Spojitá zobrazení (cvičení)

DEF. Nechť (X_i, τ_i) jsou topol. prostory pro $i=1,2$ a $f: X_1 \to X_2$. Potom f je spojité v $x \in X_1$, pokud pro každé okolí V bodu $f(x)$ v X_2 je $f_{-1}(V)$ okolí x v X_1.

$\boxed{\text{Fakt}}$ Zobr. $f: X_1 \to X_2$ je spojité, právě když f je spojité v každém $x \in X_1$.

Př. 1 Jaká $f: X_1 \to X_2$ jsou spojitá, pokud

(a) X_1 je diskrétní;

(b) X_2 je indiskrétní;

(c) X_1 je indiskrétní a X_2 je hausdorff.

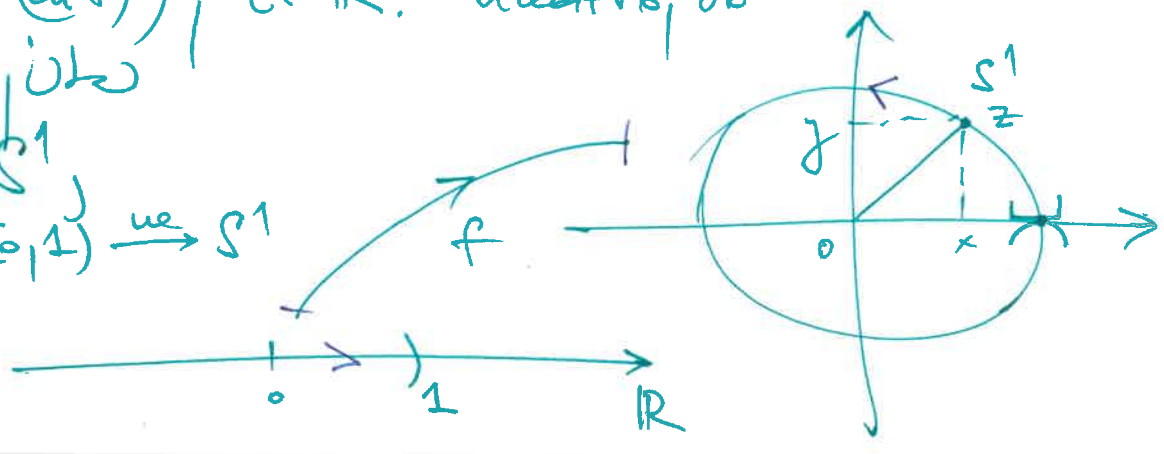
[(a), (b): všechny; (c): konstantní]

Př. 2 Uvažme $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) := (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$, $t \in \mathbb{R}$. Ukažte, že

(i) f je spojité

(ii) $f(\mathbb{R}) = S^1$,

$g := f|_{[0,1)} : [0,1) \xrightarrow{\text{na}} S^1$ je prosté.



S72

(iii) $g_{-1} : S^1 \longrightarrow [0,1)$ **není** spojité

(iv) $S^1 \not\approx [0,1)$ (tzn. nejsou homeomorfní).

kompakt   není kompakt

⌐ ad (iii): $g([0,1/2))$ není otevřená v S^1 ⌐

Pozn: $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ a komplexní násobení

$z = x + iy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$

$f(t) = e^{i2\pi t}$

~~(v) $S^1 \setminus \{1\} \approx (0,1)$, protože $f|_{(0,1)}$ je homeom.~~

Topologie studuje tzv. topologické vlastnosti, což jsou vlastnosti, které se zachovávají při homeomorfismech, např. kompaktnost, souvislost, ...

(Př) Uvažme otevřenou kouli $B(x,r)$ v $\mathbb{R}^n$, tzn.

$B(x,r) := \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \underbrace{\rho_e}_{\text{Eukl. metrika}}(y,x) < r \}$.

Potom $B(x,r) \approx B(0,1)$, tzn. "velikost" není topol. vlastnost.

⌐ $\varphi : B(x,r) \longrightarrow B(0,1)$, $\varphi(y) := \frac{y-x}{r}$

$\varphi^{-1}(z) = rz + x$ ⌐

Pr: $\mathbb{R}^n \simeq B(0,1)$, tzn. "omezenost" není topolog. vlastnost

$\ulcorner$ $y = \varphi(x) := \dfrac{x}{1-|x|^2}$, $x \in B(0,1)$ ... homeom.

