TEORIE POTENCIÁLU 2

PŘEHLED HLAVNÍCH VĚT

1. Klasická Dirichletova úloha

1.D. Zobecněné řešení Dirichletovy úlohy - pokračování. V dalším U bude omezená otevřená podmnožina $\mathbb{R}^d$, povětšinou $d \geq 3$.

Věta 27. *Nechť $f_n : \partial U \to [-\infty, \infty]$, $f_n \nearrow f$ na ∂U a $\overline{H}_{f_1} > -\infty$. Potom $\overline{H}_{f_n} \to \overline{H}_f$ na U.*

1.E. Harmonická míra.

Věta 28. *Buď $x \in U$ a $f : \partial U \to [-\infty, \infty]$. Potom*

$$\overline{H}_f(x) = \int_{\partial U}^{*} f \, d\mu_x \quad \text{pro každou} \quad f \in \mathcal{C}(\partial U)\,.$$

Věta 29 (Brelot)**.** *Pro funkci $f : \partial U \to [-\infty, \infty]$ jsou následující výroky ekvivalentní:*

(i) $f \in \mathbb{R}(U)$,
(ii) $f \in \mathcal{L}^1(\mu_x)$ *pro každé* $x \in U$,
(iii) *v každé komponentě $\Omega \subset U$ existuje $x \in \Omega$ tak, že $f \in \mathcal{L}^1(\mu_x)$.*

Věta 30. *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ omezená otevřená souvislá a $x, y \in \Omega$.*

(a) *Je-li $E \subset \Omega$, potom $\mu_x(E) = 0$, právě když $\mu_y(E) = 0$.*
(b) *Množina $M \subset \Omega$ je μ_x–měřitelná, právě když je μ_y–měřitelná.*
(c) *Funkce $f : \partial\Omega \to [-\infty, \infty]$ je μ_x–měřitelná, právě když je μ_y–měřitelná.*
(d) *$\mathcal{L}^1(\mu_x) = \mathcal{L}^1(\mu_y)$ a příslušné normy na těchto prostorech jsou ekvivalentní.*

1.F. Malé množiny v teorii potenciálu.

Věta 31. *Množina $E \subset \partial U$ je zanedbatelná, právě když existuje $s \in \mathcal{S}^+(U)$ tak, že*

$$\lim_{x \to z} s(x) = \infty \, \text{pro každé} \, z \in E\,.$$

Věta 32 (Princip minima pro $\mathcal{S}(U)$)**.** *Nechť $E \subset \partial U$ je μ_x–měřitelná pro každé $x \in U$. Potom následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) *E je zanedbatelná,*
(ii) *kdykoliv $s \in \mathcal{S}(U)$ je zdola omezená na U a $\liminf_{x \to z} s(x) \geq 0$ pro každé $z \in \partial U \setminus E$, potom $s \geq 0$ na U.*

Lemma 33. *Nechť $0 < r < R$ a $s \in \mathcal{S}(B(z, R))$. Potom existuje $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ taková, že $u = s$ na $B(z, r)$ a u je zdola omzená.*

Věta 34. *Nechť $P \subset \mathbb{R}^d$ je polární a $z \in \mathbb{R}^d \setminus P$. Potom existuje $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $u > 0$, tak, že*

$$u(z) < \infty \quad a \quad P \subset u^{-1}(\infty)\,.$$

Věta 35. *Systém polárních množin má následující vlastnosti.*

(a) *Polární množiny mají Lebesgueovu míru* 0.

(b) *Podmnožiny polární množiny jsou polární. Spočetné sjednocení polárních množin je polární (tedy polární množiny tvoří* σ*–ideál).*

(c) *Každá polární množina je obsažena v polární množině typu* G_δ.

Věta 36. *Každá polární podmnožina* ∂U *je zanedbatelná.*

Věta (Cartan). *Množina* $P \subset \mathbb{R}^d$ *je polární, právě když* $\operatorname{cap}^* P = 0$. [BD]

1.G. Regulární body.

