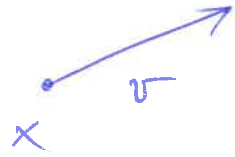
Tečný prostor

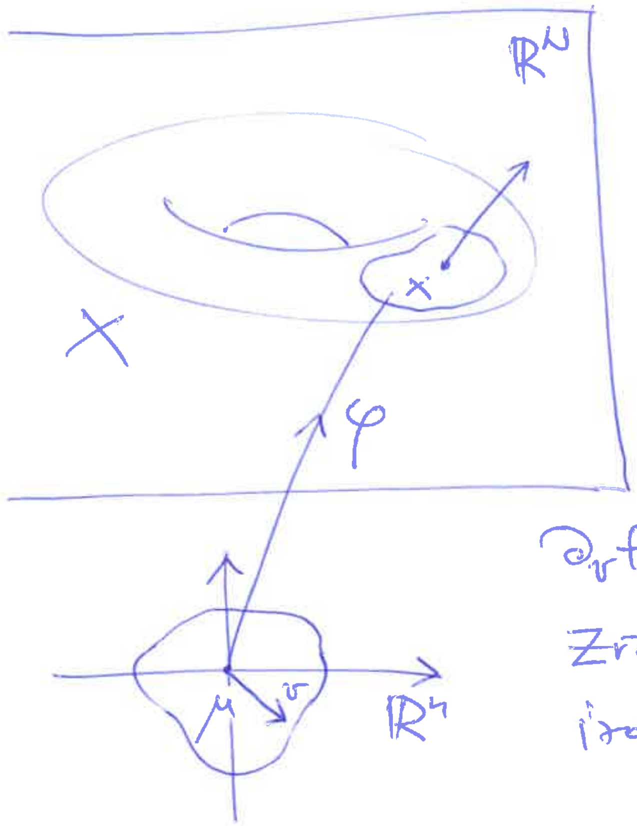
Pr. 1 $T_x\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$ s izomorfismem $v\in\mathbb{R}^n \longmapsto \partial_v|_x$,

kde $(\partial_v f)(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, v^i$, $f\in\mathcal{E}_x$.

* $T\mathbb{R}^n \simeq \{(x,\underbrace{v}_{\partial_v|_x}) \mid x, v \in \mathbb{R}^n\} \simeq \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$



Pr. 2 Nechť X je n-plocha v $\mathbb{R}^N$, $x\in X$ a $\tilde{T}_xX$ je tečný prostor v x k X ve smyslu Geom. 2. Nechť φ je lokální parametrizace X na okolí x. Potom



$$\tilde{T}_xX = \{\partial_v\varphi(u) \mid v\in\mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^N,$$

kde $x=\varphi(u)$. Chápeme-li X jako n-dim. varietu, potom

$$T_xX = \{\partial_v|_x \mid v\in\mathbb{R}^n\}, \text{ kde}$$

$$\partial_v f(x) := \partial_v(f\circ\varphi)(u),\ f\in\mathcal{E}_x.$$

Zřejmě $\tilde{T}_xX \simeq T_xX$ s přirozeným izomorfismem $\partial_v\varphi(u) \longmapsto \partial_v|_x$

Pr. 3 $TS^n \simeq \{(x,v) \mid x\in S^n, v\in\mathbb{R}^{n+1}, \underbrace{(x,v)=0}_{x\perp v}\}$,

kde $(\cdot,\cdot)$ je Euklid. skalární součin v $\mathbb{R}^{n+1}$.

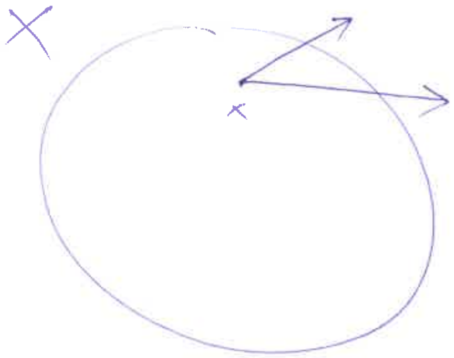
ČESÁNÍ KOKOSOVÉHO OŘECHU

$S^2 \subset \mathbb{R}^3$

"You can't comb the hair on a coconut!"

