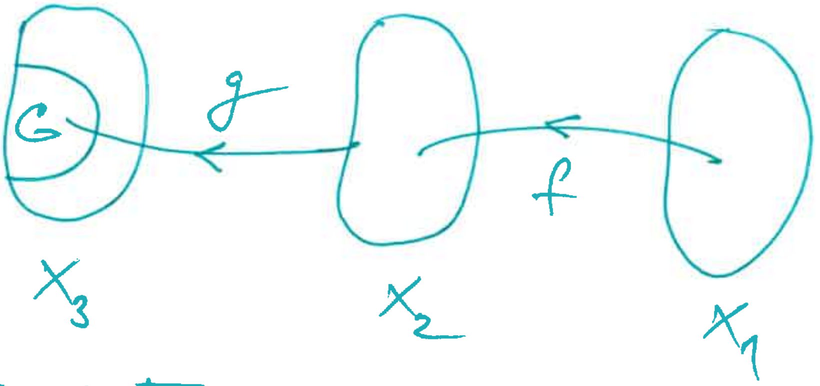
Fakt Nechť $(X_i, \mathcal{T}_i)$ jsou topologické prostory. Jsou-li obě $f: X_1 \to X_2$ a $g: X_2 \to X_3$ spojitá, potom $g \circ f: X_1 \to X_3$ je spojité. TP7

__Důkaz:__



Nechť $G \in \mathcal{T}_3$. Potom

$$(g \circ f)_{-1}(G) = f_{-1}(\underbrace{g_{-1}(G)}_{\in \mathcal{T}_2}) \in \mathcal{T}_1 . \qquad \blacksquare$$

Fakt Nechť $(X_i, \mathcal{T}_i)$ jsou topol. prostory pro $i = 1,2$ a $\mathcal{B}$ je báze $\mathcal{T}_2$. NTJE (= následující tvrzení jsou ekvivalentní):

1. $f: X_1 \to X_2$ je spojité;
2. $\forall G \in \mathcal{B}: f_{-1}(G) \in \mathcal{T}_1$;
3. pro každou __uzavřenou__ $F \subset X_2$ je $f_{-1}(F)$ __uzavřená__ v X_1.

__Důkaz:__ 1. $\Rightarrow$ 2. jasné; 2. $\Rightarrow$ 1.: Nechť $G \in \mathcal{T}_2$. Potom $G = \bigcup_\alpha G_\alpha$ pro nějaké $G_\alpha \in \mathcal{B}$. Tedy

$$f_{-1}(G) = \bigcup_\alpha \underbrace{f_{-1}(G_\alpha)}_{\in \mathcal{T}_1} \in \mathcal{T}_1 .$$

TP8

(1.) $\Rightarrow$ (3.): Nechť $F \subset X_2$ je uzavřená. Potom $X_1 \setminus f_{-1}(F) = \underset{\text{ot.}}{f_{-1}(X_2 \setminus F)} \in \mathcal{J}_1$.

Podobně (3.) $\Rightarrow$ (1.). $\blacksquare$

DEF. (1.) Řekneme, že $(X, \mathcal{J})$ je kompaktní, pokud každé jeho otevřené pokrytí má konečné podpokrytí, tzn. pro každé $g \subset \mathcal{J}$ takové, že

$$\bigcup g \overset{\text{def}}{:=} \bigcup\{G \mid G \in g\} = X,$$

existuje konečné $g' \subset g$ tak, že $\bigcup g' = X$.

(2.) $(X, \mathcal{J})$ je souvislý, pokud pro každé $\emptyset \neq G \subset X$, která je v X otevřená i uzavřená, je $G = X$.

(3.) Podmnožina Y v $(X, \mathcal{J})$ je kompaktní (resp. souvislá), pokud je Y kompaktní (resp. souvislá) jako topologic. podprostor $(X, \mathcal{J})$.

VĚTA: Nechť $(X_i, \mathcal{J}_i)$ jsou topol. prostory pro $i = 1, 2$. Je-li $f: X_1 \to X_2$ spojité a X_1 je kompaktní (resp. souvislý), potom $f(X_1)$ je kompaktní (resp. souvislý).

Tp 9

DŮKAZ: Nechť $Y := f(X_1)$ a τ_Y je topologie na Y indukovaná z (X_2, τ_2).

Potom $f : X_1 \xrightarrow{na} Y$ je spojité. Nechť $G \in \tau_Y$. Potom $G = \tilde{G} \cap Y$ pro nějaké $\tilde{G} \in \tau_2$.

Potom $f_{-1}(G) = f_{-1}(\underset{\tau_2}{\underset{\cap}{\tilde{G}}}) \in \tau_1$.

(i) Y je kompakt: Nechť $g \subset \tau_Y$ je otevřené pokrytí Y. Potom

$$\{f_{-1}(G) \mid G \in g\}$$

je otevřené pokrytí X_1. Z kompaktnosti X_1 ex. $G_1, \dots, G_k \in g$ tak, že $X_1 = \bigcup_{j=1}^{k} f_{-1}(G_j)$.

Potom $\{G_1, \dots, G_k\} \subset g$ pokrývá Y.

(ii) Y je souvislý: Nechť $\emptyset \neq G \subset Y$ je otevřená i uzavřená v (Y, τ_Y). Potom $\emptyset \neq f_{-1}(G) \subset X_1$ je otevř. i uzavř. v (X_1, τ_1). Ze souvislosti X_1 máme, že $X_1 = f_{-1}(G)$, tudíž $G = Y$. ∎

Pozn: Podmnožina Y v $(X,\mathcal{T})$ je kompaktní, právě když pro každé $\mathcal{G} \subset \mathcal{T}$ takové, že TP 10

$$\bigcup \mathcal{G} \supset Y,$$

existuje **konečné** $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$ tak, že $\bigcup \mathcal{G}' \supset Y$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Nechť $\mathcal{G} \subset \mathcal{T}$ a $\bigcup \mathcal{G} \supset Y$. Položme

$$\tilde{\mathcal{G}} := \{G \cap Y \mid G \in \mathcal{G}\}.$$

Potom $\tilde{\mathcal{G}} \subset \mathcal{T}_Y$ a $\bigcup \tilde{\mathcal{G}} = Y$. Z kompaktnosti Y ex. konečné $G_1, \dots, G_k \in \mathcal{G}$ tak, že

$$\bigcup_{j=1}^{k} (G_j \cap Y) = Y,$$

tudíž pro $\mathcal{G}' := \{G_1, \dots, G_k\} \subset \mathcal{G}$ je $\bigcup \mathcal{G}' \supset Y$.

$\boxed{\Leftarrow}$ podobně. ■

$\boxed{\text{Fakt}}$ Nechť $(X,\mathcal{T})$ je kompaktní. Je-li $F \subset X$ uzavřená, potom je F kompaktní.

Důkaz: Nechť $\mathcal{G} \subset \mathcal{T}$ a $\bigcup \mathcal{G} \supset F$. Potom

$$\bigcup \mathcal{G} \cup \underbrace{(X \setminus F)}_{\text{otevř.}} = X.$$

Z kompaktnosti X ex. konečné $G_1, \dots, G_k \in \mathcal{G}$ tak, že $\bigcup_{j=1}^{k} G_j \cup (X \setminus F) = X$, tudíž

$$\bigcup_{j=1}^{k} G_j \supset F. \quad ■$$

VĚTA Nechť (X,τ) je Hausdorff. TP11

(i) Je-li $K \subset X$ kompaktní a $x \in X \setminus K$, potom existují otevřené $U, V \subset X$ takové, že
$$x \in U,\ K \subset V \text{ a } U \cap V = \emptyset.$$

(ii) Je-li $K \subset X$ kompaktní, potom je K v X uzavřená.

