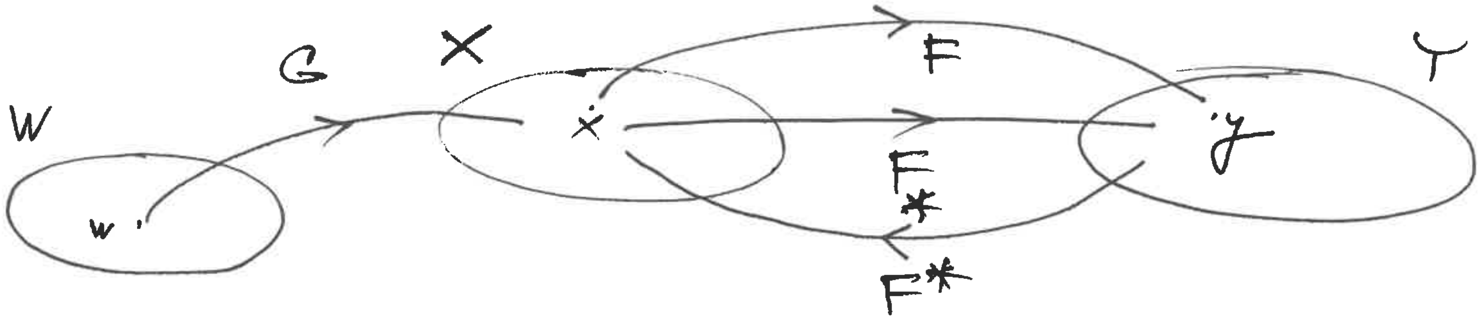
Přenášení diferenciálních forem



Nechť $F : X \longrightarrow Y$ je *hladké* zobrazení mezi varietami, $x \in X$ a $y = F(x)$. Potom máme *tečné zobrazení* $F_*(x) : T_xX \longrightarrow T_yY$ a k němu duální *kotečné zobrazení* $F^*(x) : T_y^*Y \longrightarrow T_x^*X$. Tato zobrazení indukují zobrazení mezi tenzorovými algebrami $F_*(x) : T(T_xX) \longrightarrow T(T_yY)$ a $F^*(x) : T(T_y^*Y) \longrightarrow T(T_x^*X)$. Speciálně, pro $\omega \in \mathcal{E}^k(Y)$ definujeme

$$(F^*\omega)(x)\,(v_1,\dots,v_k) = \omega(y)\big(F_*(x)v_1,\dots,F_*(x)v_k\big),$$

$$v_1,\dots,v_k \in T_xX$$

Pozn. (i) V Geom. 2 $F^* : \mathcal{E}^*(Y) \longrightarrow \mathcal{E}^*(X)$, jsou-li $X \subset \mathbb{R}^n$ a $Y \subset \mathbb{R}^m$ otevřené.

(ii) $F_*(x)$ … push forward ; $F^*(x)$ … pullback

VĚTA: Nechť $F: X \to Y$ je hladké zobrazení mezi varietami. Potom

(i) F^* je lineární zobrazení $\mathcal{E}^*(Y)$ do $\mathcal{E}^*(X)$

(ii) $\forall \omega, \tau \in \mathcal{E}^*(Y)$: $F^*(\omega \wedge \tau) = F^*(\omega) \wedge F^*(\tau)$

(iii) Je-li $G: W \to X$ hladké a $\omega \in \mathcal{E}^*(Y)$, potom $(F \circ G)^*(\omega) = G^*(F^*(\omega))$

(iv) Nechť $f \in \mathcal{E}^0(Y) = \mathcal{C}^\infty(Y)$. Potom $df \in \mathcal{E}^1(Y)$ a $F^*(df) = d(\underbrace{f \circ F}_{= F^*(f)}) \in \mathcal{E}^1(X)$.