Věta 37. *Množina* U *je regulární, právě když každý její hraniční bod je regulární.*

Věta 38 (Charakteristiky reulárních bodů)**.** *Buď* $z \in \partial U$. *Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) z *je regulární,*

(ii) *v* z *existuje lokální bariéra,*

(iii) *v* z *existuje bariéra,*

(iv) *v* z *existuje harmonická Bouligandova funkce,*

(v) *v* z *existuje Keldyšova funkce,*

(vi) *je-li* $f : \partial U \to [-\infty, \infty)$ *shora omezená, potom*

$$\limsup_{U \ni x \to z} \overline{H}_f(x) \leq \limsup_{\partial U \ni x \to z} f(x)\,.$$

(Implikace $(ii) \implies (iv)$ a $(i) \implies (v)$ jsou BD.)

Důsledky 39.

(a) *Nechť* $f \in \mathbb{R}(U)$ *je omezená na* ∂U *a spojitá v bodě* $z \in U_{\text{reg}}$. *Potom* $\lim_{x \to z} f(x) = f(z)$.

(b) *Je-li* $z \in U_{\text{reg}}$ *a* $G \subset U$ *otevřená taková, že* $z \in \partial G$, *potom* $z \in G_{\text{reg}}$.

(c) *(Poincaré) Nechť* $z \in \partial U$ *a nechť existuje* $B(y,r)$ *tak, že* $\overline{B(y,r)} \cap \overline{U} = \{z\}$. *Potom* $z \in U_{\text{reg}}$.

(d) *Exisuje posloupnost regulárních množin* $\{U_n\}$ *tak, že*

$$\overline{U_n} \subset U_{n+1} \quad a \quad U = \bigcup U_n\,.$$

Věta 40 (Keldyš)**.** *Je-li* $A : \mathcal{C}(\partial U) \to \mathcal{H}(U)$ *Keldyšův operátor a* $f \in \mathcal{C}(\partial U)$, *potom* $Af = H_f$.

Věta 41 (Další kriteria a příklady)**.** (a) *Je-li* U *konvexní množina, potom* $U_{\text{reg}} = \partial U$.

(b) *Je-li* U *třídy* $\mathcal{C}^2$ *v bodě* $z \in \partial U$, *je* $z \in U_{\text{reg}}$.

(c) *(Zaremba) Nechť existuje "useknutý nedegenerovaný kužel"* $K \subset \mathbb{R}^d \setminus \overline{U}$ *s vrcholem v bodě* $z \in \partial U$, *potom* $z \in U_{\text{reg}}$. *[BD]*

(d) *Je-li* U *třídy* $\mathcal{C}^1$ *v bodě* $z \in \partial U$, *je* $z \in U_{\text{reg}}$.

(e) *Množina* U_{reg} *je neprázdná. (Je typu* G_δ, *ale nemusí být* F_σ.*)*

(f) *Je-li bod* $z \in \partial U$ *izolovaný, je* z *iregulární.*

(g) *Množina* U_{irr} *je polární, tedy zanedbatelná. [BD]*

(h *(Lebesgueův hrot) Buď*

$$L := \{0\} \cup \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 > 0, \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \leq e^{-\frac{1}{x_1}}\right\}.$$

Potom bod 0 *není regulárním bodem množiny* $B(0,1) \setminus L$. *[BD]*

(i) *(Wienerovo kriterium) Buď $z \in \partial U$ a $\alpha > 1$. Potom $z \in U_{\mathrm{reg}}$, právě když*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \operatorname{cap}(A_n \setminus U) = \infty ,$$

kde

$$A_n := \{x \in \mathbb{R}^d : \alpha^n \leq ||x - z||^{2-n} \leq \alpha^{n+1}\} .$$

[BD]

1.H. Tenkost, jemná topologie a vymetání.

