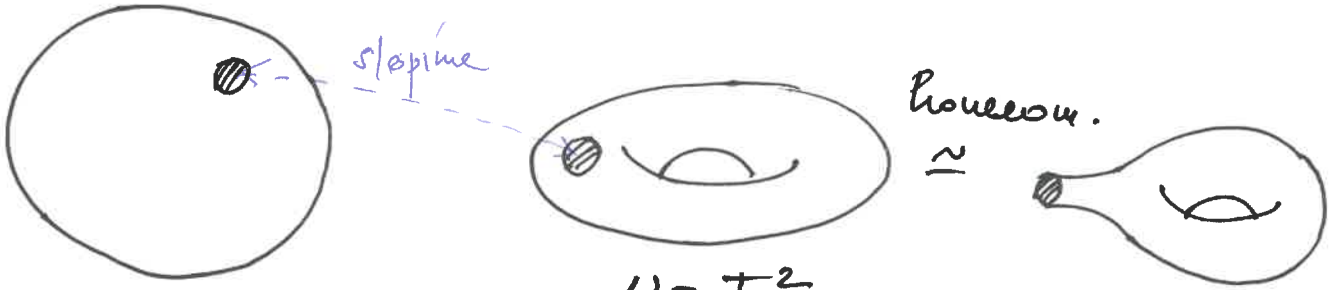
Klasifikace kompakt. souvislých 2-rozměrných variet

[Viz. HIRSCH M.W., Differential Topology, Springer, N.Y., 1994]

Souvislý součet $M \# N$

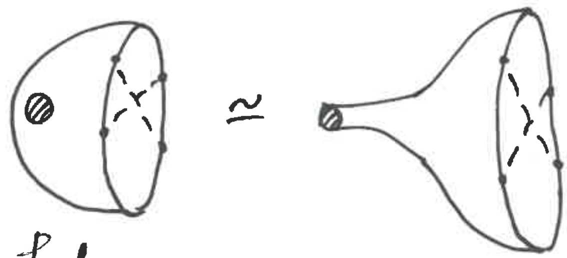


$M = S^2$ $\quad$ $N = T^2$

$S^2 \# T^2 \simeq T^2$, $\quad T^2 \# T^2 \simeq$ (dvojitý torus) atd.

$S^2 \# P_2 \simeq P_2$, $\quad P_2 \# P_2 \simeq$ Kleinova láhev,

$$P_2 \# P_2 \# P_2 \simeq T^2 \# P_2$$



P^2

VĚTA: Je-li X kompaktní a souvislá topolog. varieta dim 2, potom je X homeomorfní s jednou z následujících variet

1. S^2
2. $\underbrace{T^2 \# \cdots \# T^2}_{k}$, kde $k \geq 1$ } orientovatelné
3. $\underbrace{P_2 \# \cdots \# P_2}_{k}$, kde $k \geq 1$ ← neorientov.

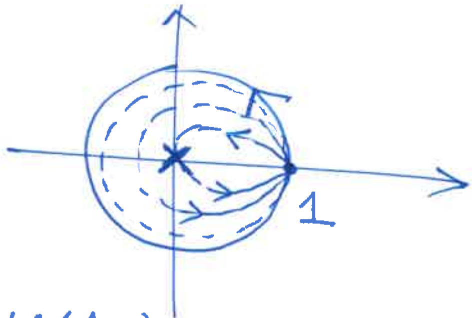
Pozn: Více (3-)rozměrné variety mnohem složitější

Poincarého domněnka (1904)

Je-li X jednoduše souvislá a kompaktní topol. varieta dim 3, potom $X \simeq S^3$.

