Symetrické a vnější algebra

DEF: Nechť V je vektor. prostor. Nechť S_k je grupa permutací $\{1,2,\dots,k\}$.

(i) Potom $\alpha \in V^k$ je <u>symetrický</u>, resp. <u>antisymetrický</u>, pokud $\forall f^1,\dots,f^k \in V^* \ \forall \pi \in S_k$:

$$\alpha(f^{\pi(1)},\dots,f^{\pi(k)}) = \alpha(f^1,\dots,f^k),$$

resp. $\quad$ —‖— $\quad = (\operatorname{sgn}\pi)\,\alpha(f^1,\dots,f^k).$

Označme $\mathrm{Sym}^k(V)$ vekt. prostor všech <u>symetr.</u> $\alpha \in V^k$ a $\Lambda^k(V)$ —‖— <u>antisymetr.</u> —‖—.

(ii) Pro $\alpha \in V^k$ definujeme <u>symetrizaci</u>

$$\mathrm{Sym}_k(\alpha)(f^1,\dots,f^k) := \sum_{\pi \in S_k} \alpha(f^{\pi(1)},\dots,f^{\pi(k)}),$$

$f^1,\dots,f^k \in V^*$

a <u>antisymetrizaci</u>

$$\mathrm{Alt}_k(\alpha)(f^1,\dots,f^k) = \sum_{\pi \in S_k} \operatorname{sgn}\pi \cdot \alpha(f^{\pi(1)},\dots,f^{\pi(k)}).$$

Pozn: Potom $\frac{1}{k!}\mathrm{Sym}_k : V^k \to \mathrm{Sym}^k(V)$ a $\frac{1}{k!}\mathrm{Alt}_k : V^k \to \Lambda^k V$ jsou projekce.

DEF. Symetrickou algebrou vektor. prostoru V rozumíme algebru
$$\mathrm{Sym}(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathrm{Sym}^k(V)$$
s násobením definovaným následovně:
Je-li $\alpha \in \mathrm{Sym}^k(V)$, $\beta \in \mathrm{Sym}^\ell(V)$, potom
$$\alpha \odot \beta := \frac{1}{k!\,\ell!} \mathrm{Sym}_{k+\ell}(\alpha \otimes \beta)$$
Na celou $\mathrm{Sym}(V)$ rozšíříme $\odot$ bilineárně.

DEF. Vnější algebrou vektor. prostoru V rozumíme algebru
$$\Lambda^*(V) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^k(V)$$
s násobením definovaným následovně:
Je-li $\alpha \in \Lambda^k(V)$, $\beta \in \Lambda^\ell(V)$, potom
$$\alpha \wedge \beta := \frac{1}{k!\,\ell!} \mathrm{Alt}_{k+\ell}(\alpha \otimes \beta)$$
Na celou $\Lambda^*(V)$ rozšíříme $\wedge$ bilineárně.

Vlastnosti $\Lambda^*(V)$

(1) Je-li $n = \dim V$, potom $\Lambda^k(V) = 0$ $\forall k > n$, tudíž $\Lambda^*(V) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k(V)$.

(2) Vnější násobení $\wedge$ je asociativní a platí, že $v_1 \wedge v_2 = - v_2 \wedge v_1$, $v_1, v_2 \in V$.

(3) Nechť $e_1, \dots, e_n$ je báze V. Potom $\Lambda^k(V)$ má bázi $\hat{e}_I := e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$, $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ a $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$.

— x —

DŮKAZ: Nechť $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$ je duální báze V^*, tzn. $\varepsilon^i(e_j) = \delta^i_j$.

(i) Nechť $\alpha \in \Lambda^k(V)$. Potom $\alpha \in V^k$, tudíž

(*) $\alpha = \sum_A \alpha^A e_A$, kde $A = (a_1, \dots, a_k) \in \{1, \dots, n\}^k$,

$\alpha^A = \alpha(\varepsilon^{a_1}, \dots, \varepsilon^{a_k})$ a

$e_A = e_{a_1} \otimes \dots \otimes e_{a_k}$.

