TEORIE POTENCIÁLU

PŘEHLED HLAVNÍCH VĚT

1. **Integrál přes sféru**

Lemma 1. *Nechť* $U \subset \mathbb{R}^n$ *je otevřená,* $z \in U$, $d := \operatorname{dist}(z, \mathbb{R}^n \setminus U)$ *a* $f, g \in \mathcal{C}(U)$. *Pro* $r \in [0, d)$ *položme*

$$B_f : r \mapsto \int_{B(z,r)} f \, d\lambda \,, \quad B_f(0) = 0 \,.$$

Potom:

(a) *zobrazení* $f \mapsto B_f$ *je lineární a nezáporné,*
(b) *funkce* B_f *má na intervalu* $[0, d)$ *spojitou derivaci,*
(c) *pokud* $f = g$ *na* $S(z, R)$ *pro nějaké* $R \in (0, d)$, *potom* $B'_f(R) = B'_g(R)$.

Věta 2. *Pro* $f \in \mathcal{C}\big(\overline{B(z,R)}\big)$ *máme*

$$\int_{B(z,R)} f \, d\lambda = \int_0^R \Big(\int_{S(z,r)} f \, d\sigma(r) \Big) \, dr \,.$$

Věta 3. *Buď* U *otevřená v* $\mathbb{R}^n$ *a* $h \in C(U)$. *Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i)

$$h(x) = \mathcal{M}(h; x, r) := \frac{1}{\kappa_n r^{n-1}} \int_{S(x,r)} f \, d\sigma \,, \quad \textit{kdykoliv} \quad \overline{B(x,r)} \subset U,$$

(ii)

$$h(x) = \mathcal{A}(h; x, r) := \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B(x,r)} f \, d\lambda \,, \quad \textit{kdykoliv} \quad \overline{B(x,r)} \subset U, .$$

2. **Dirichletova úloha na kouli**

Věta 4. *Nechť* u *je radiální funkce na* $A(y; r_1, r_2)$. *Potom* u *je harmonická na* $A(y; r_1, r_2)$, *právě když existují* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tak, že*

$$h(t) := \begin{cases} \alpha \, \log \frac{1}{||t-y||} + \beta, & t \in A(y; r_1, r_2), \quad n = 2, \\ \alpha \, \frac{1}{||t-y||^{d-2}} + \beta, & t \in A(y; r_1, r_2), \quad n \geq 3. \end{cases}$$

Věta 5 (Vlastnosti Poissonova jádra)**.** *Buď* $y \in \mathbb{R}^n$ *a* K *Poissonovo jádro koule* $B(x_0, r)$. *Potom funkce* $K(., y)$ *je harmonická na* $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$, *kladná na* $B(x_0, r)$, *anuluje se na* $S(x_0, r) \setminus \{y\}$ *a je záporná na* $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B(x_0, r)}$.

Věta 6 (Vlastnosti Poissonova integrálu)**.** *Buď* $f \in \mathcal{L}^1\big(S(x_0, r), \sigma\big)$ *a* $y \in S(x_0, r)$. *Poissonův integrál* H_f *funkce* f *má následující vlastnosti:*

(a) H_f *je harmonickou funkcí na* $B(x_0, r)$.
(b) $H_1 = 1$ *na* $B(x_0, r)$.
(c) *Platí*

$$\limsup_{B(x_0,r) \ni x \to y} H_f(x) \leq \limsup_{S(x_0,r) \ni z \to y} f(z) \,.$$

(d) *Je-li f spojitá (v rozšířeném smyslu) v bodě y, potom*

$$\lim_{B(x_0,r)\ni x\to y} H_f(x) = f(y)\,.$$

3. Harmonické funkce

Věta 7 (Princip maxima)**.** *Buď $U \subset \mathbb{R}^n$ omezená otevřená a $h \in \mathcal{H}(U) \cap \mathcal{C}(\overline{U})$. Potom existují $a, b \in \partial U$ tak, že $h(a) \le h(x) \le h(b)$ pro každé $x \in U$.*

Je-li tedy $h = 0$ na ∂U, je $h = 0$ na U.

Poznámka. Pro existenci $b \in \partial U$ a odvození nerovnosti $h(x) \le h(b)$ pro každé $x \in U$ stačilo předpokládat, že h je na $\overline{U}$ polospojitá shora, že existují $\frac{\partial^2 h}{\partial x_j^2}$ na U v každém bodě U a že $\Delta h \ge 0$ na U.