DŮKAZ: (a) F^* je lineární z definice

(b) Díky (a) stačí ukázat (ii) pro $\omega \in \mathcal{E}^k(Y)$, $\tau \in \mathcal{E}^\ell(Y)$. Nechť $x \in X$. Potom v x máme pro každé $v_1, \dots, v_{k+\ell} \in T_x X$ a $w_i = F_*(x) v_i$

$$[F^*(\omega \wedge \tau)](v_1, \dots, v_{k+\ell}) = (\omega \wedge \tau)(w_1, \dots, w_k) =$$

⌜vynecháváme x⌟

$$= \frac{1}{k!\,\ell!} \sum_{\pi \in S_{k+\ell}} \operatorname{sgn} \pi \cdot \omega(w_{\pi(1)}, \dots, w_{\pi(k)}) \cdot \tau(w_{\pi(k+1)}, \dots, w_{\pi(k+\ell)})$$

$$= \quad -\|- \quad (F^*\omega)(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)})\, F^*(\tau)(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+\ell)})$$

$$= \left[F^*\omega \wedge F^*\tau\right](v_1,\dots,v_{k+l})$$

(c) Pro $\omega \in \mathcal{E}^k(Y)$, $w \in W$ a $v_1,\dots,v_k \in T_wW$ máme

$$\left[(F\circ G)^*\omega\right](v_1,\dots,v_k) = \omega\left((F\circ G)_*(w)\, v_1,\dots,(F\circ G)_*(w)\, v_k\right)$$

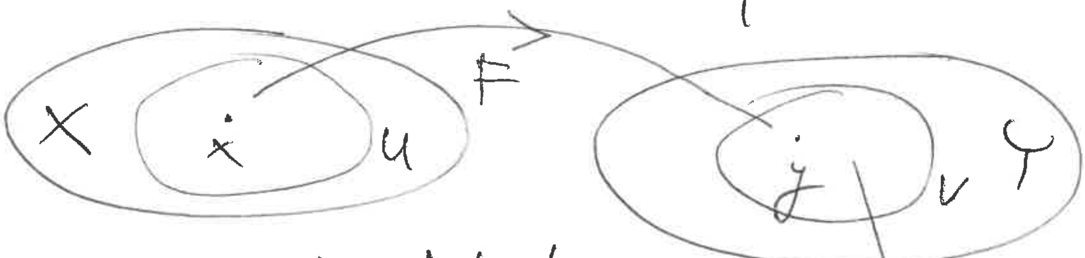
$$= \omega\left(F_*(G(w))\,(G_*(w)v_1),\dots,F_*(G(w))\,(G_*(w)v_k)\right)$$

$$= (F^*\omega)\left(G_*(w)v_1,\dots,G_*(w)v_k\right) = \left[G^*(F^*\omega)\right](v_1,\dots,v_k)$$

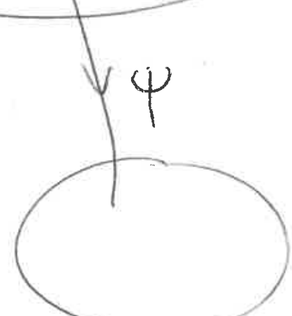
(d) Ukážeme (iv). Nechť $U\subset Y$ je otevřená a $V\in\mathcal{X}(U)$. Potom na U je $df(V) = V(f)\in\mathcal{E}^\infty(U)$. Dále pro $t\in T_xX$ je $\left[F^*(df)\right](t) = df(F_*(x)t) =$

$$= (F_*(x)t)(f) = t(f\circ F) = \left[d(f\circ F)\right](t).$$

(e) Nechť $\omega\in\mathcal{E}^*(Y)$. Ukážeme, že $F^*(\omega)\in\mathcal{E}^*(X)$.



Nechť $v=\psi(y)$, $y\in V$ jsou lokální souřadnice na Y. Potom na V je



$$\omega = \sum_I \omega_I\, dv_I, \text{ kde } \omega_I\in\mathcal{E}^\infty(V).$$

Na $U := F^{-1}(V)$ máme

$$F^*\omega = \sum_I (\underbrace{\omega_I \circ F}_{\substack{\cap \\ \mathcal{E}^\infty(U)}})\, F^*(dv_I),$$

kde $F^*(dv_I) = F^*(dv_{i_1}) \wedge \ldots \wedge F^*(dv_{i_k})$, je-li $\underbrace{I = \{i_1, \ldots, i_k\}}_{\text{vzestupně}}$. Je-li $F_i := \varphi_i \circ F$, potom

$$F^*(dv_i) = dF_i \in \mathcal{E}^1(U). \quad \blacksquare$$

Připomenutí: Vnější diferenciál v $\mathbb{R}^n$

Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $\omega \in \mathcal{E}^k(U)$.
Potom na U máme
$$\omega = \sum_{|I|=k} \omega_I \, dx_I \quad \text{s} \quad \omega_I \in \mathcal{E}^\infty(U) \quad \text{a}$$

$$d\omega := \sum_{|I|=k} d\omega_I \wedge dx_I \,,$$

kde $d\omega_I(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_I(x)}{\partial x_i} dx_i$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$,
viz Geom 2.

