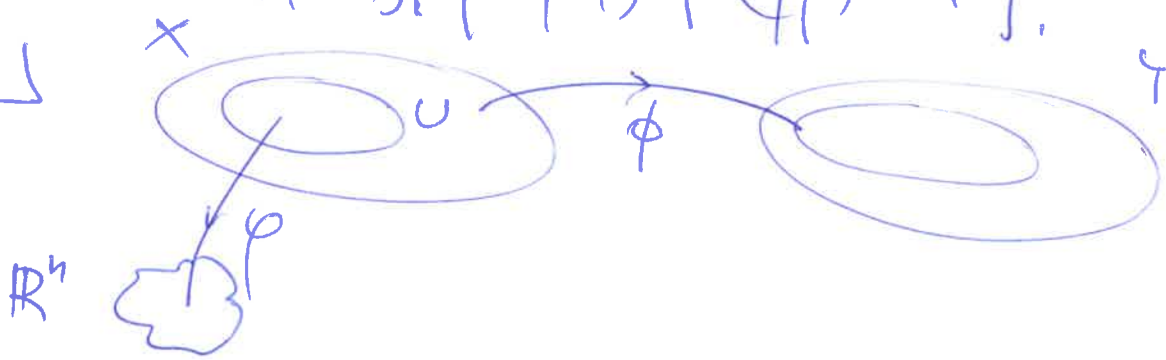
Topologie a diferenc. struktura indukované zobrazením

DG 1

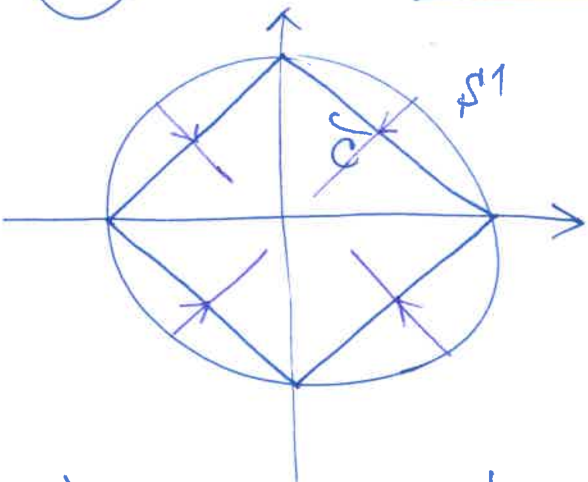
Nechť $\phi : X \xrightarrow{na} Y$ je bijekce mezi množinami.

1. Nechť $\mathcal{T}$ je topologie na X. Potom $\mathcal{S}$ je topologie na Y taková, že ϕ je homeomorf. $(X, \mathcal{T})$ na $(Y, \mathcal{S})$, právě když $\mathcal{S} = \phi(\mathcal{T})$, kde
$$\phi(\mathcal{T}) := \{\phi(G) \mid G \in \mathcal{T}\}.$$
⌜Zřejmé.⌟

2. Nechť X je hlad. varieta, tzn. $(X, \mathcal{T})$ je topol. varieta s diferenc. strukturou $\mathcal{A}$. Potom $\mathcal{B}$ je difer. strukt. na $(Y, \phi(\mathcal{T}))$ taková, že ϕ je difeom. $(X, \mathcal{A})$ na $(Y, \mathcal{B})$, právě když $\mathcal{B} = \phi(\mathcal{A})$, kde
$$\phi(\mathcal{A}) := \{(\phi(U), \varphi \circ \phi_{-1}) \mid (U, \varphi) \in \mathcal{A}\}.$$
⌜Zřejmé.⌟



Př. (i) Ex. homeomorf. $\phi : S^1 \xrightarrow{na} \tilde{C}$.

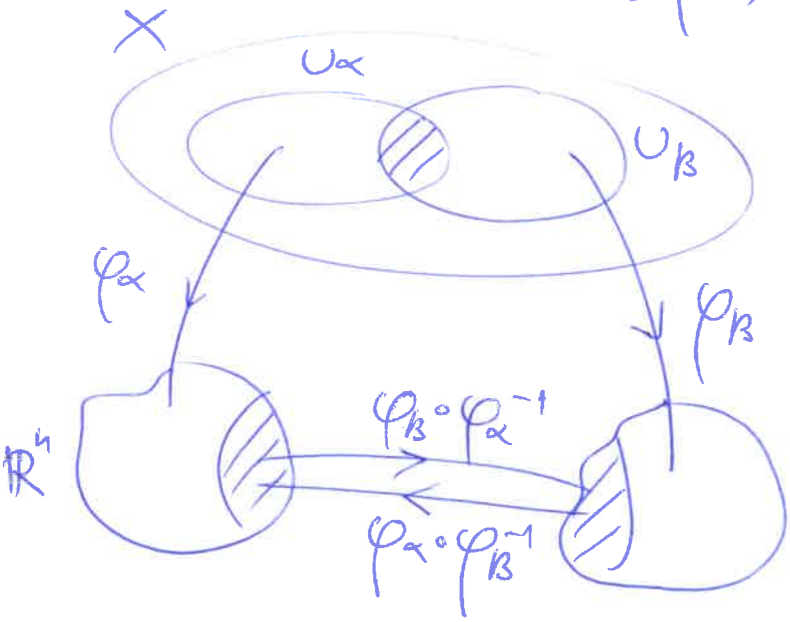


Potom na $\tilde{C}$ ex. jediná difer. struktura tak, že ϕ je difeom.

(ii) Ex. bijekce $\phi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{na} \mathbb{R}^1$, protože $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2$ mají stejnou mohutnost.

Struktura hlad. variety indukovaná na množině atlasem

Nechť X je množina. Nechť na X máme (atlas) $\mathcal{A} := \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ takový, že



(i) $\forall \alpha \in A$: $U_\alpha \subset X$, $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ je prosté a $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ je otevřená v $\mathbb{R}^n$

(ii) $\forall \alpha, \beta \in A$: $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ a $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ jsou otevřené v $\mathbb{R}^n$ a $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \xrightarrow{na} \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ je difeomorfismus

(iii) $\exists$ spočetná $\tilde{A} \subset A$: $\bigcup_{\alpha \in \tilde{A}} U_\alpha = X$

(iv) Je-li $x, y \in X$, $x \neq y$, potom buď ex. $\alpha \in A$ tak, že $x, y \in U_\alpha$, anebo existují disjunktní U_α a U_β tak, že $x \in U_\alpha$ a $y \in U_\beta$.

Potom na X existuje jediná struktura hladké variety tak, že $\mathcal{A}$ je hladký atlas na X.

<u>Důkaz:</u> Důkaz, že

$\mathcal{B} := \{\varphi_\alpha^{-1}(V) \mid \alpha \in A,\ V \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená$\}$

je báze nějaké topologie $\mathcal{T}$ na X je stejný jako důkaz, že každý atlas na topol. prostoru jednoznačně určuje topologii. Z (i) a (iii) tedy $\mathcal{T}$ je jediná topologie na X taková, že $\mathcal{U}$ je atlas na X. Z (ii) plyne, že atlas $\mathcal{U}$ je hladký. Z (iii) víme, že $\mathcal{T}$ má spočetnou bázi. Z (iv) plyne, že X je Hausdorffův.

$\blacksquare$