CHOQUETOVA TEORIE, HRANICE A APLIKACE

PŘEHLED HLAVNÍCH VĚT

1. Aperitiv - Korovkinova věta

Věta 1 (Korovkinova)**.** *Nechť* $\{T_n\}$ *je posloupnost nezáporných lineárních operátorů na prostoru* $\mathcal{C}([0,1])$ *a* p_0, p_1, p_2 *polynomy definované pro* $x \in [0,1)$ *jako* $p_j : x \mapsto x^j$, $j = 0,1,2$. *Jestliže* $T_n p_j \rightrightarrows p_j$ *na* $[0,1]$ *pro* $j = 0,1,2$, *potom* $T_n f \rightrightarrows f$ *na* $[0,1]$ *pro každou funkci* $f \in \mathcal{C}([0,1])$.

Důkaz. Důkaz založen na lemmatu: Buď $f \in \mathcal{C}([0,1])$ a $\varepsilon > 0$. Potom existuje $M > 0$ tak, že

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + M\,|x-y|^2\,, \quad x, y \in [0,1]\,.$$

□

2. Funkční prostory

Věta 2 (Klíčové lemma)**.** *Buď* $f \in \mathcal{C}(K)$ *a* $x \in K$. *Potom*

$$[f_*(x), f^*(x)] = \{\mu(f) : \mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})\}\,.$$

Věta 3. *Označíme–li* $\mathcal{H}^* := \{f \in \mathcal{C}(K) : f_* = f^* \text{ na } K\}$, *je* $\mathcal{A}^c(\mathcal{H}) = \mathcal{H}^*$.

Věta 4 (Bauer)**.** *Bod* x *leží v Choquetově hranici* $\mathrm{Ch}_{\mathcal{H}}(K)$, *právě když* $f_*(x) = f^*(x)$ *pro každou* $f \in \mathcal{C}(K)$.

Věta 5. $\mathcal{H}$*–exponované body leží v Choquetově hranici.*

Lemma 6. *Buď* $f \in \mathcal{A}^c(\mathcal{H})$ *a* $\varepsilon > 0$. *Potom existuje* $w \in \mathcal{W}(\mathcal{H})$ *tak, že*

$$f \leq w \leq f + \varepsilon \quad \text{na } K\,.$$

Věta 7 (Svazová verze Stone–Weierstrassovy věty)**.** *Buď* K *kompakt a* $\mathcal{B} \subset\subset \mathcal{C}(K)$ *svaz obsahující konstanty a oddělující body* K. *Potom* $\mathcal{B}$ *je hustý v* $\mathcal{C}(K)$.

Věta 8. *Nechť* $\mathrm{Kor}(\mathcal{H})$ *značí Korovkinův uzávěr* $\mathcal{H}$. *Potom* $\mathcal{H}^* = \mathcal{A}^c(\mathcal{H}) \subset \mathrm{Kor}(\mathcal{H})$. *Je-li kompakt* K *metrizovatelný, je* $\mathcal{H}^* = \mathcal{A}^c(\mathcal{H}) = \mathrm{Kor}(\mathcal{H})$.

Věta 9. *Nechť* K *je metrizovatelný kompakt. Potom* $\mathrm{Kor}(\mathcal{H}) = \mathcal{C}(K)$, *právě když* $\mathrm{Ch}_{\mathcal{H}}(K) = K$.

Věta 10 (Fejér, 1910)**.** *Nechť* $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ *a nechť* $T_n f$ *značí aritmetický průměr* n *častečných součtů Fourierovy řady* f. *Potom* $T_n f \to f$ *stejnoměrně na* $[0, 2\pi]$ *pro každou* $f \in \mathcal{C}(2\pi)$.

Věta 11 (Řešení Dirichletovy úlohy pro jednotkový kruh v $\mathbb{C}$)**.** *Buď* $f \in \mathcal{C}(2\pi)$ *a*

$$u(r,\varphi) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi - s) + r^2}\, f(s)\, ds$$

pro $r \in (0,1)$ *a* $\varphi \in [0, 2\pi]$. *Potom* $\Delta u = 0$ *na* $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1$ *a*

$$\lim_{r \to 1_-} u(r,\varphi) = f(\varphi) \quad \text{stejnoměrně na } [0, 2\pi]\,.$$

Důkaz. Důkaz pouze naznačen. □

3. $\mathcal{H}$–konvexní funkce

Věta 12. *Systém $\mathcal{E}$ všech uzavřených $\mathcal{H}$–extremálních množin je uzavřený na tvoření konečných sjednocení a libovolných průniků.*

