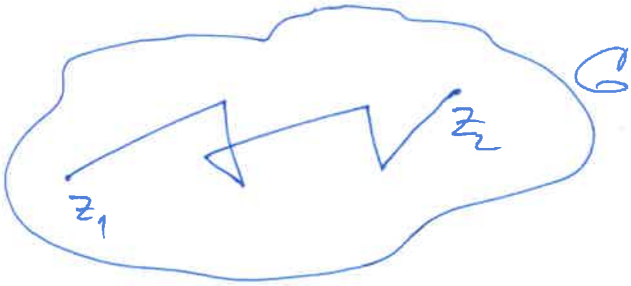
Minule: $\int_\varphi f$, PF: $F' = f$

oblast v $\mathbb{C}$:

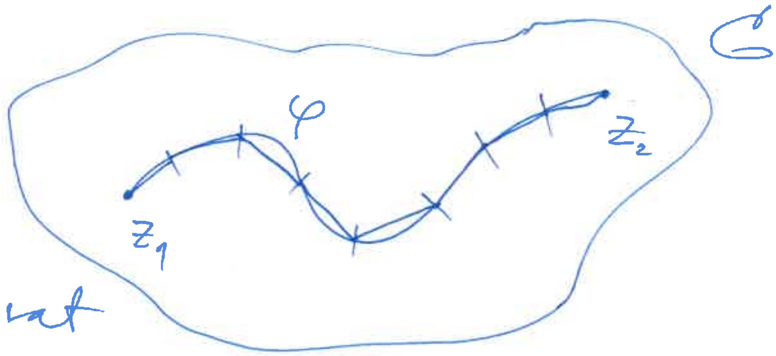


Pozn: Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená. NTJE:

1. G je oblast;
2. G je křivkově souvislá, tzn. každé $z_1, z_2 \in G$ lze v G spojit spojitou křivkou φ;
3. G je souvislá (viz MA4).

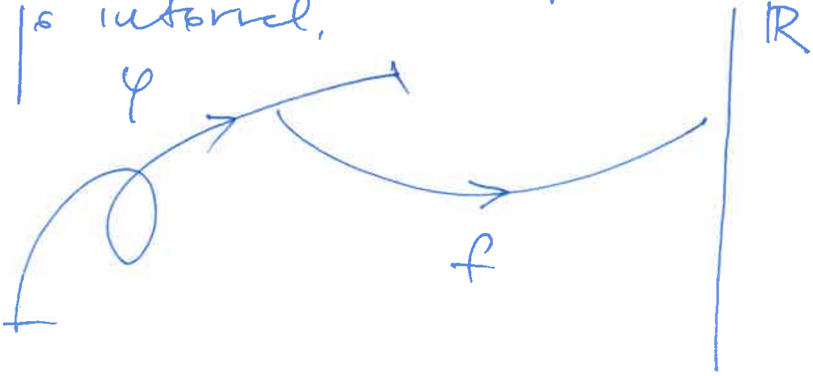
1. $\Leftrightarrow$ 2.:

$\boxed{\Leftarrow}$ Skutečně, ze stejné spojitosti φ lze φ aproximovat lomenou čarou v G.



Fakt Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast a $f: G \to \mathbb{R}$ je spojitá. Potom $f(G)$ je interval. Je-li navíc $f(G) \subset \mathbb{Z}$, potom je f na G konstantní.

Lemma Nechť $\varphi: [a,b] \to \mathbb{C}$ je spojitá a $f: \langle\varphi\rangle \to \mathbb{R}$ je spojitá. Potom $I := f(\langle\varphi\rangle)$ je interval.



Je-li navíc $I \subset \mathbb{Z}$, potom je f na $\langle\varphi\rangle$ konstantní.

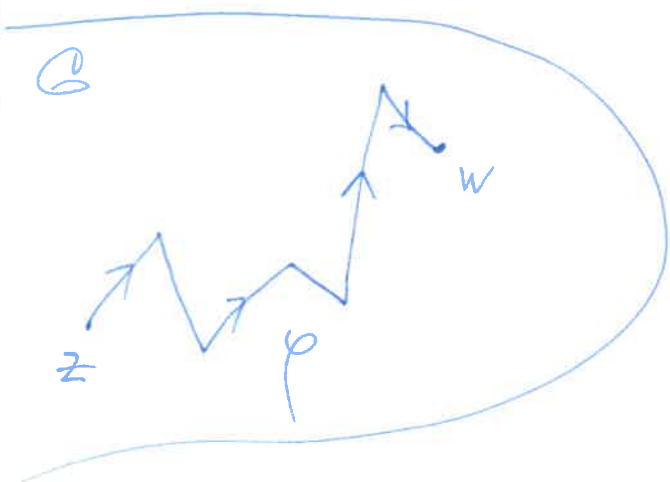
<u>DŮKAZ</u>: Protože $g := f \circ \varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá, je $I = g([a,b])$ interval. ▨

<u>DŮKAZ VĚTY</u>: Nechť $a, b \in f(G)$ a $c \in \mathbb{R}$ jsou taková, že $a < c < b$. Volme $z_1, z_2 \in G$, aby $f(z_1) = a$, $f(z_2) = b$. Protože G je oblast, ex. lomená cesta φ v G tak, že φ začíná v z_1 a končí v z_2. Z Lemmatu je $c \in \underbrace{f(\langle\varphi\rangle)}_{\text{interval}} \subset f(G)$. ▨

Tvrzení Funkce f je konstantní na oblasti $G \subset \mathbb{C}$, právě když $f' = 0$ na G.

