Generovaná topologie

Nechť X je množina.

(i) Jsou-li $\mathcal{T}_\alpha$, $\alpha \in A$ topologie na X, potom

$$\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{T}_\alpha \text{ je topologie na } X.$$

[Snadno ověříme (O1) – (O3)]

(ii) Nechť $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$. Potom ex. nejmenší topologie $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ na X, která obsahuje $\mathcal{S}$. Říkáme, že $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ je topologie generovaná $\mathcal{S}$.

[Podle (i) zřejmě $\mathcal{T}(\mathcal{S}) = \bigcap \{ \mathcal{T} \text{ je topol. na } X \mid \mathcal{S} \subset \mathcal{T} \}$.]

diskrét. top.

(iii) Nechť $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ je taková, že

(a) $\mathcal{B}$ pokrývá X, tzn. $\bigcup \mathcal{B} = X$;

(b) $\mathcal{B}$ je uzavřená na konečné průniky, tzn.

$\forall G_1, G_2 \in \mathcal{B}, G_1 \cap G_2 \neq \emptyset : G_1 \cap G_2 \in \mathcal{B}$.

Potom $\mathcal{B}$ je báze $\mathcal{T}(\mathcal{B})$.

[Důkaz: Definujme $\mathcal{T}$ jako systém všech $G \subset X$ takových, že existují $G_\alpha \in \mathcal{B}$, $\alpha \in A$ lib. tak, že

$$G = \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha.$$

Stačí ukázat, že $\mathcal{T}$ je topologie na X, tzn. splňuje (O1) – (O3). Zřejmě (O1).

(O2): $\bigcup\limits_{\alpha\in A} \underset{\mathcal{T}}{\underset{\cap}{G_\alpha}} = \bigcup\limits_{\alpha\in A}\Big(\bigcup\limits_{\beta\in B_\alpha} \underset{\mathcal{B}}{\underset{\cap}{G_{\alpha,\beta}}}\Big) = \bigcup\limits_{\substack{\alpha\in A\\ \beta\in B_\alpha}} \underset{\mathcal{B}}{\underset{\cap}{G_{\alpha,\beta}}} \in \mathcal{T}$; $\quad$ GTR

(O3): $\underset{\mathcal{T}}{\underset{\cap}{G_1}} \cap \underset{\mathcal{T}}{\underset{\cap}{G_2}} = \Big(\bigcup\limits_{\alpha\in A} \underset{\mathcal{B}}{\underset{\cap}{G_{1,\alpha}}}\Big) \cap \Big(\bigcup\limits_{\beta\in B} \underset{\mathcal{B}}{\underset{\cap}{G_{2,\beta}}}\Big) = \bigcup\limits_{\substack{\alpha\in A\\ \beta\in B}} \underset{\mathcal{B}\cup\{\emptyset\}}{\underset{\cap}{(G_{1,\alpha}\cap G_{2,\beta})}} \in \mathcal{T}$.

$\blacksquare$

Př. Jak vypadá na $\mathbb{R}$ topologie generovaná:

(a) všemi ot. intervaly délky 1;

(b) všemi ot. intervaly s racionál. koncovými body;

(c) všemi jednobodovými množinami;

(d) všemi uzavřenými intervaly;

(e) $\{[a,b) \mid -\infty < a < b \leq +\infty\}$.

Je generující systém bází této topologie?

Řešení: (a), (b): Euklid. topologie na $\mathbb{R}$

(c), (d): diskrétní top.