Vnější diferenciál (= de Rhamův dif.)

DEF. Nechť X je (hlad.) varieta dimenze n. Potom definujeme zobrazení $d: \mathcal{E}^*(X) \longrightarrow \mathcal{E}^*(X)$ následovně:

(i) Pro $f \in \mathcal{E}^0(X) = \mathcal{E}^\infty(X)$ jsme df definovali dříve.

(ii) Nechť $\omega \in \mathcal{E}^*(X)$. Jsou-li $u = \varphi(x)$, $x \in \mathcal{U}$ lokální souřadnice na X (tzn. (U, φ) je mapa na X), potom na $\mathcal{U}$ definujeme

$$d\omega = \sum_I d\omega_I \wedge du_I,$$

pokud $\omega = \sum_I \omega_I \underbrace{du_I}_{\text{na } \mathcal{U}}$, kde $I \subset \{1, \dots, n\}$ a $\omega_I \in \mathcal{E}^\infty(\mathcal{U})$.

VĚTA: (i) Zobrazení d je dobře definováno, je lineární a $d\omega \in \mathcal{E}^{k+1}(X)$ $\forall \omega \in \mathcal{E}^k(X)$.

(ii) Je-li $\omega \in \mathcal{E}^k(X)$ a $\tau \in \mathcal{E}^\ell(X)$, potom

$$d(\omega \wedge \tau) = (d\omega) \wedge \tau + (-1)^k \omega \wedge d\tau$$

(iii) $d \circ d = 0$

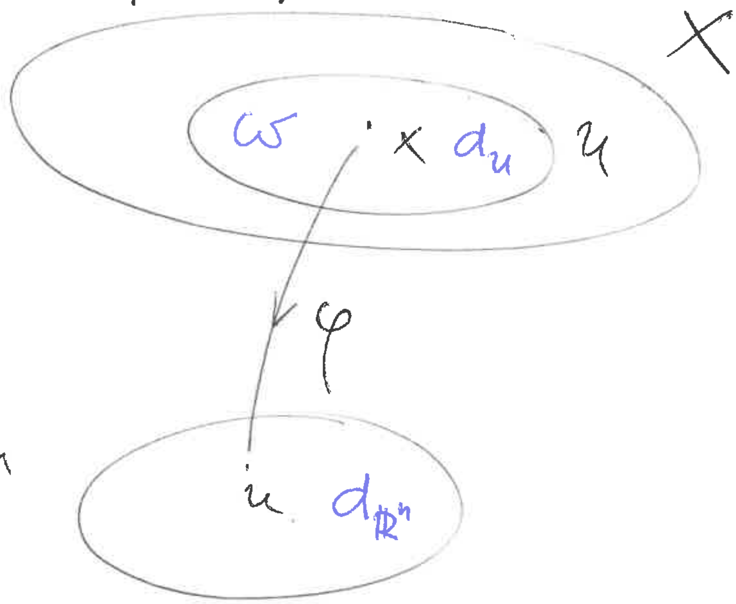
(iv) Je-li $F: X \longrightarrow Y$ hladké zobrazení mezi vanobtamu, potom $F^*\circ d_Y = d_X \circ F^*$.

