TEORIE POTENCIÁLU

PŘEHLED HLAVNÍCH VĚT

1. Integrál přes sféru

Lemma 1. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $f, g \in \mathcal{C}(U)$. Pro $r \in [0, \operatorname{dist}(z, \mathbb{R}^n \setminus U))$ a $z \in U$ položme*

$$B_f : r \mapsto \int_{B(z,r)} f \, d\lambda \,, \quad B_f(0) = 0 \,.$$

Potom:

(a) *zobrazení $f \mapsto B_f$ je lineární a nezáporné,*
(b) *funkce B_f má na intervalu $[0, d)$ spojitou derivaci,*
(c) *pokud $f = g$ na $S(z, R)$ pro nějaké $R \in (0, d)$, potom $B'_f(R) = B'_g(R)$.*

Věta 2. *Pro $f \in \mathcal{C}\big(\overline{B(z,R)}\big)$ máme*

$$\int_{B(z,R)} f \, d\lambda = \int_0^R \Big(\int_{S(z,r)} f \, d\sigma(r) \Big) \, dr \,.$$

Věta 3. *Buď U otevřená v $\mathbb{R}^n$ a $h \in C(U)$. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i)

$$h(x) = \mathcal{M}(h; x, r) := \frac{1}{\kappa_n r^{n-1}} \int_{S(x,r)} f \, d\sigma \,, \quad \textit{kdykoliv} \quad \overline{B(x,r)} \subset U,$$

(ii)

$$h(x) = \mathcal{A}(h; x, r) := \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B(x,r)} f \, d\lambda \,, \quad \textit{kdykoliv} \quad \overline{B(x,r)} \subset U, .$$

2. Dirichletova úloha na kouli

Věta 4. *Nechť u je radiální funkce na $A(y; r_1, r_2)$. Potom u je harmonická na $A(y; r_1, r_2)$, právě když existují $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tak, že*

$$h(t) := \begin{cases} \alpha \, \log \frac{1}{||t-y||} + \beta, & t \in A(y; r_1, r_2), \quad n = 2, \\ \alpha \, \frac{1}{||t-y||^{d-2}} + \beta, & t \in A(y; r_1, r_2), \quad n \geq 3. \end{cases}$$

Věta 5 (Vlastnosti Poissonova jádra)**.** *Buď $y \in \mathbb{R}^n$ a K Poissonovo jádro koule $B(x_0, r)$. Potom funkce $K(., y)$ je harmonická na $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$, kladná na $B(x_0, r)$, anuluje se na $S(x_0, r) \setminus \{y\}$ a je záporná na $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B(x_0, r)}$.*

Věta 6 (Vlastnosti Poissonova integrálu)**.** *Buď $f \in \mathcal{L}^1\big(S(x_0, r), \sigma\big)$ a $y \in S(x_0, r)$. Poissonův integrál H_f funkce f má následující vlastnosti:*

(a) *H_f je harmonickou funkcí na $B(x_0, r)$.*
(b) *$H_1 = 1$ na $B(x_0, r)$.*
(c) *Platí*

$$\limsup_{B(x_0,r) \ni x \to y} H_f(x) \leq \limsup_{S(x_0,r) \ni z \to y} f(z) \,.$$

(d) *Je-li f spojitá (v rozšířeném smyslu) v bodě y, potom* $\lim_{B(x_0,r)\ni x\to y} H_f(x) = f(y)$.

3. Harmonické funkce

Věta 7 (Princip maxima)**.** *Buď $U \subset \mathbb{R}^n$ omezená otevřená a $h \in \mathcal{H}(U) \cap \mathcal{C}(\overline{U})$. Potom existují $a, b \in \partial U$ tak, že $h(a) \le h(x) \le h(b)$ pro každé $x \in U$.*

Je-li tedy $h = 0$ na ∂U, je $h = 0$ na U.

Věta 8 (Regularita koule)**.** *Je-li $h \in \mathcal{C}\big(\overline{B(x_0,r)}\big) \cap \mathcal{H}\big(B(x_0,r)\big)$, je $h = H_h$ na $B(x_0,r)$.*

Jinými slovy, ke každé funkci $f \in \mathcal{C}\big(S(x_0,r)\big)$ existuje právě jedna funkce $h \in \mathcal{C}\big(\overline{B(x_0,r)}\big) \cap \mathcal{H}\big(B(x_0,r)\big)$ tak, že $h = f$ na ∂U.

Věta 9. *Buď $U \subset \mathbb{R}^n$ otevřená a $h \in \mathcal{H}(U)$. Potom $h \in \mathcal{C}^\infty(U)$.*

Věta 10. *Buď $U \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $h \in \mathcal{H}(U)$, $\overline{B(x_0,r)} \subset U$ a $x \in B(x_0,r)$. Potom*

$$h(x) = \frac{1}{\kappa_n r} \int_{S(x_0,r)} \frac{r^2 - ||x - x_0||^2}{||x - y||^d} h(y)\, d\sigma(y)\,.$$

Speciálně, h splňuje sférickou podmínku průměru.

Věta 11 (Princip maxima)**.** *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená souvislá, $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ a $x \in \Omega$. Nechť ke každému $x \in \Omega$ existuje $\delta_x > 0$ tak, že*

$$u(x) = \frac{1}{\kappa_n \delta^{n-1}} \int_{S(x,\delta)} u(y)\, d\sigma(y) \quad (= \mathcal{M}(u; x, \delta))$$

pro každé $\delta \in (0, \delta_x)$. Potom buď u je konstantní na Ω anebo $\sup u$ se nenabývá v Ω.

Věta 12. *Buď $U \subset \mathbb{R}^n$ otevřená a $h \in \mathcal{C}(U)$ splňující lokální podmínku sférického průměru. Potom $h \in \mathcal{H}(U) \cap \mathcal{C}^\infty(U)$.*

Věta 13 (Charakteristiky harmonických funkcí)**.** *Buď h spojitá funkce na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^n$. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) *$h \in \mathcal{H}(U)$ (t.j. existují spojité $\frac{\partial^2 h}{\partial x_j^2}$ a $\Delta h = 0$ na U),*
(ii) *existují $\frac{\partial^2 h}{\partial x_j^2}$ a $\Delta h = 0$ na U,*
(iii) *$h \in \mathcal{C}^\infty(U)$ a $\Delta h = 0$,*
(iv) *h splňuje sférickou podmínku průměru,*
(v) *h splňuje lokální sférickou podmínku průměru,*
(vi) *h splňuje objemovou podmínku průměru,*
(vii) *h splňuje lokální objemovou podmínku průměru.*

Věta 14. *Buď $U \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $h \in \mathcal{H}(U)$ a α multiindex. Potom $\partial^\alpha h \in \mathcal{H}(U)$.*

Věta 15 (Picard–Liouville)**.** *Jestliže harmonická funkce h na $\mathbb{R}^n$ je zdola (či shora) omezená, pak h je na $\mathbb{R}^n$ konstantní.*

Věta 16 (Harnackova konvergenční)**.** *Nechť $\{h_n\}$ je posloupnost harmonických funkcí na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^n$. Jestliže $h_n \to h$ lokálně stejnoměrně na U, potom $h \in \mathcal{H}(U)$.*

Lemma 17. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $\overline{B(z,r)} \subset U$ a $h > 0$ je harmonická funkce na U. Jestliže $x, y \in B(z, \frac{r}{2})$, potom*

$$\frac{h(x)}{h(y)} \le 3^n\,.$$

Věta 18 (Harnackova nerovnost)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je souvislá otevřená a $K \subset \Omega$ je kompakt. Potom existuje $C > 0$ (závislé pouze na Ω, K, n) tak, že*
$$C^{-1} \leq \frac{h(x)}{h(y)} \leq C\,,$$
kdykoliv $h > 0$ je harmonická na Ω a $x, y \in K$.

Věta 19 (Harnackova konvergenční)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je souvislá otevřená a $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ nahoru usměrněná množina funkcí. Potom buď $\sup \mathcal{F} = +\infty$ na Ω anebo $\sup \mathcal{F} \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

4. **Superharmonické funkce**

Lemma 20. *Buď $U \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $u \in \mathcal{H}^*(U)$ a $\overline{B(z,r)} \subset U$. potom*
$$u(z) \geq \mathcal{A}(u; z, r) := \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B(x,r)} f \, d\lambda\,.$$

Věta 21. *Buď $U \subset \mathbb{R}^n$ otevřená a $u \in \mathcal{H}^*(U)$.*

(a) *Je-li $y \in U$, potom $\liminf_{x \to y} u(x) = u(y)$.*
(b) *Je-li navíc U souvislá, je buď $u = +\infty$ na U anebo $u \in \mathcal{L}^1_{loc}(U)$.*

Věta 22. *Buď $U \subset \mathbb{R}^n$ otevřená a $u \in \mathcal{H}^*(U)$. Je ekvivalentní:*

(i) *u není $+\infty$ na žádné komponentě U,*
(ii) *$u \in \mathcal{L}^1_{loc}(U)$,*
(iii) *u je konečná $\lambda-$ skoro všude v U,*
(iv) *u je konečná na husté podmnožině U.*

Lemma 23. *Nechť $B(z,r) \subset \mathbb{R}^n$, $f \geq 0$ je zdola polospojitá funkce na $B(z,r)$ a nechť existuje $y \in B(z,r)$ tak, že $f(y) > 0$. potom $\int_{B(z,r)} f > 0$.*

Věta 24. *Buď u zdola polospojitá funkce na otevřené souvislé množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Nechť pro každé $x \in \Omega$ existuje $\delta_x > 0$ tak, že $\overline{B(x,\delta_x)} \subset \Omega$ a $u(x) \geq \mathcal{A}(u; x, \delta)$ kdykoliv $\delta \in (0, \delta_x)$. Potom buď u je na Ω konstantní anebo $\inf u(\Omega) < u(z)$ pro každé $z \in \Omega$.*

Obdobné tvrzení pro $\mathcal{M}(u; x, \delta)$ místo $\mathcal{A}(u; x, \delta)$.

Věta 25 (Principy minima)**.**

(a) *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená souvislá a $u \in \mathcal{H}^*(\Omega)$ je nekonstantní na Ω. Potom $u(z) > \inf u(\Omega)$ pro každé $z \in \Omega$.*
(b) *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená omezená, $s \in \mathcal{S}(U)$ a $h \in \mathcal{H}(U)$. Pokud*
$$\liminf_{U \ni x \to y} (s - h)(x) \geq 0 \quad \text{pro každé} \quad y \in \partial U\,,$$
potom $s \geq h$ na U.

Věta 26 (Charakteristiky hyperharmonických funkcí)**.** *Buď u zdola polospojitá funkce na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^n$. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) *$u \in \mathcal{H}^*(U)$ (t.j. $u(x) \geq \mathcal{M}(u; x, r)$ kdykoliv $\overline{B(x,r)} \subset U$),*
(ii) *$u(x) \geq \mathcal{M}(u; x, r)$ kdykoliv $\overline{B(x,r)} \subset U$,*
(iii) *pro každé $x \in U$ existuje $\delta_x > 0$ tak, že $\overline{B(x,\delta_x)} \subset U$ a $u(x) \geq \mathcal{M}(u; x, \delta)$ kdykoliv $\delta \in (0, \delta_x)$,*
(iv) *pro každé $x \in U$ existuje $\delta_x > 0$ tak, že $\overline{B(x,\delta_x)} \subset U$ a $u(x) \geq \mathcal{A}(u; x, \delta)$ kdykoliv $\delta \in (0, \delta_x)$,*
(v) *kdykoliv $W \subset \overline{W} \subset U$ je omezená otevřená, $h \in \mathcal{C}(\overline{W}) \cap \mathcal{H}(U)$, $u \geq h$ na ∂W, potom $u \geq h$ na W,*

(vi) *kdykoliv* $V \subset \overline{V} \subset U$ *je regulární množina,* $h \in \mathcal{C}(\overline{V}) \cap \mathcal{H}(U)$, $u \geq h$ *na* ∂V, *potom* $u \geq h$ *na* V,
(vii) *pokud* $\overline{B(x,r)} \subset U$, *potom* $H_u \leq u$ *na* $B(x,r)$.

Obdobné tvrzení pro superharmonické funkce na U.

Věta 27. *Nechť* U *je otevřená množina v* $\mathbb{R}^n$ *a* $s \in \mathcal{C}^2(U)$. *Potom* $s \in \mathcal{S}(U)$, *právě když* $\Delta s \leq 0$ *na* U.

Věta 28 (Vlastnosti $\mathcal{S}(U)$ a $\mathcal{H}^*(U)$)**.**

(a) $\mathcal{S}(U)$ *a* $\mathcal{H}^*(U)$ *jsou min–stabilní konvexní kužely.*
(b) $\mathcal{H}(U) = \mathcal{S}(U) \cap (-\mathcal{S}(U)) = \mathcal{H}^*(U) \cap (-\mathcal{H}^*(U))$.
(c) *Jestliže* $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}^*(U)$ *je nahoru usměrněná množina funkcí, potom* $\sup \mathcal{F} \in \mathcal{H}^*(U)$.
Speciálně, jestliže $u_n \in \mathcal{H}^*(U)$ *a* $u_n \nearrow u$, *potom* $u \in \mathcal{H}^*(U)$.

Poznámka. Příklady superharmonických funkcí, Newtonovy potenciály, Rieszova dekompoziční vlastnost a konstrukce nespojitých superharmonických funkcí.

Věta 29 (Poissonova modifikace)**.** *Nechť* $U \subset \mathbb{R}^n$ *je otevřená,* $s \in \mathcal{S}(U)$ *a* $B := B(x,r) \subset \overline{B(x,r)}$. *Potom*

(a) s *je* σ*–integrovatelná na* ∂U, $H_s \in \mathcal{H}(B)$ *a* $H_s \leq s$ *na* B,
(b) *položíme–li*

$$s_B := \begin{cases} H_s & \text{na} \quad B, \\ s & \text{na} \quad U \setminus B, \end{cases}$$

je $s_B \in \mathcal{S}(U)$, $s_B \in \mathcal{H}(B)$ *a* $s_B \leq s$ *na* U.

Věta 30 (O nasycené třídě)**.** *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *je otevřená souvislá a* $\mathfrak{B} \subset \mathcal{S}(\Omega)$ *nasycená třída. Potom buď* $\inf \mathfrak{B} = -\infty$ *anebo* $\inf \mathfrak{B} \in \mathcal{H}(\Omega)$.

5. Intermezzo: Abstraktní teorie potenciálu

Poznámka. Informativně o přístupu k obecnější teorie potenciálu mající za cíl zahrnout do této teorie kupříkladu i teorii potenciálu odvozenou od rovnice vedení tepla.

Následující obecný princip minima lze využít také ve funkcionální analýze při důkazu Krejn–Milmanovy věty.

Věta (Abstraktní Bauerův princip minima)**.** *Buď* K *kompaktní prostor a* $\mathcal{S}$ *třída zdola polospojitých funkcí na* K. *Pro* $y \in K$ *označme*

$$\mathcal{M}_y := \{\mu \in \mathcal{M}^1(K) : \int_K u \, d\mu \leq u(y) \text{ pro každou funkci } u \in \mathcal{S}\}.$$

Buď $s \in \mathcal{S}$. *Potom existuje* $z \in K$ *tak, že*

$$\mathcal{M}_z = \{\varepsilon_z\} \quad a \quad s(z) = \min\{s(t) : t \in K\}.$$

Důkaz. Pomocí Zornova lemmatu. □

6. Dirichletova úloha

Poznámka. Definice klasického řešení Dirichletovy úlohy a perronovský přístup k zobecněné Dirichletově úloze.

Věta 31. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená omezená, Ω je komponenta U a $f : \partial U \to [-\infty, \infty]$. Potom*

(a) $\overline{H}_f^U = \overline{H}_f^\Omega$ *na* Ω,
(b) $\underline{H}_f \le \overline{H}_f$ *na* U,
(c) *na* Ω *buď* $\overline{H}_f^\Omega = -\infty$ *nebo* $\overline{H}_f^\Omega = +\infty$ *anebo* $\overline{H}_f^\Omega \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Lemma 32. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená omezená.*

(a) *Definujeme–li pro $x \in \mathbb{R}^n \setminus U$ funkci*

$$r_x : y \mapsto -||y - x|| \,, \quad y \in \mathbb{R}^n \,,$$

je $r_x \in \mathcal{C}(\overline{U}) \cap \mathcal{S}(U)$.

(b) *Nechť $s \in \mathcal{C}(\overline{U}) \cap \mathcal{S}(U)$. Potom $\underline{H}_s = \overline{H}_s \in \mathcal{H}(U)$.*

Věta 33. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená omezená.*

(a) *Množina $\mathcal{R}(\partial U)$ rezolutivních funkcí tvoří vektorový prostor.*
(b) *Pokud k funkci $f \in \mathcal{C}(\partial U)$ existuje klasické řešení h_f Dirichletovy úlohy, potom $f \in \mathcal{R}(\partial U)$ a $H_f = h_f$.*
(c) *Pokud $f_n \in \mathcal{R}(\partial U)$ a $f_n \to f$ stejnoměrně na ∂U, potom $f \in \mathcal{R}(\partial U)$ a $H_{f_n} \to H_f$ stejnoměrně na U.*

Věta 34 (Wienerova o rezolutivitě spojitých funkcí)**.** *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená omezená. Potom $\mathcal{C}(\partial U) \subset \mathcal{R}(\partial U)$.*

Věta 35. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená omezená, $f_n : \partial U \to [-\infty, \infty]$, $f_n \nearrow f$ na ∂U a $\overline{H}_{f_1} > -\infty$ na U. Potom*

$$\overline{H}_{f_n} \to \overline{H}_f \quad na\, U \,.$$

Speciálně, jsou-li navíc $f_n \in \mathcal{R}(\partial U)$, potom $\underline{H}_f = \overline{H}_f$ a $f \in \mathcal{R}(\partial U)$, pokud alespoň jedna z funkcí $\underline{H}_f$ či $\overline{H}_f$ je konečná.

7. Harmonická míra

Věta 36. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená omezená, $x \in U$ a $f : \partial U \to [-\infty, \infty]$. Potom*

$$\overline{H}_f(x) = \int_{\partial U}^{*} f \, d\mu_x \,.$$

Věta 37 (Brelot)**.** *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená omezená a $f : \partial U \to [-\infty, \infty]$. Potom je ekvivalentní:*

(i) $f \in \mathcal{R}(\partial U)$,
(ii) $f \in \mathcal{L}^1(\mu_x)$ *pro každé* $x \in U$,
(iii) *v každé komponentně $\Omega \subset U$ existuje x_Ω tak, že $f \in \mathcal{L}^1(\mu_{x_\Omega})$.*

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx KONEC ZIMNÍHO SEMESTRU xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Věta 38. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, omezená a souvislá, $x, y \in \Omega$, $M \subset \partial\Omega$ a $f : \partial\Omega \to [-\infty, \infty]$. Potom:*

(a) $\mu_x(M) = 0$, *právě když* $\mu_y(M) = 0$,
(b) *M je μ_x–měřitelná, právě když je μ_y–měřitelná,*

(c) *f je μ_x–měřitelná, právě když je μ_y–měřitelná,*
(d) *$\mathcal{L}^1(\mu_x) = \mathcal{L}^1(\mu_y)$, přičemž normy na těchto prostorech jsou ekvivalentní.*

Věta 39. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená omezená, Ω komponenta U a $x \in \Omega$. Potom $\mu_x(\partial U \setminus \partial\Omega) = 0$.*

Věta 40. *Buď $B := B(z,r) \subset \mathbb{R}^n$, $x \in B$ a K_B Poissonovo jádro B. Potom*

$$d\,\mu_x = K_B(x,.)\,d\sigma\ ,$$

tedy míry μ_x a σ jsou navzájem absolutně spojité a Radon–Nikodymova derivace $\frac{d\mu_x}{d\sigma}$ je rovna $K_B(x,.)$.

Speciálně,

$$d\,\mu_z = \frac{1}{\kappa_n r^{n-1}}\,d\sigma\ .$$

8. Potenciály a vymetání

Věta (Věta 29*–Poissonova modifikace)**.** *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $u \in \mathcal{H}^*(U)$ a $B \subset \overline{B} \subset U$ regulární souvislá. Položíme–li*

$$u_B := \begin{cases} H_u(x) = \int_{\partial B} u\,d\mu_x^B & \text{pro} \quad x \in B, \\ u & \text{pro} \quad x \in U \setminus B, \end{cases}$$

je $u_B \in \mathcal{H}^*(U)$, $u_B \leq u$ na U a buď $u_B = \infty$ na B anebo $u_B \in \mathcal{H}(B)$.

Věta (Věta 30*–o nasycené třídě)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená souvislá a $\mathfrak{B} \subset \mathcal{H}^*(\Omega)$ nasycená třída. Potom buď $\inf \mathfrak{B} = -\infty$ nebo $\inf \mathfrak{B} = \infty$ anebo $\inf \mathfrak{B} \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

Věta 41 (O největší harmonické minorantě)**.** *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $s \in \mathcal{S}^+(U)$,*

$$\mathfrak{A} := \{v \in -\mathcal{H}^*(U) : v \leq s \text{ na } U\} \quad a \quad h_s := \sup \mathfrak{A}\,.$$

Potom $h_s \in \mathcal{H}(U)$ a $0 \leq h_s \leq s$ na U. Je–li $h \in \mathcal{H}(U)$, $h \leq s$ na U, je $h \leq h_s$ na U.

Věta 42 (Rieszův rozklad)**.** *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $s \in \mathcal{S}^+(U)$. Potom existují jednoznačně určené funkce $h \in \mathcal{H}(U)$ a $p \in \mathcal{P}(U)$ tak, že $s = h + p$. Funkce h je největší harmonickou minorantou funkce s.*

Věta 43. *Množina $\mathcal{P}(U)$ všech potenciálů na U tvoří min-stabilní konvexní kužel.*

Věta 44. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}(U)$ je zdola lokálně stejně omezená třída funkcí do $(-\infty, \infty]$. Je-li $s = \inf \mathcal{F}$ na U, je*
(a) *$\widehat{s} \in \mathcal{S}(U)$,*
(b) *$\widehat{s}(y) = \liminf_{x \to y} s(x)$ pro každé $y \in U$.*

Věta 45. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená omezená, $s \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}^n)$ a $f := s \restriction \partial U$. Potom*

$$\overline{H}_f^U = \widehat{R}_s^{\complement U} \text{ na } U\,.$$

Věta 46 (Vlastnosti redukce a výmetu)**.** *Buď $E \subset \mathbb{R}^n$ a $u \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}^n)$. Potom*
(a) *$\widehat{R}_u^E \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}^n)$,*
(b) *$\widehat{R}_u^E(y) = \liminf_{x \to y} R_u^E(x)$ pro každé $y \in \mathbb{R}^n$,*
(c) *$0 \leq \widehat{R}_u^E \leq R_u^E \leq u$ na $\mathbb{R}^n$,*
(d) *$R_u^E = u$ na E,*
(e) *$\widehat{R}_u^E = R_u^E = u$ na $\operatorname{Int} E$,*
(f) *$\widehat{R}_u^E = R_u^E$ na $\mathbb{R}^n \setminus \overline{E}$,*

(g) $\widehat{R}_u^E$ *je harmonická funkce na* $\mathbb{R}^n \setminus \overline{E}$.

Věta 47. *Nechť* $U \subset \mathbb{R}^n$ *je otevřená,* $s \in \mathcal{S}^+(U)$ *a nechť* h_s *je největší harmonická minoranta* s *na* U. *Nechť dále* $E_n \subset U$ *jsou relativně kompaktní množiny,* $E_n \subset E_{n+1}$ *a* $U = \bigcup_n E_n$. *Potom*

$$h_s = \lim_n R_s^{\complement E_n} .$$

Tedy, $s \in \mathcal{S}^+(U)$ *je potenciál, právě když pro takovou jednu (a tedy každou) posloupnost* $\{E_n\}$ *je* $\lim_n R_s^{\complement E_n} = 0$.

9. Regulární body

Věta 48. *Nechť* $U \subset \mathbb{R}^n$ *je otevřená omezená. Potom* U *je regulární, právě když* $U_{reg} = \partial U$.

Věta 49. *Nechť* $U \subset \mathbb{R}^n$ *je otevřená omezená a* $z \in U_{reg}$. *Je-li* $f : \partial U \to [-\infty, \infty)$ *shora omezená, potom*

$$\limsup_{x \to z, x \in U} \overline{H}_f(x) \leq \limsup_{y \to z, y \in \partial U} f(y) .$$

Věta 50. *Nechť* $U \subset \mathbb{R}^n$ *je otevřená omezená a* $z \in U_{reg}$. *Je-li* $f \in \mathcal{R}(\partial U)$ *omezená na* ∂U *a spojitá v* z, *potom*

$$\lim_{x \to z, x \in U} H_f(x) = f(z) .$$

Věta 51. *Nechť* $U \subset \mathbb{R}^n$ *je otevřená omezená,* $s \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}^n)$ *a* $z \in U_{reg}$. *Potom* $\widehat{R}_s^{\complement U}(z) = s(z)$.

Věta 52. *Buď* $K \subset \mathbb{R}^n$ *kompakt,* $f \in \mathcal{C}(K)$ *a* $\varepsilon > 0$. *Potom existují* $p, q \in \mathcal{P}^c(\mathbb{R}^n)$ *tak, že* $||f - (p - q) \upharpoonright K|| < \varepsilon$.

Věta 53. *Nechť* $U \subset \mathbb{R}^n$ *je otevřená omezená a* $z \in \partial U$. *Potom* $z \in U_{reg}$, *právě když*

$$\widehat{R}_p^{\complement U}(z) = p(z) \quad \text{pro každý potenciál} \quad p \in \mathcal{P}^c(\mathbb{R}^n) .$$

Věta 54. *(a) Buďte* $U \subset G \subset \mathbb{R}^n$ *otevřené omezené a* $z \in \partial U \cap \partial G$. *Je-li* z *regulární bod* G, *je i regulárním bodem* U.

(b) Jsou-li U *a* G *regulární množiny v* $\mathbb{R}^n$ *a* $U \cap G \neq \emptyset$, *je* $U \cap G$ *regulární množina.*

Věta 55. *Nechť* $U \subset \mathbb{R}^n$ *je otevřená omezená a* $z \in \partial U$. *Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) $z \in U_{reg}$,
(ii) *v* z *existuje Bouligandova funkce,*
(iii) *v* z *existuje bariéra* s *s vlastností* $\liminf_{x \to y, x \in U} s(x) > 0$ *pro každé* $y \in \partial U \setminus \{z\}$,
(iv) *je-li* $f : \partial U \to [-\infty, \infty)$ *shora omezená na* ∂U, *potom*

$$\limsup_{x \to z, x \in U} \overline{H}_f(x) \leq \limsup_{y \to z, y \in \partial U} f(y) ,$$

(v) *v* z *existuje Keldyšova funkce,*
(vi) *v* z *existuje lokální bariéra.*

Důkaz. Imlikace $(vi) \implies (i) \implies (v)$ BD. □

Věta 56 (Kritéria regularity bodu)**.** *Nechť* $U \subset \mathbb{R}^n$ *je otevřená omezená a* $z \in \partial U$.

(a) *(Poincaré 1890 - external ball condition): Nechť existuje* $B(a, r)$ *tak že* $\overline{B(a, r)} \cap \overline{U} = \{z\}$, *potom* $z \in U_{reg}$.
(b) *Je-li* U *konvexní, je* $U_{reg} = \partial U$.

(c) *Je-li U třídy $\mathcal{C}^2$ v z, je $z \in U_{reg}$.*
(d) *Nechť existuje "useknutý nedegenerovaný kužel" K s vrcholem v z tak, že $K \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{U}$, potom $z \in U_{reg}$.*
(e) *Je-li U třídy $\mathcal{C}^1$ v z, je $z \in U_{reg}$.*
(f) *Množina regulárních bodů U je neprázdná.*
(g) *Je-li z izolovaný bod ∂U, je z irregulární bod U.*

Důkaz. Tvrzení (d) BD. □

Poznámka. Množina U_{reg} je vždy typu G_δ, ale nemusí být typu F_σ.

Věta 57. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená omezená. Potom existuje posloupnost $\{G_n\}$ regulárních množina tak, že*

$$\overline{G_n} \subset G_{n+1} \quad a \quad U = \bigcup_n G_n \,.$$

Poznámka. Poznámka o Wienerově přístupu k řešení Dirichletovy úlohy.

Věta 58 (Keldyš, 1941)**.** *Je-li $A : \mathcal{C}(\partial U) \to \mathcal{H}(U)$ Keldyšův operátor a $f \in \mathcal{C}(\partial U)$, potom $Af = H_f$.*

Důkaz. BD □

10. Malé množiny v teorii potenciálu

Věta 59. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená omezená. Množina $E \subset \partial U$ je zanedbatelná, právě když existuje $s \in \mathcal{S}^+(U)$ tak, že*

$$\lim_{x \to z, x \in U} s(x) = \infty \quad \textit{pro každé} \quad z \in E \,.$$

Věta 60 (Princip minima pro $\mathcal{S}(U)$)**.** *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená omezená a množina $E \subset \partial U$ je μ_x–měřitelná pro každé $x \in U$. Potom E je zanedbatelná, právě když kdykoliv $s \in \mathcal{S}(U)$ je zdola omezená na U a $\liminf\limits_{x \to y, x \in U} \geq 0$ pro každé $y \in \partial U \setminus E$, potom $s \geq 0$ na U.*

Lemma 61. *Nechť $s \in \mathcal{S}\big(B(z,R)\big)$ a $0 < r < R$. Potom existuje $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tak, že $u = s$ na $B(z,r)$ a u je zdola omezená na $\mathbb{R}^n$.*

Věta 62. *Buď $P \subset \mathbb{R}^n$ polární a $z \in \mathbb{R}^n \setminus P$. Potom existuje $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tak, že $u > 0$ na $\mathbb{R}^n$, $u(z) < \infty$ a $P \subset \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) = \infty\}$.*

Dokonce existuje konečná Radonova míra μ na $\mathbb{R}^n$ tak, že $u = \mathbb{N}^\mu$ má požadované vlastnosti.

Důkaz. Dodatek BD. □

Věta 63 (Vlastnosti polárních množin)**.** *Polární množiny v $\mathbb{R}^n$ mají následující vlastnosti*

(a) *Polární množiny v $\mathbb{R}^n$ mají Lebesgueovu míru nula.*
(b) *Polární množiny tvoří σ–ideál.*
(c) *Je-li P polární, existuje polární množina Q typu G_δ tak, že $P \subset Q$.*
(d) *Spočetné množiny jsou polární, existují nespočetné polární množiny.*
(e) *Polární množiny mají prázdný vnitřek.*
(f) *Doplňky polárních množin jsou husté.*
(g) *Je-li P uzavřená polární množina, je $\mathbb{R}^n \setminus P$ souvislá.*
(h) *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená omezená a $P \subset \partial U$ polární, potom P je zanedbatelná.*

Věta 64 (Charakteristiky polárních množin)**.** *Pro množinu $P \subset \mathbb{R}^n$ je ekvivalentní:*

(i) *P je polární,*
(ii) $\widehat{R}_v^P = 0$ *na* $\mathbb{R}^n$ *pro každou* $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,
(iii) *existuje* $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $v > 0$ *na* $\mathbb{R}^n$ *tak, že* $\widehat{R}_v^P = 0$ *na* $\mathbb{R}^n$,
(iv) $\widehat{R}_1^P = 0$ *na* $\mathbb{R}^n$,
(v) *existuje* $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $v > 0$ *na* $\mathbb{R}^n$ *a* $z \in \mathbb{R}^n$ *tak, že* $R_v^P(z) = 0$,
(vi) *existuje* $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $v > 0$ *na* $\mathbb{R}^n$ *a* $z \in \mathbb{R}^n$ *tak, že* $\widehat{R}_v^P(z) = 0$.

Věta 65 (Choquetovo lemma)**.** *Buď T topologický prostor se spočetnou bází otevřených množin a $\mathcal{F}$ neprázdná třída numerických funkcí na T. Potom existuje spočetná $\mathcal{F}_o \subset \mathcal{F}$ tak, že*

$$\widehat{\inf \mathcal{F}_o} = \widehat{\inf \mathcal{F}}\,.$$

Věta 66. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená omezená a $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}(U)$ neprázdná třída lokálně zdola omezených funkcí. Položíme-li $s = \inf \mathcal{F}$, je $\widehat{s} \in \mathcal{S}(U)$ (podle Věty 44) a množina*

$$\{x \in U : \widehat{s}(x) < s(x)\}$$

je polární.

11. Tenkost

Věta 67 (Vlastnosti tenkosti)**.**

(a) *Je-li P polární a $x \in \mathbb{R}^n \setminus P$, je P tenká v x.*
(b) *Je-li E tenká v x a $F \subset E$, je F tenká v x.*
(c) *Je-li $x \in \mathbb{R}^n \setminus (E \cup F)$ a jsou-li E i F tenké v x, je $E \cup F$ tenká v x.*

Poznámka. Poznámka o definici jemné topologie a o jejích vlastnostech.

Věta 68 (Charakteristika tenkosti)**.** *Buďte $E \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$, $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $v > 0$ na $\mathbb{R}^n$ a v spojitá v x. Potom následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) *E je tenká v x,*
(ii) *existuje $V \in \mathcal{W}(x)$ tak, že $\widehat{R}_v^{E \cap V}(x) < v(x)$,*
(iii) $\inf\limits_{V \in \mathcal{W}(x)} \widehat{R}_v^{E \cap V}(x) < v(x)$.

Speciálně, lze volit $v = 1$ na $\mathbb{R}^n$.

Věta 69. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená omezená. Potom:*

(a) *$A \subset \partial U$ je polární, právě když A je zanedbatelná.*
(b) *Množina U_{irr} je polární.*
(c) *Bod $z \in \partial U$ je regulární, právě když $\mathbb{R}^n \setminus U$ není tenká v z.*

Důkaz. BD □

Věta 70 (Odstranitelné singularity pro superharmonické funkce)**.** *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená omezená, $P \subset U$ (relativně) uzavřená polární a $u \in \mathcal{S}(U \setminus P)$ lokálně zdola omezená na U. Potom existuje právě jedna funkce $s \in \mathcal{S}(U)$ tak, že $s = u$ na $U \setminus P$.*

Důkaz. Náznak důkazu. □

12. **Kapacita**

(informativně)

Věta 71. *Buď $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Potom pro newtonovskou kapacitu* cap *platí:*

(a) $\widehat{R}_1^K = \max\{\mathcal{N}^\mu : \mu$ *Radonova na* $\mathbb{R}^n$, $\operatorname{spt}\mu \subset K$, $\mathcal{N}^\mu \le 1$ *na* $\mathbb{R}^n\}$.

(b) $\operatorname{cap}(K) = \max\{\mu(K) : \mu$ *Radonova na* $\mathbb{R}^n$, $\operatorname{spt}\mu \subset K$, $\mathcal{N}^\mu \le 1$ *na* $\mathbb{R}^n\}$.

(c) *Zobrazení* $K \mapsto \operatorname{cap}(K)$ *má následující vlastnosti:*

(c1) *pokud* $K_1 \subset K_2$, *potom* $\operatorname{cap}(K_1) \le \operatorname{cap}(K_2)$,

(c2) *pokud* $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \dots$, *potom* $\operatorname{cap}\left(\bigcap K_n\right) = \lim \operatorname{cap}(K_n)$,

(c3) $\operatorname{cap}(K_1 \cap K_2) + \operatorname{cap}(K_1 \cup K_2) \le \operatorname{cap}(K_1) + \operatorname{cap}(K_2)$.

Věta 72. *Buď X lokálně kompaktní propstor, $\mathcal{K}(X)$ kolekce všech kompaktních podmnožin X a $\mathcal{C} : \mathcal{K}(X) \to [0,\infty)$ Choquetova kapacita. Potom*

(a) *kompaktní a otevřené množiny jsou kapacitabilní,*

(b) *zobrazení $\mathcal{C}^* : 2^X \to [0,\infty]$ má následující vlastnosti:*

(b1) *pokud* $A \subset B$, *potom* $\mathcal{C}^*(A) \le \mathcal{C}^*(B)$,

(b2) *pokud* $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \dots$, *potom* $\mathcal{C}^*\left(\bigcup A_n\right) = \lim \mathcal{C}^*(A_n)$,

(b3) *je-li* $\{K_n\}$ *posloupnost v* $\mathcal{K}(X)$ *a* $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \dots$, *potom* $C^*\left(\bigcap K_n\right) = \lim \mathcal{C}^*(K_n)$.

Speciálně, tyto vlastnosti má i vnější newtonovská kapacita $E \mapsto \operatorname{cap}^*(E)$, $E \subset \mathbb{R}^n$.

Věta 73 (Choquet, 1953)**.** *Borelovské a analytické množiny jsou kapacitabilní.*

Věta 74 (Cartan, 1945)**.** *Množina $P \subset \mathbb{R}^n$ je polární, právě když* $\operatorname{cap}^*(P) = 0$.

Věta 75 (Wienerovo kriterium regularity)**.** *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená omezená, $z \in \partial U$ a $\alpha > 1$. Potom $z \in U_{\mathrm{reg}}$, právě když*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \operatorname{cap}(A_n \setminus U) = \infty \,,$$

kde

$$A_n := \{x \in \mathbb{R}^d : \alpha^n \le ||x - z||^{2-n} \le \alpha^{n+1}\} \,.$$