Př. V triviální topologii je každá podmnožina kompaktní, ale obecně nikoliv uzavřená.

DŮKAZ: (i) Pro každé $y \in K$ z Hausdorff. existují otevřené $U_y, V_y \subset X$ takové, že
$$x \in U_y,\ y \in V_y \text{ a } U_y \cap V_y = \emptyset.$$

Protože $\{V_y \mid y \in K\} \supset K$ kompakt, existují konečně $y_1, \dots, y_k \in K$ tak, že
$$\underset{\text{ot.}}{V} \overset{\text{def}}{:=} \bigcup_{j=1}^{k} V_{y_j} \supset K.$$
Stačí položit
$$\underset{\text{ot.}}{U} := \bigcap_{j=1}^{k} U_{y_j} \ni x.$$

(ii) Ukážeme, že $X \setminus K$ je otevřená. Pro každé $x \in X \setminus K$ z (i) existují otevřené $U_x, V_x \subset X$ tak, že $x \in U_x$, $K \subset V_x$ a $U_x \cap V_x = \emptyset$. Potom
$$X \setminus K = \bigcup_{x \in X \setminus K} U_x \text{ je otevřená.} \quad \blacksquare$$

Podílová topologie

Nechť $(X, \mathcal{T})$ je topolog. prostor a nechť $\sim$ je relace ekvivalence na X. Zavedeme

$$X/\sim \; := \{ [x] \mid x \in X \} \quad \text{a}$$

($[x]$ … třída ekvivalence při reprezentantu x)

podílové zobrazení (projekce)

$$\begin{aligned} \pi : X &\longrightarrow X/\sim \\ x &\longmapsto [x]. \end{aligned}$$

Na $X/\sim$ určíme topologii

$$\mathcal{T}/\sim \; := \{ G \subset X/\sim \mid \pi^{-1}(G) \in \mathcal{T} \}.$$

Potom $\mathcal{T}/\sim$ je podílová topologie a $(X/\sim, \mathcal{T}/\sim)$ je podílový prostor $(X, \mathcal{T})$ vůči $\sim$.

Fakt (1) $\mathcal{T}/\sim$ je největší topologie na $X/\sim$ taková, že π je spojité.

(2) Zobrazení $f : X/\sim \longrightarrow Y$ je spojité, právě když $f \circ \pi : X \longrightarrow Y$ je spojité.

Důkaz: (i) $\mathcal{T}/\sim$ je topologie, splňuje (O1) – (O3).

Např. (O2): Nechť $G_\alpha \in \mathcal{T}/\sim$, $\alpha \in A$ lib. Potom

$$\pi^{-1}\Big(\bigcup_\alpha G_\alpha\Big) = \bigcup_\alpha \underset{\in \mathcal{T}}{\pi^{-1}(G_\alpha)} \in \mathcal{T}.$$

Pro větší topologii na $X/\sim$ zřejmě π není spojité.

TP 13

(ii) $\boxed{\Rightarrow}$ jasné; $\boxed{\Leftarrow}$ Nechť O je otevřená v Y. Potom $\pi^{-1}(f^{-1}(O)) = (f\circ\pi)^{-1}(O) \in \mathcal{T}$. $\blacksquare$

Př 1: Na $X = \mathbb{R}$ uvažme $x \sim y \iff y - x \in \mathbb{Z}$. Potom $\mathbb{R}/\!\sim\ \simeq S^1$, kde S^1 je jednotková kružnice v $\mathbb{R}^2$.

Př 2: Na $X = \mathbb{R}^2$ uvažme $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff$

$$(x_2 - x_1, y_2 - y_1) \in \mathbb{Z}^2.$$

Potom $\mathbb{R}^2/\!\sim\ \simeq T^2$, kde T^2 je 2-torus v $\mathbb{R}^3$