Poznámka k definici symetrického součinu

Pro $\alpha \in \mathrm{Sym}^k(V)$, $\beta \in \mathrm{Sym}^\ell(V)$ definujeme

$$\alpha \odot \beta := \frac{1}{k!\,\ell!}\,\mathrm{Sym}_{k+\ell}(\alpha \otimes \beta)$$

Platí, že $\forall f^1, \dots, f^{k+\ell} \in V^*$:

$$(\alpha \odot \beta)(f^1, \dots, f^{k+\ell}) = \sum_{I,J} \alpha(f^I) \cdot \beta(f^J),$$

kde $I \cup J = \{1, \dots, k+\ell\}$, $I \cap J = \emptyset$, $|I| = k$, $|J| = \ell$.

$\boxed{\text{DÚ 3}}$

$$dx_1 \odot dx_1 = 2\, dx_1 \otimes dx_1 \quad !$$

$$dx_1 \odot dx_2 = dx_1 \otimes dx_2 + dx_2 \otimes dx_1$$

Uzavřené a exaktní formy (skripta[*] 3,15)

Nechť Ω je hlad. varieta. Spec. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množ.)

DEF. Forma $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ se nazývá

(i) uzavřená, je-li $d\omega = 0$;

(ii) exaktní, ex.-li $\tau \in \mathcal{E}^{k-1}(\Omega)$ taková, že
$$d\tau = \omega$$

Platí: (1.) Je-li ω exaktní, potom je ω uzavřená.

⌈ Je-li $\omega = d\tau$, potom $d\omega = d(d\tau) = 0$. ⌋

(2.) $\boxed{\text{Poincarého lemma}}$ (skripta 3.10, 3.15 (f))

Nechť Ω je otevřená koule v $\mathbb{R}^n$. Potom pro $k>0$ každá $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$, která je uzavřená, je i exaktní.

Pozn: Platí i pro hvězdovité nebo jednoduše souvislé oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

(3.) Nechť $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Potom

$$(\triangle) \quad \omega := \frac{x}{x^2+y^2}\,dy - \frac{y}{x^2+y^2}\,dx \in \mathcal{E}^1(\Omega)$$

je uzavřená, ale není exaktní.

———— x ————

[*] skripta V. Souček, L.K., J.T.: MA na varietách

(i) $\boxed{d\omega = 0}$

$$d\omega = \left((x^2+y^2)^{-1} - x(x^2+y^2)^{-2}\cdot 2x\right) dx\wedge dy$$

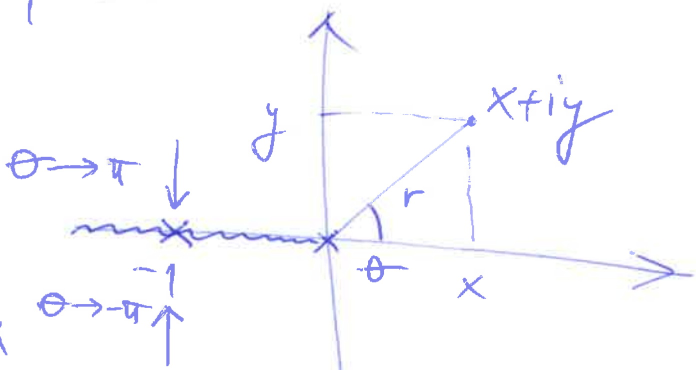
$$\mp \left((x^2+y^2)^{-1} - y(x^2+y^2)^{-2}\cdot 2y\right) dy\wedge dx$$

$$= \left(\frac{2}{x^2+y^2} - \frac{2x^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) dx\wedge dy = 0$$

(ii) Transformace z polárních souřadnic na kartézské $(x,y) = \Phi(r,\theta) := (r\cos\theta,\ r\cdot\sin\theta)$ je difeomorfismus pro $(r,\theta)\in(0,+\infty)\times(-\pi,\pi)$ na $(x,y)\in\mathcal{U} := \mathbb{R}^2\setminus(-\infty,0]$.

