

Požadavky ke zkoušce z předmětu NMMA301 Úvod do komplexní analýzy, ZS 2022/23

Roman Lávička

(verze ze dne 25. 9. 2022)

Termíny zkoušek budou vypsány ve studijním informačním systému SIS. Zájemce se přihlásí na příslušný termín. Pokud se bez vážného důvodu na zkoušku nedostaví, termín mu propadá.

Při zkoušce není dovoleno používat nic kromě psacích potřeb. Zkouška bude písemná a má 2 části. Teoretická část bude trvat 60 minut a početní část 75 minut. Z každé části může student získat maximálně 30 bodů a musí mít aspoň 15 bodů, aby u zkoušky uspěl. Pokud student získá z každé části aspoň 15 bodů, pak bude hodnocen podle dosaženého bodového součtu z obou částí takto: výborně za 51 - 60 bodů, velmi dobře za 41 - 50 bodů a dobře za 30 - 40 bodů.

Student má právo podívat se na opravenou písemku a vznést případné námítky pouze při vyhlásování výsledků, které proběhne zpravidla též den jako zkouška.

Požadavky z teoretické části:

1. Zavedení prostoru komplexních čísel $\mathbf{C}$, základní vlastnosti.
2. Derivace komplexní funkce komplexní proměnné, základní vlastnosti, Cauchy-Riemannova věta.
3. Zavedení elementárních funkcí v $\mathbf{C}$: exponenciály, hyperbolických, goniometrických funkcí, argumentu, logaritmu a obecné mocniny. Hlavní hodnota argumentu, logaritmu a mocniny. Základní vlastnosti.
4. Definice (regulární) křivky a křivkového integrálu, základní vlastnosti.
5. Tvrzení o výpočtu křivkového integrálu pomocí primitivní funkce.
6. Věta o existenci primitivní funkce na obecné a na hvězdovitě konvexní oblasti.
7. Goursatovo lemma aneb Cauchyho věta pro trojúhelník.
8. Cauchyho věta pro hvězdovitě konvexní oblasti.
9. Věta o derivování integrálu závislého na komplexním parametru.
10. Definice indexu bodu vzhledem ke křivce. Věta o základních vlastnostech indexu.
11. Cauchyho vzorec pro kruh. Cauchyho odhady.

12. Morerova věta.
13. Liouvilleova věta.
14. Základní věta algebry.
15. Weierstrassova věta. Konvergence a derivování mocninné řady.
16. Věta o rozvoji holomorfní funkce v mocninnou řadu na kruhu.
17. Věta o nulovém bodě holomorfní funkce.
18. Věta o jednoznačnosti pro holomorfní funkce.
19. Princip maxima modulu.
20. Riemannova sféra $\mathbf{S} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$.
21. Klasifikace izolovaných singularit: věta o odstranitelné singularitě, věta o pólu a Weierstrass-Casoratiho věta o podstatné singularitě. Picardova věta (bd).
22. Zavedení a konvergence Laurentových řad.
23. Cauchyho vzorec pro mezikruží.
24. Věta o rozvoji holomorfní funkce v Laurentovu řadu na mezikruží. Věta o Laurentově rozvoji kolem izolované singularity.
25. Rozklad funkce holomorfní s konečně mnoha izolovanými singularitami.
26. Reziduová věta na hvězdovitě konvexní oblasti. Pravidla pro výpočet reziduí.
27. Jednoznačné větve argumentu a logaritmu podél křivky. Význam a výpočet indexu bodu ke křivce.
28. Obecná Cauchyho a reziduová věta pro cykly a jednoduše souvislé oblasti.
29. Jordanova křivka a Jordanova věta (bd).

(bd) = nebude zkoušen důkaz, jen znění příslušné věty

Požadavky z početní části: Příklady na Laurentovy řady, izolované singularity, rezidua a pomocí reziduové věty výpočet integrálů typu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx, \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{ix} dx, \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos x dx, \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin x dx,$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt, \int_0^{+\infty} R(x) x^{p-1} dx \text{ a } \int_{-\infty}^{+\infty} R(e^x) e^{px} dx,$$

kde R je racionální funkce a p necelé číslo (viz. kapitola 2 v [K]).

Literatura:

- [K] J. Kopáček a kol., Příklady z matematiky pro fyziky IV, Matfyzpress, MFF UK Praha, 1996.
- [N] B. Novák, Funkce komplexní proměnné pro učitelské studium MFF UK, skripta, 1973
- [R] W. Rudin, Reálná a komplexní analýza, Academia Praha, 1977
- [V] J. Veselý, Komplexní analýza pro učitele, Karolinum, UK Praha, 2000.

Ve skriptech [N] a [V] jsou rovněž vyřešené základní typy příkladů. Upozorňuji, že v [K] a v [N] se používá odlišné značení pro argument, logaritmus a obecnou mocninu, než jsme zavedli na přednášce (např. pro hlavní hodnotu se užívá značení Log , Ln a Arg).