Laurentovy řady

Nechť $\{a_n\}_{n=-\infty}^{+\infty} \subset \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}$. Potom

$$(L) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-z_0)^{-n}}_{(H)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n}_{(R)}$$

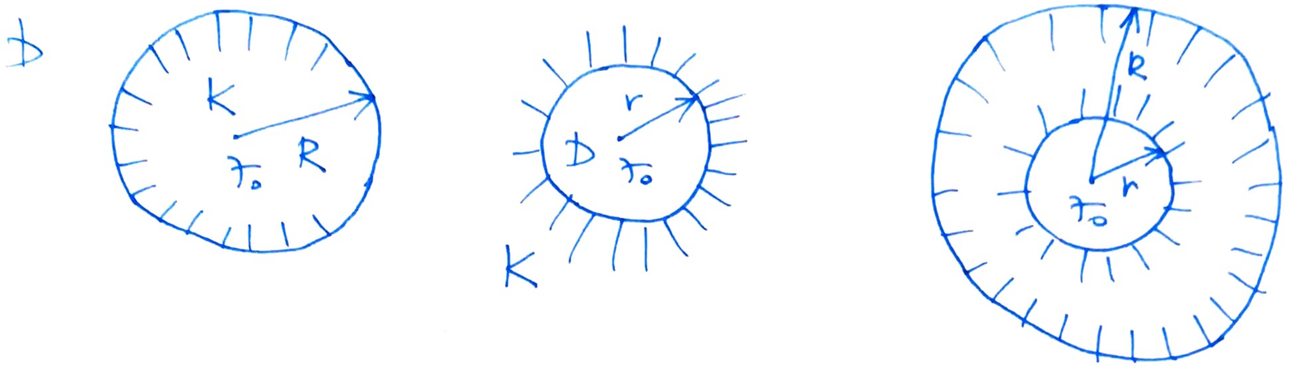
je <u>Laurentova řada</u> s koeficienty $\{a_n\}$ a středem z_0. Řada (R) je <u>regulární část</u> (L) a řada (H) je <u>hlavní část</u> (L). Řekneme, že (L) konverguje, pokud obě její části (H) i (R) konvergují.

Př. $\exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Vlastnosti (L)

1. <u>Konvergence</u>: Ex. <u>jediné</u> $R, r \in [0, +\infty]$ tak, že (i) řada (R) konverguje absol. a lokálně stejnoměrně na $|z-z_0| < R$ a diverguje na $|z-z_0| > R$;

(ii) řada (H) konverguje absol. a lokálně stejnoměrně na $|z-z_0|>r$ a diverguje na $|z-z_0|<r$.



(2) součet: Nechť $0 \le r < R \le +\infty$ (toto tady neplatí!). Položme

$$P(z_0, r, R) := \{ z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R \}.$$

mezikruží

Označme-li součet (L) jako f, potom na $P(z_0, r, R)$ je f holomorfní, řadu (L) tam derivujeme "člen po členu", atd.

Pozn: $P(z_0, R) = P(z_0, 0, R)$

DŮKAZ: (1) Číslo R je poloměr konvergence mocninné řady (R). Pro $w = \frac{1}{z - z_0}$ je řada (H) rovna mocninné řadě (*) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$.

Číslo $\frac{1}{r}$ je poloměr konvergence (*).

(2) Plyne opět z Weierstrassovy věty. ▨

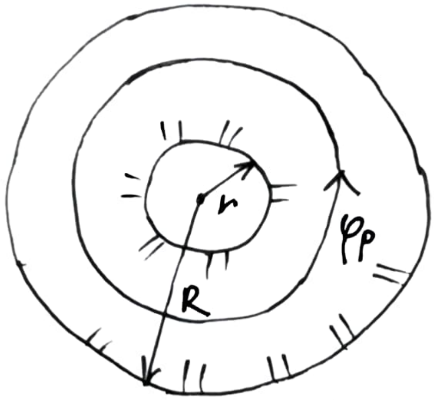
CÍL Ukážeme, že $f \in \mathcal{H}(P(z_0, r, R))$, právě když existuje jediná (L), která má na $P(z_0, r, R)$ součet f.

Holomorfní funkce na mezikruží

LEMMA Nechť f je holomorfní funkce na

$$P(z_0, r, R) := \{ z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R \},$$

kde $0 \leq r < R \leq +\infty$. Pro každé $\rho \in (r, R)$ označ



$$(\Delta) \quad \varphi_\rho(t) := z_0 + \rho e^{it}, \ t \in [0, 2\pi] \text{ a}$$

$J(\rho) := \int_{\varphi_\rho} f$. Potom je J konstantní na (r, R).