$x = \varphi_{-1}(y) := \dfrac{2y}{1+\sqrt{1+4|y|^2}}$, $y \in \mathbb{R}^n$ $\lrcorner$

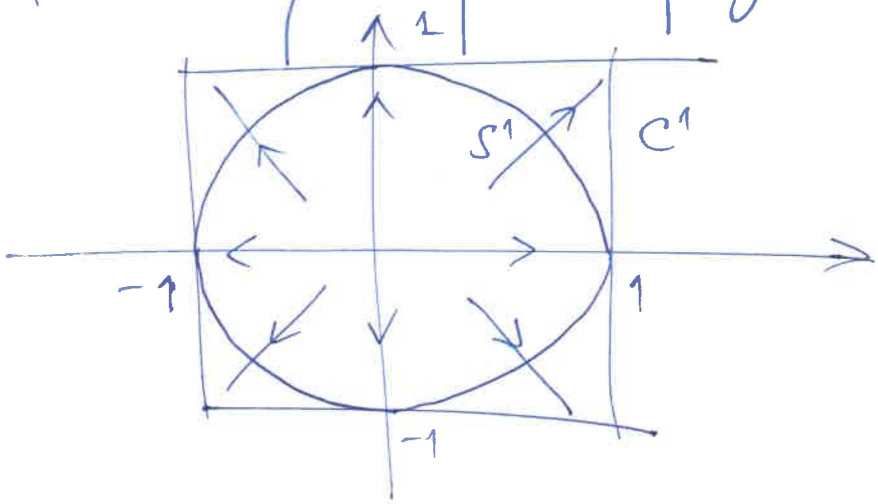
Pr: $S^1 \simeq C^1 := \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x_1|, |x_2|\} = 1\}$

S^1 | jednot. kružnice; C^1: hranice ~~jednot.~~ čtverce $[-1,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$;

obecně $S^n \simeq C^n = \partial[-1,1]^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

S^n | jednot. n-sféra v $\mathbb{R}^{n+1}$

Tzn. "rohy" nejsou topologické objekty.



$\ulcorner$ $y = \varphi(x) := \dfrac{(x_1, \dots, x_{n+1})}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2}}$, $x \in C^n$, homeom.

$x = \varphi_{-1}(y) = \dfrac{(x_1, \dots, x_{n+1})}{\max\{|x_1|, \dots, |x_{n+1}|\}}$, $x \in S^n$. $\lrcorner$

Kompaktnost (př.)

1. V diskrétním prostoru jsou kompaktní právě konečné množiny.
2. V indiskrétním prostoru X jsou kompaktní všechny podmnožiny, i když uzavřené jsou pouze množiny $\emptyset, X$.
3. $K \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní, právě když je K uzavřená a omezená v $\mathbb{R}^n$. $\boxed{\text{Heine – Borel}}$
4. * V Sorgenfreyho přímce jsou kompaktní nejvýše spočetné.

⌈ Nechť $\emptyset \neq C$ je kompaktní. Pro $x \in C$ je

$$[x, \infty) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, x - \frac{1}{n}\right)$$

otevř. pokrytí C. Ex. konečné podpokrytí, tzn. ex. $\delta_x > 0$: $I_x := (x - \delta_x, x)$ je disjunktní s C. Pro $x, y \in C$, $x \neq y$ je zřejmě $I_x \cap I_y = \emptyset$. ⌋

Věta (o nabývání extrémů)

Nechť X je kompaktní topol. prostor a $f : X \to \mathbb{R}$ je spojitá. Potom f na X nabývá svých extrémů.

Důkaz: Víme, že $f(X)$ je kompakt v $\mathbb{R}$, tudíž omezená a uzavřená podmnožina v $\mathbb{R}$. Proto $\sup_X f, \inf_X f \in \mathbb{R} \cap f(X)$ a f je nabývá. ■

Souvislost (cv.)

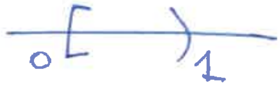
DEF. (X,τ) je souvislý, pokud pro každou $\emptyset \neq G \subset X$, která je otevř. a uzavřená v X (clopen = closed + open), platí $G = X$.

Pozn: Zřejmě X není souvislý, právě když ex. $\emptyset \neq U, V \subset X$ otevřené, $U \cap V = \emptyset$: $X = U \cup V$.

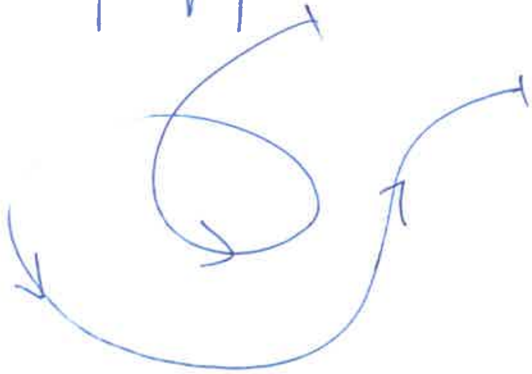
$\boxed{\Rightarrow}$ Ex. $\emptyset \neq G \subsetneq X$, která je otev. i uzavřená v X. Potom $U := G$ a $V := X \setminus G$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Polož $G := U$. Potom $X \setminus G = V$.

