Součinová topologie

TP 14

Nechť $(X_1, \mathcal{T}_1), \ldots, (X_k, \mathcal{T}_k)$ jsou topol. prostory.
Uvažme kartézský součin

$$X := X_1 \times \cdots \times X_k = \{(x_1, \ldots, x_k) \mid x_i \in X_i\}$$

a projekce pro $i = 1, \ldots, k$

$$\pi_i : X \longrightarrow X_i, \quad \pi_i(x) = x_i \text{ pro } x = (x_1, \ldots, x_k) \in X.$$

Na X uvažujme nejmenší topologii $\mathcal{T}$ takovou, že všechny π_i, $i = 1, \ldots, k$ jsou spojité. Potom $\mathcal{T}$ je tzv. <u>součinová topologie</u> a $(X, \mathcal{T})$ je <u>součinový prostor</u>.

$\boxed{\text{Fakt}}$ ① Báze $\mathcal{T}$ je systém

$$\mathcal{B} := \{U_1 \times \cdots \times U_k \mid U_i \in \mathcal{T}_i\}.$$

② Zobrazení $f : Z \longrightarrow X$ je spojité, právě když všechny složky $f_i := \pi_i \circ f : Z \longrightarrow X_i$ jsou spojité pro $i = 1, 2, \ldots, k$.

③ Jsou-li $X_1, \ldots, X_k$ kompaktní, je i X kompaktní.

Důkaz: (1.) Topologie $\mathcal{T}$ je generována TP 15

$$\varphi := \bigcup_{i=1}^{k} \{\pi_i^{-1}(U_i) \mid U_i \in \mathcal{T}_i\}.$$

Protože $\pi_i^{-1}(U_i) = X_1 \times \dots \times \underbrace{U_i}_{i\text{-tá}} \times \dots \times X_k$ a

$\pi_1^{-1}(U_1) \cap \dots \cap \pi_k^{-1}(U_k) = U_1 \times \dots \times U_k$, je $\mathcal{B}$ báze $\mathcal{T}$.

(2.) $\boxed{\Rightarrow}$ Složení spojitých zobrazení je spojité;

$\boxed{\Leftarrow}$ Nechť $U_i \in \mathcal{T}_i$, $i = 1, \dots, k$. Stačí ověřit, že $f_{-1}(U_1 \times \dots \times U_k)$ je otevřená v Z. Máme ale

$$f_{-1}(U_1 \times \dots \times U_k) = f_{-1}\left(\pi_1^{-1}(U_1) \cap \dots \cap \pi_k^{-1}(U_k)\right) =$$

$$= f^{-1}(\pi_1^{-1}(U_1)) \cap \dots \cap f^{-1}(\pi_k^{-1}(U_k)) =$$

$$= \underbrace{(\pi_1 \circ f)_{-1}(U_1)}_{\text{ot. v } Z} \cap \dots \cap \underbrace{(\pi_k \circ f)_{-1}(U_k)}_{\text{ot. v } Z}$$ je

otevřená v Z.

(3.) Nebudeme dokazovat. Platí dokonce, že je kompaktní i kartézský součin <u>libovolného</u> počtu kompaktních prostorů, tzv.

<u>TICHONOVOVA VĚTA</u>. ∎

Př. 2-torus $T^2 \simeq S^1 \times S^1$

n-torus $T^n := \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n \text{ krát}}$

VARIETY

- zakřivený prostor, angl. manifolds
- Gauss: 2-rozměr. plochy v $\mathbb{R}^3$ (jako v Geom. 2)
- Riemann (1854, habilitač. přednáška):
  zakřivený prostor, který lokálně vypadá jako (rovný) prostor $\mathbb{R}^n$;
  podobně jako každá diferenc. funkce lokálně vypadá jako funkce lineární

- Newton:
  - Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (1687)
  - absolutní čas a prostor
    $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}^3$
- Einstein:
  - STR (1905): prostoročas $\mathbb{R}^{1,3}$
    "čas a prostor jsou relativní"
  - OTR (1915): vesmír je 4-rozměrný zakřivený prostor, který lokálně vypadá jako $\mathbb{R}^{1,3}$ prostoročas

gravitace

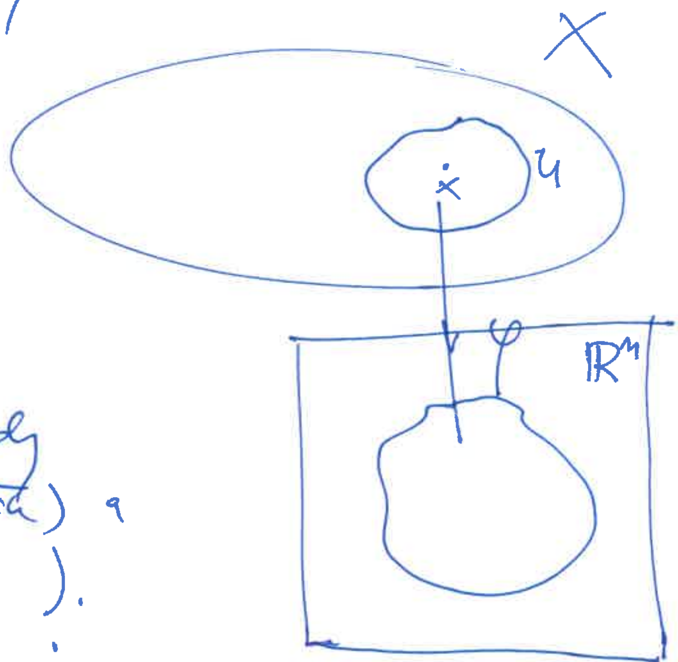
VAR2

DEF. Topolog. prostor $(X, \mathcal{T})$ je topologická varieta dimenze n, pokud

(1.) X je lokálně homeomorfní s $\mathbb{R}^n$, tzn. každé $x \in X$ má otevřené okolí $U \subset X$ a homeomorfismus φ množiny U na otevřenou množinu $\varphi(U)$ v $\mathbb{R}^n$;

(2.) X je Hausdorffův;

(3.) X má spočetnou bázi topologie $\mathcal{T}$.



Pozn.: (i) technické předpoklady
(2.) (dost otevřených množin) a
(3.) (ne příliš —"—).

(ii) Dimenze topologické variety je jednoznačně určena. Jak ukážeme, to plyne z Brouwerovy věty o invarianci:

Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ a $V \subset \mathbb{R}^m$ jsou otevřené. Jsou-li U a V homeomorfní, potom $n = m$.

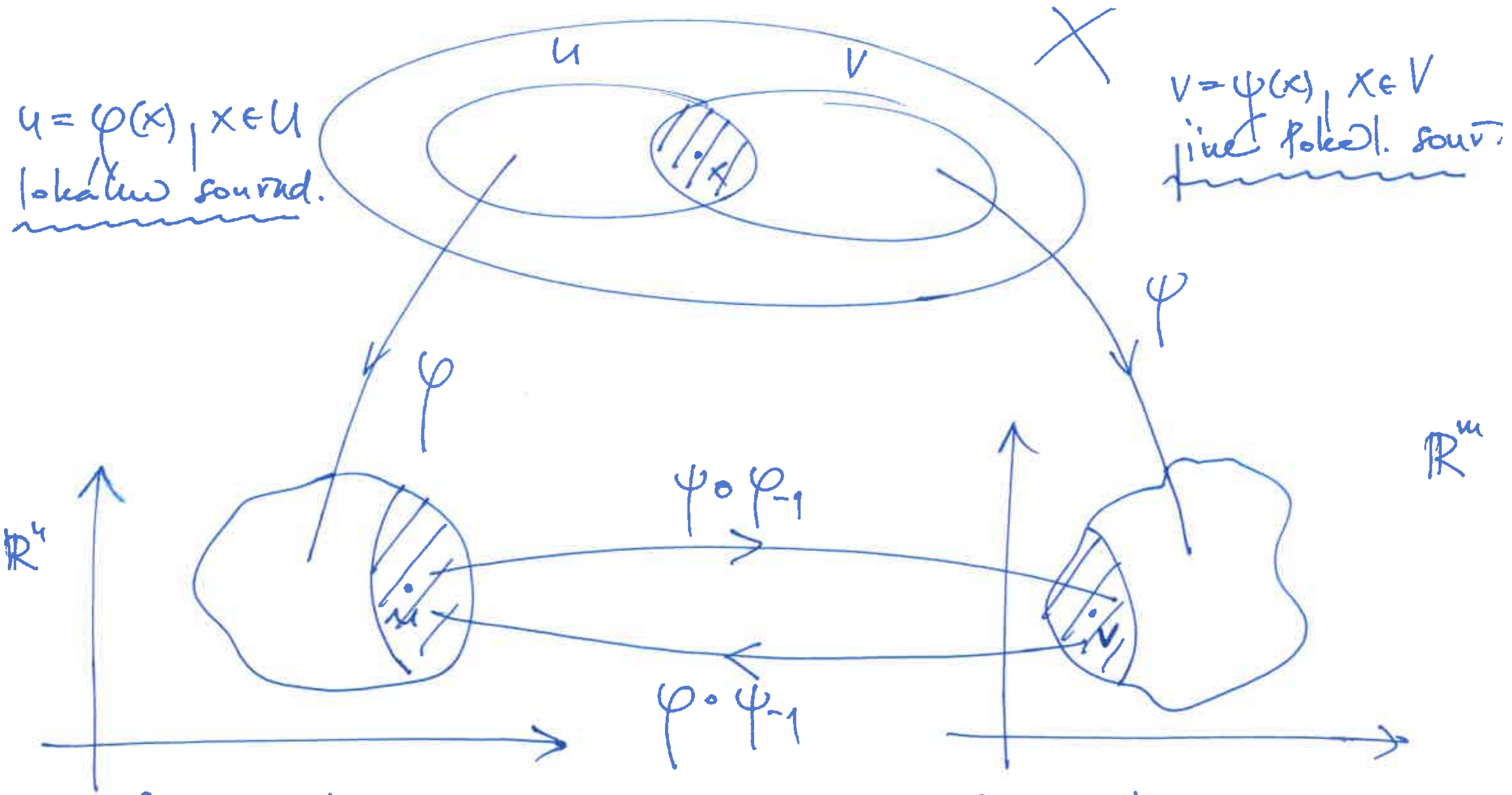
[hluboká věta, důkaz nad rámec přednášky]

Nechť $(X, \mathcal{T})$ je topologický prostor.

(1) Potom mapou (lokálním souřadnicovým systémem) dimenze n na $(X, \mathcal{T})$ nazveme (U, φ), kde $U \subset X$ je otevřená a φ je homeomorfismus U na otevřenou $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.

— x —

Nechť (V, ψ) je jiná mapa na X dim n.



změna lokál. souřadnic: $u = \varphi(\psi^{-1}(v))$
$v = \psi(\varphi^{-1}(u))$

Potom buď $U \cap V = \emptyset$, anebo $U \cap V \neq \emptyset$ a tzv. přechodové funkce

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \xrightarrow{\text{na}} \psi(U \cap V)$$
$$\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \xrightarrow{\text{na}} \varphi(U \cap V)$$

jsou homeomorfismy mezi otevřenými množinami. Z Brouwerovy věty máme, že $\boxed{n = m}$ a zřejmě platí $(\varphi \circ \psi_{-1})_{-1} = \psi \circ \varphi_{-1}$.

VAR 4

Pozn: Tedy dimenze topolog. variety je jednoznačně určena.

(ii) Systém map dimenze n $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ na X nazveme $\mathcal{C}^0$-atlas dimenze n na X, pokud $\mathcal{A}$ pokrývá X, tzn. $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.

Pozn: Zřejmě X je lokálně homeomorfní s $\mathbb{R}^n$, právě když na X existuje $\mathcal{C}^0$-atlas $\mathcal{A}$ dimenze n.

(iii) Řekneme, že mapy (U, φ) a (V, ψ) na X jsou $\mathcal{C}^k$-kompatibilní, kde $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, pokud buď $U \cap V = \emptyset$, anebo $U \cap V \neq \emptyset$ a $\psi \circ \varphi_{-1}$, $\varphi \circ \psi_{-1}$ jsou třídy $\mathcal{C}^k$ (tzn. jsou to $\mathcal{C}^k$-difeomorfismy).