Důkaz: $\boxed{\Longrightarrow}$ jasné;

$\boxed{\Longleftarrow}$ Nechť $z, w \in G$ a φ je lomená čára v G spojující z a w. Potom



$$f(w) - f(z) = \int_\varphi f' = 0,$$ protože f je PF k f' na G. ▨

Důsledek: Jsou-li F_1, F_2 primitivní funkce k f na oblasti $G \subset \mathbb{C}$, potom ex. $c \in \mathbb{C}$ tak, že $F_2 = F_1 + c$.

⌜ $(F_2 - F_1)' = F_2' - F_1' = f - f = 0.$ ⌟

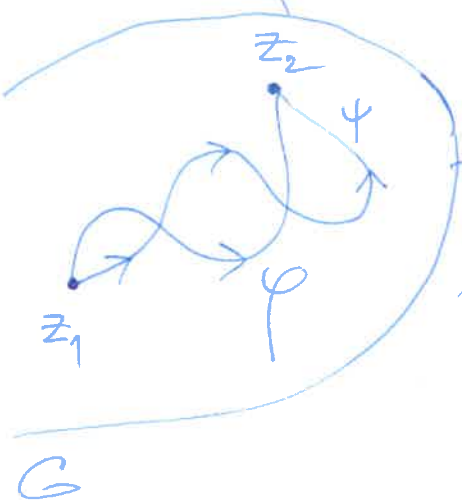
$\boxed{\text{VĚTA}}$ (o existenci PF)

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast a f je spojitá na G.

NTJE:

1. f má na G primitivní funkci;
2. $\oint_\varphi f = 0$ pro každou <u>uzavřenou</u> křivku φ v G (tzn. $\langle\varphi\rangle \subset G$)
3. $\int_\varphi f$ <u>nezávisí</u> v G <u>na křivce</u> φ, tzn. pro každé křivky $\varphi : [\alpha, \beta] \to G$, $\psi : [\gamma, \delta] \to G$ takové, že $\varphi(\alpha) = \psi(\gamma)$ a $\varphi(\beta) = \psi(\delta)$, platí

$$\int_\varphi f = \int_\psi f.$$

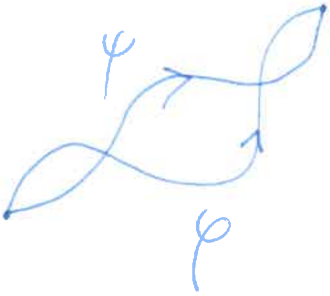


Pozn: Připomeňme <u>větu o potenciálu</u> z MA 2

Geometrie

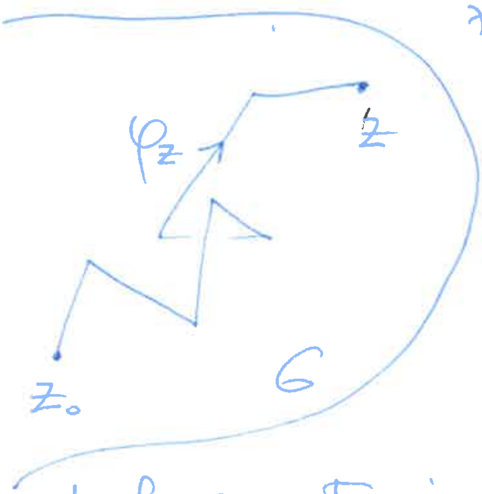
Důkaz: 1. $\Rightarrow$ 2.: plyne z Věty o výpočtu integrálu pomocí PF;

2. $\Rightarrow$ 3.: Položme $\tau := \varphi \dotplus (\dot{-}\psi)$. Potom je τ uzavřená a z 2. dostaneme



