Globální definice vnějšího diferenciálu

Nechť $\omega \in \mathcal{E}^k(X)$, $U \subset X$ je otevřená a $X_1, \dots, X_{k+1} \in \mathfrak{X}(U)$. Potom

(1) Je-li $k=0$, potom $d\omega(X_1) = X_1(\omega)$ na U.

$\omega \in \mathcal{C}^\infty(X)$

(2) Je-li $k \geq 1$, potom na U

$$d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} X_i\left(\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1})\right)$$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1}),$$

kde $\hat{X}_i$ znamená "vynechání X_i".

Speciálně, je-li $k=1$, potom na U (Cv.)

$$(*) \quad d\omega(X_1, X_2) = X_1(\omega(X_2)) - X_2(\omega(X_1)) - \omega([X_1, X_2]).$$

Pozn: (i) Pomocí (1) a (2) lze definovat d globálně.

(ii) Obě strany $(*)$ jsou bilineární, proto stačí $(*)$ ověřit pro pole tvaru $X_1 = a\frac{\partial}{\partial u_i}$ a $X_2 = b\frac{\partial}{\partial u_j}$ na mapě $U \subset X$.

Rozklad jednotky

- umožňují řadu konstrukcí, které jsou možné udělat lokálně na souřadnicových okolích, provést globálně na celé varietě.

Označení: Nechť $\omega \in \mathcal{E}^*(X)$. Potom

$$\operatorname{supp} \omega := \overline{\{x \in X \mid \omega(x) \neq 0\}}$$

je nosič ω.

DEF. Nechť X je hlad. varieta. Potom systém $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{C}^\infty(X)$ nazveme rozkladem jednotky na X, pokud

1. $f_\alpha \geq 0$ na X;
2. $\{\operatorname{supp} f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ je lokálně konečný, tzn. $\forall x \in X \; \exists$ okolí U bodu x: $\{\alpha \in A \mid \operatorname{supp} f_\alpha \cap U \neq \emptyset\}$ je konečná;
3. $\sum_{\alpha \in A} f_\alpha = 1$ na X.

~~Pozn: součet v 3. je díky 2. dobře~~

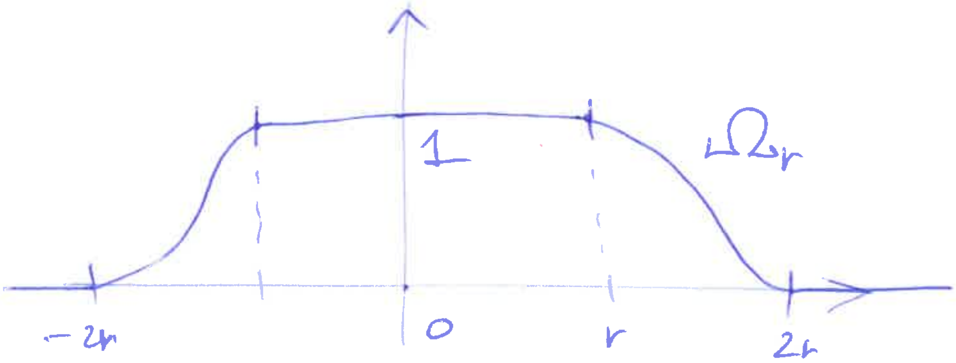
Nechť $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí X. Potom říkáme, že rozklad jednotky $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{C}^\infty(X)$ je podřízený $\mathcal{U}$, pokud

(4.) $\forall \alpha \in A\ \exists\, U \in \mathcal{U} : \operatorname{supp} f_\alpha \subset U.$ RJ2

VĚTA: Pro každé otevřené pokrytí $\mathcal{U}$ hl. variety X existuje spočetný rozklad jednotky na X podřízený $\mathcal{U}$.

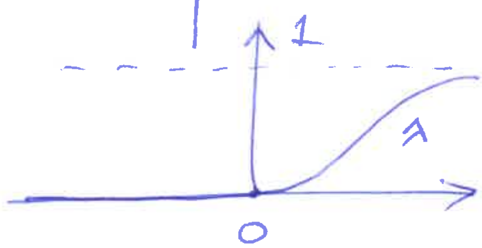
$\boxed{\text{LEMMA A}}$ (bump function = „hladký hrbol")

Pro každé $r>0$ ex. hladká $\Omega_r : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ taková, že
(i) $\Omega_r(x) = 1 \iff \|x\| \le r$;
(ii) $\Omega_r(x) = 0 \iff \|x\| \ge 2r$.



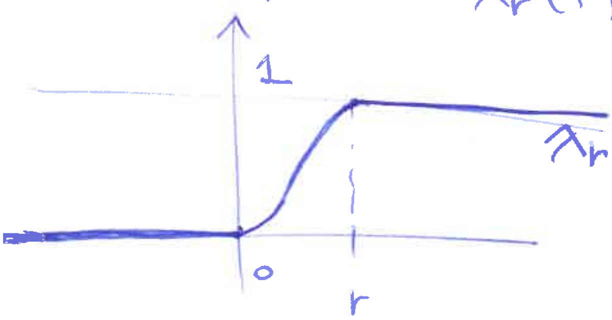
DŮKAZ: Uvažme $\lambda \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ definovanou jako

$$\lambda(t) := e^{-1/t^2}, \quad t>0$$
$$:= 0, \quad t \le 0$$



Pro $r>0$ položme

$$\lambda_r(t) := \frac{\lambda(t)}{\lambda(t) + \lambda(r-t)}, \quad t \in \mathbb{R},$$



a konečně

$$\Omega_r(x) := 1 - \lambda_r(\|x\| - r), \quad x \in \mathbb{R}^n. \ \blacksquare$$

$\boxed{\text{RJ3}}$

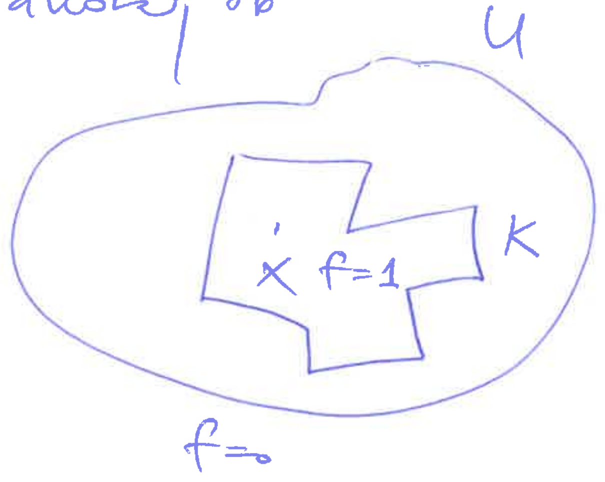
DŮSLEDEK Nechť $U \subset X$ je otevřená a $x \in U$. Potom existuje kompaktní okolí K bodu x a existuje $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ takové, že

X hl. varieta

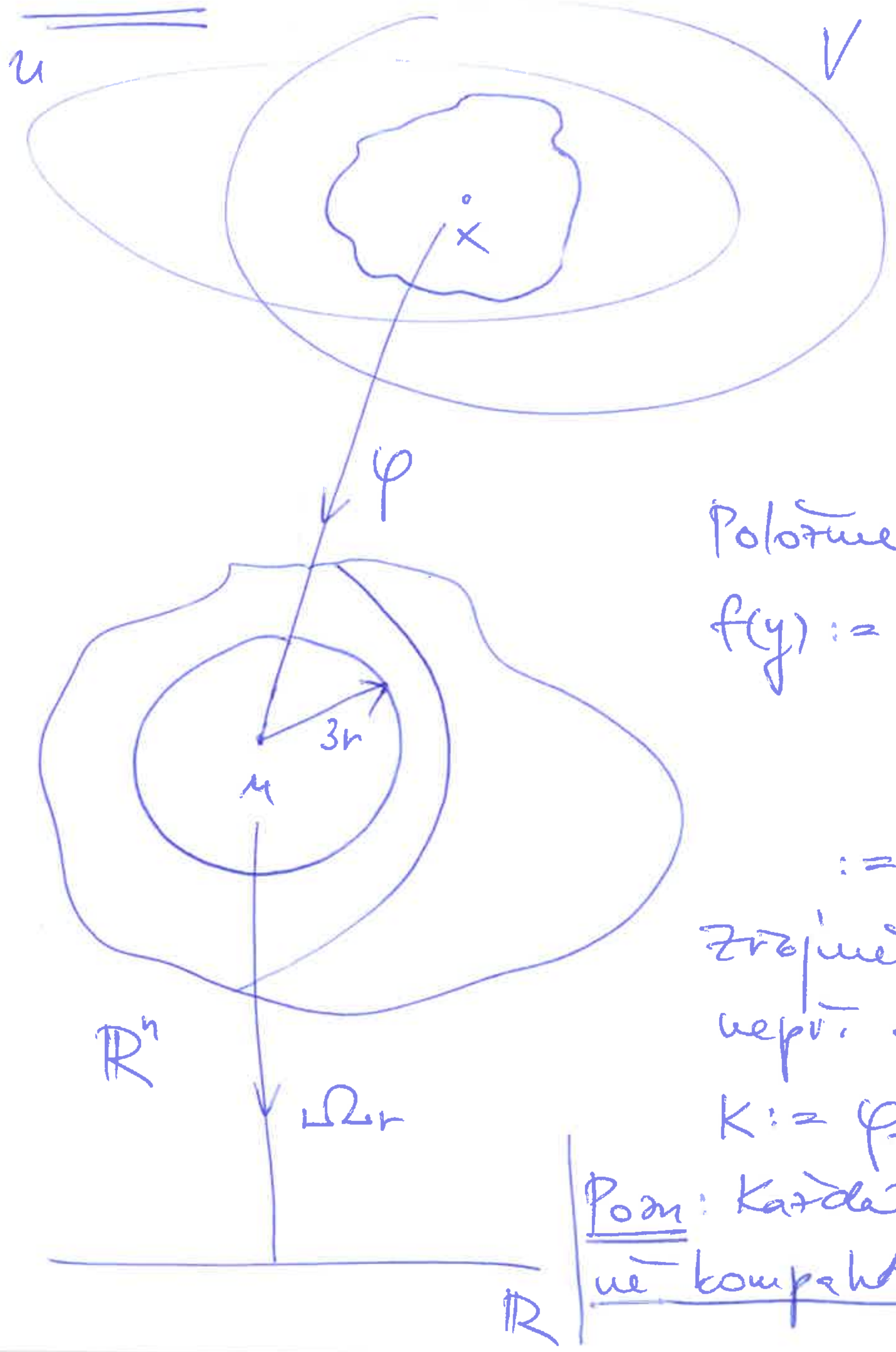
(i) $f = 1$ na $K \subset U$;

(ii) $0 \le f \le 1$ na X;

(iii) $\operatorname{supp} f \subset U$.



DŮKAZ:



Nechť (V, φ) je mapa na X, $x \in X$ a $u = \varphi(x)$. Volme $r > 0$, aby $\varphi^{-1}(\underbrace{B(u, 3r)}_{\text{koule v } \mathbb{R}^n}) \subset U \cap V$.

Položme

$$f(y) := \Omega_r(\underbrace{\varphi(y) - \varphi(x)}_{u}), \quad y \in V \cap U,$$
$$:= 0, \quad y \in X \setminus (V \cap U).$$

Zřejmě f je hledaná fce, neboť $f = 1$ na kompaktu $K := \varphi^{-1}(\overline{B(u, r)})$.

Pozn: Každá varieta X je lokálně kompaktní, tzn. $\forall x \in X$

nej kompaktní okolí K_x.

$\boxed{\text{LEMMA B}}$ Na každém prostoru X existují kompakty K_j, $j \in \mathbb{N}$ takové, že $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$ a $K_j \subset \operatorname{int}(K_{j+1})$ pro všechna $j \in \mathbb{N}$.

DŮKAZ: (i) Ex. spočetná báze $\{O_j\}_{j=1}^{\infty}$ otevřených množin X takových, že $\overline{O_j}$ je kompaktní pro si $j \in \mathbb{N}$.

x

Nechť $\tilde{\mathcal{O}}$ je spočetná báze topologie X a
$\mathcal{O} := \{O \in \tilde{\mathcal{O}} \mid \overline{O} \text{ je kompakt}\}$.
Potom $\mathcal{O}$ je spočetná báze topologie X.
Skutečně, nechť $U \subset X$ je otevřená a $x \in U$. ~~Potom ex. $O \in \tilde{\mathcal{O}}$ taková, že~~ Nechť K_x je kompaktní okolí x. Potom $U \cap K_x$ je okolí x a existuje $O \in \tilde{\mathcal{O}}$ taková, že

$$x \in O \subset U \cap K_x .$$

Zřejmě $\overline{O} \subset K_x$ je kompakt, tudíž $O \in \mathcal{O}$.

RJF

(ii) • Položme $K_1 := \overline{O_1}$ a $n_1 := 1$.

• Existuje $n_2 > n_1$ takové, že

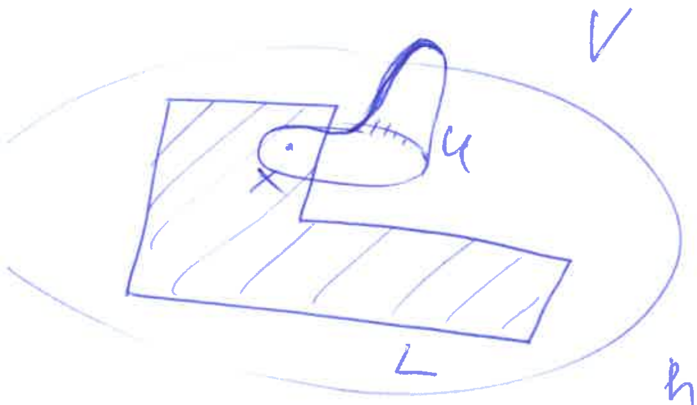
$$\underbrace{K_1}_{\text{kompakt}} \subset \bigcup_{i=1}^{n_2} O_i.$$