Pozn: Nechť $G_1 \subset \mathbb{R}^n$ a $G_2 \subset \mathbb{R}^m$ jsou otevřené. Řekneme, že prosté $f: G_1 \xrightarrow{\text{na}} G_2$ je $\mathcal{C}^k$-difeomorf., pokud f i f_{-1} jsou třídy $\mathcal{C}^k$. Pro $k=0$ je f homeomorfismus. Je-li $k \geq 1$, potom rovnost $\boxed{n = m}$ plyne z věty o lokálním difeomorfismu z MA.

DEF: $\mathcal{C}^0$-atlas $\mathcal{A}$ na topologickém prostoru ~~varietě~~ X se nazývá $\mathcal{C}^k$-atlas, jsou-li každé dvě mapy z $\mathcal{A}$ $\mathcal{C}^k$-kompatibilní.

VAR J

DOČASNÁ DEFINICE $\mathcal{C}^k$-varieta dimenze n je topologická varieta X dim n s daným $\mathcal{C}^k$-atlasem $\mathcal{A}$ na X.

Úmluva Dále nás budou zajímat především hladké (tzn. $\mathcal{C}^\infty$-) variety.
Pokud neřekneme něco jiného, varieta znamená hladká varieta, atlas je hladký (tzn. $\mathcal{C}^\infty$-) atlas apod.

Pozn: (i) každý ($\mathcal{C}^k$-) atlas $\mathcal{A}$ na $(X,\mathcal{T})$ jednoznačně určuje topologii $\mathcal{T}$. Skutečně, je-li $\dim X = n$, potom

$$(*)\quad \mathcal{B} := \{\varphi^{-1}(V) \mid (U,\varphi)\in\mathcal{A},\ V\subset\mathbb{R}^n \text{ je otevřená}\}$$

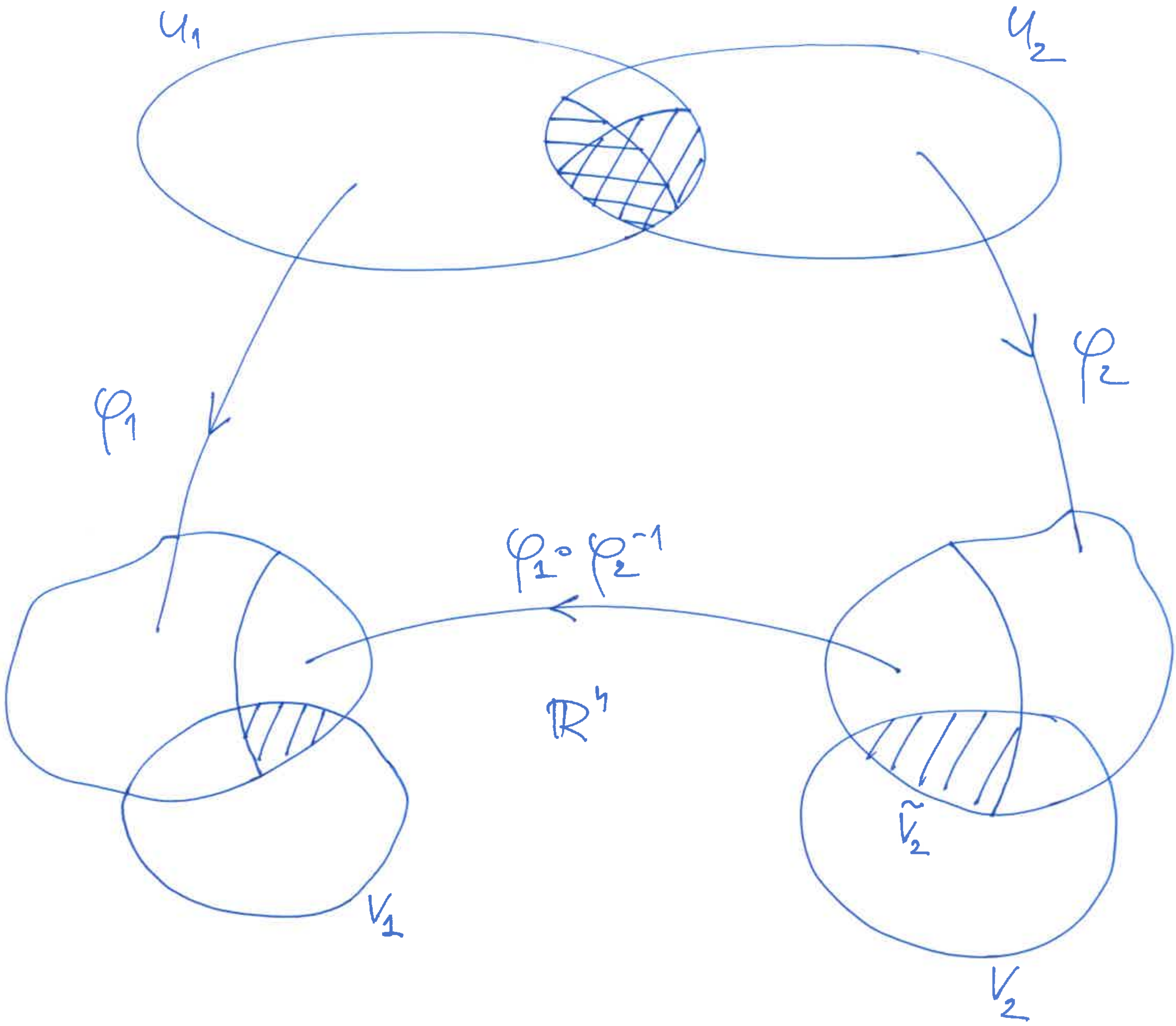
je báze $\mathcal{T}$,
zřejmě $\mathcal{B}\subset\mathcal{T}$, $\mathcal{B}$ pokrývá X a $\mathcal{B}$ je uzavřená na konečné průniky (Cv.).