DŮKAZ: BÚNO: Nechť $z_0 = 0$.

Nechť $\rho \in (r, R)$. Potom máme

$$J(\rho) = i \int_0^{2\pi} f(\rho e^{it}) \rho e^{it} \, dt = i \int_0^{2\pi} g(\rho e^{it}) \, dt,$$

kde $g(z) := f(z) \cdot z$, $z \in P := P(0, r, R)$.

Dále

$$J'(\rho) \overset{(*)}{=} \frac{i}{\rho} \int_0^{2\pi} g'(\rho e^{it}) \rho e^{it} \, dt =$$

$$= \frac{1}{\rho} \int_{\varphi_\rho} g' = 0, \text{ protože } g' \text{ má PF } g \text{ na } P.$$

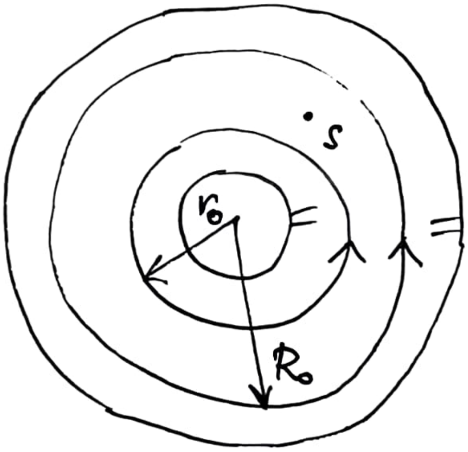
Platí $(*)$, protože $\frac{d}{d\rho}\left(g(\rho e^{it})\right) = \frac{\partial g}{\partial x} \cos t + \frac{\partial g}{\partial y} \sin t$

$$\underset{CR\ vztahy}{=} g'\cos t + i g'\sin t = g' e^{it}. \quad ▨$$

<u>VĚTA</u> (Cauchyho vzorec na mezikruží)

Nechť $f \in \mathcal{H}(P)$, kde $P := P(z_0, r, R)$.

Nechť $r < r_0 < R_0 < R$ a $s \in P(z_0, r_0, R_0)$.



Potom platí

$$(\square)\quad f(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_{R_0}} \frac{f(z)}{z-s}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_{r_0}} \frac{f(z)\,dz}{z-s},$$

kde φ_ρ je jako v $(\triangle)$.

<u>DŮKAZ</u>: Pro $z \in P$ položme

$$h(z) = \frac{f(z)-f(s)}{z-s}, \quad \cancel{}\ z \neq s;$$

$$ = f'(s), \quad z = s.$$

Potom $h \in \mathcal{H}(P)$, protože h má 'odstranitelnou' singularitu v s. Podle LEMMATU máme

$$\int_{\varphi_{R_0}} h = \underbrace{\int_{\varphi_{R_0}} \frac{f(z)\,dz}{z-s}}\, - \underbrace{f(s) \cdot \int_{\varphi_{R_0}} \frac{dz}{z-s}}_{} , \quad \int_{\varphi_{R_0}} \frac{dz}{z-s} = 2\pi i \cdot \operatorname{ind}_{\varphi_{R_0}} s = 2\pi i, \quad \text{tudíž } (\square).$$

$$\parallel$$

$$\int_{\varphi_{r_0}} h = \underbrace{\int_{\varphi_{r_0}} \frac{f(z)\,dz}{z-s}} - f(s) \cdot \int_{\varphi_{r_0}} \frac{dz}{z-s}, \quad \int_{\varphi_{r_0}} \frac{dz}{z-s} = 2\pi i \cdot \operatorname{ind}_{\varphi_{r_0}} s = 0 \quad ▨$$

VĚTA (o Laurentově rozvoji holomorfní fce na mezikruží) Nechť $P := P(z_0, r, R)$, kde $0 \le r < R \le +\infty$. Nechť $f \in \mathcal{H}(P)$. Potom existuje jediná Laurentova řada

$$(L) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

která má na P součet f. Navíc platí (**) níže.

