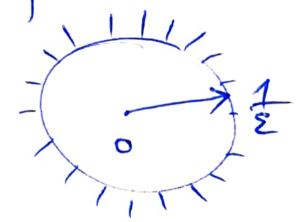
Riemannova sféra

MA: $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Označme $\mathbb{S} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ a definujme okolí v ∞ následovně: Pro každé $\varepsilon > 0$ položme

$$P(\infty, \varepsilon) := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| > \tfrac{1}{\varepsilon} \} \quad \text{a}$$

$$U(\infty, \varepsilon) := P(\infty, \varepsilon) \cup \{\infty\}.$$



DEF. Je-li $z_0, L \in \mathbb{S}$, potom $L = \lim_{z \to z_0} f(z)$, pokud $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$:

$$z \in P(z_0, \delta) \Rightarrow f(z) \in U(L, \varepsilon)$$

Počítání s ∞: Definujeme

$$\frac{a}{\infty} = 0 \quad \forall a \in \mathbb{C},$$

$$\frac{a}{0} = \infty \quad \forall a \in \mathbb{S} \setminus \{0\},$$

$$a \pm \infty = \infty \quad \forall a \in \mathbb{C},$$

$$a \cdot \infty = \infty \quad \forall a \in \mathbb{S} \setminus \{0\}$$

Nedefinujeme $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty \pm \infty, 0 \cdot \infty$

Př. $\lim_{z \to 0} z^k = \begin{cases} 0, & k > 0 \\ 1, & k = 0 \\ \infty, & k < 0 \end{cases}$

Vlastnosti $\mathbb{S}$: ((Dcv.), důkazy snadné)

1. $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \lim\limits_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right)$, má-li aspoň jedna strana smysl

2. NTJE: (i) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$

   (ii) $\lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$ v $\overline{\mathbb{R}}$

   (iii) $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$

3. V $\mathbb{S}$ platí aritmetika limit, tzn.

$$\lim_{z\to z_0} \left(f(z) \pm g(z)\right) = \lim_{z\to z_0} f(z) \pm \lim_{z\to z_0} g(z),$$

má-li pravá strana smysl;

podobně pro $\cdot$ a $/$.

Pozn: • $\mathbb{S} := \mathbb{C} \cup \{\infty\} \simeq \mathbb{CP}^1 \simeq S^2 \leftarrow$ jednotková sféra v $\mathbb{R}^3$

vlastní body ↑ nevlastní bod

komplexní projektivní přímka (viz Geom 1)

[stereografická projekce $\phi: \mathbb{S} \xrightarrow{na} S^2$ je homeomorfismus.]

• $\mathbb{S}$ je jednobodová kompaktifikace $\mathbb{C}$

Izolované singularity

DEF. Nechť f je holomorfní funkce na $P(z_0)$, kde $P(z_0) = P(z_0, r)$ pro nějaké $r>0$.

Potom f má v z_0

1. odstranitelnou singularitu, ex.-li $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$;
2. pól, je-li $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$;
3. podstatnou singularitu, pokud $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ neexistuje v $\mathbb{S}$.

Př. $\dfrac{\sin z}{z}$ má v 0 odstr. sing.;

$\dfrac{1}{z^{10}}$ —||— pól;

$e^{1/z}$ —||— podstat. sing.

VĚTA (o odstranitelné singularitě)

Nechť f je holomorfní funkce na $P(z_0)$. NTJE:

(i) z_0 je odstranit. singularita f;

(ii) ex. $r>0$ tak, že f je omezená na $P(z_0,r)$;

(iii) existuje $F \in \mathcal{H}(U(z_0))$ tak, že $F = f$ na $P(z_0)$.

Úmluva: Odstranitelná singularita je tedy odstranitelná ve smyslu (iii). Dodefinujeme f v z_0 holomorfně.

DŮKAZ: (i) $\Rightarrow$ (ii); (ii) $\Rightarrow$ (iii): Položme

$$g(z) := (z-z_0)^2 f(z), \quad z \in P(z_0);$$
$$:= 0, \quad z = z_0.$$

Potom $g \in \mathcal{H}(U(z_0))$, protože

$$g'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \underbrace{(z-z_0)}_{\to 0} \cdot \underbrace{f(z)}_{\text{omez.}} = 0.$$

Navíc pro každé $z \in U(z_0)$ je

$$g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = (z-z_0)^2 F(z),$$

kde $F(z) \overset{\text{def.}}{:=} \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-2}$, $z \in U(z_0)$.