Lemma 13. *Buď $F \subset K$ uzavřená $\mathcal{H}$–extremální množina a $f \in \mathcal{S}^{lsc}(\mathcal{H})$. Potom množina $\{x \in F : f(x) = \min f(F)\}$ je $\mathcal{H}$–extremální.*

Věta 14. *Je–li $\emptyset \neq F \subset K$ uzavřená $\mathcal{H}$–extremální množina, je $F \cap \mathrm{Ch}_H(K) \neq \emptyset$. Speciálně, $\mathrm{Ch}_{\mathcal{H}}(K) \neq \emptyset$.*

Věta 15 (Bauerův princip minima)**.** *Buď $f \in \mathcal{S}^{lsc}$. Je–li $f \geq 0$ na $\mathrm{Ch}_{\mathcal{H}}(K)$, je $f \geq 0$ na K.*

4. Konvexní příklad funkčního prostoru

Věta 16. *Buď E lokálně konvexní prostor a $K \subset E$ kompaktní množina. Potom prostor $E^* + \mathbb{R} \restriction X$ je hustý v $A^c(X)$.*

Příklad. Příklad prostoru, pro nějž $E^* + \mathbb{R} \restriction X \neq A^c(X)$.

Věta 17 (Kraus, 2009)**.** *V každém nekonečně–dimenzionálním Banachově prostoru E existuje kompaktní konvexní množina X taková, že $E^* + \mathbb{R} \restriction X \neq A^c(X)$.*

Věta 18. *Buď E lokálně konvexní prostor, $X \subset E$ kompaktní konvexní množina, $x \in X$ a $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$. Potom x je těžištěm μ, právě když*

$$f(x) = \int_X f\, d\mu \quad \text{pro každý funkcionál} \quad f \in E^*, .$$

Věta 19. *Buď E lokálně konvexní prostor, $K \subset E$ kompaktní množina a $x \in K$. Potom $x \in \overline{\mathrm{co}}\, K$, právě když existuje $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$, jejímž těžištěm je x.*

Věta 20. *Buď E lokálně konvexní prostor, $K \subset E$ kompaktní množina taková, že $X := \overline{\mathrm{co}}\, K$ je kompakt. Je–li $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$, existuje právě jedno $x \in X$ tak, že x je těžištěm r_μ míry μ.*

Zobrazení $\mu \mapsto r_\mu : \big((\mathcal{M}^1(K), w^*) \to X\big)$ je spojité, afinní a surjektivní.

Věta 21. *Buď K kompaktní prostor. Potom $\mathcal{M}^1(K)$ je w^*–kompaktní konvexní množina a*

$$\mathrm{ext}\, \mathcal{M}^1(K) = \{\varepsilon_x : x \in K\}\,.$$

Věta 22 (Bauer, 1958)**.** *Buď E lokálně konvexní prostor a $X \subset E$ kompaktní konvexní množina. Potom*

$$\mathrm{Ch}_{\mathcal{H}}(X) = \mathrm{ext}\, X\,.$$

Věta 23 (Krejn–Milman)**.** *Buď E lokálně konvexní prostor a $X \subset E$ kompaktní konvexní množina. Potom $X = \overline{\mathrm{co}}\, \mathrm{ext}\, X$.*

Věta 24. *Buď K kompakt a $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$. Potom existuje net $\{\mu_\alpha\}$ molekulárních měr na K tak, že $\mu_\alpha \xrightarrow{w^*} \mu$.*

Věta 25. *Buď E lokálně konvexní prostor, $X \subset E$ kompaktní konvexní množina a $x \in X$. Potom $x \in \overline{\mathrm{co}}\, \mathrm{ext}\, X$, právě když existuje $\mu \in \mathcal{M}_x(X)$ tak, že $\mathrm{spt}\, \mu \subset \overline{\mathrm{ext}\, X}$.*

Věta 26 (Klee, 1959)**.** *Buď B Banachův prostor nekonečné dimenze a $\mathcal{K}(B)$ prostor všech neprázdných kompaktních konvexních podmnožin B opatřený Hausdorffovou metrikou. Potom $\mathcal{K}(B)$ je úplný a množina $\{K \in \mathcal{K}(B) : \overline{extK} \neq K\}$ je 1. kategorie.*

Důkaz. BD □

Věta 27. *Buď E lokálně konvexní prostor, $X \subset E$ kompaktní konvexní množina a $F \subset X$ uzavřená. Potom F je extremální v X, právě když F je $\mathcal{A}^c(X)$–extremální.*

Věta 28. *Buď E lokálně konvexní prostor, $X \subset E$ kompaktní konvexní množina a $f \in \mathcal{C}(X)$. Potom f je afinní na X, právě když f je $\mathcal{A}^c(X)$–afinní.*

Věta 29 (Milman)**.** *Buď E lokálně konvexní prostor a $B \subset E$ taková množina, že $X := \overline{\text{co}}\, B$ je kompakt. Potom* $\operatorname{ext} X \subset \overline{B}$.