Máme

- $r=\sqrt{x^2+y^2}$
- $\theta = \theta(x,y) := (\Phi^{-1})_2(x,y)$, $(x,y)\in\mathcal{U}$



je hlavní hodnota argumentu bodu $(x,y) = x+iy$

Platí, že $\boxed{d\theta = \omega \text{ na } \mathcal{U}}$. (*)

Skutečně, máme na $(0,+\infty)\times(-\pi,\pi)$

$$dx = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta \quad / \cdot (-y = -r\cdot\sin\theta)$$

$$dy = \sin\theta\, dr + r\cdot\cos\theta\, d\theta \quad / \cdot (x = r\cdot\cos\theta)$$

$$-y\,dx + x\,dy = r^2\, d\theta$$

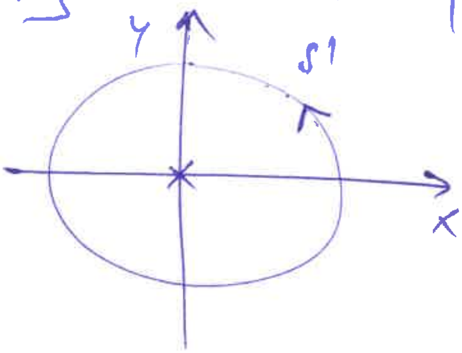
Z (*) máme, že $d\omega = d(d\theta) = 0$ na $\mathcal{U}$ a ze spojitosti $d\omega = 0$ na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(iii) ω není exaktní na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Sporem: Nechť $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ a $\omega = df$.

$\Rightarrow$ Potom na $\mathcal{U}$ máme $d\theta = \omega = df$, tudíž $d(\theta - f) = 0$ na $\mathcal{U}$. Existuje tedy $c \in \mathbb{R}$ tak, že $\theta = f + c$ na $\mathcal{U}$, což je spor, protože θ nelze ani spojitě rozšířit na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. ↯↯

B) Jinak: Platí, že



• $$\int_{S^1} \omega \underset{\substack{x = \cos\theta \\ y = \sin\theta}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\, d\theta = 2\pi,$$ ale ze Stokesovy věty je $\int_{S^1} \omega = \int_{S^1} df = \int_{\partial S^1} f = 0$, protože $\partial S^1 = \emptyset$. To je spor. ↯↯

De Rhamův komplex

Nechť M je hladká varieta dimenze n. Uvažme komplex*)

$$\mathcal{E}^0(M) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{E}^n(M),$$

kde $\mathcal{E}^k(M)$ je vektorový prostor všech hladkých k-forem na M a d je de Rhamův (vnější) diferenciál. Označme

$$\mathcal{C}^k(M) := \{\omega \in \mathcal{E}^k(M) \mid \underbrace{d\omega = 0}_{\text{uzavřené}}\},$$

$$\mathcal{L}^k(M) := \{\omega \in \mathcal{E}^k(M) \mid \exists\, \tau \in \mathcal{E}^{k-1}(M) : \underbrace{\omega = d\tau}_{\text{exaktní}}\} \text{ a}$$

$$H^k_{DR}(M) := \mathcal{C}^k(M) / \mathcal{L}^k(M) \quad \dots \quad k\text{-tá de Rhamova kohomologie } M$$

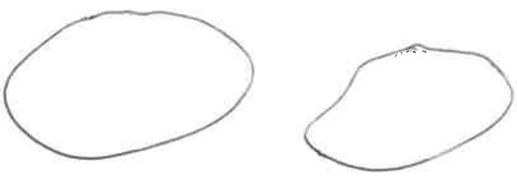
Pozn.: (i) Protože $d \circ d = 0$, je $\mathcal{L}^k(M) \subset \mathcal{C}^k(M)$.

(ii) $H^k(M) := H^k_{DR}(M) = 0 \iff$ každá uzavřená k-forma ω na M je exaktní

(iii) $H^0(M) = \mathcal{C}^0(M) = \{$konstantní funkce na každé komponentě $M\}$

