TEORIE POTENCIÁLU 1

PŘEHLED HLAVNÍCH VĚT

1. Klasická Dirichletova úloha

1.A. Harmonické funkce.

Věta 1 (Fundamentální harmonická funkce s pólem v {y})**.** *Pro $y \in \mathbb{R}^d$ položme*

$$U_y(t) := \begin{cases} -\log ||t-y||, & t \in \mathbb{R}^d \setminus \{y\}, \quad d=2, \\ ||t-y||^{2-d}, & t \in \mathbb{R}^d \setminus \{y\}, \quad d \geq 3. \end{cases}$$

Potom funkce U_y je harmonická na $\mathbb{R}^d \setminus \{y\}$.

Věta 2 (Charakteristiky harmonických funkcí)**.** *Buď U otevřená v $\mathbb{R}^d$ a h reálná funkce na U. Následjící výroky jsou ekvivalentní:*

(i) $h \in \mathcal{H}(U)$,

(ii) $h \in \mathcal{C}(U)$ *a*

$$h(x) = \mathcal{M}(h; x, r) := \frac{1}{\kappa_d r^{d-1}} \int_{S(x,r)} f \, d\sigma \quad \textit{kdykoliv} \quad \overline{B(x,r) \subset U},$$

(iii) $h \in \mathcal{C}(U)$ *a*

$$h(x) = \mathcal{A}(f; x, r) := \frac{1}{\omega_d r^d} \int_{B(x,r)} f \, d\lambda \quad \textit{kdykoliv} \quad \overline{B(x,r) \subset U},$$

Věta 3 (Poissonův integrál)**.** *Buď U otevřená v $\mathbb{R}^d$, $h \in \mathcal{H}(U)$, $\overline{B(x,r)} \subset U$ a $y \in B(x,r)$. Potom*

$$h(x) = \frac{1}{\kappa_d r} \int_{S(y,r)} \frac{r^2 - |y-x|^2}{|z-x|^d} \, h(z) \, d\sigma(z)\,.$$

Věta 4 (Princip maxima)**.** *(a) Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená souvislá množina, $u \in \mathcal{C}(\Omega)$. Předpokládejme, že ke každému $x \in \Omega$ existuje $\delta_x > 0$ tak, že*

$$u(x) = \mathcal{M}(u; x, \delta) \quad \textit{pro každé} \quad 0 < \delta < \delta_x\,.$$

Potom buď u je konstantní na Ω anebo $\sup\{u(\omega) : \omega \in \Omega\}$ se v Ω nenabývá.

(b) Nechť U je omezená otevřená podmnožina v $\mathbb{R}^d$ a $h \in \mathcal{C}(\overline{U}) \cap \mathcal{H}(U)$. Potom existují $a, b \in \partial U$ tak, že $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ pro všechna $x \in U$.

Věta 5 (Picard–Liouville)**.** *Jestliže harmonická funkce h na $\mathbb{R}^d$ je zdola (či shora) omezená, pak h je na $\mathbb{R}^d$ konstantní.*

Věta 6 (Harnackova konvergenční)**.** *Nechť $\{h_n\}$ je posloupnost harmonických funkcí na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^d$. Jestliže $h_n \to h$ lokálně stejnoměrně na U, potom $h \in \mathcal{H}(U)$.*

Lemma 7. *Nechť $0 < r < R$ a $h > 0$ je harmonická funkce na kouli $B(z,r) \subset \mathbb{R}^d$. Jestliže $x_1, x_2 \in \overline{B(z,r)} \subset B(z,R)$, potom*

$$\frac{h(x_1)}{h(x_2)} \leq \frac{R^2}{R^2 - r^2} \Big(\frac{R+r}{R-r}\Big)^n .$$

Věta 8 (Harnackova nerovnost)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je souvislá otevřená a $K \subset U$ je kompakt. Potom existuje $C > 0$ (závislé pouze na Ω, K, d) tak, že*

$$C^{-1} \leq \frac{h(x)}{h(y)} \leq C\,,$$

kdykoliv $h > 0$ je harmonická na Ω a $x, y \in K$.

Věta 9 (Harnackova konvergenční)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je souvislá otevřená a $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ nahoru usměrněná množina funkcí. Potom buď $\sup \mathcal{F} = +\infty$ na Ω anebo $\sup \mathcal{F} \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

Důsledek 10. *Nechť $\{h_n\}$ je posloupnost harmonických funkcí na souvislé otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Jestliže $h_n \nearrow h$, potom buď $h = +\infty$ na Ω anebo $h \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

1.B. Dirichletova úloha na kouli.