DŮKAZ: Jednoznačnost: Nechť platí

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad z \in P.$$

Je-li $\rho \in (r, R)$ a $m \in \mathbb{Z}$, pak

$$\int_{\varphi_\rho} f(z)(z-z_0)^{-(m+1)}\, dz = \int_{\varphi_\rho} \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^{n-m-1}\, dz$$

konv. stejnom. na $\langle \varphi_\rho \rangle$

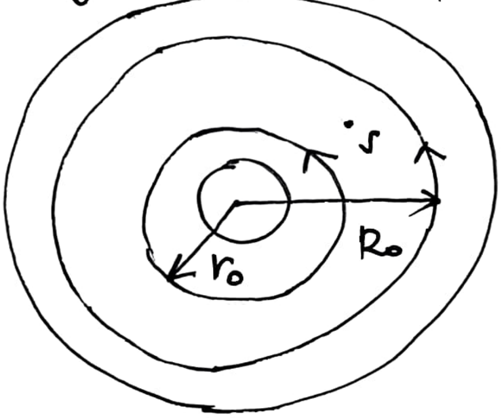
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \underbrace{\int_{\varphi_\rho} (z-z_0)^{n-m-1}\, dz}_{\begin{cases} 0, & n \neq m \\ 2\pi i \cdot \operatorname{ind}_{\varphi_\rho} z_0 = 2\pi i, & n = m \end{cases}} = 2\pi i \cdot a_m$$

Závěr: Koeficienty (L) se dají vyjádřit pomocí funkce f jako

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz, \quad n\in\mathbb{Z}, \qquad (**)$$

kde φ_ρ je jako v (Δ). Podle LEMMATU integrály nezávisí na $\rho\in(r,R)$. ✓

Existence: Nechť $s\in P$. Volme $r<r_0<R_0<R$, aby $s\in P(z_0,r_0,R_0)$. Potom z Cauchyho vzorce máme



(a) $$f(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_{R_0}} \frac{f(z)\,dz}{z-s} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_{r_0}} \frac{f(z)\,dz}{z-s};$$

(b) $$\frac{1}{z-s} = \frac{1}{(z-z_0)-(s-z_0)} = \frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{s-z_0}{z-z_0}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(s-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}$$ konverguje stejnoměrně pro $z\in\langle\varphi_{R_0}\rangle$;

(c) $$\frac{1}{z-s} = \frac{1}{(z-z_0)-(s-z_0)} = \frac{(-1)}{s-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{s-z_0}}$$

$$= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(s-z_0)^{n+1}}$$ konv. stejnoměrně pro $z \in \langle \varphi_{r_0} \rangle$.

Dosadíme (b), (c) do (a) a dostaneme

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_{R_0}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(s-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} f(z)\,dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_{r_0}} \sum_{0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(s-z_0)^{n+1}} f(z)\,dz$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (s-z_0)^n \cdot a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} (s-z_0)^{-n-1} \cdot a_{-(n+1)},$$ kde

a_n jsou jako v (**). ■ Pozn: $P(z_0,r) = P(z_0,0,r)$

VĚTA (o Laurentově rozvoji kolem izolované singularity) Nechť $f \in \mathcal{H}(P(z_0,r))$ a

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad z \in P(z_0,r).$$ Potom

(i) f má v z_0 odstranit. sing. $\Leftrightarrow$ $\forall n<0 : a_n = 0$;

(ii) f má v z_0 pól násobnosti $p \in \mathbb{N}$ $\Leftrightarrow$ $a_{-p} \neq 0$ a $\forall n<-p : a_n = 0$;

(iii) f má v z_0 podstatnou singul. $\Leftrightarrow$ $a_n \neq 0$ pro nekonečně mnoho $n<0$.

Důkaz: (i) jasné; (ii) f má v z_0 pól násobnosti p, právě když $g(z) := (z-z_0)^p f(z)$ má v z_0 odstranitelnou singularitu a po jejím odstranění je $g(z_0) \neq 0$. Neboli

$$(z-z_0)^p f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-z_0)^n, \quad z \in P(z_0, r) \text{ a}$$

$$b_0 = g(z_0) \neq 0,$$

tzn. $$f(z) = \frac{\overset{\neq 0}{b_0}}{(z-z_0)^p} + \frac{b_1}{(z-z_0)^{p-1}} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^{n-p},$$

$$z \in P(z_0, r).$$

Z (i), (ii) máme, že f <u>nemá</u> v z_0 podst. singularitu, právě když $a_n \neq 0$ pro <u>konečně</u> mnoho $n < 0$. ∎