Věta 8 (Regularita koule)**.** *Je-li $h \in \mathcal{C}\big(\overline{B(x_0,r)}\big) \cap \mathcal{H}\big(B(x_0,r)\big)$, je $h = H_h$ na $B(x_0,r)$.*

Jinými slovy, ke každé funkci $f \in \mathcal{C}\big(S(x_0,r)\big)$ existuje právě jedna funkce $h \in \mathcal{C}\big(\overline{B(x_0,r)}\big) \cap \mathcal{H}\big(B(x_0,r)\big)$ tak, že $h = f$ na ∂U.

Věta 9. *Buď $U \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $h \in \mathcal{H}(U)$, $\overline{B(x_0,r)} \subset U$ a $x \in B(x_0,r)$. Potom*

$$h(x) = \frac{1}{\kappa_n r} \int_{S(x_0,r)} \frac{r^2 - ||x-x_0||^2}{||x-y||^d} h(y)\, d\sigma(y)\,.$$

Speciálně, h splňuje sférickou podmínku průměru.

Věta 10 (Princip maxima)**.** *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená souvislá, $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ a $x \in \Omega$. Nechť ke každému $x \in \Omega$ existuje $\delta_x > 0$ tak, že*

$$u(x) = \frac{1}{\kappa_n \delta^{n-1}} \int_{S(x,\delta)} u(y)\, d\sigma(y) \quad (= \mathcal{M}(u; x, \delta))$$

pro každé $\delta \in (0, \delta_x)$. Potom buď u je konstantní na Ω anebo $\sup u$ se nenabývá v Ω.

Věta 11. *Buď $U \subset \mathbb{R}^n$ otevřená a $h \in \mathcal{C}(U)$ splňující lokální podmínku sférického průměru. Potom $h \in \mathcal{H}(U)$. Je-li $h \in \mathcal{H}(U)$, potom $h \in \mathcal{C}^\infty(U)$.*

Věta 12 (Charakteristiky harmonických funkcí)**.** *Buď h spojitá funkce na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^n$. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) *$h \in \mathcal{H}(U)$ (t.j. existují spojité $\frac{\partial^2 h}{\partial x_j^2}$ a $\Delta h = 0$ na U),*
(ii) *existují $\frac{\partial^2 h}{\partial x_j^2}$ a $\Delta h = 0$ na U,*
(iii) *$h \in \mathcal{C}^\infty(U)$ a $\Delta h = 0$,*
(iv) *h splňuje sférickou podmínku průměru,*
(v) *h splňuje lokální sférickou podmínku průměru,*
(vi) *h splňuje objemovou podmínku průměru,*
(vii) *h splňuje lokální objemovou podmínku průměru.*

Věta 13. *Buď $U \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $h \in \mathcal{H}(U)$ a α multiindex. Potom $\partial^\alpha h \in \mathcal{H}(U)$.*

Věta 14 (Picard–Liouville)**.** *Jestliže harmonická funkce h na $\mathbb{R}^n$ je zdola (či shora) omezená, pak h je na $\mathbb{R}^n$ konstantní.*

Věta 15 (Harnackova konvergenční)**.** *Nechť $\{h_n\}$ je posloupnost harmonických funkcí na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^n$. Jestliže $h_n \to h$ lokálně stejnoměrně na U, potom $h \in \mathcal{H}(U)$.*

Lemma 16. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $\overline{B(z,r)} \subset U$ a $h > 0$ je harmonická funkce na U. Jestliže $x, y \in B(z, \frac{r}{2})$, potom*

$$\frac{h(x)}{h(y)} \leq 3^n .$$

Věta 17 (Harnackova nerovnost)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je souvislá otevřená a $K \subset \Omega$ je kompakt. Potom existuje $C > 0$ (závislé pouze na Ω, K, n) tak, že*

$$C^{-1} \leq \frac{h(x)}{h(y)} \leq C ,$$

kdykoliv $h > 0$ je harmonická na Ω a $x, y \in K$.

Věta 18 (Harnackova konvergenční)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je souvislá otevřená a $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ nahoru usměrněná množina funkcí. Potom buď $\sup \mathcal{F} = +\infty$ na Ω anebo $\sup \mathcal{F} \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

4. **Obecná teorie potenciálu**

Věta 19. *Buď $\Omega \subset X$ otevřená souvislá, $h \in \mathcal{H}(\Omega)$, $h \geq 0$ na Ω. Potom buď $h(x) > 0$ pro každé $x \in \Omega$ anebo $h = 0$ na Ω.*

Věta 20. *Buď $B \subset X$ regulární souvislá množina a $f \geq 0$ na ∂B. Pro $x \in B$ položme*

$$F : x \mapsto \int_{\partial B}^{*} f \, d\mu_x^B .$$

Potom buď $F \in \mathcal{H}(B)$ anebo $F = \infty$ na B.

Věta 21. *Buď $B \subset X$ regulární souvislá množina, $x, y \in B$ a $E \subset \partial B$. Potom:*

(a) *$\mu_x^B(E) = 0$, právě když $\mu_y^B(E) = 0$,*
(b) *$\operatorname{supt} \mu_x^B = \partial B$.*

5. **Hyperharmonické a superharmonické funkce**

Věta 22 (Vlastnosti $\mathcal{H}^*(G)$ a $\mathcal{H}^*_{loc}(G)$)**.** *Buď $(X, \mathcal{H})$ harmonický prostor a $G \subset X$ otevřená. Potom*

(a) *$\mathcal{H}^*(G)$ a $\mathcal{H}^*_{loc}(G)$ jsou min–stabilní konvexní kužely,*
(b) *je-li $\{u_\alpha\}$ nahoru usměrněná třída funkcí v $\mathcal{H}^*(G)$, je $\sup_\alpha u_\alpha \in \mathcal{H}^*(G)$,*
(c) *je-li $\{u_\alpha\}$ nahoru usměrněná třída funkcí v $\mathcal{H}^*_{loc}(G)$, je $\sup_\alpha u_\alpha \in \mathcal{H}^*_{loc}(G)$.*

Věta 23. *Harmonický prostor je lokálně souvislý.*

Věta 24. *Buď $\Omega \subset X$ otevřená souvislá a $u \in \mathcal{H}^*_{loc}(\Omega)$. Je–li $U \subset \Omega$ neprázdná otevřená a $u = \infty$ na U, je $u = \infty$ na Ω.*

Věta 25 (Principy minima pro $\mathcal{H}^*_{loc}(G)$)**.**

(a) *Nechť $\Omega \subset X$ je otevřená souvislá, $u \in \mathcal{H}^*_{loc}(\Omega)$ a $u \geq 0$ na Ω. Potom buď $u > 0$ na Ω anebo $u = 0$ na Ω.*
(b) *Je–li $G \subset X$ otevřená a relativně kompaktní, $u \in \mathcal{H}^*_{loc}(G)$ a*

$$\liminf_{G \ni x \to z} u(x) \geq 0 \text{ pro každé } z \in \partial G ,$$

je $u \geq 0$ na G.

Věta 26. *Buď $G \subset X$ otevřená. Potom $\mathcal{H}^*_{loc}(G) = \mathcal{H}^*(G)$.*

Věta 27 (Charakteristiky hyperharmonických funkcí v klasické teorii)**.** *Buď u zdola polospojitá funkce na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^n$. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) $u \in \mathcal{H}^*(U)$ *(t.j.* $u(x) \geq \mathcal{M}(u; x, r)$ *kdykoliv* $\overline{B(x,r)} \subset U$*),*
(ii) $u(x) \geq \mathcal{A}(u; x, r)$ *kdykoliv* $\overline{B(x,r)} \subset U$*,*
(iii) *pro každé* $x \in U$ *existuje* $\delta_x > 0$ *tak, že* $\overline{B(x,\delta_x)} \subset U$ *a* $u(x) \geq \mathcal{M}(u; x, \delta)$ *kdykoliv* $\delta \in (0, \delta_x)$*,*
(iv) *pro každé* $x \in U$ *existuje* $\delta_x > 0$ *tak, že* $\overline{B(x,\delta_x)} \subset U$ *a* $u(x) \geq \mathcal{A}(u; x, \delta)$ *kdykoliv* $\delta \in (0, \delta_x)$*,*
(v) *kdykoliv* $W \subset \overline{W} \subset U$ *je omezená otevřená,* $h \in \mathcal{C}(\overline{W}) \cap \mathcal{H}(W)$*,* $u \geq h$ *na* ∂W*, potom* $u \geq h$ *na* W*,*
(vi) *kdykoliv* $V \subset \overline{V} \subset U$ *je regulární množina,* $h \in \mathcal{C}(\overline{V}) \cap \mathcal{H}(V)$*,* $u \geq h$ *na* ∂V*, potom* $u \geq h$ *na* V*,*
(vii) *pokud* $\overline{B(x,r)} \subset U$*, potom* $H_u \leq u$ *na* $B(x,r)$*.*

Obdobné tvrzení pro superharmonické funkce na U.

Je-li navíc $s \in \mathcal{C}^2(U)$, potom $s \in \mathcal{S}(U)$, právě když $\Delta s \leq 0$ na U.

Důkaz. Bez důkazu. □

Věta 28. *Buď $G \subset X$ regulární, $f : \partial B \to \mathbb{R}$ omezená shora na ∂G a $z \in \partial G$. Potom*

$$\limsup_{B \ni x \to z} \int_{\partial G}^{*} f \, d\mu_x^B \leq \limsup_{\partial B \ni y \to z} f(y)\,.$$

Věta 29 (Poissonova modifikace)**.** *Nechť $G \subset X$ je otevřená, $u \in \mathcal{H}^*(G)$ a $B \subset \overline{B} \subset G$ regulární. Položíme–li*

$$u_B := \begin{cases} \int_{\partial G} u \, d\mu_x^B & \text{pro} \quad x \in B, \\ u(x) & \text{pro} \quad x \in U \setminus B, \end{cases}$$

je $u_B \in \mathcal{H}^*(G)$, $u_B \in \mathcal{H}(B)$ anebo $u_B = \infty$ a $u_B \leq u$ na G.

Věta 30 (O nasycené třídě)**.** *Buď $\Omega \subset X$ a $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}^*(\Omega)$ nasycená třída. Potom buď* $\inf \mathcal{A} = \infty$ *v Ω anebo* $\inf \mathcal{A} = -\infty$ *v Ω anebo* $\inf \mathcal{A} = \mathcal{H}(\Omega)$.

6. **Dirichletova úloha**

Věta 31 (Keldyš, 1941, Brelot)**.** *Buď $G \subset X$ otevřená relativně kompaktní a*

$$\mathbf{H}(G) := \{f \in \mathcal{C}(\overline{G}) : f \restriction G \in \mathcal{H}(G)\}\,.$$

Potom existuje právě jeden lineární nezáporný operátor $A : \mathcal{C}(\partial G) \to \mathcal{H}(G)$ takový, že

$$A(h \restriction \partial G) = h \restriction G \quad \text{kdykoliv} \quad h \in \mathbf{H}(G)\,.$$

Důkaz. BD □

Věta 32. *Buď $G \subset X$ otevřená relativně kompaktní, Ω komponenta G a $f : \partial G \to [-\infty, \infty]$. Potom:*

(a) $\overline{H}_f^G = \overline{H}_f^\Omega$ *na* Ω*,*
(b) $\underline{H}_f^G \leq \overline{H}_f^G$ *na* G*,*
(c) $\overline{H}_f^G = \infty$ *na* Ω *anebo* $\overline{H}_f^G = -\infty$ *na* Ω *anebo* $\overline{H}_f^G \in \mathcal{H}(\Omega)$*.*

Věta 33 (O největší harmonické minorantě)**.** *Buď $G \subset X$ otevřená, $s \in \mathcal{S}^+(G)$,*

$$\mathcal{A} := \{v \in -\mathcal{H}^*(G) : v \leq s \text{ na } G\} \quad \text{a} \quad h_s := \sup \mathcal{A}\,.$$

Potom $h_s \in \mathcal{H}(G)$ a $0 \leq h_s \leq s$ na G.

Je–li $h \in \mathcal{H}(G)$, $h \leq s$ na G, potom $h \leq h_s$ na G.

Věta 34 (Rieszův rozklad)**.** *Nechť $G \subset X$ je otevřená a $s \in \mathcal{S}^+(G)$. Potom existují jednoznačně určené funkce $h \in \mathcal{H}(G)$ a $p \in \mathcal{P}(G)$ tak, že $s = h + p$ na G.*

Funkce h je největší harmonickou minorantou funkce s na G.

Věta 35. *Buď $G \subset X$ otevřená relativně kompaktní.*

(a) *Pokud $f \in \mathcal{C}(\partial G)$ a existuje klasické řešení h_f Dirichletovy úlohy, potom $f \in \mathcal{R}(\partial G)$ a $H_f^G = h_f$ na G.*
(b) *$\mathcal{R}(\partial G)$ tvoří vektorový prostor a zobrazení*

$$f \mapsto H_f^G : \mathcal{R}(\partial G) \to \mathcal{H}(G)$$

je lineární a nezáporné.
(c) *Jsou–li $f_n \in \mathcal{R}(\partial G)$ a $f_n \to f$ stejnoměrně na ∂G, potom $f \in \mathcal{R}(\partial G)$ a $H_{f_n}^G \to H_f^G$ stejnoměrně na G.*
(d) *Buď $f : \partial G \to [-\infty, \infty]$. Potom $f \in \mathcal{R}(\partial G)$, právě když v každé komponentě $\Omega \subset G$ existuje $x \in \Omega$ tak, že $\underline{H}_f^G(x) = \overline{H}_f^G(x) \in \mathbb{R}$.*

Věta 36 (Rose–Marie Hervé,1962)**.** *Buď $K \subset X$ kompaktní, $f \in \mathcal{C}(K)$ a $\varepsilon > 0$. Potom existují $p, q \in \mathcal{P}^c(X)$ tak, že*

$$||f - (p - q)||_{\mathcal{C}(K)} < \varepsilon\,.$$

Důkaz. Důkaz za předpokladu Axiomu P. □

Věta 37 (Wienerova o rezolutivitě spojitých funkcí)**.** *Nechť $G \subset X$ je otevřená relativně kompaktní. Potom $\mathcal{C}(\partial G) \subset \mathcal{R}(\partial G)$.*

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx KONEC ZIMNÍHO SEMESTRU xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Věta 38 (Klasická teorie potenciálu)**.** *Buď $U \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $s \in \mathcal{S}^+(U)$ a h_s největší harmonická minoranta s na U. Je ekvivalentní:*

(a) *existuje $\mu \in \mathcal{M}^+(U)$ tak, že s je Greenův potenciál μ,*
(b) *$h_s = 0$ na U.*

Důkaz. BD □

Věta 39. *Množina $\mathcal{P}(X)$ všech potenciálů na X tvoří min–stabilní konvexní kužel.*

Věta 40. *Nechť $G \subset X$ je otevřená relativně kompaktní, $f_n : \partial G \to [-\infty, \infty]$. Jestliže $f_n \nearrow f$ a $\overline{H}_{f_1}^G > -\infty$ na G, potom*

$$\overline{H}_{f_n}^G \to \overline{H}_f^G \text{ na } G\,.$$

Věta 41. *Buď $G \subset X$ otevřená relativně kompaktní, $f_n \in \mathcal{R}(\partial G)$, $f_n \nearrow f$ na G. Potom $\underline{H}_f^G = \overline{H}_f^G$ na G.*

Pokud je funkce $\overline{H}_f^G$ reálná, je $f \in \mathcal{R}(\partial G)$ a $H_{f_n}^G \to H_f^G$ na G.

Věta 42. *Nechť $G \subset X$ je otevřená relativně kompaktní, $f : \partial G \to [-\infty, \infty]$ a $x \in G$. Potom*

$$\overline{H}_f^G(x) = \int_{\partial G}^{*} f \, d\mu_x^G\,.$$

Věta 43 (Brelot)**.** *Nechť $G \subset X$ je otevřená relativně kompaktní, $f : \partial G \to [-\infty, \infty]$. Je ekvivalentní:*

(i) *$f \in \mathcal{R}^*(\partial G)$,*
(ii) *$f \in \mathcal{L}^1(\mu_x^G)$ pro každé $x \in G$,*
(iii) *v každé komponentě $\Omega \subset G$ existuje $x \in \Omega$ tak, že $f \in \mathcal{L}^1(\mu_x^G)$.*

7. Vymetání

Věta 44. *Buď $G \subset X$ otevřená, $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}^*(G)$ třída nezáporných funkcí a $s := \inf \mathcal{F}$. Potom*

(a) $\widehat{s} \in \mathcal{H}^*(G)$, $s \geq 0$ *na* G,
(b) $\widehat{s}(x) = \liminf\limits_{y \to x} s(y)$ *pro každé* $x \in G$.

Věta 45 (Základní vlastnosti redukce a výmetu)**.** *Buď $E \subset X$, $u \in (\mathcal{H}^*(X))^+$ a $s \in \mathcal{S}^+(X)$. Potom*

(a) $\widehat{R}_u^E \in (\mathcal{H}^*(X))^+$,
(b) $\widehat{R}_u^E(x) = \liminf\limits_{y \to x} R_u^E(y)$ *pro každé* $x \in X$,
(c) $0 \leq \widehat{R}_u^E \leq R_u^E \leq u$ *na* X,
(d) $R_u^E = u$ *na* E,
(e) $\widehat{R}_u^E = R_u^E = u$ *na* $\operatorname{Int} E$,
(f) $\widehat{R}_u^E = R_u^E$ *na* $X \setminus \overline{E}$,
(g) $\widehat{R}_s^E \in \mathcal{H}(X \setminus \overline{E})$.

Poznámka. Buď $E \subset X$, $U \subset X$ otevřená a $u \in (\mathcal{H}^*(X))^+$. Potom $\widehat{R}_u^E = R_u^E$ dokonce na $X \setminus E$ a $\widehat{R}_u^{\complement U} = R_u^{\complement U} \in \mathcal{H}(U)$.

Věta 46. *Buď $U \subset X$ otevřená relativně kompaktní a $u \in (\mathcal{H}^*(X))^+$. Položíme–li $f := u \restriction \partial U$. Potom*

$$H_f^U = \widehat{R}_u^{\complement U} = (R_u^{\complement U}) \text{ na } U \,.$$

Věta 47 (Choquetovo lemma)**.** *Buď X harmonický prostor a $T : \mathcal{P}^c(X) \to \mathbb{R}$ buď aditivní, pozitivně homogenní a neklesající funkcionál. Potom existuje právě jedna Radonova míra $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$ tak, že*

$$T(p) = \int_X p \, d\mu \text{ pro každé } p \in \mathcal{P}^c(X) \,.$$

Důkaz. BD □

Věta 48. *Buď X harmonický prostor, $A \subset X$ a $x \in X$. Potom existuje právě jedna Radonova míra $\varepsilon_x^A \in \mathcal{M}^1(X)$ tak, že*

$$\widehat{R}_u^A = \int_X u \, d\varepsilon_x^A \text{ pro každé } u \in (\mathcal{H}^*(X))^+ \,.$$

Důkaz. BD □

Věta 49. *Buď $U \subset X$ otevřená relativně kompaktní a $x \in U$. Potom $\mu_x^U = \varepsilon_x^{\complement U}$.*

Poznámka. Buď $U \subset X$ otevřená relativně kompaktní a $f \in \mathcal{C}(\partial U)$. Položíme–li $F : f^{\complement U} \restriction \partial U$, kde

$$f^{\complement U} : x \mapsto \int_{\partial U} f \, d\varepsilon_x^{\complement U} \ , \ x \in X \,,$$

je F borelovská a omezená na ∂U a $H_F^U = H_f^U$ na U .

8. Regulární body

V dalším označme $\mathfrak{U}^c(X)$ systém všech otevřených relativně kompaktních podmnožin harmonického prostoru X.

Věta 50. *Množina $U \in \mathfrak{U}^c(X)$ je regulární, právě když $\partial U = U_{reg}$.*

Věta 51. *Buď $U \in \mathfrak{U}^c(X)$, $z \in U_{reg}$ a $f : \partial U \to [-\infty, \infty)$ shora omezená. Potom*

$$\limsup_{U \ni x \to z} \overline{H}_f^U(x) \le \limsup_{U \ni x \to z} f(y)\,.$$

Věta 52. *Buď $U \in \mathfrak{U}^c(X)$, $z \in U_{reg}$ a $f \in \mathcal{R}(\partial U)$ omezená na ∂U a spojitá v z. Potom $\lim_{x \to z} H_f^U(x) = f(z)$.*

Věta 53. *Buď $U \in \mathfrak{U}^c(X)$, $z \in U_{reg}$ a $s \in \mathcal{S}^+(X)$. Potom $\widehat{R}_s^{\complement U} = s(z)$.*

Věta 54 (Kriteria regularity)**.** *Buď $U \in \mathfrak{U}^c(X)$ a $z \in \partial U$. Je ekvivalentní:*

(i) *$z \in U_{reg}$,*
(ii) *$\lim_{x \to z} H_p^U(x) = p(z)$ pro každé $p \in \mathcal{P}^c(X)$,*
(iii) *$\widehat{R}_p^{\complement U}(z) = p(z)$ pro každé $p \in \mathcal{P}^c(X)$,*
(iv) *$\varepsilon_z^{\complement U} = \varepsilon_z$.*

Věta 55. *a) Buďte U, G z $\mathfrak{U}^c(X)$, $U \subset G$ a $z \in \partial U \cap \partial G$. Je-li z regulární bod G, je i regulárním bodem U.*

(b) Jsou-li U a G regulární množiny v X a $U \cap G \neq \emptyset$, je $U \cap G$ regulární množina.

Věta 56. *Buď $U \in \mathfrak{U}^c(X)$ a $z \in \partial U$. Je ekvivalentní: Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *$z \in U_{reg}$,*
(ii) *v z existuje lokální bariéra,*
(iii) *v z existuje bariéra s s vlastností $\liminf_{U \ni x \to y} s(x) > 0$ pro každé $y \in \partial U \setminus \{z\}$,*
(iv) *v z existuje Bouligandova funkce,*
(v) *v z existuje Keldyšova funkce,*
(vi) *je-li $f : \partial U \to [-\infty, \infty)$ shora omezená na ∂U, potom*

$$\limsup_{U \ni x \to z} \overline{H}_f(x) \le \limsup_{\partial U \ni y \to z} f(y)\,,$$

Důkaz. BD □

Věta 57 (Kriteria regularity v klasické TP)**.** *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená omezená a $z \in \partial U$.*

(a) *Nechť existuje $B(a, r)$ tak že $\overline{B(a, r)} \cap \overline{U} = \{z\}$, potom $z \in U_{reg}$.*
(b) *Je-li U konvexní, je $U_{reg} = \partial U$.*
(c) *Nechť existuje "useknutý nedegenerovaný kužel" K s vrcholem v z tak, že $K \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{U}$, potom $z \in U_{reg}$.*
(d) *Je-li hranice U třídy $\mathcal{C}^1$ v z, je $z \in U_{reg}$.*
(e) *Je-li z izolovaný bod ∂U, je z irregulární bod U.*

Důkaz. BD □

Poznámka. Množina regulárních bodů $U \in \mathfrak{U}^c(X)$ je vždy neprázdná. Je typu G_δ, ale nemusí být typu F_σ.

9. Malé množiny v teorii potenciálu

Věta 58. *Buď X harmonický prostor, $U \in \mathfrak{U}^c(X)$ a $E \subset \partial U$. Je ekvivalentní:*

(i) *E je zanedbatelná,*
(ii) *existuje $s \in \mathcal{S}^+(U)$ tak, že*

$$\lim_{U \ni x \to z} s(x) = \infty \quad \text{pro každé} \quad z \in E\,,$$

(iii) *kdykoliv $s \in \mathcal{S}(U)$ je zdola omezená na U a $\liminf_{U \ni x \to y} \ge 0$ pro každé $y \in \partial U \setminus E$, potom $s \ge 0$ na U.*

Věta 59. *Jestliže $E \subset X$ je U–zanedbatelná, potom $X \setminus E$ je hustá v X.*

Věta 60. *Buď $P \subset X$ polární a $z \in X \setminus P$. Potom existuje $s \in \mathcal{S}^+(X)$ tak, že $s(z) < \infty$ a $P \subset \{x \in X : s(x) = \infty\}$.*

Poznámka (Klasická TP).
(a) Buď $P \subset \mathbb{R}^n$ a $z \in \mathbb{R}^n \setminus P$. Nechť existují $U \subset \mathbb{R}^n$ otevřená a $u \in \mathcal{S}^+(U)$ tak, že $P \subset u^{-1}(+\infty)$. Potom existuje $s \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}^n)$ tak, že $s(z) < \infty$ a $P \subset s^{-1}(+\infty)$.
(b) Polární množiny v $\mathbb{R}^n$ mají Lebesgueovu míru nula.
(c) Spočetné množiny jsou polární.

Věta 61 (Vlastnosti polárních množin)**.** *Polární množiny v harmonickém prostoru X mají následující vlastnosti.*
(a) *Je-li P polární, existuje polární množina Q typu G_δ tak, že $P \subset Q$.*
(b) *Polární množiny tvoří σ–ideál.*
(c) *Polární množiny jsou U–zanedbatelné, a tedy jejich doplňky jsou husté.*
(d) *Polární množiny mají prázdný vnitřek.*
(e) *Je-li P uzavřená polární množina a prostor X souvislý, je $X \setminus P$ souvislá množina.*

Věta 62 (Charakteristiky polárních množin)**.** *Buď X souvislý harmonický prostor. Pro množinu $P \subset X$ je ekvivalentní:*
(i) *P je polární,*
(ii) *$\widehat{R}^P_w = 0$ na X pro každou $w \in \mathcal{S}^+(X)$,*
(iii) *existuje $v \in \mathcal{S}^+(X)$, $v > 0$ na X tak, že $\widehat{R}^P_v = 0$ na X,*
(iv) *existuje $u \in \mathcal{S}^+(X)$, $u > 0$ na X a $z \in X$ tak, že $\widehat{R}^P_u(z) = 0$,*
(v) *existuje $s \in \mathcal{S}^+(X)$, $s > 0$ na X a $z \in X$ tak, že $R^P_s(z) = 0$,*
(vi) *$\widehat{R}^P_1 = 0$ na X,*
(vii) *$\varepsilon^P_x = 0$ pro každé $x \in X$.*

Věta 63. *Buď X harmonický prostor, $U \in \mathfrak{U}^c(X)$ a $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset \mathcal{S}^+(U)$. Označíme–li*

$$s := \inf\{v : v \in \mathcal{F}\},$$

je $\widehat{s} \in \mathcal{S}^+(U)$ a $\{x \in U : \widehat{s}(x) < s(x)\}$ je polární.

Důkaz. BD □

Věta 64. *Buď X harmonický prostor a $U \in \mathfrak{U}^c(X)$.*
(a) *Množina $A \subset \partial U$ je U–zanedbatelná, právě když A je polární.*
(b) *Množina U_{irr} je polární.*
(c) *Je–li $s \in \mathcal{S}(U)$ zdola omezená na U a*

$$\liminf_{U \ni x \to z} s(x) \geq 0 \quad \text{pro každé } z \in U_{reg},$$

je $s \geq 0$ na U.

Věta 65 (Odstranitelné singularity pro superharmonické funkce)**.** *Buď X harmonický prostor, $U \in \mathfrak{U}^c(X)$ a $P \subset U$ (relativně) uzavřená a polární. Je–li $u \in \mathcal{S}(U \setminus P)$ lokálně zdola omezená na U, existuje právě jedna $s \in \mathcal{S}(U)$ tak, že $s = u$ na $U \setminus P$.*

Důkaz. Pouze náznak. □

10. **Kapacita, tenkost a jemná topologie**

(Pouze informativně.)

Věta 66. *Buď X lokálně kompaktní prostor (se spočetnou bází), $\mathcal{K}(X)$ systém všech kompaktních podmnožin v X a $\gamma : \mathcal{K}(X) \to [0, \infty)$ Choquetova kapacita. Pro $A \subset X$ položme*

$$\gamma_*(A) := \sup\{\gamma(K)\,, K \subset A\,, K \in \mathcal{K}(X)\}$$

a

$$\gamma^*(A) := \inf\{\gamma_*(U)\,, U \supset A\,, U \text{ otevřená}\}\,.$$

Potom:

(a) *Zobrazení* $A \subset X \mapsto \gamma^*(A)$ *je vnější Choquetova kapacita.*
(b) *(*Choquet, 1953*) Borelovské a analytické množiny (speciálně otevřené a kompaktní) jsou kapacitabilní.*

*(*Cartan*) Položíme–li pro kompaktní množinu* $K \subset \mathbb{R}^n$

$$\operatorname{cap}(K) := \sup\{\mu(K) : \operatorname{supt}\mu \subset K\,, \mathcal{N}^\mu \le 1 \text{ na} K\}\,,$$

je zobrazení $K \mapsto \operatorname{cap}(K)$ *Choquetova kapacita. Je–li* $P \subset \mathbb{R}^n$*, je množina* P *polární, právě když* $\operatorname{cap}(P)^*(P) = 0$.

Věta 67. *Buď* X *harmonický prostor,* $x \in X$ *a* $s \in \mathcal{S}^+(X) \cap \mathcal{C}(X)$*. Potom zobrazení*

$$\gamma : K \mapsto R_s^K(x)\,, \quad K \in \mathcal{K}(X)\,,$$

je silná Choquetova kapacita

Příslušná vnější Choquetova kapacita je dána

$$\gamma^* : A \mapsto R_s^A(x) \quad \text{pro} \quad A \subset X\,.$$

Věta 68 (Vlastnosti jemné topologie v $\mathbb{R}^n$)**.** *Jemná topologie* τ *v* $\mathbb{R}^n$ *má následující vlastnosti:*

(a) *Topologie* τ *je úplně regulární (a Hausdorffova), ale není normální.*
(b) *Jediné* τ*–kompaktní množiny v* $\mathbb{R}^n$ *jsou konečné množiny. Tedy* τ *není lokálně kompaktní.*
(c) *Prostor* $\mathbb{R}^n$ *s topologií* τ *je Baireův prostor, platí v něm Baireova věta o kategoriích.*
(d) *Topologie* τ *není metrizovatelná.*
(e) *(*Kvazi–Lindelölefova vlastnost τ.*) Nechť* $\mathfrak{A}$ *je systém* τ*–otevřených podmnožin* $\mathbb{R}^n$*. Potom existuje spočetnýsystém* $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ *a polární množina* P *tak, že*

$$\bigcup\{A : A \in \mathfrak{A}\} = P \cup \bigcup\{B : B \in \mathfrak{B}\}\,.$$

Poznámka. Některá z těchto tvrzení platí i v harmonických prostorech. Ale kupříkladu, jemná topologie v harmonickém prostoru je normální, právě když je Lindelöfova, a to nastane právě v prípadě, když polární množiny jsou spočetné.

Věta 69. *Buď* X *harmonický prostor,* $A \subset X$ *a* $x \in X \setminus A$*. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) *množina* A *je tenká v* x*,*
(ii) $X \setminus A$ *je jemné okolí* x*,*
(iii) *existuje* $s \in \mathcal{S}^+(X)$ *tak, že*

$$s(x) < \liminf_{A \ni y \to x} s(y)\,.$$

xxxxxxxxxxxxxxxxxxx KONEC LETNÍHO SEMESTRU xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx