Domácí úloha

Nechť $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ je hladká funkce na okolí $x\in\mathbb{R}^n$. Dokažte následující tvrzení.

(1) Je-li $k\in\mathbb{N}$, potom $d^kf(x)\in \mathrm{Sym}^k((\mathbb{R}^n)^*)$. Zde $d^kf(x)$ je diferenciál f v x řádu k.

Nechť $e_1,\dots,e_n$ je báze $\mathbb{R}^n$. Potom

$$df(x)h=\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)h^i,\quad h=\sum_{i=1}^n h^i e_i\in\mathbb{R}^n,$$

neboli

$$df(x)=\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)\,dx^i,$$

kde $dx^i=\varepsilon^i$ jsou prvky duální báze $(\mathbb{R}^n)^*$, tj. $dx^i(h)=h^i$, $h\in\mathbb{R}^n$. Potom $d^kf(x)$ definujeme rekurentně: $\forall h_1,\dots,h_k\in\mathbb{R}^n$

$$d^kf(x)(h_1,\dots,h_k):=d\varphi(x)h_k,$$

kde $\varphi(y):=d^{k-1}f(y)(h_1,\dots,h_{k-1})$.

(2) Zřejmě je $\{dx^\alpha \mid \alpha\in\mathbb{N}_0^n,\ |\alpha|=k\}$ báze $\mathrm{Sym}^k((\mathbb{R}^n)^*)$, kde $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $|\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_n$ a $dx^\alpha=\underbrace{dx^1\odot\cdots\odot dx^1}_{\alpha_1 \text{ krát}}\odot\cdots\odot\underbrace{dx^n\odot\cdots\odot dx^n}_{\alpha_n \text{ krát}}$.

Proto platí, že

$$d^k f(x) = \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha \, dx^\alpha$$

pro nějaké koeficienty $c_\alpha \in \mathbb{R}$. Spočtěte c_α nejprve pro $k=2$ a potom i pro obecné k.

---

x