Věta 42 (Vlastnosti tenkých množin)**.**

(a) *Polární množina Pje tenká v každém bodě $\mathbb{R}^d \setminus P$.*
(b) *Je-li množina E tenká v $x \in \mathbb{R}^d \setminus E$ a $F \subset E$, potom i F je tenká v x.*
(c) *Jsou-li množiny E, F tenké v bodě $x \in \mathbb{R}^d \setminus (E \cup F)$, je i množina $E \cup F$ tenká v x.*

Věta 43. *Nechť $V \subset \mathbb{R}^d$. Potom $V \in \mathcal{W}_f(x)$ (jemné okolí x), právě když množina $\mathbb{R}^d \setminus V$ je tenká v x.*

Věta 44 (Vlastnosti jemné topologie)**.**

(a) *Systém jemných okolí $\mathcal{W}_f(x)$ má bázi z (eukleidovsky) kompaktních množin.*
(b) *$\mathbb{R}^d$ s jemnou topologií tvoří Baireův prostor.*
(c) *Jemná topologie je úplně regulární, není normální, není metrizovatelná, konečné množiny jsou jediné kompakty.*
Pokud posloupnost $\{x_n\}$ konverguje v jemné topologii k prvku x, potom existuje n_0 tak, že $x_n = x$ pro všechna $n \geq n_0$. [BD]
(d) *Jemná topologie na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^d$ je restrikcí jemné topologie z $\mathbb{R}^d$.*
(e) *Jemně otevřené množiny jsou lebesgueovsky měřitelné, ale nemusejí být borelovské. [BD]*

Věta 45. *Buď $E \subset \mathbb{R}^d$ a $x \in \mathbb{R}^d \setminus E$. Potom E je tenká v x, právě když existuje $V \in \mathcal{W}(x)$ tak, že $R_1^{E \cap V} < 1$.*

Věta 46 (Choquetovo lemma)**.** *Buď T topologický prostor se spočetnou bází otevřených množin a $\mathcal{F}$ kolekce (numerických) funkcí na T. Potom existuje spočetná množina $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ tak, že $\widehat{\mathcal{F}_0} = \widehat{\mathcal{F}}$.*

Věta 47. *Buďte $U \subset \mathbb{R}^d$, $s_n \in \mathcal{S}(U)$, $s_n \searrow u$ na U. Pokud u je lokálně zdola omezená na U, potom $\widehat{u} \in \mathcal{S}(U)$.*

Věta 48. *Buďte $U \subset \mathbb{R}^d$, $\mathcal{F}$ neprázdná lokálně zdola omezená třída funkcí z $\mathcal{S}(U)$ a $s := \inf\{v : v \in \mathcal{F}\}$. Potom $\widehat{s} \in \mathcal{S}(U)$ a množina $\{x \in U : \widehat{s}(x) < s(x)\}$ je polární. (Poslední tvrzení [BD].)*

Věta 49 (Vlastnosti $\widehat{R}_s^A$)**.** *Buďte $s, t \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a $A \subset \mathbb{R}^d$. Potom:*

(a) $0 \leq \widehat{R}_s^A \leq R_s^A \leq s$ *na* $\mathbb{R}^d$,
(b) $s = R_s^A$ *na* A,
(c) $s = R_s^A = \widehat{R}_s^A$ *na* $\operatorname{Int} A$,
(d) $R_s^A = \widehat{R}_s^A$ *na* $\mathbb{R}^d \setminus \overline{A}$ *a jsou to funkce harmonické na* $\mathbb{R}^d \setminus \overline{A}$,
(e) $\widehat{R}_{s+t}^A = \widehat{R}_s^A + \widehat{R}_t^A$,
(f) $s \leq t \implies \widehat{R}_s^A \leq \widehat{R}_t^A$,

(g) $\lambda \geq 0 \implies \widehat{R}^A_{\lambda s} = \lambda\, \widehat{R}^A_s$.

(Netriviální věci [BD].)

Věta 50 (Charakteristiky polárních množin)**.** *Buď $P \subset \mathbb{R}^d$. Následující výroky jsou ekvivalentní.*

(a) *P je polární.*
(b) *Existuje striktně pozitivní $s \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ tak, že $\widehat{R}^P_s = 0$.*
(c) *$\widehat{R}^P_u = 0$ pro každou funkci $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*
(d) *množina P je tenká v každém svém bodě.*

(Obdobně i pro otevřenou $U \subset \mathbb{R}^d$. Ekvivalence s (iv) [BD].)