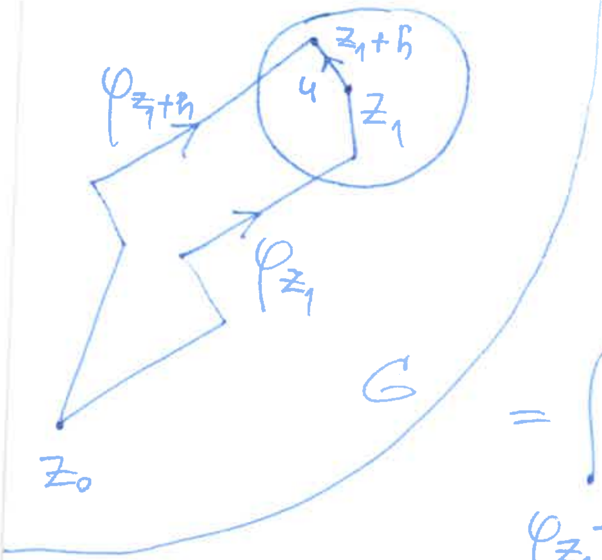
$$0 = \int_\tau f = \int_\varphi f - \int_\psi f.$$

3. $\Rightarrow$ 1.: Volme $z_0 \in G$ pevně. Pro každé $z \in G$ najdeme lomenou čáru φ_z v G, která začíná v z_0 a končí v z. Definujme



$$F(z) := \int_{\varphi_z} f, \quad z \in G.$$

Funkce F je korektní, nezávislá na volbě φ_z, protože předpokládáme 3.. Ukážeme, že F je hledaná PF k f na G. Nechť $z_1 \in G$. Dokážeme, že $F'(z_1) = f(z_1)$.



Volme $r>0$, aby $U(z_1,r) \subset G$.
Je-li $|h|<r$, potom

$$F(z_1+h) - F(z_1) \overset{③}{=}$$

$$= \int_{\varphi_{z_1}\dotplus u} f - \int_{\varphi_{z_1}} f = \int_u f, \text{ kde}$$

$u = [z_1; z_1+h]$, tzn. $u(t) = z_1 + t\cdot h$, $t \in [0,1]$.
úsečka

Tedy $F(z_1+h) - F(z_1) = \int_u f = \int_0^1 f(z_1+th)\, h\, dt$,
tudíž

$$\frac{F(z_1+h) - F(z_1)}{h} - f(z_1) = \int_0^1 \big(f(z_1+th) - f(z_1)\big)\, dt \xrightarrow{\text{pro } h\to 0} 0,$$

protože

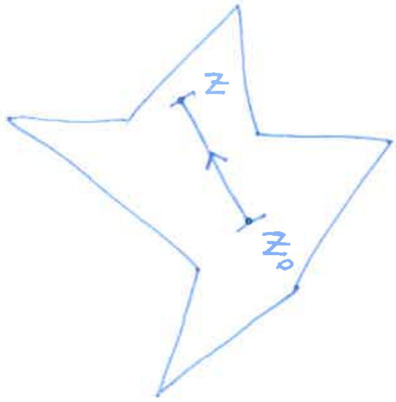
$$\left| \int_0^1 \big(f(z_1+th) - f(z_1)\big)\, dt \right| \leq \max_{z\in[z_1;\, z_1+h]} |f(z) - f(z_1)| \xrightarrow{\text{pro } h\to 0} 0$$

ze spojitosti f v z_1.

Máme, že $F'(z_1) = f(z_1)$. ∎

Označení: (1.) Řekneme, že $M \subset \mathbb{C}$ je hvězdovitá, pokud ex. $z_0 \in M$ (tzv. střed hvězdovitosti), pro který $[z_0; z] \subset M$ pro každý $z \in M$.

Pozn: konvexní $\subsetneq$ hvězdovité

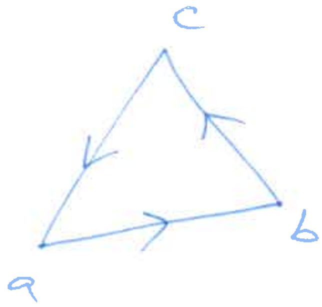


(2.) Řekneme, že $\Delta \subset \mathbb{C}$ je trojúhelník s vrcholy $a, b, c \in \mathbb{C}$, pokud

$$\Delta := \{\alpha a + \beta b + \gamma c \mid \alpha, \beta, \gamma \geq 0,\ \alpha + \beta + \gamma = 1\}$$

konvexní obal a, b, c

a značíme $\partial\Delta := [a; b] \dotplus [b; c] \dotplus [c; a]$.



Připouštíme i degenerované Δ, tzn. a, b, c mohou ležet i na jedné přímce nebo body a, b, c mohou splývat...

DODATEK Nechť f je spojitá funkce na hvězdovité oblasti $G \subset \mathbb{C}$. Je-li

$$(*) \qquad \int_{\partial \Delta} f = 0$$

pro každý trojúhelník $\Delta \subset G$, potom f má na G primitivní funkci.

DŮKAZ: Nechť z_0 je střed hvězdovitosti G. Pro každé $z \in G$ položme $\varphi_z := [z_0; z]$ a

$$F(z) := \int_{\varphi_z} f.$$

Rozumíme, že důkaz $\boxed{F' = f \text{ na } G}$ je zcela analogický (3.) $\Rightarrow$ (1.) předchozí VĚTY, když místo (3.) užijeme $(*)$. ■