Nechť A má $a_i = a_j$ pro $i \neq j$. Potom

$\alpha^A = \alpha(\dots, \varepsilon^{a_i}, \dots, \varepsilon^{a_j}, \dots) = -\alpha^A$, tj. $\alpha^A = 0$.

Speciálně, je-li $k > n$, potom $\alpha = 0$. Dále předpokládejme $k = 1, \dots, n$. Potom v (*) stačí

sečíst přes A, ve kterých se indexy neopakují.
Tedy
$$\alpha = \sum_{I,\pi} \alpha^{\pi(I)} e_{\pi(I)} = \sum_{I,\pi} \operatorname{sgn}\pi \cdot \alpha^{I} \cdot e_{\pi(I)} = \sum_{I} \alpha^{I} \hat{e}_{I},$$
kde $I = \{i_1, \dots, i_k\}$, $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$, $\pi \in S_k$,
$\pi(I) = (i_{\pi(1)}, \dots, i_{\pi(k)})$ a $\hat{e}_I = \operatorname{Alt}_k(e_I)$.
Ukážeme, že $(\hat{e}_I)_I$ jsou lineárně nezávislé.
Nechť $\sum_I \alpha^I \hat{e}_I = 0$. Pro každou $J = \{j_1, \dots, j_k\}$, $1 \le j_1 < \dots < j_k \le n$ máme
$$0 = \sum_I \alpha^I \underbrace{\hat{e}_I(\varepsilon^{j_1}, \dots, \varepsilon^{j_k})}_{= \delta_I^J} = \alpha^J.$$

(ii) Je-li $v_1, v_2 \in V$, potom $v_1 \wedge v_2 = v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1 = - v_2 \wedge v_1$.

(iii) Násobení $\wedge$ je asociativní:
Nechť $\alpha \in \Lambda^k(V)$, $\beta \in \Lambda^\ell(V)$, $\gamma \in \Lambda^m(V)$. Potom $\forall f^1, \dots, f^{k+\ell} \in V^*$:
$$(\alpha \wedge \beta)(f^1, \dots, f^{k+\ell}) = \frac{1}{k!\,\ell!} \sum_{\pi \in S_{k+\ell}} c(\pi), \text{ kde}$$
$$c(\pi) := \operatorname{sgn}\pi \cdot \alpha(f^{\pi(1)}, \dots, f^{\pi(k)}) \cdot \beta(f^{\pi(k+1)}, \dots, f^{\pi(k+\ell)}).$$

Nechť $\pi \in S_{k+l}$, $\pi(\{1,\dots,k\}) = I = \{i_1,\dots,i_k\}$, vzestupně

$$\pi(\{k+1,\dots,k+l\}) = J = \{j_1,\dots,j_l\}.$$

Potom $c(\pi) = \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I, J \\ 1,\dots,k+l\end{pmatrix} \alpha(f^I)\beta(f^J)$, kde $f^I = (f^{i_1},\dots,f^{i_k})$. Pro daná I, J máme takových π právě $(k!)(l!)$. Tedy

$$(\alpha\wedge\beta)(f^1,\dots,f^{k+l}) = \sum_{I,J} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I, J \\ 1,\dots,k+l\end{pmatrix} \alpha(f^I)\beta(f^J), \qquad (\Delta)$$

kde sčítáme přes I, J taková, že $|I| = k$, $|J| = l$, $I\cap J = \emptyset$ a $I \cup J = \{1,\dots,k+l\}$.

Pro každé $f^1,\dots,f^{k+l+m} \in V^*$ máme

$$\begin{aligned}
((\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma)(f^1,\dots,f^{k+l+m}) &\overset{(\Delta)}{=} \sum_{L,K} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} L, K \\ 1,\dots,k+l+m\end{pmatrix} (\alpha\wedge\beta)(f^L)\,\gamma(f^K) = \\
&= \sum_{L,K} \sum_{L = I\cup J} \underbrace{\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} L, K \\ 1,\dots,k+l+m\end{pmatrix} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} L, K \\ I, J, K\end{pmatrix}}_{\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I, J, K \\ 1,\dots,k+l+m\end{pmatrix}} \alpha(f^I)\beta(f^J)\gamma(f^K) \\
&= \sum_{I,J,K} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I, J, K \\ 1,\dots,k+l+m\end{pmatrix} \alpha(f^I)\beta(f^J)\gamma(f^K),
\end{aligned}$$

kde sčítáme přes vš. I, J, K po 2 disj., $I\cup J\cup K = \{1,\dots,k+l+m\}$, $|I| = k$, $|J| = l$, $|K| = m$.

Analogicky odvodíme stejný vzorec i pro $\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$, neboli $(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma = \alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$.

(iv) Platí $\hat{\varphi}_I = \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}$.

Indukcí: • $k=1$: Ano ✓

• $k \mapsto k+1$: Nechť $I = \{i_1, \dots, i_{k+1}\}$ a $I_0 = I \setminus \{i_{k+1}\}$.

Potom pro každé $|J| = k+1$ je

$$\left(\hat{\varphi}_{I_0} \wedge \varphi_{i_{k+1}}\right)(\varepsilon^J) \underset{(\Delta)}{=} \sum_{j \in J} \operatorname{sgn}\left(J \setminus \{j\}, j\right) \hat{\varphi}_{I_0}\left(\varepsilon^{J \setminus \{j\}}\right) \times$$

$$\times\, \varphi_{i_{k+1}}(\varepsilon^j) = \delta_I^J = \hat{\varphi}_I(\varepsilon^J),$$ tedíž máme

$$\hat{\varphi}_I = \hat{\varphi}_{I_0} \wedge \varphi_{i_{k+1}} \underset{\text{indukc. předp.}}{=} \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k} \wedge \varphi_{i_{k+1}}. \quad \blacksquare$$

Pozn: Budeme psát φ_I místo $\hat{\varphi}_I$, pokud bude jasno.

Cv. Vlastnosti $\operatorname{Sym}(V)$

(1.) $\operatorname{Sym}(V)$ je ∞-dim., komutativní asoc. algebra.

(2.) Nechť $e_1, \dots, e_n$ je baze V. Potom $\operatorname{Sym}^k(V)$ má bázi

$$\dot{\varphi}_A := \varphi_{a_1} \odot \varphi_{a_2} \odot \dots \odot \varphi_{a_k}, \quad A = (a_1, \dots, a_k),$$
$$1 \le a_1 \le a_2 \le \dots \le a_k = n.$$

Spec. $\dim \operatorname{Sym}^k(V) = \binom{n+k-1}{k}$.

Cv. Rozmyslete, že $\operatorname{Sym}\left((\mathbb{R}^n)^*\right)$ je izomorfní s algebrou reálných polynomů na $\mathbb{R}^n$.

(Cv.) $\mathrm{Sym}(V^*) \simeq \mathcal{P}(V)$, kde $\mathcal{P}(V)$ je algebra všech polynomů $P: V \to \mathbb{R}$

Nechť $e_1, \dots, e_n$ je báze V a $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$ je duální báze V^*, tzn. $\varepsilon^i(e_j) = \delta^i_j$.

Pro tzv. multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ položme $\varepsilon^\alpha := \underbrace{\varepsilon^1 \odot \dots \odot \varepsilon^1}_{\alpha_1\text{-krát}} \odot \dots \odot \underbrace{\varepsilon^n \odot \dots \odot \varepsilon^n}_{\alpha_n\text{ krát}}$.

Potom zřejmě $\{\varepsilon^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}_0^n\}$ je báze $\mathrm{Sym}\, V^*$.

Tedy ~~pro~~ každé $P \in \mathrm{Sym}\, V^*$ lze psát jednoznačně jako $P = \sum_\alpha P_\alpha \varepsilon^\alpha$, kde $P_\alpha \in \mathbb{R}$ jsou nenulová pro konečně mnoho α.

Každému P odpovídá jediný polynom na V, a to

$$P(x) = \sum_\alpha P_\alpha \varepsilon^\alpha(\underbrace{x, \dots, x}_{|\alpha| \text{ krát}}) = \sum_\alpha P_\alpha x^\alpha, \quad x \in V,$$

kde $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ a $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$.