⌜na Y⌟ ⌜na X⌟

Důkaz: (a) Nechť $u=\varphi(x)$, $x\in\mathcal{U}$ je lokál. souřad. systém na X. Potom je

$$d = d_{\mathcal{U}} \overset{\text{ozn.}}{:=} \varphi^*\circ d_{\mathbb{R}^n}\circ(\varphi_{-1})^* \text{ na } \mathcal{U} \quad (\text{tzn. na } \mathcal{E}^*(\mathcal{U})),$$

kde d vpravo je vnější diferenciál na $\varphi(\mathcal{U})\subset\mathbb{R}^n$.
$\parallel$
$d_{\mathbb{R}^n}$

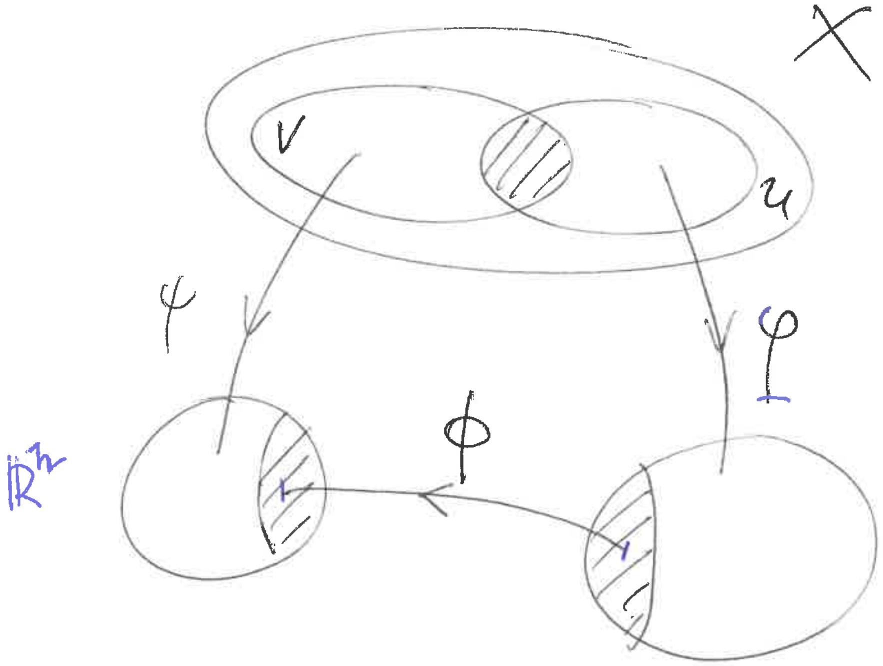


Skutečně, nechť $\omega(x) = \sum_I \omega_I(x)\, du_I(x)$, $x\in\mathcal{U}$,
kde $du_i = d\varphi_i$.

Potom $\left((\varphi_{-1})^*\omega\right)(u) = \sum_I \omega_I(\varphi_{-1}(u))\, du_I(u)$, kde
$du_i = d\pi_i$ s $\pi_i(u) = u_i$,
$u=(u_1,\dots,u_n)\in\mathbb{R}^n$.

Dále $d((\varphi_{-1})^*\omega) = \sum_I d(\omega_I(\varphi_{-1}(u)))\wedge du_I$ na $\varphi(\mathcal{U})$,
tudíž $\underset{\sim\sim\sim}{\varphi^*(d(\varphi_{-1})^*\omega)} = \sum_I d\omega_I\wedge du_I = \underset{\sim}{d\omega}$ na $\mathcal{U}$.

(b) d je dobře definováno. Skutečně, nechť $v = \psi(x)$, $x \in V$ je jiný lokál. souřad. systém na X. Nechť $\phi := \psi \circ \varphi_{-1}$ je příslušná přechodová funkce.



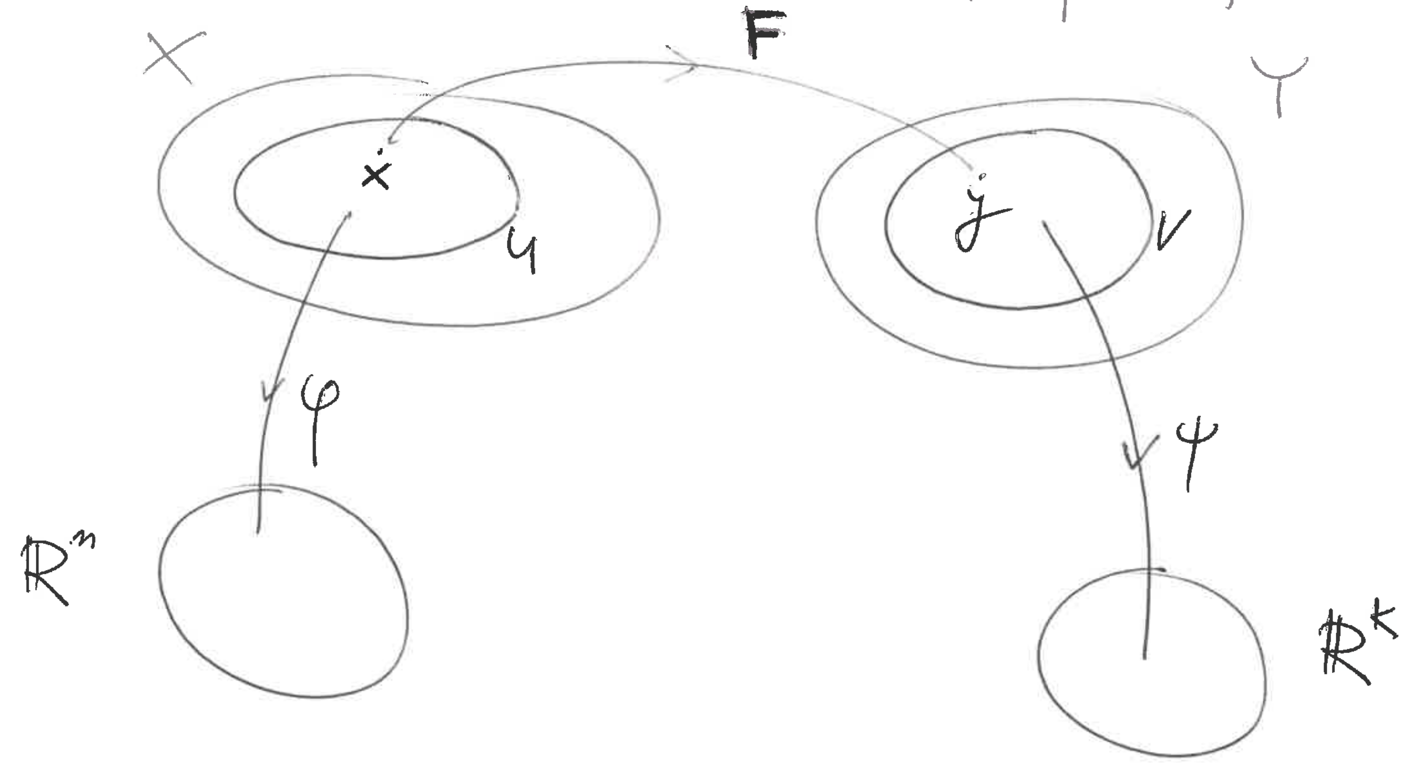
Potom na $U \cap V$ je $\psi = \phi \circ \varphi$ a máme

$$\underbrace{\psi^* \circ d \circ (\psi_{-1})^*}_{= d_V} = \varphi^* \circ \underbrace{\phi^* \circ d \circ \phi_{-1}^*}_{= d} \circ \varphi_{-1}^* = \underbrace{\varphi^* \circ d \circ \varphi_{-1}^*}_{= d_U}$$

Vlastnosti (i)–(iv) má d v $\mathbb{R}^n$, díky (a) rovněž d (lokálně) na X nepři

(c) Ukážeme (iv).

Nech (U,φ) je mapa na X a (V,ψ) je mapa na Y.



Potom na $U \cap F^{-1}(V)$ máme

$$F^* \circ \underset{\text{v } Y}{d} = \varphi^* \circ \varphi_{-1}^* \circ F^* \circ \psi^* \circ \underset{\text{v } \mathbb{R}^k}{d} \circ (\psi_{-1})^* =$$

$$= \varphi^* \circ \underset{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k}{(\psi \circ F \circ \varphi_{-1})^*} \circ \underset{\text{v } \mathbb{R}^k}{d} \circ (\psi_{-1})^* =$$

$$= (\varphi^* \circ \underset{\text{v } \mathbb{R}^n}{d} \circ \varphi_{-1}^*) \circ F^* \circ \psi^* \circ (\psi_{-1})^* = \underset{\text{v } X}{d} \circ F^* \quad \blacksquare$$