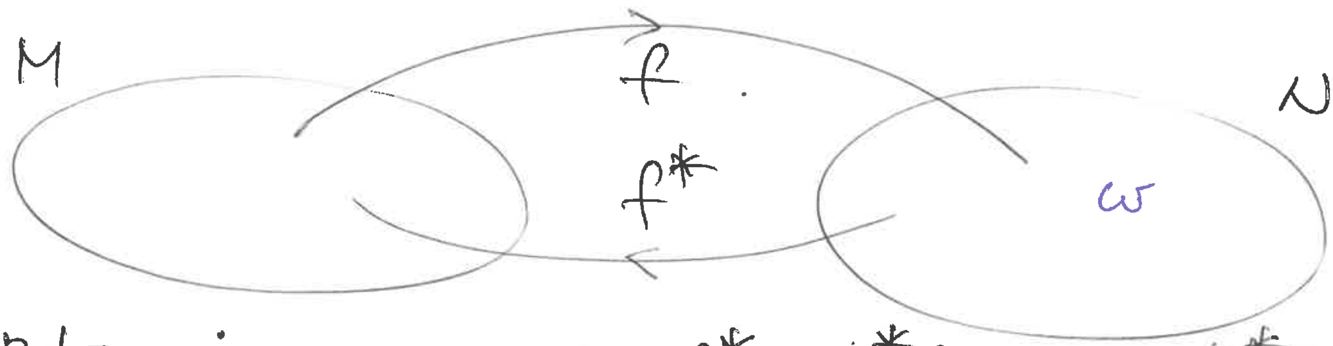
$\simeq \mathbb{R}$, je-li M souvislé;

$\simeq \mathbb{R}^p$, má-li M p komponent.



*) $\dots \longrightarrow V_i \xrightarrow{L_i} V_{i+1} \xrightarrow{L_{i+1}} V_{i+2} \longrightarrow \dots$,
kde V_i jsou vekt. pr., L_i lineární zobrazení a $\boxed{L_{i+1} \circ L_i = 0}$

Nechť $f: M \to N$ je hladké zobrazení mezi varietami | DR2



Potom jsme zavedli $f^*: \mathcal{E}^*(N) \to \mathcal{E}^*(M)$.

Označme $f^*_k := f^*|_{\mathcal{E}^k(N)}$.

Potom $f^*_k: \mathcal{E}^k(N) \longmapsto \mathcal{E}^k(M)$ indukuje zobrazení $f^*_k: H^k(N) \longmapsto H^k(M)$.

Skutečně, položme

$$f^*_k([\omega]) := [f^*_k\omega],$$

kde $\omega \in \mathcal{E}^k(N)$ a $[\omega] := \{\omega + d\tau \mid \tau \in \mathcal{E}^{k-1}(N)\} \in H^k(N)$. Definice je v pořádku, protože $f^*_k\omega$ je uzavřená nebo exaktní k-forma na M, je-li taková i forma ω na N.

To plyne z rovnosti: $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$.

Pozn: (i) Je-li $id: M \to M$ identita na hlad. variet(ě), potom $id_k^*: \mathcal{E}^k(M) \to \mathcal{E}^k(M)$ je identita na $\mathcal{E}^k(M)$, tedy i na $H^k(M)$.

(ii) Nechť $f: M \to N$ je difeomorfismus mezi hlad. varietami. Potom $f_k^*: \underset{H^k(N)}{\mathcal{E}^k(N)} \to \underset{H^k(M)}{\mathcal{E}^k(M)}$ je izomorfismus. Skutečně, máme

$$f_k^* \circ (f_{-1})_k^* = (f_{-1} \circ f)_k^* = id_{\underset{H^k(M)}{\mathcal{E}^k(M)}} \text{ a } (f_{-1})_k^* \circ f_k^* = id_{\mathcal{E}^k(N)}.$$

Máme tedy

$\boxed{\text{Fakt}}$ Jsou-li hlad. variety M a N difeomorfní, potom pro každé $k = 0, 1, 2, \dots$ jsou $H^k(M)$ a $H^k(N)$ izomorfní.

Příl

- $\dim H^k(S^n) = 1$ pro $k = 0, n$,
  $= 0$ jinak;
- $\dim H^k(T^n) = \binom{n}{k}$, $k = 0, \dots, n$
- $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) = \{\alpha[\omega] \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$,

kde $\omega := \frac{x}{x^2+y^2}\,dy - \frac{y}{x^2+y^2}\,dx$ a

$[\omega] := \{\omega + df \mid f \in \mathcal{E}^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})\}$.

Neboli $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \simeq \mathbb{R}$.