Př 1.) V $\mathbb{R}$ jsou souvislé množiny právě intervaly.



2.) grafy spojitých křivek v $\mathbb{R}^n$. Nechť $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ je spojitá. Potom $\langle \varphi \rangle := \varphi([0,1])$ je souvislé v $\mathbb{R}^n$.



Věta (o nabývání mezihodnot) Nechť X je souv. top. pr. a $f : X \to \mathbb{R}$ je spojitá. Potom $f(X)$ je interval v $\mathbb{R}$. Spec., jsou-li $a, b \in X$, potom f nabývá všech mezihodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$.

Pozn: (i) MA: Pro $X = [a,b]$ máme jako Darbouxovu vlast.

(ii) Je-li navíc $f(X) \subset \mathbb{Z}$ (diskrét.), potom f je konstantní.

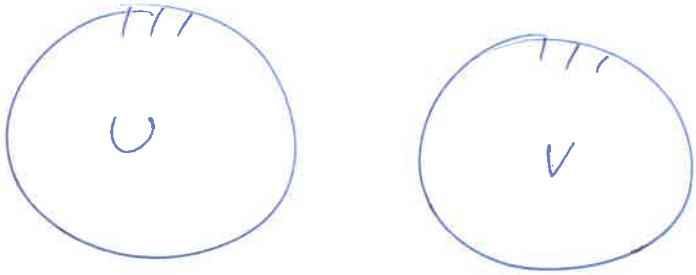
3.) Příkladem prostoru je totálně nesouvislý (Sou 2)

tzn. jediné jeho souvislé podmnožiny jsou jednobodové.

4.) Sorgenfreyho přímka je také totálně nesouvislá

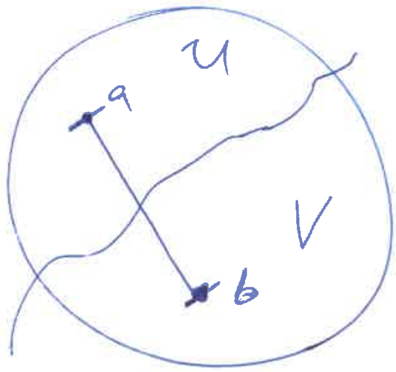
⌜Nechť $a, b \in U$, $a < b$. Potom $U \cap (-\infty, b)$ a $U \cap [b, +\infty)$ jsou otevřené v U. Tedy U není souv.⌟

5.) $\mathbb{R}^2$: 2 (otevř.) kruhy disj.



není souvislé

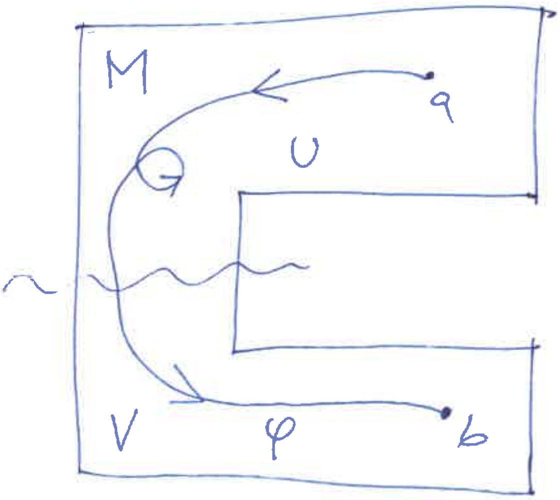
6.) Proč je $B(0,1)$ v $\mathbb{R}^2$ souvislý?



⌜protože $B(0,1)$ je konvexní.

?? Nechť $\emptyset \neq U, V \subset B(0,1)$, $U \cap V = \emptyset$ a $B(0,1) = U \cup V$. Potom ex. $a \in U$, $b \in V$. Úsečka $[a;b]$ je souvislá, ale $\emptyset \neq U \cap [a,b]$, $V \cap [a,b]$ jsou disj. otevřené podmnožiny $[a;b]$. ↯⌟

✗ topol. pr.



Množina M v $\mathbb{R}^n$ je souvislá, je-li M křivkově souvislá, tzn. $\forall a, b \in M$ ex. spojitá $\varphi : [0,1] \to M$ tak, že $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$.