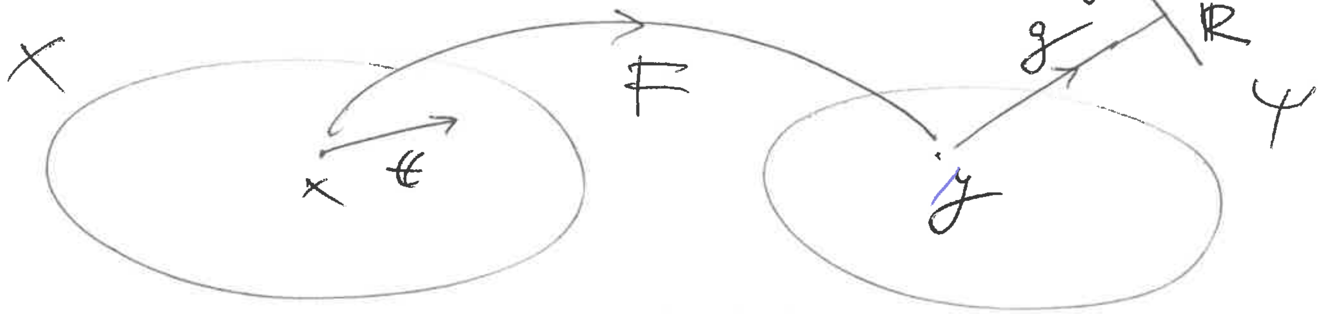
Tečné zobrazení (= "diferenciál")

DEF. Nechť $F: X \to Y$ je hladké zobrazení mezi varietami, $x \in X$ a $y = F(x)$.



Potom definujeme tečné zobrazení F v x jako

$$[F_*(x)(t)](g) := t(g \circ F), \quad t \in T_x X$$

a $g \in \mathcal{E}_y$

Pozn: (i) zřejmě je $F_*(x)$ lineární zobrazení $T_x X$ do $T_y Y$.

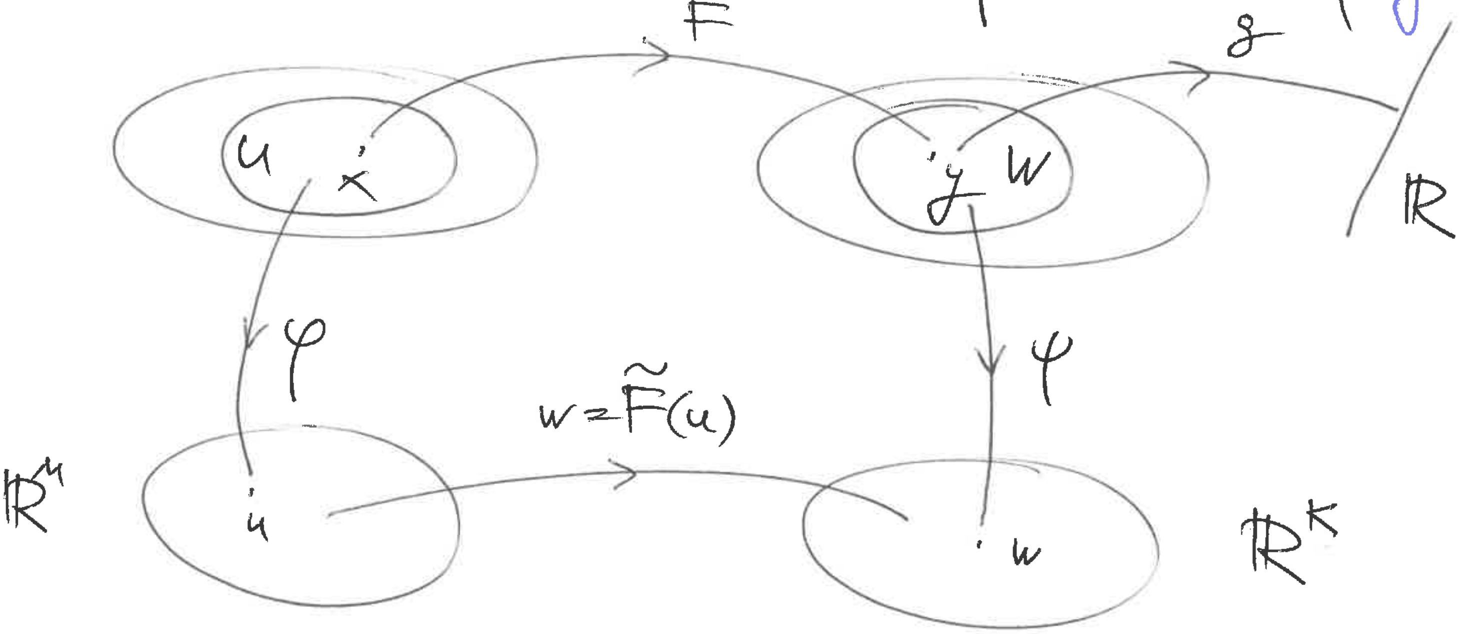
(ii) Je-li $Y = \mathbb{R}$ a $T_y \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$, potom

$$F_*(x)(t) \simeq dF(x)(t)$$

Cv.

(iii) Matice $F_*(x)$ v lokálních souřadnicích

Nechť (U, φ) je mapa na X, $x \in U$, (W, ψ) je mapa na Y a $y = F(x) \in W$. Potom $\tilde{F} := \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ je F vyjádřeno v těchto lokálních souřadnicích $u=\varphi(x)$ a $w=\psi(y)$.



Spočtěme matici lineárního zobrazení $F_*(x)$ vzhledem k bázím $\left\{\frac{\partial}{\partial u_i}\right\}$ v bodě $u=\varphi(x)$ a $\left\{\frac{\partial}{\partial w_j}\right\}$ v bodě $w=\psi(y)$.

Máme $\left[F_*(x)\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)\right](g) = \frac{\partial}{\partial u_i}\left(g\circ \underset{\psi_{-1}\circ\psi}{\uparrow} F\right)\Big|_x =$

$$= \frac{\partial}{\partial u_i}\left((g\circ\psi_{-1})\circ\tilde F\right)\Big|_u = \sum_{j=1}^{k} \underbrace{\frac{\partial(g\circ\psi_{-1})}{\partial w_j}}_{\frac{\partial g}{\partial w_j}\big|_y} \frac{\partial \tilde F_j}{\partial u_i}, \quad g\in\mathcal{E}_y.$$

Neboli $F_*(x)\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \tilde F_j}{\partial u_i}\frac{\partial}{\partial w_j}$, $i=1,\dots,n$

Matice $F_*(x)$ vůči daným bázím je Jacobiho matice $\left\{\frac{\partial \tilde F_j}{\partial u_i}(u)\right\}_{\substack{j=1,\dots,k\\ i=1,\dots,n}}$.

VĚTA (i) Jsou-li $F: X \to Y$ a $G: Y \to Z$ hladká zobrazení mezi varietami, potom pro každé $x \in X$ je

$$(G \circ F)_*(x) = G_*(F(x)) \circ F_*(x)$$

(ii) Je-li $F: X \xrightarrow{na} Y$ difeomorfismus mezi varietami, potom

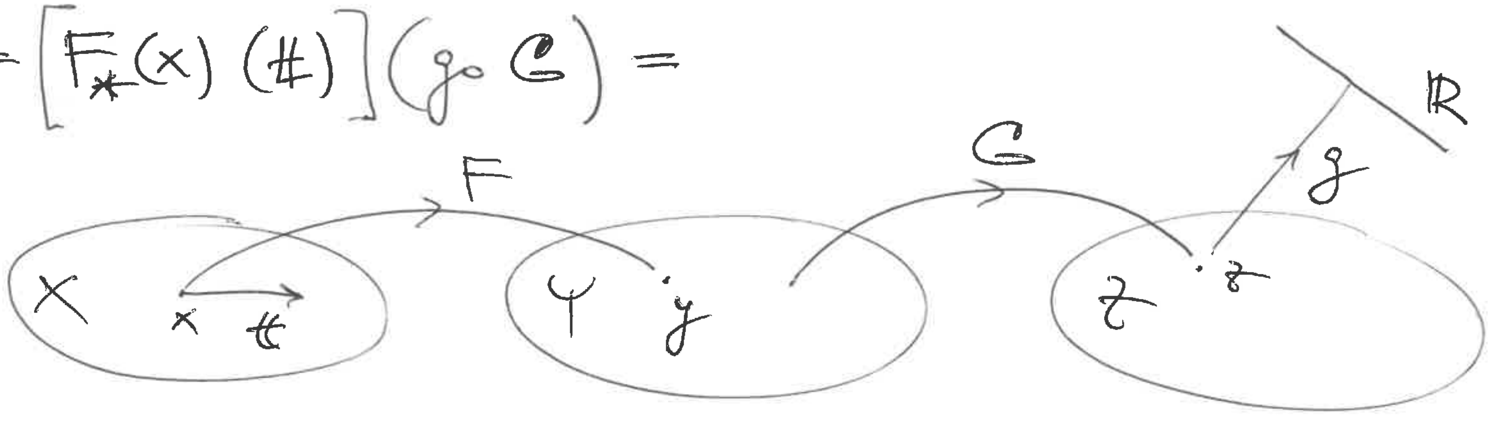
$$F_*(x): T_x X \xrightarrow{na} T_{F(x)} Y$$

je izomorfismus pro každé $x \in X$.

Důkaz: (i) Pro každé $x \in X$, $\# \in T_x X$ a $g \in \mathcal{E}_z$ je

$$\left[(G \circ F)_*(x)(\#)\right](g) = \#(g \circ G \circ F) =$$

$$= \left[F_*(x)(\#)\right](g \circ G) =$$



$$= G_*(y)\,(F_*(x)\#)\,(g), \text{ kde } y = F(x) \text{ a } z = G(y).$$

(ii) Je-li $X = Y$ a $F = id_X$, potom zřejmě $F_*(x) = id_{T_x X}$.

Obecnie mamy $F_{-1} \circ F = id_X$ a podle (ii) pro každé $x \in X$ je $(F_{-1})_*(F(x)) \circ F_*(x) = id_{T_xX}$. Analogicky $F_*(x) \circ (F_{-1})_*(F(x)) = id_{T_{F(x)}Y}$, protože $F \circ F_{-1} = id_Y$. ▨

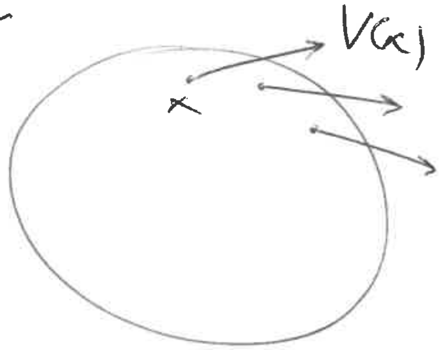
DEF. Nechť $F: X \to Y$ je hladké zobrazení mezi rozvaděním, $x \in X$. Potom definujeme **kotečné zobrazení** $F^*(x): T^*_{F(x)}Y \to T^*_xX$ jako duální zobrazení k $F_*(x)$, tzn.

$$[F^*(x)\,\omega](\#) := \omega(F_*(x)\,\#), \quad \# \in T_xX \text{ a } \omega \in T^*_{F(x)}Y.$$

Pozn: Nechť $L: V \to W$ je lineární zobrazení. Potom duální zobrazení $L^*: W^* \to V^*$ je definováno $[L^*(w^*)](v) := w^*(Lv)$, $v \in V$ a $w^* \in W^*$.

Vektorové pole

DEF. <u>Vektorové pole</u> V na hladké varietě X je zobrazení, které každému $x \in X$ přiřadí $V(x) \in T_x X$. Vektorové pole V na X je <u>hladké</u>, pokud pro každou otevřenou $U \subset X$ a každé $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ je $V(f) \in \mathcal{C}^\infty(U)$.

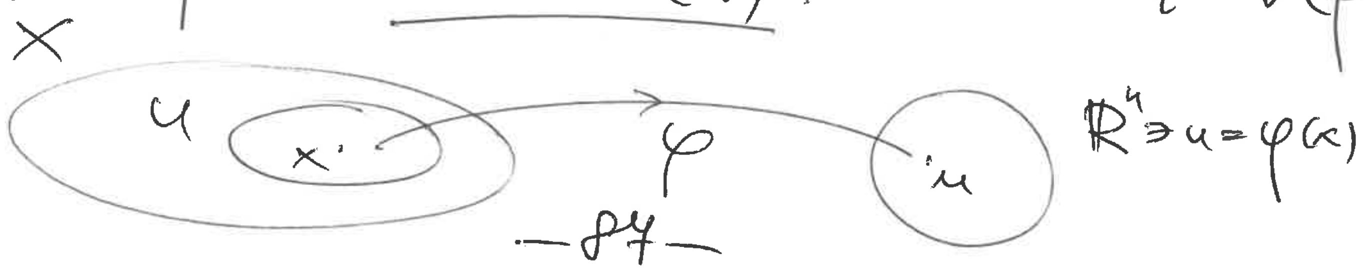


Zde $V(f)(x) := V(x)(f)$, $x \in U$.
Označíme $\mathfrak{X}(X)$ vektorový prostor všech <u>hladkých</u> vektorových polí na X.

