně kompaktních prostorech (existence a jednoznačnost)
- konvoluce funkcí, grupová algebra $\mathcal{L}^1(G)$
- charaktery grupy, duální grupa, Pontrjaginova věta
- popis charakterů na $\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{T}$
- Gelfandův prostor $\mathcal{L}^1(G)$
- Gelfandova transformace funkcí z $\mathcal{L}^1(G)$ a vztah k Fourierově transformaci a Fourierovým řadám

3. SPEKTRÁLNÍ TEORIE

3.A. Hermiteovské operátory
- hermiteovsky adjungované zobrazení (existence a vlastnosti), souvislost s banachovsky adjungovaným zobrazením
- diagonalizace matic, věta o hlavních osách
- hermiteovské a normální operátory
- norma hermiteovského operátoru
- aproximativní spektrum - vztah ke spektru a bodovému spektru
- charakteristika zdola omezených operátorů
- Weylovo kriterium a jeho důsledky (spektrum hermiteovského operátoru, spektrum hermiteovského kompaktního operátoru)
- Hilbert-Schmidtova věta (o úplnosti soustavy vlastních vektorů) a její důsledky (Hilbert-Schmidtova diagonalizace, holomorfnost, póly a rezidua rezolventní funkce, řešení operátorových rovnic rozvojem v řady)
- invariantní podprostory, problém existence invariantního podprostoru

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

3.B. Funkční kalkulus

- obecný pojem funkčního kalkulu
- Dunfordův analytický kalkulus pro případ Banachových algeber a funkcí holomorfních na okolí spektra
- pojem involuce, základy C^*–algeber)
- Rieszův funkční kalkulus pro hermiteovské operátory a funkce spojité na spektru
- pozitivní operátory, odmocnina, absolutní hodnota
- rozšíření funkčního kalkulu pro omezené borelovské funkce na spektru

3.C. Spektrální věty

- spektrální rozklad hermiteovského operátoru a souvislost spektrální věty s Hilbert-Schmidtovou větou
- spektrální třída a spektrální míra
- obecná spektrální věta

4. ZÁKLADY NELINEÁRNÍ FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZY

4.A. Geometrie Banachových prostorů

- striktně konvexní a uniformně konvexní prostory
- přenormování separabilního prostoru
- promítání v uniformně konvexních prostorech
- slabé a normové uzávěry konvexních množin
- slabá polospojitost normy
- promítání v reflexivních striktně konvexních prostorech

4.B. Věty o pevných bodech

- pojem FPP a retraktu
- Brouwerova věta pro jednotkovou kouli a její zobecnění
- Schauderův příklad
- Schauderova věta a některá její zobecnění (důkaz pomocí renormace a Brouwerovy věty)
- použití Schauderovy věty (existenční věty pro diferenciální a integrální rovnice)

4.C. Topologický stupeň

- základní požadavky na topologický stupeň
- Sardova věta jako spec.případ obecnějšího tvrzení
- zavedení topologického stupně v prostorech konečné dimenze
- důkaz Brouwerovy věty

5. Doplňky dle výběru

5.A. Diferenciální počet v Banachových prostorech

5.B. Integrální počet v Banachových prostorech

5.C. Neomezené opereátory

5.D. Semigrupy

Početní technika:

- operátory (norma, spektrum, adjungovaný op.,...)
- funkční kalkulus
- distribuce
- Fourierova transformace funkcí a distribucí

Vědomosti z Úvodu do funkcionální analýzy

- vlastnosti základních příkladů Banachových a Hilbertových prostorů, topologické doplňky, promítání v Banachových a Hilbertových prostorech, ortonormální báze, prostor lineárních zobrazení, Fréchet-Rieszova věta o reprezentaci lineárních funkcionálů na Hilbertových prostorech, popisy různých duálů, Hahn-Banachova věta včetně důsledků, kanonické vnoření a reflexivní prostory, kompaktní operátory, adjungovaná zobrazení, slabé konvergence, princip stejnoměrné omezenosti, Banach-Steinhausova věta, Banachova věta o otevřeném zobrazení, uzavřená zobrazení, kompaktnost a slabá kompaktnost jednotkové koule v Banachových prostorech, spektrum kompaktního operátoru

Literatura

P. Habala, P. Hájek and V. Zizler, *Introduction to Banach spaces I,II*, Matfyzpres Praha, 1996.
J. Lukeš, *Zápisky z funkcionální analýzy*, skripta, Karolinum Praha, Univerzita Karlova,, 1998.
J. Lukeš a J. Malý, *Míra a integrál*, skripta, Univerzita Karlova, 1993 (anglické vydání 1995).
W. Rudin, *Analýza v reálném a komplexním oboru*, Academia Praha, 1977.
W. Rudin, *Functional analysis*, Mc Graw Hill, 1973 (ruský překlad 1975).

Praha, 8. května 2001 Jaroslav Lukeš