(e) Sorgenfreyho přímka

* větší než Euklid. topologie, protože jemnější

$$(a,b) = \bigcup_{a<c<b} [c,b) \text{ je ot.}$$

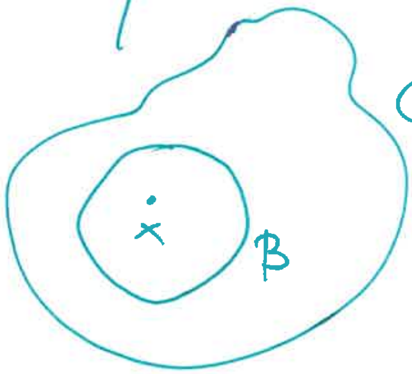
* $[a,b)$ jsou zároveň otevřené i uzavřené, protože

$$\mathbb{R}\setminus[a,b) = \underset{\text{ot.}}{(-\infty,a)} \cup \underset{\text{ot.}}{[b,+\infty)} \text{ je ot.}$$

* Hausdorffův
* menší (hrubší) než diskrétní, protože $\{a\}$ není ot.

$\boxed{GTB}$

Pozn.: (i) $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ je báze topologie $\mathcal{T}$, právě když $\forall G \in \mathcal{T}\ \forall x \in G\ \exists B \in \mathcal{B}: x \in B \subset G$.



$\boxed{\Rightarrow}$ Nechť $G \in \mathcal{T}$ a $x \in G$. Potom

$$G = \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha,$$

kde $G_\alpha \in \mathcal{B}$, $\alpha \in A$. Ex. $\alpha \in A$, že $x \in G_\alpha \subset G$.

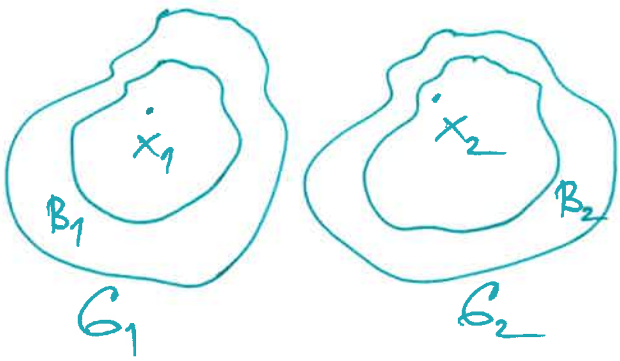
$\boxed{\Leftarrow}$ Nechť $G \in \mathcal{T}$. Pro každé $x \in G$ ex. $B_x \in \mathcal{B}$, že

$$x \in B_x \subset G.$$

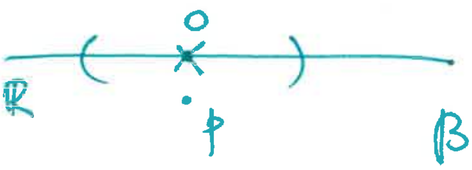
Potom $G = \bigcup_{x \in G} B_x$. ▨

(ii) Nechť $\mathcal{B}$ je báze topologie $\mathcal{T}$ na X. Potom $(X, \mathcal{T})$ je Hausdorffův, právě když $\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2\ \exists B_1, B_2 \in \mathcal{B}: x_1 \in B_1,\ x_2 \in B_2$ a $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

$\Leftarrow$: jasné; $\Rightarrow$:



Př. Nechť $\mathcal{T}_e$ je Euklid. topol. na $\mathbb{R}$. Nechť $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$, kde $p \notin \mathbb{R}$. Na X uvažme topologii $\mathcal{T}$ generovanou



$$\mathcal{B} := \mathcal{T}_e \cup \{(G \setminus \{0\}) \cup \{p\} \mid G \in \mathcal{T}_e,\ 0 \in G\}.$$

Potom $(X, \mathcal{T})$ <u>není</u> Hausdorff.

6TY

Skutočne, $\mathcal{B}$ je báza $\mathcal{T}$.
Nech $G_1, G_2 \in \mathcal{B}$, $0 \in G_1$ a $p \in G_2$.
Potom $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$. Ex. $\varepsilon > 0$ taká, že

$$(-\varepsilon, \varepsilon) \subset G_1 \quad \text{a} \quad \big((-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}\big) \cup \{p\} \subset G_2.$$

Tudíž $\emptyset \neq (-\varepsilon, 0) \cup (0, \varepsilon) \subset G_1 \cap G_2$.

— x —