Položme $K_2 := \bigcup_{i=1}^{n_2} \overline{O_i}$ a indukcí sestrojíme rostoucí posl. $1 = n_1 < \dots < n_j < n_{j+1} < \dots$ takovou, že

$$\underbrace{K_j \overset{\text{def.}}{:=} \bigcup_{i=1}^{n_j} \overline{O_i}}_{\text{kompakt}} \subset \bigcup_{i=1}^{n_{j+1}} O_i.$$ ▨

DŮKAZ VĚTY O ROZKLADU JEDNOTKY:

(a) Nechť $L \subset V \subset X$, L je kompakt a V je otevřená. Potom existují $\{f_j\}_{j=1}^{k} \subset \mathcal{C}^\infty(X)$ takové, že platí ①, ④, $\operatorname{supp} f_j \subset V$ pro všechna $j = 1, \dots, k$ a $\sum_{j=1}^{k} f_j > 0$ na L.



Skutečně, pro každé $x \in L$ ex. $U \in \mathcal{U}$ takové, že $x \in U$. Pro $U \cap V \ni x$ existuje dle DŮSLEDKU hladký hrbol f_x na X.

Položme $V_x := \{y \in X \mid f_x(y) \neq 0\}$.

RJ6

Protože $\{V_x \mid x \in L\}$ je otevřené pokrytí kompaktu L, existuje jeho konečné podpokrytí $V_{x_1}, \dots, V_{x_k}$. Za $\{f_j\}_{j=1}^{k}$ vezmeme $\{f_{x_j}\}_{j=1}^{k}$.

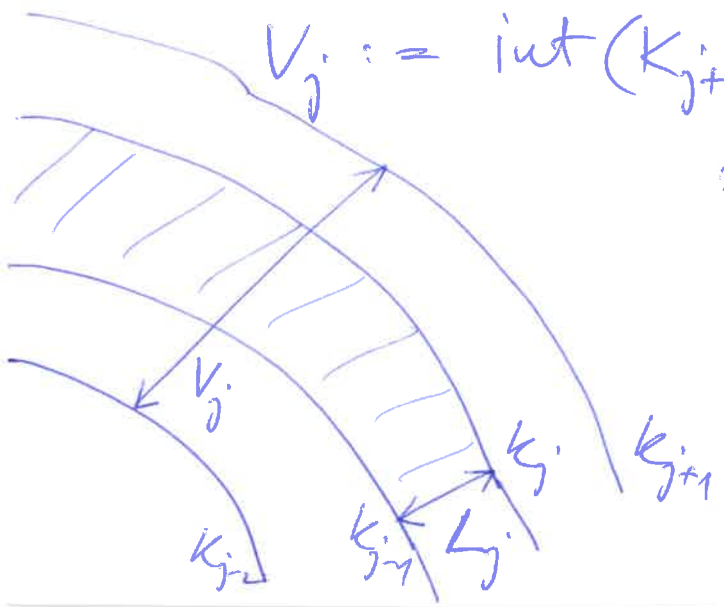
<u>Pozn:</u> Nechť X je kompakt a $L = V = X$. Je-li $\{f_j\}_{j=1}^{k}$ jako v (a), potom $\{\tilde{f}_j\}_{j=1}^{k}$ je rozklad jednotky na X podřízený $\mathcal{U}$, pokud

$$\tilde{f}_j := f_j \Big/ \left(\sum_{i=1}^{k} f_i \right), \quad j = 1, \dots, k.$$

(b) Podle LEMMATU B ex. na X kompakty K_j, $j \in \mathbb{N}$ takové, že $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$ a $K_j \subset \operatorname{int}(K_{j+1})$. Pro každé $j \in \mathbb{N}$ položme

$$L_j := K_j \setminus \operatorname{int}(K_{j-1}) \quad \text{a}$$

$$V_j := \operatorname{int}(K_{j+1}) \setminus K_{j-2}.$$



Potom $L_j \subset V_j$, L_j je kompakt a V_j je otevřená podmnožina v X.

RJ7

Pro $L_j \subset V_j$ zkonstruujeme dle (a) $\{f_{j,i}\}_{i=1}^{k_j}$. Položme $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A} :=$ $\{f_{j,i} \mid j\in\mathbb{N},\ i=1,\dots,k_j\}$. Potom $\{\tilde{f}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ je spojitý rozklad jednotky na X podřízený $\mathcal{U}$, pokud položíme $\forall \alpha\in A$

$$\tilde{f}_\alpha := f_\alpha \Big/ \Big(\sum_{\beta\in A} f_\beta\Big) \text{ na } X. \qquad \blacksquare$$