Věta 11 (Poissonova integrální formule)**.** *Nechť f je σ–integrovatelná funkce na $S(z,r)$ a $y \in S(z,r)$. Potom*

(a) $H_f \in \mathcal{H}(B(z,r))$,
(b) $\limsup_{x \to y, x \in B(z,r)} H_f(x) \leq \limsup_{t \to y, t \in S(z,r)} f(t)$ *pro každé* $y \in S(z,r)$,
(c) *je-li navíc f spojitá (v rozšířeném smyslu) v bodě $y \in S(z,r)$, potom*

$$\lim_{x \to y, x \in B(z,r)} H_f(x) = f(y)\,.$$

Věta 12 (Regularita koule)**.** *Jestliže $h \in \mathcal{C}(\overline{B(z,r)}) \cap \mathcal{H}(B(z,r))$, potom $h = H_h$ na $B(z,r)$.*

Věta 13. *(a) Nechť h je harmonická funkce na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^d$. Potom $h \in \mathcal{C}^\infty(U)$.*

(b) Jestliž funkce h splňuje na otevřené množině U lokální podmínku sférického průměru, potom $h \in \mathcal{H}(U) \cap \mathcal{C}^\infty(U)$.

Věta 14 (Montel)**.** *Nechť $\mathcal{F}$ je lokálně stejně omezená množina harmonických funkcí na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^d$. Potom $\mathcal{F}$ je relativně kompaktní v topologii lokálně stejnoměrné konvergence na $\mathcal{H}(U)$.*

Věta 15. *Nechť h je harmonická funkce na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^d$. Potom $\partial^\alpha h \in \mathcal{H}(U)$ pro každý multiindex α.*

Navíc, je-li $h \in \mathcal{H}(B(z,r))$ a $\overline{B(z,r)} \subset U$, potom

$$\Big|\frac{\partial}{\partial x_j} h(z)\Big| \leq \frac{d}{r}\ \sup\{|h(x)| : x \in B(z,r\} \quad \textit{pro každé} \quad j = 1, 2, \ldots, d\,.$$

Shrnutí – charakteristiky harmonických funkcí. Buď h spojitá funkce na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^d$. Následující výroky jsou ekvivalentní:

(i) $h \in \mathcal{H}(U)$ (t.j. existují spojité $\frac{\partial^2 h}{\partial x_j^2}$ a $\Delta h = 0$ na U),
(ii) existují $\frac{\partial^2 h}{\partial x_j^2}$ a $\Delta h = 0$ na U,
(iii) $h \in \mathcal{C}^\infty(U)$ a $\Delta h = 0$,

(iv) h splňuje sférickou podmínku průměru,
(v) h splňuje lokální sférickou podmínku průměru,
(vi) h splňuje objemovou podmínku průměru,
(vii) h splňuje lokální objemovou podmínku průměru.

1.C. Superharmonické funkce.

Věta 16 (Vlastnosti $\mathcal{H}^*(U)$ a $\mathcal{S}(U)$)**.** *Buď $U \subset \mathbb{R}^d$ otevřená. Množiny $\mathcal{H}^*(U)$ a $\mathcal{S}(U)$ jsou min–stabilní konvexní kužely a*

$$\mathcal{H}(U) = \mathcal{H}^*(U) \cap (-\mathcal{H}^*(U)) = \mathcal{S}(U) \cap (-\mathcal{S}(U))\,.$$

Věta 17 (Charakteristiky hyperharmonických a superharmonických funkcí)**.** *Buď u zdola polospojitá funkce na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^d$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) $u \in \mathcal{H}^*(U)$ *(t.j. $\mathcal{M}(u; z, r) \le u(z)$ kdykoliv $\overline{B(z,r)} \subset U$),*
(ii) $\mathcal{A}(u; z, r) \le u(z)$ *kdykoliv* $\overline{B(z,r)} \subset U$,
(iii) *ke každému $z \in U$ existuje $\delta_z > 0$ tak, že $\overline{B(z,\delta_z)} \subset U$ a $\mathcal{M}(u; z, \delta) \le u(z)$ kdykoliv $\delta \in (0, \delta_z)$,*
(iv) *ke každému $z \in U$ existuje $\delta_z > 0$ tak, že $\overline{B(z,\delta_z)} \subset U$ a $\mathcal{A}(u; z, \delta) \le u(z)$ kdykoliv $\delta \in (0, \delta_z)$,*
(v) *pokud W je omezená otevřená množina, $W \subset \overline{W} \subset U$ a pokud funkce $h \in \mathcal{C}(\overline{W}) \cap \mathcal{H}(W)$ splňuje $h \le u$ na ∂W, potom $h \le u$ na W,*
(vi) *pokud $\overline{B(z,r)} \subset U$), potom $H_u \le u$ na $B(z,r)$.*

Obdobná charakteristika platí i pro superharmonické funkce.
Je-li $u \in \mathcal{C}^2(U)$, potom $u \in \mathcal{S}(U)$, právě když $\Delta u \le 0$ na U.