Věta 51 (Odstranitelné singularity)**.** *Buďte $U \subset \mathbb{R}^d$ otevřená a $P \subset U$ polární uzavřená (v U), $s \in \mathcal{S}(U \setminus P)$ zdola omezená na kompaktech v U. Potom existuje právě jedna $u \in \mathcal{S}(U)$ tak, že $u = s$ na $U \setminus P$. Speciálně pro spojitou $h \in \mathcal{H}(U \setminus P)$. ([BD])*

Věta 52 (Důsledek Choquetova lemmatu)**.** *Buď $A \subset \mathbb{R}^d$ a $x \in \mathbb{R}^d$. Potom existuje právě jedna (pravděpodobnostní) míra ε^A_x tak, že*

$$\widehat{R}^A_s(x) = \int_{\mathbb{R}^d} s\, d\varepsilon^A_x$$

pro každou funkci $s \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}^d)$.

Lemma 53 (Poissonova modifikace)**.** *Buď $U \subset \mathbb{R}^d$ otevřená a $s \in \mathcal{S}(U)$. Pro regulární množinu $V \subset \overline{V} \subset U$ položme*

$$s_V(x) := \begin{cases} \int_{\partial V} s\, d\mu^V_x & \text{pro } x \in V, \\ s(x) & \text{pro } x \in U \setminus V. \end{cases}$$

Potom $s_V \in \mathcal{S}(U)$ a $s_V \in \mathcal{H}(V)$.

Věta 54. *Buď $U \subset \mathbb{R}^d$ omezená otevřená. Potom*

(a) *je-li U regulární a $x \in U$, je $\varepsilon^{CU}_x = \mu^U_x$,*
(b) $\operatorname{spt} \varepsilon^{CU}_x \subset \partial U$.

Tvrzení (b) je [BD].

Věta 55 (Charakteristiky regulárních bodů)**.** *Pro otevřenou omezenou množinu $U \subset \mathbb{R}^d$ a $z \in \partial U$je ekvivalentní:*

(i) *z je regulárním bodem U,*
(ii) *$\varepsilon^{CU}_z = \varepsilon_z$,*
(iii) *$\widehat{R}^{CU}_s = s(z)$ pro každou $s \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,*
(iv) *CU není tenký v z,*
(v) *$w - \lim_{x \to z} \varepsilon^{CU}_x = \varepsilon_z$.*

Věta 56. *Množina iregulárních bodů otevřené omezené množiny $U \subset \mathbb{R}^d$ je polární, tedy zanedbatelná. [BD]*

Věta 57. *Nechť U je otevřená množina v $\mathbb{R}^d$ a $s \in \mathcal{S}(U)$. Pokud s má na U harmonickou minorantu, potom má na U i jednoznačně určenou největší harmonickou minorantu.*

Speciálně, každá funkce $s \in \mathcal{S}^+(U)$ má největší harmonickou majorantu.

Věta 58 (Rieszův rozklad). *Buď $U \subset \mathbb{R}^d$ otevřená a $s \in \mathcal{S}^+(U)$. Potom existují jednoznačně určené $h \in \mathcal{H}(U)$ a $p \in \mathcal{P}(U)$ tak, že $s = p + h$.*

Speciálně, je-li $s \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}^d)$, existuje Radonova míra $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$ a $h \in \mathcal{H}(U)$ tak, že $s = \mathcal{N}^\mu + h$.

Poznámka. Toto je pouze výčet skutečně hlavních vět. V textu chybí celá řada dalších poznatků uváděných většinou bez důkazů. Namátkou uvádím - spojitost mezi klasickou teorií potenciálu a *moderními* metodami teorie parciálních diferenciálních rovnic (přednáška J. Malého), Newtonova kapacita a Choquetova věta o kapacitabilitě, Choquetův integrál, Keldyšovo lemma, body tenkosti jako body hustoty, topologie generované systémem funkcí, Choquetovo lemma sloužící k definici vymetené míry, existence "divokých"harmonických funkcí, Brelotova věta o existenci jemné limity superharmonické funkce v iregulárním bodě, Evans-Vasilescův princip spojitosti, Maria-Frostmanův princip maxima, G-potenciály a jejich polospojitost, G-polární množiny,...

V průběhu semestru jsem vám také zadal pár Cvičení. Pokud jste některá z nich vyřešili, rád si to u zkoušky poslechnu.

Praha, 22. 5. 2012 Jaroslav Lukeš