<u>Pozn:</u> (i) Vektorové pole V na X je <u>hladké</u>, právě když v libovolných lokálních souřadnicích $\mathbb{R}^n \ni u = \varphi(x)$, $x \in U$ ot. v X (tzn. (U, φ) je mapa) máme, že

$$V = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial u_i} \text{ na } U$$

pro nějaké <u>$\alpha_i \in \mathcal{C}^\infty(U)$</u>. Navíc $\alpha_i = V(\varphi_i)$.



(ii) $V \in \mathfrak{X}(X)$, právě když $V : X \to TX$ je hladké a $\pi \circ V = \mathrm{id}_X$.

projekce TX na X

tečný bundle

Cv.

LIEOVA ZÁVORKA

Nechť $V, W \in \mathfrak{X}(X)$. Definujme jejich složení jako

$$(V \circ W)(f) := V(W(f))$$

pro každou hladkou funkci f na otevřené $U \subset X$.

Pozn: Potom $V \circ W \notin \mathfrak{X}(X)$. Skutečně, na libovolné mapě (U, φ) na X máme, že

$$V = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial u_i}, \quad W = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \frac{\partial}{\partial u_i} \text{ a } \forall f \in \mathcal{E}(U):$$

$$V(W(f)) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j \frac{\partial f}{\partial u_j} \right) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\underbrace{\alpha_i \beta_j \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}}_{\text{(není vekt. pole!)}} + \alpha_i \frac{\partial \beta_j}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial u_j} \right) \quad (\times)$$

DEF: Je-li $V, W \in \mathfrak{X}(X)$, potom jejich **Lieovu závorku** definujeme jako

$$[V, W] := V \circ W - W \circ V.$$

Pozn: Platí, že $[V, W] \in \mathfrak{X}(X)$. Skutočne, na mapě (U, φ) na X z (x) máme

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty(U): \quad [V, W](f) = V(W(f)) - W(V(f))$$

$$\overset{(x)}{=} \sum_{i,j=1}^{n} \left(\alpha_i \frac{\partial \beta_j}{\partial u_i} - \beta_i \frac{\partial \alpha_j}{\partial u_i} \right) \frac{\partial f}{\partial u_j}, \text{ neboli}$$

$$[V, W] = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial \beta_j}{\partial u_i} - \beta_i \frac{\partial \alpha_j}{\partial u_i} \right)}_{\in \mathcal{C}^\infty(U)} \frac{\partial}{\partial u_j} \text{ na } U.$$

∞-dim.

VĚTA: Na vektorovém prostoru $\mathfrak{X}(X)$ je Lieova závorka $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{X}(X) \times \mathfrak{X}(X) \longrightarrow \mathfrak{X}(X)$ bilineární a platí

1. $[V, W] = -[W, V]$ (antisymetrické)
2. $[V, [W, Z]] + [W, [Z, V]] + [Z, [V, W]] = 0$
   Jacobiho identita

Cv.

Pozn: $(\mathfrak{X}(X), [\cdot, \cdot])$ je příkladem tzv. Lieovy algebry

— 88 —

Lieova algebra je vektorový prostor L s bilineární operací (tzv. závorkou) $[\cdot,\cdot] : L \times L \to L$, která splňuje (1), (2).

Př. Nechť A je asociativní algebra. Pro každé $a, b \in A$ definujeme jejich komutátor $[a,b] := a \cdot b - b \cdot a$ (tj. míra, jak je nekomutativní součin a, b). Potom $(A, [\cdot,\cdot])$ je Lieova algebra.

Př. Nechť $gl(n,\mathbb{R})$ je algebra všech reálných matic $n \times n$ s maticovými operacemi. Potom $(gl(n,\mathbb{R}), [\cdot,\cdot])$ je Lieova algebra. Zde $[A,B] := A \cdot B - B \cdot A$, $A, B \in gl(n,\mathbb{R})$.

Př. Na $\mathbb{R}^3$ uvažme hladké vektorové pole
$$h_{ij} := x_j \partial_{x_i} - x_i \partial_{x_j}, \quad 1 \leq i \neq j \leq 3.$$
Zřejmě $h_{ji} = -h_{ij}$ a $[h_{12}, h_{23}] = h_{31}$, $[h_{23}, h_{31}] = h_{12}$, $[h_{31}, h_{12}] = h_{23}$. Nechť $so(3)$ je podprostor $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ generovaný h_{ij}, $i \neq j$. Potom $so(3)$ s Lieovou závorkou je 3-dim. (tzv. ortogonální) Lieova algebra.