Pozn: (i) X je jednod. souv., pokud je X souvislý a každou smyčku (tzn. spojitá uzavřená křivka) v X lze stáhnout do bodu.
spojitě zdeformovat

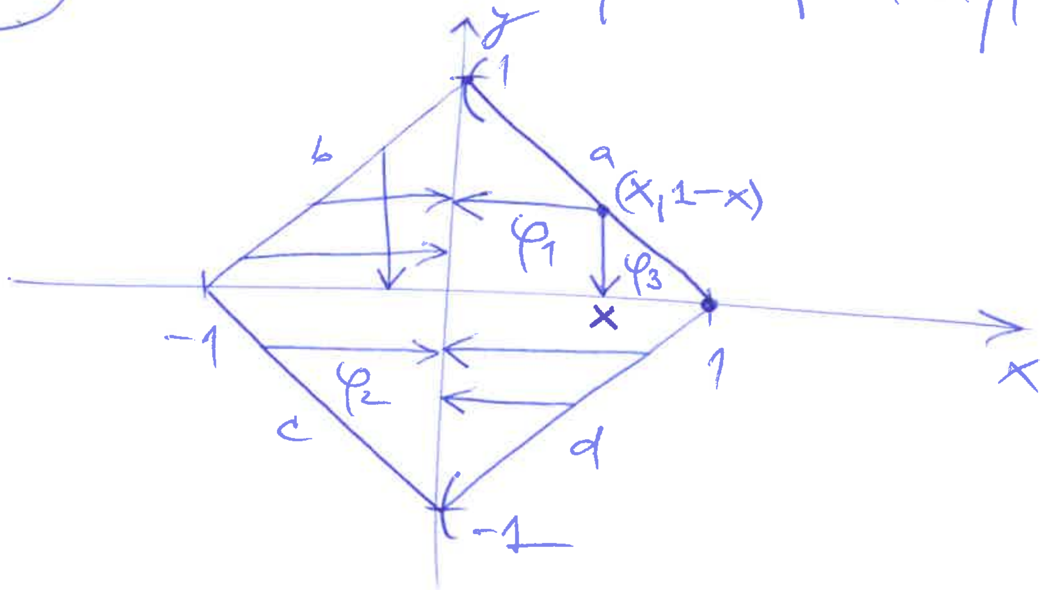
Př: $\mathbb{R}^2, S^2$ ANO
$\mathbb{R}^2 - \{0\}, S^1$ NE



(ii) DŮKAZ (PERELMAN, 2003)
- odmítl 1 mil. \$, Fieldsovu medaili

(iii) Jediný ze 7 matemat. problémů tisíciletí, který se zatím podařilo vyřešit (další např. Riemannova hypotéza)

Př. 1 Nechť $\tilde{C} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|+|y| = 1\}$.



(1) Zřejmě $\tilde{C}$ není hladká 1-plocha v $\mathbb{R}^2$.

(2) Uvažme projekce

- φ_1 hran a, d na y-souřadnici z $(-1,1)$
- φ_2 b, c —"—
- φ_3 a, b x-souřadnici z $(-1,1)$
- φ_4 c, d —"—

Potom je $\mathcal{A} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ hladký atlas dim 1 na $\tilde{C}$, protože např. na hraně a je

$$\varphi_1(x, 1-x) = 1-x, \quad x \in (0,1)$$

$$\varphi_3(x, 1-x) = x$$

tudíž $\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1}(x) = 1-x$, $x \in (0,1)$ je hladké.

Tudíž $(\tilde{C}, \mathcal{A})$ je hladká varieta dim 1, která je difeomorfní s S^1! Cv.