[SEE CONLON: Diff. mfd's, 2nd ed., Birkhäuser, 2001]

<u>DEF</u>. Hl. varieta X dim n se nazývá <u>paralelizovatelná</u>, pokud na X ex. $V_1,\dots,V_n \in \mathfrak{X}(X)$ takové, že v každém $x\in X$ ~~jsou~~ tvoří vektory $V_1(x),\dots,V_n(x)$ bázi T_xX.

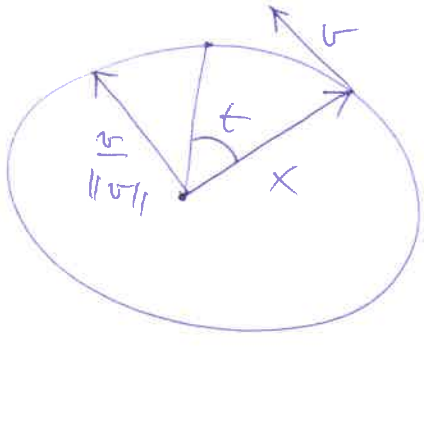


Eukl. skalár. součin v $\mathbb{R}^{n+1}$

Cv 1. $T_xS^n \simeq \{(x,v) \mid x\in S^n,\ v\in\mathbb{R}^{n+1},\ \langle x,v\rangle = 0\}$ $\quad x\perp v$

[Pro (x,v) urač křivku na S^n $\quad \gamma(0)=x,\ \gamma'(0)=v$

$$\gamma(t) := x\cdot\cos(\|v\|t) + \frac{v}{\|v\|}\sin(\|v\|t), \quad t\in\mathbb{R},\ v\neq 0.]$$



Cv. 2 S^1, S^3, S^7 jsou <u>paralelizov.</u>

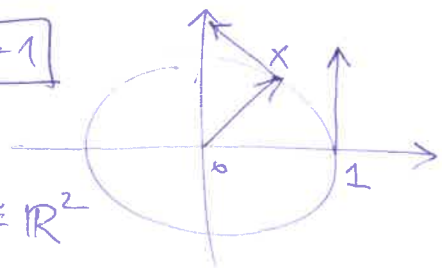
<u>Bott, Milnor, Kervaire</u>:

S^n je <u>paralelizov.</u> $\overset{*)}{\iff} n=0,1,3,7$

$\iff$ na $\mathbb{R}^{n+1}$ ex. násobení zachovávající Eukl. normu, a to $\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H},\mathbb{O}$

<u>Pozn</u>: *) $\Rightarrow$ těžké; $\Leftarrow$: Využije se násobení na $\mathbb{R}^{n+1}$.

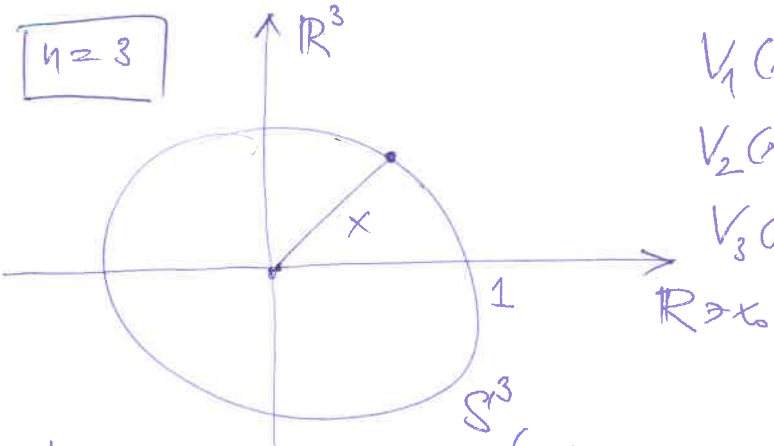
$\boxed{n=1}$



$V(x) := (x, ix)$, $x\in S^1$

$\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2$

$\boxed{n=3}$



$V_1(x) := (x, ix)$, $x \in S^3$

$V_2(x) := (x, jx)$

$V_3(x) := (x, kx)$

$\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{H}$ + nekomut. násobení

$x = x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3$

$\boxed{n=7}$

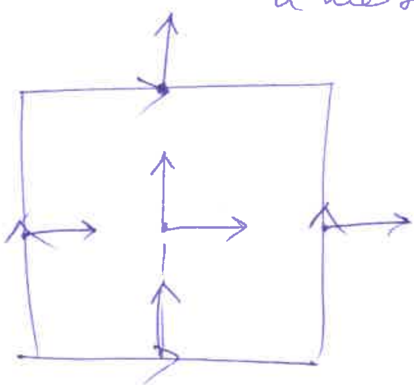
$\mathbb{R}^8 \simeq \mathbb{O}$ + nekomut. a neasociat. násobení

$x = x_0 + i_1x_1 + \dots + i_7x_7$ $\qquad V_j(x) := (x, i_jx)$, $x \in S^7$, $j = 1, \dots, 7$

Cv. 3 $\quad$ n-torus $T^n = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n \text{ krát}}$ je paralelizovat.

Obecně: kartézský součin 2 paralelizov. variet je opět paralel.

pro $n=2$:



Př. Lieovy grupy jsou paralelizov.

Cv. Každá paralelizov. varieta je orientovatelná.

Lieova algebra je vektorový prostor L s bilineární operací (tzv. *závorkou*)
$[\cdot,\cdot] : L \times L \to L$, která splňuje ①, ②.

Př. Nechť A je asociativní algebra.
Pro každé $a, b \in A$ definujeme jejich *komutátor* $[a,b] := a \cdot b - b \cdot a$
(tj. míra, jak je nekomutativní součin a, b).
Potom $(A, [\cdot,\cdot])$ je Lieova algebra.

Př. Nechť $gl(n,\mathbb{R})$ je algebra všech reálných matic $n \times n$ s maticovými operacemi.
Potom $(gl(n,\mathbb{R}), [\cdot,\cdot])$ je Lieova algebra.
Zde $[A,B] := A \cdot B - B \cdot A$, $A, B \in gl(n,\mathbb{R})$.

Př. Na $\mathbb{R}^3$ uvažme hladké vektorové pole
$$h_{ij} := x_j \partial_{x_i} - x_i \partial_{x_j}, \quad 1 \leq i \neq j \leq 3. \quad \text{Zde } \partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$$
Zřejmě $h_{ji} = -h_{ij}$ a $[h_{12}, h_{23}] = h_{31}$, $[h_{23}, h_{31}] = h_{12}$, $[h_{31}, h_{12}] = h_{23}$. Nechť $so(3)$ je podprostor $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ generovaný h_{ij}, $i \neq j$. Potom $so(3)$ s Lieovou závorkou je 3-dim. (tzv. *ortogonální*) *Lieova algebra*.

Pozn: $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \iff V = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ na $\mathbb{R}^n$

$x \in \mathbb{R}^n$

pro nějaké $\alpha_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$

— x —

Připomeň: $[A, B] := A \circ B - B \circ A$ $\quad (*)$

(i) $[\partial_{x_i}, \partial_{x_j}] = 0$

Skutečně, $\partial_{x_i} \partial_{x_j} f = \partial_{x_j} \partial_{x_i} f$.

Rozšíříme definici (*) i pro jiné operátory na hlad. funkcích. Potom

(ii) $[x_i, x_j] = 0$, kde x_i chápeme jako operátor násobení x_i

(iii) $[\partial_{x_i}, x_j] = \delta_{ij}$

Skutečně, $\partial_{x_i} x_i f = x_i \partial_{x_i} f + f$

— x —

Potom $h_{12} = x_2 \partial_{x_1} - x_1 \partial_{x_2}$, $h_{23} = x_3 \partial_{x_2} - x_2 \partial_{x_3}$,

$$[h_{12}, h_{23}] = [x_2 \partial_{x_1}, x_3 \partial_{x_2}] + [x_1 \partial_{x_2}, x_2 \partial_{x_3}] =$$

$$= -x_3 \partial_{x_1} + x_1 \partial_{x_3} = h_{31},$$

protože $\underbrace{x_2 \partial_{x_1}}_{A} \underbrace{x_3 \partial_{x_2}}_{B} = x_3 x_2 \partial_{x_2} \partial_{x_1} = x_3 (\partial_{x_2} x_2 - 1) \partial_{x_1}$

$$= \underbrace{x_3 \partial_{x_2}}_{B} \underbrace{x_2 \partial_{x_1}}_{A} - x_3 \partial_{x_1}$$