Zřejmě $F \in \mathcal{H}(U(z_0))$ a $F = f$ na $P(z_0)$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): jasné. ∎

VĚTA (o pólu) Nechť f je holomorfní fce na $P(z_0)$.

NTJE: (1.) z_0 je pól f;

(2.) $h := \frac{1}{f}$ (po dodefinování $h(z_0) := 0$) má v z_0 nulový bod násobnosti p pro nějaké $p \in \mathbb{N}$;

(3.) existuje $p \in \mathbb{N}$ tak, že

$$(*) \qquad \lim_{z \to z_0} (z-z_0)^p f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

(4.) existuje $p \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall k \in \mathbb{Z}$

(**) $$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z) = \begin{cases} \infty, & \text{je-li } k < p; \\ \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, & \text{je-li } k = p; \\ 0, & \text{je-li } k > p. \end{cases}$$

Číslo p z (2.)–(4.) je určeno jednoznačně a nazývá se __násobnost pólu__ z_0 funkce f.

__Pozn:__ Píšeme $f(z) \sim g(z)$ pro $z \to z_0$, je-li

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Potom (3.) $\iff$ $f(z) \sim \dfrac{1}{(z - z_0)^p}$ pro $z \to z_0$.

__DŮKAZ:__ (1.) $\Rightarrow$ (2.) Protože $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$, je $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{1}{f(z)} = 0$. Po odstranění odstranitelné singularity $1/f$ má v z_0 nulový bod konečné násobnosti $p \in \mathbb{N}$.

(2.) $\Rightarrow$ (3.): Ex. $r > 0$ a $g \in \mathcal{H}(U(z_0, r))$ tak, že $g \neq 0$ na $U(z_0, r)$ a $h(z) = (z - z_0)^p g(z)$, $z \in U(z_0, r)$.
Potom $$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^p \underbrace{f(z)}_{= \frac{1}{h(z)}} = \frac{1}{g(z_0)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

(3.) $\Rightarrow$ (4.): Máme

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)^{k-p}\underbrace{(z-z_0)^p f(z)}_{\downarrow \atop \in\mathbb{C}\setminus\{0\}}$$

$$= \begin{cases} 0, & k>p; \\ \in\mathbb{C}\setminus\{0\}, & k=p; \\ \infty, & k<p. \end{cases}$$

(4.) $\Rightarrow$ (1.) pro $k=0$. ▨

<u>VĚTA</u> (CASORATI – WEIERSTRASS) Nechť f je holomorfní fce na $P(z_0)$. NTJE:

(1.) z_0 je podstatná singularita f;

(2.) $\forall r>0: \ \overline{f(P(z_0,r))} = \mathbb{C}$

<u>Pozn</u>: <u>Velká PICARDOVA VĚTA</u>: (1.) $\Leftrightarrow$

(3.) $\forall r>0: \ \mathbb{C}\setminus f(P(z_0,r))$ je nejvýše jednobodová [hluboká věta, důkaz nebude]

(Př.) $\exp(\mathbb{C}\setminus\{0\}) = \mathbb{C}\setminus\{0\}$,

$f(z) := \exp(1/z)$ má v 0 podstatnou sing.

$\forall r>0: \ f(P(0,r)) = \mathbb{C}\setminus\{0\}$

[Dcv. Proč?]

<u>DŮKAZ:</u> 2. $\Rightarrow$ 1. : jasné z definice limity.

non 2. $\Rightarrow$ non 1. : Předpokládejme, že

ex. $r>0$ tak, že $\underbrace{\mathbb{C} \setminus \overline{f(P(z_0,r))}}_{\text{otevř.}} \neq \emptyset$ a

$f \in \mathcal{H}(P(z_0,r))$.

Potom ex. $U(u_0,\beta) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{f(P(z_0,r))}$,

speciálně máme, že

$$0<|z-z_0|<r \Longrightarrow |f(z)-u_0| \geq \beta.$$

Definujme

$$(*) \quad g(z) := \frac{1}{f(z)-u_0}, \quad z \in P(z_0,r).$$

Potom je g holomorfní a $|g| \leq \frac{1}{\beta}$ na $P(z_0,r)$.

Tedy z_0 je odstranitelná singul. g a existuje

$$L := \lim_{z\to z_0} g(z) \in \mathbb{C}.$$

Potom máme

$$\lim_{z\to z_0} f(z) \overset{(*)}{=} \lim_{z\to z_0}\left(u_0 + \frac{1}{g(z)}\right) = \begin{cases} \infty, & \text{je-li } L=0; \\ \in \mathbb{C}, & \text{je-li } L\neq 0. \end{cases}$$

Tedy f má v z_0 buď odstranit. singul. anebo pól. ■