Prn <u>Lieova grupa</u> je grupa G, která je zároveň hladká varieta a jejíž grupové operace (tj: násobení, inverze) jsou hladké.

Např. maticové grupy

- $GL_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}$
- $SL_n(\mathbb{R}) := \{ \quad -\!\!\shortparallel\!\!- \quad\quad -\!\!\shortparallel\!\!- \quad = 1\}$
- $O_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^t A = E\}$
- $SO_n(\mathbb{R}) := O_n(\mathbb{R}) \cap SL_n(\mathbb{R})$

<u>Pozn</u>: Na $T_E G$ lze zavést přirozeně závorku $[\cdot,\cdot]$ (pomocí Lieovy závorky na $\mathcal{X}(G)$); potom $g = (T_E G, [\cdot,\cdot])$ je tzv. <u>Lieova algebra</u> G.

DEF. Diferenciální forma ω na hlad. varietě X stupně k (k-forma) je zobrazení, které každému $x \in X$ přiřadí $\omega(x) \in \Lambda^k(T_x^* X)$.
Navíc k-forma ω na X je hladká, pokud pro každou otevřenou $U \subset X$ a každá $V_1, \dots, V_k \in \mathfrak{X}(U)$ je $\omega(V_1, \dots, V_k) \in \mathcal{E}^\infty(U)$.
Zde $\omega(V_1, \dots, V_k)(x) := \omega(x)(V_1(x), \dots, V_k(x))$.
Označme $\mathcal{E}^k(X)$ vektorový prostor všech hladkých k-forem ω na X a $\mathcal{E}^*(X) = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{E}^k(X)$, kde $n = \dim X$.

Pozn: (i) $\mathcal{E}^*(X)$ s vnějším násobením $\wedge$ je algebra. Zde $(\omega \wedge \tau)(x) := \omega(x) \wedge \tau(x)$, $x \in X$ a $\omega, \tau \in \mathcal{E}^*(X)$.

(ii) k-forma ω na X je hladká, právě když v libovolných lokálních souřadnicích $\underset{\mathbb{R}^n}{\overset{\cap}{u}} = \varphi(x)$, $x \in U$ na X platí

$$\omega = \sum_I \omega_I \, du_I \text{ na } U,$$

kde $\omega_I \in \mathcal{E}^\infty(U)$, I jsou k-prvkové podmnožiny

$\{1,\dots,m\}$ a $du_I = du_{i_1}\wedge\dots\wedge du_{i_k}$, jsou-li $i_1,\dots,i_k$ prvky I uspořádány vzestupně. Navíc $\omega_I = \omega\left(\frac{\partial}{\partial u_{i_1}},\dots,\frac{\partial}{\partial u_{i_k}}\right)$ na U.

DEF. Tenzorové pole Ψ na hlad. varietě X typu $\binom{s}{r}$ je zobrazení, které každému $x\in X$ přiřadí tenzor $\Psi(x)\in (T_xX)^s\otimes(T_xX^*)^r$. Tenzorové pole Ψ je hladké, pokud pro každou otevřenou $U\subset X$ a každé $f_1,\dots,f_s\in\mathcal{E}^\infty(U)$, $V_1,\dots,V_r\in\mathfrak{X}(U)$ je $\Psi(f_1,\dots,f_s,V_1,\dots,V_r)\in\mathcal{E}^\infty(U)$. Označme $\mathcal{T}^s_r(X)$ vektorový prostor všech hladkých tenzor. polí Ψ na X typu $\binom{s}{r}$.

Pozn.: (i) $\mathcal{T}^1_0(X) = \mathfrak{X}(X)$, $\mathcal{T}^0_1(X) = \mathcal{E}^1(X)$

vekt. pole

1-formy

$\mathcal{T}^0_k(X) \supset \mathcal{E}^k(X)$

k-formy antisymetr.

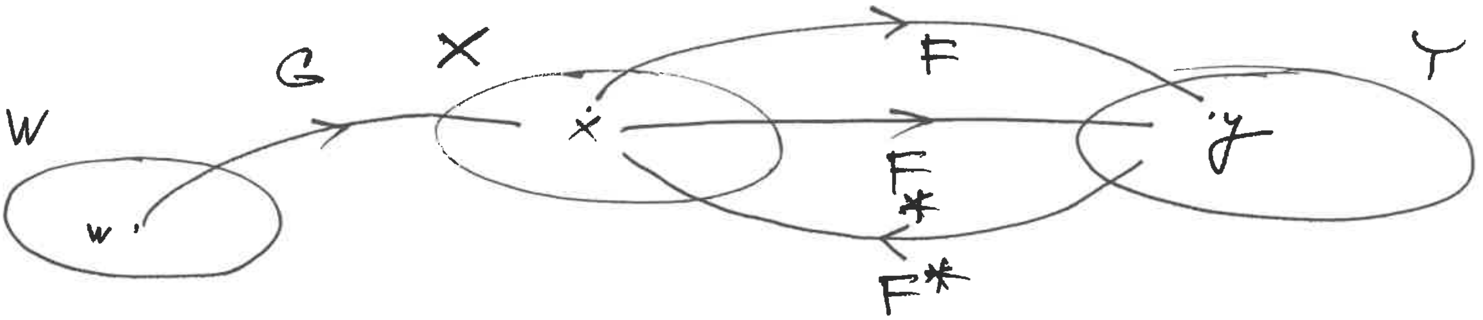
(ii) Tenzor. pole Ψ na X typu $\binom{s}{r}$ je hladké, právě když v libovolných lokál. souřadnicích $u=\varphi(x)$, $x\in\mathcal{U}$ na X máme

$$\Psi=\sum \psi^{i_1,\dots,i_s}_{j_1,\dots,j_r}\frac{\partial}{\partial u_{i_1}}\otimes\dots\otimes\frac{\partial}{\partial u_{i_s}}\otimes du_{j_1}\otimes\dots\otimes du_{j_r},$$

kde $\underline{\psi^{i_1,\dots,i_s}_{j_1,\dots,j_r}\in\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})}$ a sčítáme přes všechny indexy od 1 do n. Navíc máme na $\mathcal{U}$

$$\psi^{i_1,\dots,i_s}_{j_1,\dots,j_r}=\Psi\left(\varphi_{i_1},\dots,\varphi_{i_s},\frac{\partial}{\partial u_{j_1}},\dots,\frac{\partial}{\partial u_{j_r}}\right).$$

Přenášení diferenciálních forem



Nechť $F: X \to Y$ je *hladké* zobrazení mezi varietami; $x \in X$ a $y = F(x)$. Potom máme *tečné zobrazení* $F_*(x): T_xX \to T_yY$ a k němu duální *kotečné* zobrazení $F^*(x): T_y^*Y \to T_x^*X$.

Tato zobrazení indukují zobrazení mezi tenzorovými algebrami $F_*(x): T(T_xX) \to T(T_yY)$ a $F^*(x): T(T_y^*Y) \to T(T_x^*X)$. Speciálně, pro $\omega \in \mathcal{E}^k(Y)$ definujeme

$$(F^*\omega)(x)(v_1, \dots, v_k) = \omega(y)(F_*(x)v_1, \dots, F_*(x)v_k),$$

$$v_1, \dots, v_k \in T_xX$$

Pozn. (i) V Geom. 2 $F^*: \mathcal{E}^*(Y) \to \mathcal{E}^*(X)$, jsou-li $X \subset \mathbb{R}^n$ a $Y \subset \mathbb{R}^m$ otevřené.

(ii) $F_*(x)$ ... *push forward*; $F^*(x)$ ... *pullback*