Skutečně, nechť $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2) \in \mathcal{A}$ a $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^4$ jsou otevřené. Potom

$$\varphi_1^{-1}(V_1) \cap \varphi_2^{-1}(V_2) = \varphi_1^{-1}\big(V_1 \cap \overbrace{\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(\tilde{V}_2)}^{\text{otevř.}}\big),$$ kde

$\tilde{V}_2 := V_2 \cap \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ je otevř. a

$$\varphi_2^{-1}(V_2) \cap (U_1 \cap U_2) = \varphi_2^{-1}(\tilde{V}_2) = \varphi_1^{-1}\big(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(\tilde{V}_2)\big).$$



VAR 6

(ii) Pokryjú-li top. prostor $(X, \mathcal{T})$ nejvýše spočetný ($\mathcal{C}^\infty$-) atlas $\mathcal{A} := \{(U_k, \varphi_k) \mid k \in \mathbb{N}\}$, potom $\mathcal{T}$ má <u>spočetnou bázi</u>.

⌈ Skutečně, nechť $\mathcal{G}$ je spočetná báze Euklid. top. v $\mathbb{R}^n$. Položme

$$\widetilde{\mathcal{B}} := \{\varphi_k^{-1}(V) \mid \underbrace{(U_k, \varphi_k) \in \mathcal{A}}_{\text{spoč}} \text{ a } \underbrace{V \in \mathcal{G}}_{\text{spoč.}}\}.$$

Potom $\widetilde{\mathcal{B}}$ je spočetná, $\widetilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$ a $\forall G \in \mathcal{B}\ \exists G_\alpha \in \widetilde{\mathcal{B}}$, $\alpha \in A$, $G = \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$, kde $\mathcal{B}$ je jako v (✱). Protože $\mathcal{B}$ je báze, je i $\widetilde{\mathcal{B}}$ báze topologie $\mathcal{T}$.

Nechť $G \in \mathcal{B}$, tzn. $G = \varphi_k^{-1}(V)$ pro nějaké $(U_k, \varphi_k) \in \mathcal{A}$ a $V \subset \mathbb{R}^n$ otevřenou. Navíc $V = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$ pro nějaká $V_\alpha \in \mathcal{G}$. Tudíž $G = \bigcup_{\alpha \in A} \underbrace{\varphi_k^{-1}(V_\alpha)}_{\in \widetilde{\mathcal{B}}}$. ⌋