

# Požadavky ke zkoušce z předmětu NMMA301 Úvod do komplexní analýzy, LS 2023/24

Roman Lávička

(verze ze dne 14. 2. 2024)

Zkouška bude písemná a má 2 části. Teoretická část bude trvat 60 minut a početní část 75 minut. Z každé části může student získat maximálně 30 bodů a musí mít aspoň 15 bodů, aby u zkoušky uspěl. Pokud student získá z každé části aspoň 15 bodů, pak bude hodnocen podle dosaženého bodového součtu z obou částí takto: výborně za 51 - 60 bodů, velmi dobře za 41 - 50 bodů a dobře za 30 - 40 bodů. Při zkoušce není dovoleno používat nic kromě psacích potřeb.

Student má právo podívat se na opravenou písemku a vznést případné námitky pouze při vyhlášení výsledků, které proběhne zpravidla týž den jako zkouška.

## Požadavky z teoretické části:

1. Zavedení prostoru komplexních čísel  $\mathbf{C}$ , základní vlastnosti.
2. Derivace komplexní funkce komplexní proměnné, základní vlastnosti, Cauchy-Riemannova věta.
3. Elementární funkce v  $\mathbf{C}$ : exponenciála a logaritmus. Hlavní hodnota argumentu a logaritmu. Základní vlastnosti.
4. Definice (regulární) křivky a křivkového integrálu, základní vlastnosti.
5. Tvrzení o výpočtu křivkového integrálu pomocí primitivní funkce.
6. Definice oblasti a komponenty otevřené množiny v  $\mathbf{C}$ .
7. Věta o existenci primitivní funkce na obecné a na hvězdovité oblasti.
8. Goursatovo lemma aneb Cauchyho věta pro trojúhelník.
9. Cauchyho věta pro hvězdovité oblasti.
10. Věta o derivování integrálu závislého na komplexním parametru.
11. Definice indexu bodu vzhledem ke křivce. Věta o základních vlastnostech indexu.
12. Cauchyho vzorec pro kruh. Cauchyho odhady.
13. Morerova věta.
14. Liouvilleova věta.
15. Základní věta algebry.
16. Weierstrassova věta. Konvergence a derivování mocninné řady.

17. Věta o rozvoji holomorfní funkce v mocninnou řadu na kruhu.
18. Věta o nulovém bodě holomorfní funkce.
19. Věta o jednoznačnosti pro holomorfní funkce.
20. Princip maxima modulu.
21. Riemannova sféra  $\mathbf{S} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ .
22. Klasifikace izolovaných singularit: věta o odstranitelné singularitě, věta o pólu a Weierstrass-Casoratiho věta o podstatné singularitě. Picardova věta (bd).
23. Zavedení a konvergence Laurentových řad.
24. Cauchyho vzorec pro mezikruží.
25. Věta o rozvoji holomorfní funkce v Laurentovu řadu na mezikruží. Věta o Laurentově rozvoji kolem izolované singularity.
26. Rozklad funkce holomorfní s konečně mnoha izolovanými singularitami.
27. Reziduová věta na hvězdovité oblasti. Pravidla pro výpočet reziduí.
28. Jednoznačné větve argumentu a logaritmu podél křivky. Význam a výpočet indexu bodu ke křivce.
29. Obecná Cauchyho a reziduová věta pro cykly a jednoduše souvislé oblasti.
30. Jordanova křivka a Jordanova věta (bd).

(bd) = nebude zkoušen důkaz, jen znění příslušné věty

**Požadavky z početní části:** Příklady na Laurentovy řady, izolované singularity, rezidua a pomocí reziduové věty výpočet integrálů typu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx, \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax} dx, \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos x dx, \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin x dx,$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt, \int_0^{+\infty} R(x) x^{p-1} dx \text{ a } \int_{-\infty}^{+\infty} R(e^x) e^{px} dx,$$

kde  $R$  je racionální funkce,  $a \in \mathbf{R}$  a  $p$  necelé číslo (viz. kapitola 2 v [K]).

## Literatura:

- [K] J. Kopáček a kol., Příklady z matematiky pro fyziky IV, Matfyzpress, MFF UK Praha, 1996.
- [N] B. Novák, Funkce komplexní proměnné pro učitelské studium MFF UK, skripta, 1973
- [R] W. Rudin, Reálná a komplexní analýza, Academia Praha, 1977
- [V] J. Veselý, Komplexní analýza pro učitele, Karolinum, UK Praha, 2000.

Ve skriptech [N] a [V] jsou rovněž vyřešené základní typy příkladů. Upozorňuji, že v [K] a v [N] se používá odlišné značení pro argument, logaritmus a obecnou mocninu, než jsme zavedli na přednášce (např. pro hlavní hodnotu se užívá značení  $\text{Log}$ ,  $\text{Ln}$  a  $\text{Arg}$ ).