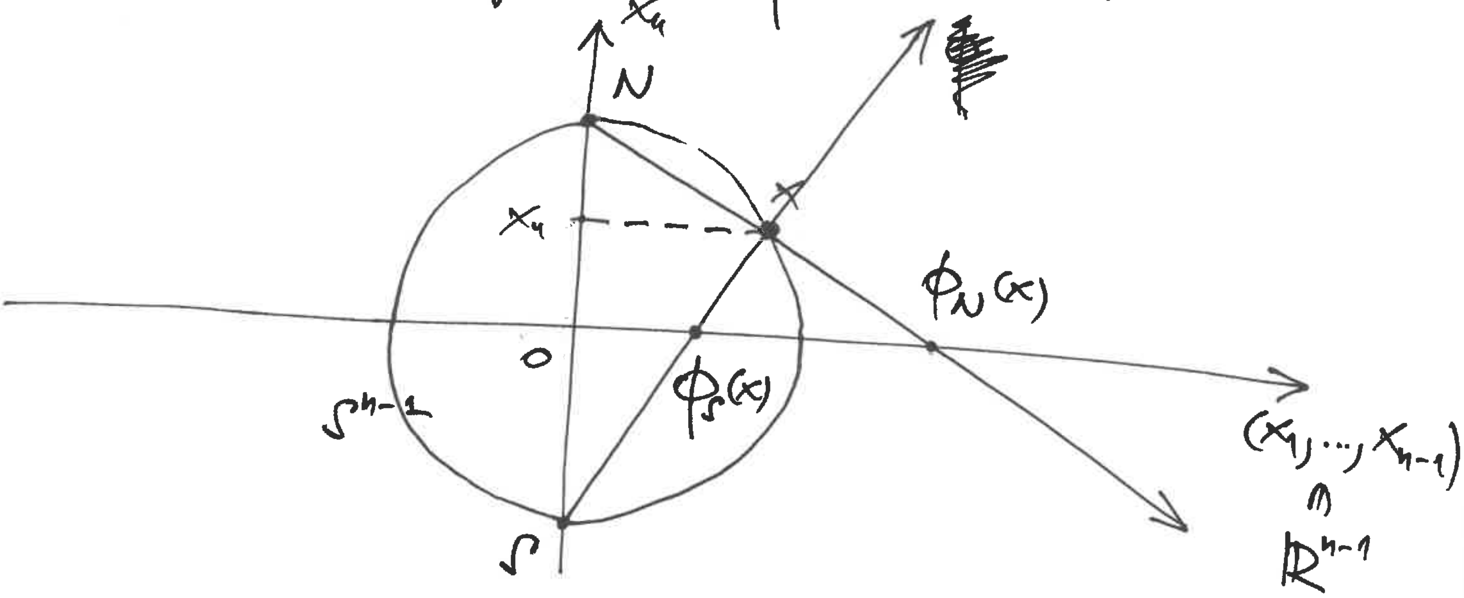
Příklad 2 Neboť $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$.

Uvažme zobrazení

$$\phi_N : U_N = S^{n-1} \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1},$$
$$\phi_N(x) := \frac{1}{1-x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}) \quad \text{a}$$
$$\phi_S : U_S = S^{n-1} \setminus \{S\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1},$$
$$\phi_S(x) = \frac{1}{1+x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

kde $N = (0, \dots, 0, 1)$ a $S = (0, \dots, 0, -1)$.

Potom ϕ_N a ϕ_S jsou stereografické projekce ze severního a jižního pólu N a S.



Skutečně, máme $\phi_N(x) = \alpha \cdot (x_1, \dots, x_{n-1})$ pro nějaké $\alpha > 0$. Z podobnosti trojúhelníků je

$$\frac{\|\phi_N(x)\|}{\|(x_1, \dots, x_{n-1})\|} = |\alpha| = \frac{1}{1-x_n}.$$

Potom $\mathcal{A} = \{(U_N, \phi_N), (U_S, \phi_S)\}$ je hladký atlas na S^{n-1}.

Skutečně, označme přechodové funkce
$\Theta_{SN} := \phi_S \circ (\phi_N)^{-1}$ a $\Theta_{NS} := \phi_N \circ (\phi_S)^{-1}$.

Nechť $y \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$. Potom ex. jediné
$x \in S^{n-1} \setminus \{S, N\}$ tak, že $y = \phi_N(x)$.

Potom $\phi_S(x) = \beta \cdot y$ pro $\beta > 0$ a z podobnosti trojúhelníků dostaneme

$$1 = \|\phi_S(x)\| \cdot \|\phi_N(x)\| = \beta \|y\|^2,$$

tudíž $\Theta_{SN}(y) = \frac{y}{\|y\|^2}$, $y \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$.

Podobně $\Theta_{NS}(z) = \frac{z}{\|z\|^2}$, $z \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$. Dcv.

Zřejmě jsou Θ_{SN} i Θ_{NS} hladké.