Věta 30. *Buď E lokálně konvexní prostor a $X \subset E$ metrizovatelná kompaktní konvexní množina. Potom existuje kompaktní konvexní množina $M \subset \ell^2$ a afinní homeomorfní zobrazení množiny X na M.*

5. Harmonický příklad funkčního prostoru

Věta 31 (Keldyš, 1941)**.** *Buď $U \subset \mathbb{R}^n$ otevřená omezená a*

$$\mathbf{H}(U) := \{f \in \mathcal{C}(\overline{U}) : f \restriction U \in \mathcal{H}(U)\}\,.$$

Potom $\mathbf{H}(U)$ je funkční prostor a existuje právě jeden lineární nezáporný operátor $A : \mathcal{C}(\partial U) \to \mathcal{H}(U)$ takový, že

$$A(h \restriction \partial U) = h \restriction U \quad \textit{kdykoliv} \quad h \in \mathbf{H}(U)\,.$$

Důkaz. BD □

Věta 32. *Buď $U \subset \mathbb{R}^n$ otevřená omezená.*

(a) *Pro $z \in \partial U$ jsou následující výroky ekvivalentní:*
  (i) $z \in U_{\text{reg}}$,
  (ii) $z \in \operatorname{Ch}_{\mathbf{H}(U)}(\overline{U})$,
  (iii) *z je $\mathbf{H}(U)$–exponovaný.*

(b) *Pro každé $x \in \overline{U}$ existuje právě jedna míra $\mu_x \in \mathcal{M}_x\big(\mathbf{H}(U)\big)$ tak, že*

$$\mu_x\big(\overline{U} \setminus \operatorname{Ch}_{\mathbf{H}(U)}(\overline{U})\big) = 0\,.$$

Pokud $x \in U$, je $\mu_x = \mu_x^U$. Speciálně, $\mu_x^U(\partial U \setminus U_{reg}) = 0$.

Důkaz. BD □

Věta 33. *Buď $U \subset \mathbb{R}^n$ otevřená omezená a $z \in \partial U$. Potom existuje právě jedna míra $\mu_z^U \in \mathcal{M}^1(\partial U)$ tak, že*

$$\mu_z^{U \cup V_n} \xrightarrow{w^*} \mu_z^U$$

pro každou posloupnost $\{V_n\}$ otevřených okolí bodu z takových, že $V_n \searrow \{z\}$.

Důkaz. BD □

6. Choquetova věta o reprezentaci

(metrizovatelný případ)

Věta 34. *Buď K metrizovatelný kompakt. Potom na K existuje striktně $\mathcal{H}$–konvexní funkce.*

Věta 35. *Buď $\mathcal{H}$ funkční prostor na metrizovatelném kompaktu K. Potom $\operatorname{Ch}_{\mathcal{H}}(K)$ je G_δ–množina.*

Věta 36 (Choquetova o reprezentaci)**.** *Buď $\mathcal{H}$ funkční prostor na metrizovatelném kompaktu K a $x \in K$. Potom existuje míra $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ nesená $\operatorname{Ch}_{\mathcal{H}}(K)$.*

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx KONEC ZIMNÍHO SEMESTRU xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

7. Maximální míry

Věta 37 (Vlastnosti $\mathcal{S}^c(\mathcal{H})$)**.** *Buď $\mathcal{H}$ funkční prostor na kompaktu K. Potom:*
(a) *$\mathcal{S}^c(\mathcal{H})$ tvoří min–stabilní konvexní kužel,*
(b) *$\mathcal{S}^c(\mathcal{H})$ - $\mathcal{S}^c(\mathcal{H})$ je hustý v $\mathcal{C}(K)$,*
(c) *$f = f^*$ pro každou $f \in \mathcal{S}^c(\mathcal{H})$,*
(d) *je–li f shora omezená na K, je*

$$f^* = \inf\{s : s \in \mathcal{S}^c(\mathcal{H}), s \geq f \text{ na } K\},$$

(e) *je–li f omezená shora na K, je*

$$\mu(f^*) = \inf\{\mu(s) : s \in \mathcal{S}^c(\mathcal{H}), s \geq f \text{ na } K\}.$$

Věta 38. *Buď $x \in K$ a $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$. Potom*

$$\varepsilon_x \prec \mu \quad \Longleftrightarrow \quad \mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})\,.$$

