GEOMETRIE BANACHOVÝCH PROSTORŮ

PŘEHLED HLAVNÍCH VĚT

1. Zobecnění a aplikace Rieszovy věty

Věta 1 (Rieszova o skoro kolmici)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor, M jeho vlastní uzavřený podprostor a $\varepsilon > 0$. Potom existuje $x_\varepsilon \in S_X$ tak, že* $\operatorname{dist}(x_\varepsilon, M) > 1 - \epsilon$.

Důkaz. Tři různé důkazy. □

Poznámka. Poznámka o platnosti věty pro $\varepsilon = 0$, o charakteristice reflexivních prostorů a o důkazu pro Hilbertův prostor.

Věta 2 (Riesz)**.** *Normovaný lineární prostor X je konečně dimenzionální, právě když jednotková koule B_X je kompaktní.*

Důkaz. Klasický i Choquetův. □

Poznámka (Míra nekompaktnosti)**.** Poznámka o míře nekompaktnosti (různé vlastnosti) včetně příkladů (Kuratowski, Hausdorff, Istratescu, Daneš) a o zobecněné Cantorově větě.

Problém. Jak ukázat, že $K(S_X) = K(B_X)$?

Věta 3 (Kottman, 1975)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor nekonečné dimenze. Potom v S_X existuje posloupnost $\{x_n\}$ tak, že $||x_n - x_k|| > 1$ pro $n \neq k$.*

Věta 4. *Nechť X je normovaný lineární prostor,* $\dim X = \infty$. *Pro balící konstantu $P(X)$ platí odhad $\frac{1}{3} \leq P(X) \leq \frac{1}{2}$.*

Věta 5 (Elton–Odell, 1981)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor,* $\dim X = \infty$. *Potom existuje $\varepsilon(X) > 0$ a posloupnost $\{x_n\}$ v S_X tak, že $||x_n - x_k|| > 1 + \varepsilon(X)$ pro $n \neq k$. Tedy Kottmanova konstanta $K(X) \geq 1 + \varepsilon(X)$.*

Důkaz. BD. □

Věta 6 (Kryczka–Prus, 2001)**.** *Existuje $c > 1$ tak, že S_X libovolného nereflexivního Banachova prostoru X obsahuje c–separující posloupnost. Tedy $K(X) \geq c$.*

Důkaz. BD. □

Věta 7. *Pro konstanty $K(X)$ a $B(X)$ platí*

$$K(X) = \frac{2P(X)}{1 - P(X)} \quad a \quad P(X) = \frac{K(X)}{2 + K(X)} \,.$$

2. **Banach Saksova–vlastnost**

Věta 8. *Hilbertovy prostory mají Banach–Saksovu vlastnost.*

Věta 9 (Nishiura–Waterman, 1963)**.** *Banachovy prostory mající Banach–Saksovu vlastnost jou reflexivní.*

Důkaz. Buď pomocí Jamesovy charakteristiky anebo použitím následující Rosenthalovy dichotomie. □

Věta 10 (Rosenthalova l^1–dichotomie, 1974)**.** *Buď $\{x_n\}$ omezená posloupnost v Banachově prostoru X. Potom buďto z $\{x_n\}$ lze vybrat slabě cauchyovskou posloupnost anebo X obsahuje izomorfní kopii l^1.*

Důkaz. BD. □

Věta 11. *Kompaktní množiny jsou Banach–Saksovy. Každá Banach–Saksova množina je relativně slabě kompaktní.*

Věta 12 (Erdös–Magidorova dichotomie, 1976)**.** *Buď $\{x_n\}$ omezená posloupnost v Banachově prostoru X. Potom existuje její vybraná podposloupnost taková, že buďto každá její vybraná posloupnost je Banach–Saksova anebo žádná není Banach–Saksova.*

Obecněji–má-li Banachův prostor Banach–Saksovu vlastnost vzhledem k limitovací metodě $\mathcal{A}$, potom z každé omezené posloupnosti lze vybrat takovou podposloupnost jejíž každá vybraná posloupnost je $\mathcal{A}$–konvergentní.

Důkaz. BD. □

Věta 13 (Lindenstrauss, 1963)**.** *Buď $\mathcal{A}$ konzervativní limitovací metoda, $d_{\mathcal{A}} := \{x \in l^\infty : \mathcal{A}(x) \in c\}$. Je-li $d_{\mathcal{A}} \neq c$, nemá c_0 topologický doplněk v $d_{\mathcal{A}}$.*

Speciálně, c_0 nemá topologický doplněk v l^∞ (Phillips, 1940).

Důkaz. BD. □

3. **Konvexita v Banachových prostorech**

Věta 14. *Buď X Banachův prostor. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) *X je striktně konvexní,*
(ii) *pokud $x, y \in S_X$ a $x \neq y$, potom $\frac{1}{2}||x+y|| < 1$,*
(iii) *pro $p \in (1, \infty)$ a $x \neq y$ je*
$$\left|\left|\frac{x+y}{2}\right|\right|^p < \frac{1}{2}(||x||^p + |y||^p|),$$
(iv) *pokud $||x+y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$, potom $x = y$.*

Věta 15. *Buď X Banachův prostor. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) *X je striktně konvexní,*
(ii) $\operatorname{ext} B_X = S_X$,
(iii) $\exp B_X = S_X$.

Věta 16. *Buď X Banachův prostor. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) *X je uniformně konvexní,*

(ii) *pokud* $x_n, y_n \in S_X$ *a* $\frac{1}{2}||x_n + y_n|| \to 1$, *potom* $x_n - y_n \to 0$.

Věta 17. *Uniformně konvexní prostory mají Radon–Rieszovu vlastnost.*

Věta 18 (Milman 1938–Pettis 1939)**.** *Uniformně konvexní prostory jsou reflexivní.*

Důkaz. Důkaz přes Goldstineovo lemma či pomocí Jamesovy charakteristiky reflexivity. □

Věta 19 (Kakutani, 1938)**.** *Uniformně konvexní prostory mají Banach–Saksovu vlastnost.*

Důkaz. BD. □

Věta 20. *Buď* K *neprázdná kompaktní konvexní podmnožina Banachova prostoru* X*. Potom*

(a) K *je proximinální,*
(b) K *je Čebyševova, pokud navíc* X *je striktně konvexní. V tom případě je zobrazení* P_K *spojité.*

Věta 21 (James)**.** *Pro Banachův prostor* X *je ekvivalentní:*

(i) X *je reflexivní,*
(ii) *uzavřené konvexní podmnožiny* X *jsou proximinální,*
(iii) *každá uzavřená nadrovina v* X *je proximinální.*

Důkaz. Dva různé důkazy. □

Věta 22 (Day–James)**.** *Banachův prostor* X *je reflexivní a striktně konvexní, právě když každá neprázdná uzavřená konvexní podmnožina* X *je Čebyševova.*

Věta 23 (Motzkin, 1935)**.** *Čebyševovy množiny v* $\mathbb{R}^n$ *jsou konvexní.*

Důkaz. BD □

Poznámka. V Hilbertových prostorech H věta zústává v platnosti, pokud buď H má konečnou dimenzi, nebo Čebyševova množina M je slabě uzavřená, anebo pokud projekce P_M je spojitá.

Problém. Existují nekonvexní Čebyševovy množiny ? (V Hilbertových prostorech, v ℓ^2 či v reflexivních a striktně konvexních.)

4. **Intermezzo: Daugavetovy operátory a invertibilita**

Věta 24. *Buď* X *Banachův prostor a* $T \in \mathcal{L}(X)$.

(a) *Je–li* $||T|| \in \sigma(T)$, *je* T *Daugavetův.*
(b) *Je–li* X *uniformně konvexní a* T *Daugavetův, je* $||T|| \in \sigma(T)$.

Věta 25. *Buď* X *uniformně konvexní prostor,* $S \in \mathcal{L}(X)$, $||I - S|| = 1$. *Potom* S *je invertibilní, právě když* $||I - \frac{1}{2}S|| < 1$.

5. Intermezzo: Jednoznačnost hahn–banachovského rozšíření

Poznámka. Různé příklady na jednoznačnost hahn–banachovského rozšíření.

Lemma 26. *Buď M podprostor Banachova prostoru X.*

(a) *Je-li $f \in M^*$, $F \in X^*$, $F = f$ na M. Potom*
$$||f||_M = \mathrm{dist}(F, M^\perp)\,.$$
(b) *Anihilátor $M^\perp$ je proximinální podmnožina X^*.*
(c) *Dokonce, w^*–uzavřené podmnožiny X^* jsou proximinální.*
(d) *Proximinální množiny v Banachových prostorech jsou uzavřené.*

Věta 27. *Buď M vlastní uzavřený podprostor Banachova prostoru X a $f \in M^*$. Potom existuje $F \in X^*$ tak, že $F = f$ na M a $||F||_X > ||f||_M$.*

Věta 28 (Taylor 1939–Foguel 1958)**.** *Buď X Banachův prostor. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) *X^* je striktně konvexní,*
(ii) *pro každý podprostor $M \subset\subset X$ a každý funkcionál $f \in M^*$ existuje právě jedno hahn–banachovské rozšíření f na celý prostor X.*

Věta 29 (Phelps 1960)**.** *Buď X Banachův prostor a $M \subset\subset X$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) *$M^\perp$ je Čebyševova množina v X^*,*
(ii) *pro každý funkcionál $f \in M^*$ existuje právě jedno hahn–banachovské rozšíření f na celý prostor X.*

Věta 30 (Holmes 1975)**.** *Buď X Banachův prostor, $M \subset\subset X$ a $f \in M^*$. Pokud f nabývá své normy v* hladkém *bodě S_X, má f právě jedno hahn–banachovské rozšíření na celý prostor X.*

Poznámka. Z Phelpsovy věty plyne tvrzení Taylor–Foguelovy věty.

6. Intermezzo: Důkaz Motzkinovy věty

Věta (Bunt 1934–Motzkin 1935)**.** *Čebyševovy množiny v $\mathbb{R}^n$ jsou konvexní.*

Důkaz. Dva důkazy Věty 23 - buď pomocí Brouwerovy věty o pevném bodu anebo čistě geometrický důkaz. □

7. Hladkost v Banachových prostorech

Věta 31 (Klee)**.** *Buď X Banachův prostor. Potom*

(a) *je–li X^* striktně konvexní, je X hladký.*
(b) *je–li X^* hladký, je X striktně konvexní.*

Věta 32. *Buď X Banachův prostor a $\nu : x \mapsto \nu(x) : S_X \to \exp(X^*)$ tečné zobrazení.*

(a) *Pro $x \in S_X$ je množina $\nu(x)$ vždy w^*–kompaktní.*
(b) *Je–li X hladký, potom zobrazení $\nu : (S_X, ||...||) \to (S_{X^*}, w^*)$ je spojité.*

xxxxxxxxxxxxxxxxxx KONEX ZIMNÍHO SEMESTRU xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Lemma 33. *Buď X Banachův prostor, $x \in S_X$ a $f \in S_{X^*}$. Potom f je tečna v x, právě když $G_x^-(h) \le f(h) \le G_x^+(h)$ pro každé $h \in X$.*

Věta 34 (Banach 1932)**.** *Buď X Banachův prostor a $x \in S_X$. Potom X je hladký v x, právě když zobrazení $t \mapsto ||t||$ je slabě diferencovatelné v x.*

V tom případě tečna v x je slabá derivace normy v x.

Lemma 35. *Buď $x \in X \mapsto f_x \in X^*$ tečné zobrazení. Potom pro $x \in X$, $h \in S_X$ a $t > 0$ platí*

$$\frac{f_x(h)}{||x||} \le \frac{||x+th|| - ||x||}{t} \le \frac{f_{x+th}(h)}{||x+th|||}\,.$$

Věta 36. *Buď X Banachův prostor a $x_0 \in S_X$. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) *X je hladký v x_0,*
(ii) *každé tečné zobrazení $F : x \mapsto f_x : S_X \to S_{X^*}$ je $||...|| - w^*$ spojité v x_0,*
(iii) *existuje tečné zobrazení $F : x \mapsto f_x : S_X \to S_{X^*}$, které je $||...|| - w^*$ spojité v x_0,*
(iv) *norma je slabě diferencovatelná v x_0, t.j. existuje*

$$\lim_{t\to 0} \frac{||x_0+th|| - ||x_0||}{t} \quad \text{pro každé } h \in X\,,$$

(v)

$$\lim_{t\to 0_+} \frac{\frac{1}{2}\big(||x_0+th|| - ||x_0-th||\big) - 1}{t} = 0 \quad \text{pro každé } h \in X\,.$$

Věta 37. *Buď X Banachův prostor. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) *X je uniformně hladký,*
(ii) *tečné zobrazení $F : x \mapsto f_x : S_X \to S_{X^*}$ je stejnoměrně $||...|| - ||...||$ spojité,*
(iii) *norma je stejnoměrně fréchetovsky diferencovatelná, t.j. existuje*

$$\lim_{t\to 0} \frac{||x_0+th|| - ||x_0||}{t} \quad \text{pro každé } x \in S_X \text{ a každé } h \in X\,,$$

přičemž konvergence je stejnoměrná pro $(x,h) \in S_X \times S_X$,

(iv)

$$\lim_{t\to 0_+} \frac{\frac{1}{2}\big(||x_0+th|| - ||x_0-th||\big) - 1}{t} = 0$$

stejnoměrně pro $(x,h) \in S_X \times S_X$.

8. Kvalitativní konvexita a hladkost

Věta 38 (Lindenstraussovy formule duality)**.** *Buď X Banachův prostor a $t > 0$. Potom*

$$\rho_{X^*}(t) = \sup\Big\{\frac{t\varepsilon}{2} - \delta_X(\varepsilon) : \varepsilon \in [0,2]\Big\}$$

a

$$\rho_X(t) = \sup\Big\{\frac{t\varepsilon}{2} - \delta_{X^*}(\varepsilon) : \varepsilon \in [0,2]\Big\}\,.$$

Poznámka. (a) Vždy $\rho_{X^{**}}(t) = \rho_X(t)$, i když X není reflexivní.
(b) Funkce $t \mapsto \frac{1}{t}\rho_X(t)$ je na intervalu $(0,\infty)$ neklesající a $\rho_X(t) \le t$ pro $t \in (0,\infty)$.

Věta 39 (Šmuljan 1940)**.** *Buď X Banachův prostor. Potom*
(a) *X je uniformně hladký, právě když X^* je uniformně konvexní,*
(b) *X je uniformně konvexní, právě když X^* je uniformně hladký.*

Věta 40 (Šmuljan 1940)**.** *Je-li Banachův prostor uniformně hladký, je již reflexivní.*

Věta 41. *Buď X Banachův prostor a H Hilbertův prostor. Potom*
(a) *X je striktně konvexní, právě když $\delta_X(2) = 1$ a je uniformně konvexní, právě když $\delta_X(\varepsilon) > 0$ pro každé $\varepsilon \in (0,2]$,*
(b) *$\delta_H(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2}$ pro každé $\varepsilon \in (0,2]$,*
(c) *(* Nörlander 1960) $\delta_X(\varepsilon) \le \delta_H(\varepsilon)$ pro každé $\varepsilon \in (0,2]$.

Důkaz. Tvrzení (c) BD. □

Věta 42. *Buď $(X, ||...||)$ Banachův prostor a $||...||_a$ norma na X^* ekvivalentní normě $||...||_*$. Potom existuje norma $||...||_n$ na X ekvivalentní normě $||...||$, jejíž duální norma je $||...||_a$, právě když $||...||_a$ je w^*–zdola polospojitá na X^*.*

Věta 43. (a) *Na prostoru c_0 existuje ekvivalentní norma, v níž je c_0 striktně konvexní, ale není uniformně konvexní.*
(b) *Na prostoru c_0 existuje ekvivalentní norma, v níž je c_0 hladký a nereflexivní.*
(c) *(*Jelínek–Malý) Buď $B := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ a

$$X := \{h \in \mathcal{L}^1(B) : h \text{ je harmonická na } B\},$$

přičemž na X uvažujeme $\mathcal{L}^1$–normu. Potom X je Banachův prostor, který je hladký a nereflexivní.
(d) Existuje striktně konvexní (hladký) nereflexivní Orliczův prostor, jehž duál je striktně konvexní.

Důkaz. Tvrzení (b) pouze náznak, tvrzení (c) BD. □

9. Modul pro každé počasí a kapky

Věta 44 (Vlastnosti modulu čtvercovosti)**.** *Buď X Banachův prostor a ξ_X jeho modul čtvercovosti.*
(a) *Funkce ξ_X je (ryze) rostoucí a konvexní na $[0,1)$.*
(b) *Pro charakteristiku konvexity platí*

$$\varepsilon_0(X) = \lim_{\beta \to 1_-} (1-\beta)\xi_X(\beta)\,.$$

(c) *Prostor X je uniformně konvexí, právě když* $\lim_{\beta\to 1_-}(1-\beta)\xi_X(\beta) = 0$.
(d) *Prostor X je uniformně hladký, právě když $\xi_X'(0) = 0$.*
(e) *Je-li ξ_X integrabilní na $[0.1)$, je X uniformně konvexní.*

Důkaz. Víceméně BD. □

Problém. (a) Je ξ_X integrovatelná, je-li X uniformně konvexní ?
(b) Je ξ_X analytická funkce ?

(c) Dají se nějak charakterizovat funkce na $[0,1)$, které jsou modulem čtvercovosti nějakého Banachova prostoru ?

Věta 45 (Abel 1826 a Stolz 1875)**.** *Nechť* $\sum a_n x^n$ *je komplexní mocninná řada s poloměrem konvergence* 1*. Pokud* $\sum a_n x^n$ *konverguje pro* $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$*, potom pro každé* $\beta < 1$ *řada* $\sum a_n x^n$ *konverguje stejnoměrně na kapce* $D(z, \beta)$*.*

Věta 46 (Daneš 1972-věta o kapce)**.** *Buď* X *Banachův prostor,* $x \in X \setminus B_X$ *a* S *uzavřená množina s* $\operatorname{dist}(S, B_X) > 0$*. Potom existuje* $x \in S$ *tak, že* $D(x, B_X) \cap S = \{x\}$*.*

Důkaz. BD ◻

Věta 47 (Bishop-Phelps 1961)**.** *Buď* C *neprázdná uzavřená konvexní podmnožina Banachova prostoru. Potom množina opěrných bodů* C *je hustá v* ∂C*.*

Důkaz. Pomocí Danešovy věty o kapce. ◻

Věta 48 (Rolewicz 1987)**.** *Banachův prostor* X *má vlastnost kapky DP, právě když každý proud v* X *obsahuje konvergentní podposloupnost.*

Věta 49 (Montesinos 1987)**.** *Buď* X *Banachův prostor. Následující je ekvivalentní:*

(i) X *má vlastnost kapky DP,*
(ii) X *je reflexivní a má Radon–Rieszovu vlastnost.*

Věta 50. *Buď* X *Banachův prostor a* $M \subset X$ *aproximativně kompaktní. Potom* M *je proximinální.*

Věta 51 (Singer 1964, Vlasov 1973)**.** *Buď* X *Banachův prostor. Následující je ekvivalentní:*

(i) X *má vlastnost kapky DP,*
(ii) *každá uzavřená konvexní (omezená) množina v* X *je aproximativně kompaktní.*

Věta 52 (Rolewicz 1987)**.** *Je-li* X *uniformně konvexní Banachův prostor, má* X *vlastnost kapky DP.*

Věta 53 (Montesinos 1987)**.** *Buď* X *Banachův prostor. Následující je ekvivalentní:*

(i) X *je reflexivní,*
(ii) *na* X *existuje ekvivalentní norma, v níž* X *má vlastnost kapky DP.*

Důkaz. BD ◻

10. Kolmost v Banachových prostorech

Věta 54. *Buď* H *Hilbertův prostor a* $x, y \in H$*. Následující je ekvivalentní:*

(i) $x \perp y$,
(ii) $||x|| \leq ||x + \lambda y||$ *pro každé* $\lambda \in \mathbb{R}$,
(iii) $||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$,
(iv) $||x + \lambda y|| = ||x - \lambda y||$ *pro každé* $\lambda \in \mathbb{R}$,
(v) $||x + y|| = ||x - y||$.

Věta 55. *Buď* X *Banachův prostor,* $f \in X^*$ *a* $x \in X$*. Potom* $x \in \ker f$*, právě když* $|f(x)| = ||f||\,||x||$*.*

Věta 56 (James). *Pro Banachův prostor X je ekvivalentní:*

(i) *X je reflexivní,*
(ii) *je-li $f \in X^*$, existuje $x \in X$ tak, že $f(x) = ||f||\,||x||$,*
(iii) *je-li $f \in X^*$, existuje $x \in X$, $x \neq 0$, tak, že $x \perp \ker f$,*
(iv) *je-li H uzavřená nadrovina v X procházející počátkem, existuje $x \neq 0$, tak, že $x \perp H$.*

Věta 57. *Buď X Banachův prostor. Potom platí:*

(a) *Nechť $x \in X$, $x \neq 0$. Potom existuje nadrovina H procházející počátkem tak, že $x \perp H$.*
(b) *Nechť $x, y \in X$, $x \neq 0$. Potom existuje $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, že $x \perp \alpha x + y$.*
(c) *Nechť $x, y \in X$. Potom $x \perp \alpha x + y$, právě když existuje $f \in X^*$, $f \neq 0$, tak, že $f(x) = ||x||$ a $f(\alpha x + y) = 0$.*
(d) *Nechť $x, y \in X$. Potom $x \perp y$, právě když existuje $f \in X^*$, $f \neq 0$, tak, že $|f(x)| = ||f||\,||x||$ a $f(y) = 0$.*

Věta 58. *Pro Banachův prostor X je ekvivalentní:*

(i) *X je hladký,*
(ii) *pro $x, y \in X$, $x \neq 0$, existuje právě jedno $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, že $x \perp \alpha x + y$,*
(iii) *jestliže $x \perp y$ a $x \perp z$, potom $x \perp y + z$.*

Věta 59. *Pro Banachův prostor X je ekvivalentní:*

(i) *X je striktně konvexní,*
(ii) *pro $x, y \in X$, $x \neq 0$, existuje právě jedno $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, že $\alpha x + y \perp x$.*

Důkaz. BD □

Věta 60. *Buď H Hilbertův prostor a $P \in \mathcal{L}(H)$ projekce. Je ekvivalentní:*

(i) *P je ortogonální (tj. $\ker P \perp \mathcal{R}(P)$),*
(ii) *$Px \perp x - Px$ pro každé $x \in H$,*
(iii) *$||P|| = 1$,*
(iv) *je-li $Q \in \mathcal{L}(H)$ projekce, potom $||x - Px|| \leq ||x - Qx||$ pro každé $x \in H$ (P je minimální),*
(v) *P je hermiteovský operátor,*
(vi) *P je normální operátor,*
(vii) *P je pozitivní operátor,*
(viii) *existuje netriviální uzavřený $M \subset\subset H$ tak, že $||x - Px|| = \operatorname{dist}(x, M)$ pro každé $x \in H$.*

Věta 61. *Buď M komplementovaný podprostor Banachova prostoru X. Potom je ekvivalentní:*

(i) *existuje zleva ortogonální projekce X na M,*
(ii) *existuje $N \subset\subset X$ tak, že $X = M \oplus_t N$ a $M \perp N$,*
(iii) *existuje projekce $Q : X \to M$ taková, že $||Q|| = 1$.*

Důkaz. BD □

Věta 62. *Buď M komplementovaný podprostor Banachova prostoru X. Potom je ekvivalentní:*

(i) *existuje zprava ortogonální projekce X na M,*
(ii) *existuje $N \subset\subset X$ tak, že $X = M \oplus_t N$ a $N \perp M$,*

(iii) *existuje minimální projekce X na M.*

Důkaz. BD □

Věta 63. *Pro Banachův prostor X je ekvivalentní:*

(i) *X je Daugavetův,*
(ii) *je-li $x \in S_X$ a $\varepsilon > 0$, potom $B_X = \overline{\mathrm{co}}\,\Delta_\varepsilon(x)$,*
(iii) *je-li $x \in S_X$, $f \in S_{X^*}$ a $\varepsilon > 0$, potom existuje $y \in S(f, \varepsilon)$ tak, že $||x + y|| \geq 2 - \varepsilon$.*

Důkaz. BD □

Věta 64. *Buď X Daugavetův prostor. Potom*

(a) *je-li $S \subset B_X$ plátek, je $\operatorname{diam} S = 2$,*
(b) *B_X není dentabilní.*

Věta 65. *Buď D omezená podmnožina Banachova prostoru X. Je ekvivalentní:*

(i) *D je dentabilní,*
(ii) *ke každému $\varepsilon > 0$ existuje plátek $S \subset D$ tak, že $\operatorname{diam} S < \varepsilon$.*

Věta 66 (Bishop–Phelps, 1963)**.** *Buď X (reálný) Banachův prostor a $C \subset X$ neprázdná uzavřená omezená konvexní. Potom množina*

$$\big\{f \in X^* : \text{existuje } c \in C \text{ tak, že } f(c) = \sup\{f(t) : t \in C\}\big\}$$

je hustá v X^*.

Důkaz. BD □

Lemma 67. *Buď D omezená podmnožina Banachova prostoru X, $f, \varphi \in X^*$, $f \neq 0$ a $\alpha > 0$. Nechť*

$$S(D, f, \alpha) := \{x \in D : f(x) \leq \sup f(D) - \alpha\}\,.$$

Pokud $\delta < \frac{1}{2}\alpha$ a $|f(x) - \varphi(x)| \leq \delta$ pro $x \in D$, potom

$$S(D, \varphi, \alpha - 2\delta) \subset S(D, f, \alpha)\,.$$

Věta 68 (Lindenstrauss, 1966)**.** *Pro Banachův prostor X je ekvivalentní:*

(i) *X má Krejn–Milmanovu vlastnost (tj. je-li $C \subset X$ neprázdná uzavřená omezená konvexní, je $C = \overline{\mathrm{co}}\,\operatorname{ext} C$),*
(i) *je-li $B \subset X$ neprázdná uzavřená omezená konvexní, je $\operatorname{ext} B \neq \emptyset$.*

Věta 69 (Lindenstrauss, 1966)**.**

$$RNP \implies KMP\,.$$

Problém. Není známo, zda $KMP \implies RNP$.

Věta 70. *Buď X Banachův prostor.*

(a) *(Phelps, 1974) Prostor X má RNP, právě když každá neprázdná omezená uzavřená konvexní podmnožina X je uzavřeným konvexním obalem svých silně exponovaných bodů.*
(b) *(Wojtaszczyk, 1992) Je-li prostor X Daugavetův, potom B_X nemá žádné silně exponované body.*

Důkaz. BD □