Věta 18. *Buď $U \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $u \in \mathcal{H}^*(U)$ a $y \in U$. Potom*

(a) $\liminf_{x \to y} u(x) = u(y)$,
(b) *$u \in \mathcal{S}(U)$, právě když u je lokálně integrovatelná na U. A to nastane, právě když u je konečná skoro všude, anebo když u je konečná na husté podmnožině U.*

Věta 19 (Princip maxima)**.** *Buď $U \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $s \in \mathcal{S}(U)$ a $x \in U$.*

(a) *Pokud s nabývá lokálního minima v x, potom existuje $\delta > 0$ tak, že s je konstantní na $B(x,\delta)$.*
(b) *Je-li U souvislá a s nabývá minima v x, potom s je konstantní na U.*
(c) *Je-li U omezená, $u \in -\mathcal{S}(U)$ a $\liminf_{z \to y}(s-u)(z) \ge 0$ pro každé $y \in \partial U$, potom $s \ge u$ na U.*

Věta 20. *Buď $U \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $s \in \mathcal{S}(U)$ a $B := B(x,\delta) \subset \overline{B(x,\delta)} \subset U$. Potom s je σ–integrovatelná na ∂B, $H_s \in \mathcal{H}(B)$ a $H_s \le s$ na B.*

Věta 21 (Poissonova modifikace)**.** *Buď $U \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $s \in \mathcal{S}(U)$ a $B := B(x,\delta) \subset \overline{B(x,\delta)} \subset U$. Položme*

$$s_B := \begin{cases} H_s & \text{na } B, \\ s & \text{na } U \setminus B. \end{cases}$$

Potom $s_B \in \mathcal{S}(U)$, $s_B \le s$ na U a $s_B \in \mathcal{H}(B)$.

Věta 22 (O nasycené třídě)**.** *Buď $U \subset \mathbb{R}^d$ otevřená a Ω komponenta U. Nechť $\mathfrak{B} \subset \mathcal{S}(U)$ je nasycená třída. Potom buď $\inf \mathfrak{B} = -\infty$ na Ω anebo $\inf \mathfrak{B} \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

1.D. Zobecněné řešení Dirichletovy úlohy.

Věta 23. *Buď $U \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, Ω komponenta U a $f : \partial U \to [-\infty, \infty]$. Potom $\underline{H}_f \leq \overline{H}_f$ na U. Na Ω buď $\overline{H}_f = -\infty$ nebo $\overline{H}_f = \infty$ nebo $\overline{H}_f \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

Lemma 24. *Buď $U \subset \mathbb{R}^d$ otevřená.*

(a) *Je-li $f \in \mathcal{C}(\partial U)$ a existuje klasické řešení h_f Dirichletovy úlohy příslušné k f, potom f je resolutivní a $H_f = h_f$.*

(b) *Pokud $s \in \mathcal{C}(\overline{U}) \cap \mathcal{S}(U)$, potom s je rosolutivní.*

Lemma 25. *Buď $U \subset \mathbb{R}^d$ otevřená a $\{f_n\}$ posloupnost resolutivních funkcí z $\mathcal{R}(U)$. Jestliže $f_n \to f$ stejnoměrně na ∂U, potom $f \in \mathcal{R}(U)$ a $H_{f_n} \to H_f$ stejnoměrně na U.*

Věta 26 (Wienerova o resolutivitě spojitých funkcí)**.** *Buď $U \subset \mathbb{R}^d$ otevřená. Potom $\mathcal{C}(\partial U) \subset \mathcal{R}(U)$.*

Poznámka. Toto je pouze výčet skutečně hlavních vět. V textu chybí celá řada dalších poznatků (namátkou třeba o zavedení $\int_{S(x,r)} f d\sigma$, partie o polospojitých funkcích, o prostoru $\mathcal{H}(U)$ s topologií lokálně stejnoměrné konvergence, poznámky o analytičnosti harmonických funkcí či o Riesz–Herglotzově větě, stručný nástin axiomatické teorie potenciálu, poznámka o "‘větách o průměru"’, zmínka o zavedení Newtonových, Rieszových či tepelných potenciálů či zmínka o polárních množinách).

V průběhu semestru jsem vám také zadával Cvičení. Pokud jste některá z nich vyřešili, rád si to u zkoušky poslechnu.

Praha, 14. 1. 2012 Jaroslav Lukeš