Věta 39. *Buď $f \in \mathcal{C}(K)$ a $\lambda \in \mathcal{M}^1(K)$. Potom*

$$[\lambda(f_*), \lambda(f^*)] = \{\mu(f) : \lambda \prec \mu\}.$$

Věta 40 (Mokobodzkého charakteristika maximálních měr)**.** *Buď $\lambda \in \mathcal{M}^1(K)$. Potom je ekvivalentní:*
(i) *λ je maximální,*
(ii) *$\lambda(f) = \lambda(f^*)$ pro každou $f \in \mathcal{C}(K)$,*
(iii) *$\lambda(k) = \lambda(k^*)$ pro každou $k \in \mathcal{K}^c(\mathcal{H})$.*

Věta 41. *Buď $\mathcal{H}$ funkční prostor na metrizovatelném kompaktu K, $h \in \mathcal{K}^c(\mathcal{H})$ striktně $\mathcal{H}$–konvexní funkce na K a $\lambda \in \mathcal{M}^1(K)$. Potom je ekvivalentní:*
(i) *λ je maximální,*
(ii) *$\lambda(h) = \lambda(h^*)$,*
(iii) *$\lambda\big(K \setminus \mathrm{Ch}_K(\mathcal{H})\big) = 0$.*

Věta 42 (Choquet–Bishop–de Leeuw)**.** *Buď $\mathcal{H}$ funkční prostor na kompaktu K a $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$. Potom existuje maximální míra $\lambda \in \mathcal{M}^+(K)$ tak, že $\mu \prec \lambda$.*

Důkaz. Důkaz pro metrizovatelný kompakt K, pro nemetrizovatelný pouze náznak použitím Zornova lemmatu. □

Lemma 43. *Nechť f je shora polospojitá na K. Potom*
(a) *je-li $x \in K$, existuje $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ tak, že $f^*(x) = \mu(f)$,*
(b) *$f^* = \inf\{s : s \in \mathcal{S}^{lsc}(\mathcal{H})\,,\ s \geq f \text{ na } K\}$.*

8. Simpliciální prostory

Věta 44 (Boboc–Cornea, 1967)**.** *Buď K kompaktní prostor a $\mathcal{F}$ konvexní množina zdola polospojitých funkcí na K. Je ekvivalentní:*
(i) *existuje $f \in \mathcal{F}$ tak, že $f > 0$ na K,*
(ii) *je-li $\mu \in \mathcal{M}^+(K)$, $\mu \neq 0$, potom existuje $g \in \mathcal{F}$ tak, že $\mu(g) > 0$.*

Věta 45. *Buď $\mathcal{H}$ funkční prostor na kompaktu K, g shora polospojitá na K a $f \in \mathcal{S}^{lsc}(\mathcal{H})$. Je-li $g \leq f$ na K, existuje $s \in \mathcal{S}^c(\mathcal{H})$ tak, že $g \leq s \leq f$ na K.*

Lemma 46. *Buď $\mathcal{H}$ funkční prostor na kompaktu K.*
(a) *Je-li $f \in \mathcal{K}^{usc}(\mathcal{H})$, potom*

$$f = \inf\{k : k \in \mathcal{K}^c(\mathcal{H})\,,\ k \geq f \text{ na } K\}\,.$$

V případě metrizovatelného kompaktu K, existuje posloupnost $\{k_n\}$ v $\mathcal{K}^c(\mathcal{H})$ tak, že $k_n \searrow f$ na K.

(b) *Jsou-li* $\mu, \nu \in \mathcal{M}^1(K)$, *potom* $\mu \prec \nu$, *právě když* $\mu(k) \leq \nu(K)$ *pro každou funkci* $k \in \mathcal{K}^{usc}(\mathcal{H})$.

Lemma 47. *Buď* $\mathcal{H}$ *simpliciální funkční prostor na kompaktu* K. *Potom*

(a) *je-li* $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$, *je* $\mu \prec \delta_x$,
(b) $f^* = H_f$ *na* K *pro každou funkci* $f \in \mathcal{K}^{usc}(\mathcal{H})$.

Věta 48. *Buď* $\mathcal{H}$ *funkční prostor na kompaktu* K. *Je ekvivalentní:*

(i) $\mathcal{H}$ *je simpliciální,*
(ii) f^* *je* $\mathcal{H}$*–afinní pro každou funkci* $f \in \mathcal{K}^c(\mathcal{H})$,
(iii) f^* *je* $\mathcal{H}$*–afinní pro každou funkci* $f \in \mathcal{K}^{usc}(\mathcal{H})$.

Věta 49 (Edwardsova vkládací věta, 1965)**.** *Buď* $\mathcal{H}$ *funkční prostor na kompaktu* K. *Je ekvivalentní:*

(i) $\mathcal{H}$ *je simpliciální,*
(ii) *jsou-li* $s \in \mathcal{K}^c(\mathcal{H})$, $t \in \mathcal{S}^c(\mathcal{H})$, $s \leq t$ *na* K, *potom existuje* $h \in \mathcal{A}^c(\mathcal{H})$ *tak, že* $s \leq h \leq t$ *na* K,
(iii *jsou-li* $s \in \mathcal{K}^{usc}(\mathcal{H})$, $t \in \mathcal{S}^{lsc}(\mathcal{H})$, $s \leq t$ *na* K, *potom existuje* $h \in \mathcal{A}^c(\mathcal{H})$ *tak, že* $s \leq h \leq t$ *na* K.

Poznámka. Poznámka o Tong–Katětovově charakterizaci normálních prostorů.

Věta 50. *Buď* $\mathcal{H}$ *funkční prostor na kompaktu* K. *Potom*

(a) *je-li* $\mathcal{H}$ *simpliciální, je slabá Dirichletova úloha řešitelná,*
(b) *je-li slabá Dirichletova úloha řešitelná a* K *je metrizovatelný, je* $\mathcal{H}$ *simpliciální.*

9. **Aplikace**

Věta 51 (Hermite–Hadamardova nerovnost)**.** *Buď* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *spojitá konvexní funkce. Potom*

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\,.$$

Důkaz. Důkaz jako ilustrace Choquetovy teorie. □

Věta 52 (Rainwater, 1963)**.** *Buď* E *Banach;v prostor a* $x, x_n \in E$. *Potom je ekvivalentní:*

(i) $x_n \xrightarrow{w} x$,
(ii) *posloupnost* $\{x_n\}$ *je omezená a* $f(x_n) \to f(x)$ *pro každé* $f \in \operatorname{ext} B_{E^*}$.

Věta 53 (Arens–Kelley)**.** *Buď* K *kompakt. Potom*

$$\operatorname{ext} B_{\mathcal{M}(K)} = \{\varepsilon_x : x \in K\} \cup \{-\varepsilon_x : x \in K\}\,.$$

Věta 54. *Buď* K *kompakt a* $f, f_n \in \mathcal{C}(K)$. *Potom je ekvivalentní:*

(i) $f_n \xrightarrow{w} f$,
(ii) *posloupnost* $\{f_n\}$ *je omezená a* $f_n \to f$ *bodově na* K.

Věta 55. *Buď* E *Banachův prostor. Potom* $\operatorname{ext} B_{E^*}$ *je Jamesova hranice.*

Věta 56. (a) *Existuje Banachův prostor* E *a v něm Jamesova hranice* B *tak, že* $B \cap \operatorname{ext} B_{E^*} = \emptyset$.
(b) *Je–li* B *Jamesova hranice Banachova prostoru* E *a* $\{x_n\}$ *omezená posloupnost v* E, *potom*

$$x_n \xrightarrow{w} x, \text{ právě když } f(x_n) \to f(x) \text{ pro každé } f \in B\,.$$

Důkaz. BD. □

Věta 57. *Buď K kompakt. Potom zobrazení*

$$\Phi : x \mapsto \varepsilon_x : K \to \mathcal{M}^1(K)$$

je homeomorfizmus K na $(\operatorname{ext} \mathcal{M}^1(K), w^*)$.

Věta 58 (Banach–Stone)**.** *Buďte K a L kompaktní prostory. Potom prostory $\mathcal{C}(K)$ a $\mathcal{C}(L)$ jsou izometricky–izomorfní, právě když K a L jsou homeomorfní.*

Věta 59. *Buď $\mathcal{H}$ funkční prostor na kompaktu K. Potom je ekvivalentní:*

(i) *$\mathcal{H}$ je Bauerův simpliciální prostor,*

(ii) *je–li $f \in \mathcal{C}\big(\overline{\mathrm{Ch}_{\mathcal{H}}(K)}\big)$, existuje $h_f \in \mathcal{A}^c(\mathcal{H})$ tak, že $f = h_f$ na $\overline{\mathrm{Ch}_{\mathcal{H}}(K)}$.*

Věta 60. *Pro K kompakt je prostor $\mathcal{M}^1(K)$ Bauerův simplex.*

Věta 61. *Buď X kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru. Jestliže X je Bauerův simplex, potom existuje kompakt K tak, že X je afinně homeomorfní s $(\mathcal{M}^1(K), w^*)$.*

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx KONEC LETNÍHO SEMESTRU xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx