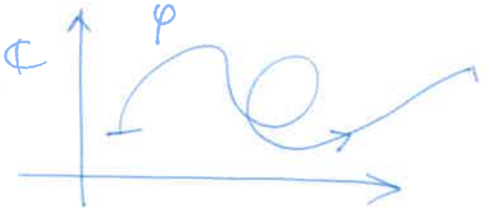
Křivkový integrál

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$



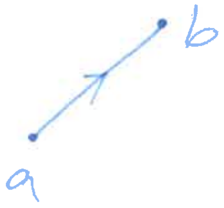
$$\int_\varphi f$$

DEF. Nechť $\varphi: [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$. Potom

(i) φ je <u>křivka</u> (cesta), pokud je φ spojitá;

(ii) φ je <u>regulární křivka</u>, pokud je φ po částech spojitě diferencovatelná, tzn. φ je spojitá na $[\alpha, \beta]$ a ex. dělení $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ takové, že $\varphi|_{[t_i, t_{i+1}]}$ je spojitě diferenc. pro kaž. $i = 0, \dots, n-1$.

Př. 1) <u>úsečka</u>: Nechť $a, b \in \mathbb{C}$. Potom



$$\varphi(t) := a + t \cdot (b-a), \quad t \in [0,1]$$

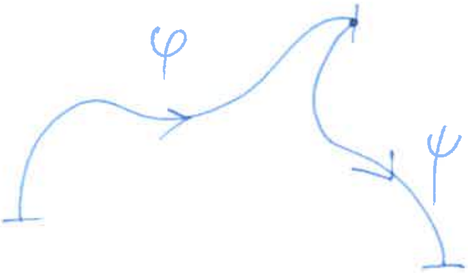
je <u>úsečka</u> z a do b. Značíme $[a;b]$.

<u>Značení</u>: Nechť $\varphi: [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ a $\psi: [\gamma, \delta] \to \mathbb{C}$ jsou (regulární) křivky. Potom jejich <u>součet</u> je (regulární) křivka

$$(\varphi \dotplus \psi)(t) := \varphi(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

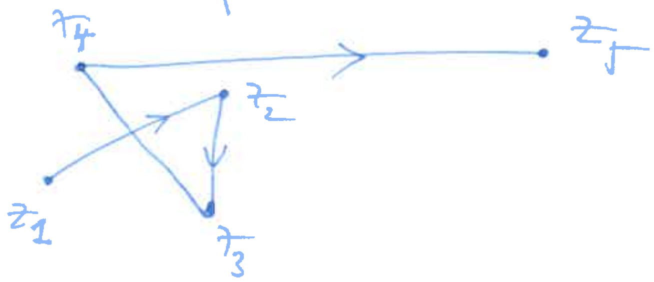
$$:= \psi(t - \beta + \gamma), \quad t \in [\beta, \delta + \beta - \gamma],$$

pokud $\varphi(\beta) = \psi(\gamma)$.

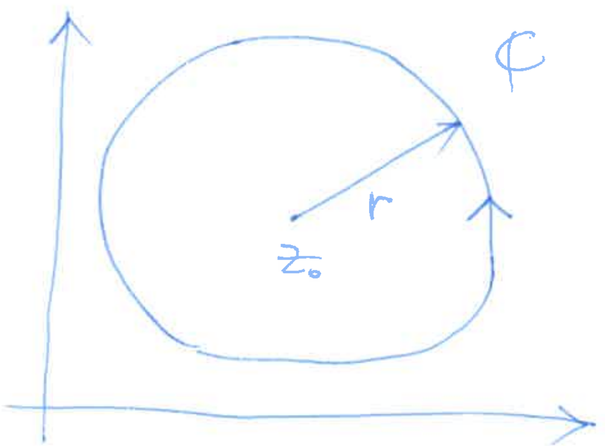


2) Řekneme, že φ je lomená čára v $\mathbb{C}$, ex.-li $z_1, z_2, \dots, z_k \in \mathbb{C}$ taková, že

$$\varphi = [z_1; z_2] \dotplus [z_2; z_3] \dotplus \dots \dotplus [z_{k-1}, z_k]$$



X 3) Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a $r > 0$. Potom



$\varphi(t) := z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

je kružnice probíhaná v kladném smyslu.

POZOR

Pozn: Pro křivku φ její graf $\langle\varphi\rangle := \varphi([\alpha, \beta])$ může být např. čtverec (PEANOVA KŘIVKA)

Úmluva: Pokud neřekneme něco jiného, křivkou budeme rozumět regulární křivku v $\mathbb{C}$.

Připomenutí: jako v MA definujeme pro φ

(i) vše po složkách, např.

$$\varphi'(t) = \varphi_1'(t) + i\varphi_2'(t)$$

$$\int_\alpha^\beta \varphi(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \varphi_1(t)\,dt + i\int_\alpha^\beta \varphi_2(t)\,dt,$$

mají-li pravé strany smysl.

Zde $\varphi(t) = (\underbrace{\varphi_1(t), \varphi_2(t)}_{\text{reálné složky}}) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$.

(ii) Délka křivky: $V(\varphi) := \int_\alpha^\beta |\varphi'(t)|\,dt$, je-li φ regulární

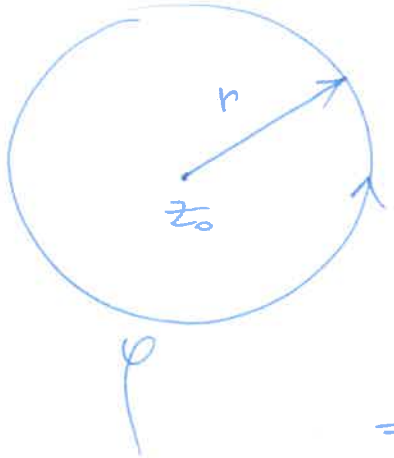
DEF. Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je regulární křivka a $f : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}$ je spojitá. Potom definujeme

$$\int_\varphi f := \int_\alpha^\beta \underbrace{f(\varphi(t))}_{\text{spoj.}}\, \underbrace{\varphi'(t)}_{\text{po částech spoj.}}\,dt \qquad (*)$$

Pozn: (i) Křivkový integrál $(*)$ ex. vždy jako Riemannův.

(ii) Píšeme také $\int_\varphi f(z)\,dz$

Př. Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ a $\varphi(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.



Potom $\displaystyle\int_\varphi (z - z_0)^n \, dz =$

$$z = \varphi(t)$$
$$dz = \varphi'(t)\,dt$$
$$dz = ire^{it}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} r^n e^{int} \cdot ire^{it}\,dt = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\,dt$$

$$\begin{cases} = ir^{n+1} \left[\dfrac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \right]_{t=0}^{2\pi} = 0, & \text{je-li } n \in \mathbb{Z},\ n \neq -1; \\ = 2\pi i, & \text{je-li } n = -1. \end{cases}$$

[na cvičení]

$\boxed{\text{OTÁZKA}}$ Jaký je vztah $\int f$ k reálným křivkovým integrálům, které znáte z ~~MA~~ 2?

2. druhu

Geom. 1

Základní vlastnosti

(1.) Je-li φ křivka, f a g jsou spojité funkce na $\langle\varphi\rangle$ a $A, B \in \mathbb{C}$, potom

$$\int_{\varphi} (Af + Bg) = A \int_{\varphi} f + B \int_{\varphi} g .$$

(2.) Je-li φ křivka a f je spojitá na $\langle\varphi\rangle$, potom

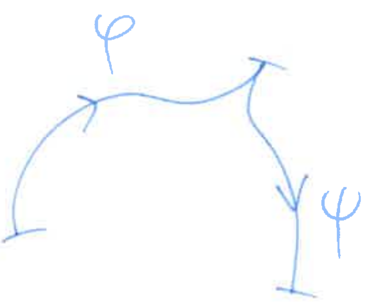
$$\left| \int_{\varphi} f \right| \leq \underbrace{\max_{\langle\varphi\rangle} |f|}_{=: M} \cdot V(\varphi)$$

⌈ Skutečně, máme

$$\left| \int_{\varphi} f \right| = \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} \underbrace{|f(\varphi(t))|}_{\leq M} |\varphi'(t)|\, dt$$

$$\leq M \cdot V(\varphi). \quad ⌋$$

③ Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\psi : [\gamma, \delta] \to \mathbb{C}$ jsou křivky a $\varphi(\beta) = \psi(\gamma)$. Potom



$$\int_{\varphi \dotplus \psi} f = \int_{\varphi} f + \int_{\psi} f \quad \text{a}$$

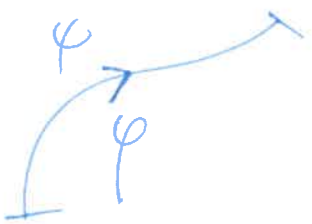
$$\int_{\dot{-}\varphi} f = - \int_{\varphi} f,$$

kde $(\dot{-}\varphi)(t) := \varphi(-t)$, $t \in [-\beta, -\alpha]$ je <u>opačná křivka</u> k φ.

④ Křivk. integrál <u>nezávisí na parametrizaci křivky</u>:

Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{C}$ je křivka, $\omega : [\gamma, \delta] \xrightarrow{\text{na}} [\alpha, \beta]$ je spojitě diferenc., s $\omega' > 0$ a $\psi := \varphi \circ \omega$.

Potom
$$\int_{\varphi} f = \int_{\psi} f.$$



Důkaz: $$\int_{\psi} f = \int_{\gamma}^{\delta} f(\varphi(\omega(t)))\, \underbrace{\varphi'(\omega(t))\, \omega'(t)}_{\psi'(t)}\, dt \underset{\substack{\tau = \omega(t) \\ \text{subst.}}}{=}$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(\tau))\, \varphi'(\tau)\, d\tau = \int_{\varphi} f. \quad \blacksquare$$

DEF. Řekneme, že funkce f má na otevřené $G \subset \mathbb{C}$ primitivní funkci F, pokud $F' = f$ na G.

Př. $\frac{z^{n+1}}{n+1}$ je PF k z^n na $\mathbb{C}$ pro $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

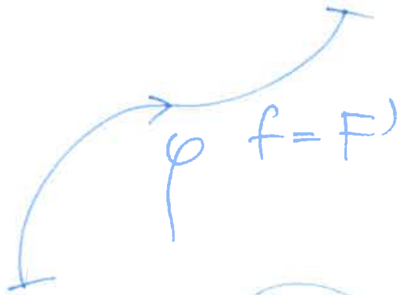
na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ pro $n = -2, -3, \dots$

$\boxed{\text{Jakou PF má } 1/z\,?}$

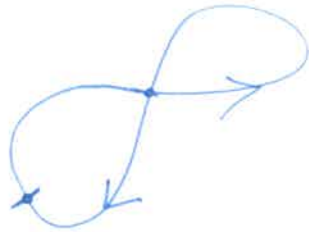
Věta (o výpočtu křivk. integrálu pomocí PF)

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a f má na G primitivní funkci F. Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \to G$ je křivka (reg.) a f je spojitá*) na $\langle \varphi \rangle$. Potom

(i) $\int_\varphi f = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$ a



(ii) $\int_\varphi f = 0$, je-li φ uzavřená, tzn. $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$,



Pozn: *) Ukážeme si, že funkce f mající na G primit. fci je tam holomorfní, tudíž i spojitá.

Důkaz: Máme

$$\int_\varphi f = \int_\alpha^\beta \underbrace{f(\varphi(t))\,\varphi'(t)}_{\overset{?}{=}\ \frac{d}{dt}\left(F(\varphi(t))\right)}\,dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$$

$\frac{d}{dt}\left(F(\varphi(t))\right)$ až na konečně mnoho $t \in [\alpha,\beta]$

neboli $F \circ \varphi$ je zobecněná PF k integrandu.

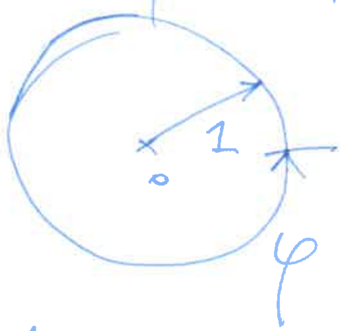
(?) plyne CR rovnic, protože

$$\frac{d}{dt}\left(F(\varphi(t))\right) = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}}_{F'} \varphi_1' + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y}}_{iF'} \varphi_2' = F'(\varphi(t))\,\varphi'(t).$$

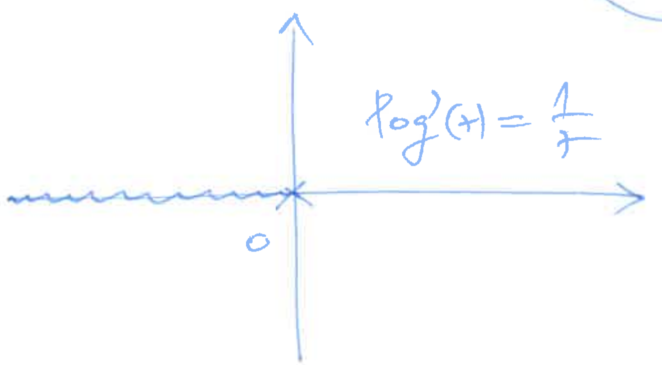
▨

Př. 1) $\frac{1}{z}$ je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, ale na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nemá PF, protože víme

$$\int_\varphi \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0 \quad \text{pro} \quad \varphi(t) = e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$$



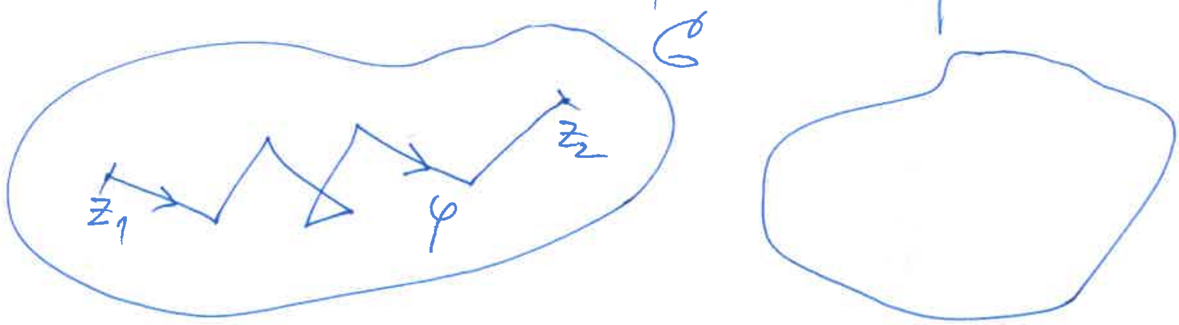
2) $\frac{1}{z}$ má na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ PF $\log(z)$



VSUVKA o souvislosti: (konec MA4)

1. Oblasti v $\mathbb{C}$:

DEF. Řekneme, že otevřená $G \subset \mathbb{C}$ ($\mathbb{R}^n$) je oblast, pokud $\forall z_1, z_2 \in G$ existuje lomená čára $\varphi : [a,b] \longrightarrow G$ taková, že $z_1 = \varphi(a)$ a $z_2 = \varphi(b)$.*)



$\boxed{\text{Fakt}}$ Je-li $G \subset \mathbb{C}$ otevřená, potom

$$G = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha ,$$

kde I je nejvýše spočetná, každá G_α je oblast a $G_\alpha \cap G_\beta = \emptyset$, je-li $\alpha \neq \beta$. (tzv. komponenty G)

píšme?

Důkaz: Pro $z_1, z_2 \in G$ položme $z_1 \sim z_2$, pokud ex. lomená čára φ v G spojující z_1 a z_2, viz *).
Relace $\sim$ je ekvivalence, tzn. $z \sim z$;

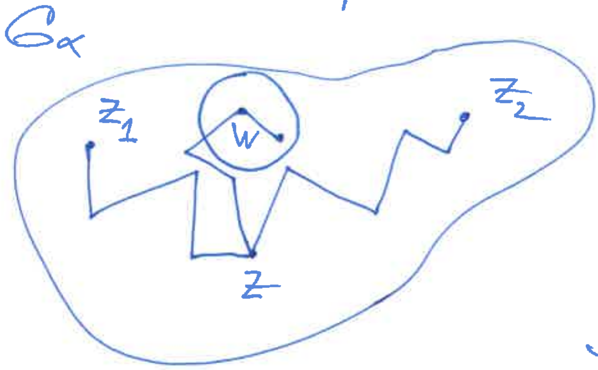
$$z_1 \sim z_2 \Rightarrow z_2 \sim z_1;$$
$$z_1 \sim z_2,\ z_2 \sim z_3 \Rightarrow z_1 \sim z_3.$$

Označme $\{G_\alpha \mid \alpha \in I\}$ všechny třídy ekvivalence pro $\sim$.

(i) Zřejmě je G_α oblast.

Skutečně nechť $G_\alpha = [z] := \{w \in G \mid z \sim w\}$ pro nějaké $z \in G$. Potom každé $z_1, z_2 \in G_\alpha$ lze v G_α spojit lomenou čarou.

OBR.



Nyní G_α je otevřená. Nechť $w \in G_\alpha$ a okolí $U(w) \subset G$. Potom $U(w) \subset G_\alpha$ protože každý bod z $U(w)$ lze spojit v G_α lomenou čarou s z, viz OBR.

(ii) I je nejvýše spočetná, protože $\forall \alpha \in I$ existuje $z_\alpha \in (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}) \cap G_\alpha$. Zřejmě $z_\alpha \neq z_\beta$, je-li $\alpha \neq \beta$. ∎

2. Souvislost: (později)

Nechť X je metrický prostor. Řekneme, že $M \subset X$ je <u>obojetná</u>, pokud je M <u>otevřená</u> a zároveň <u>uzavřená</u> v X!

<u>Pozn:</u> Vždy $\emptyset, X$ jsou obojetné v X.

<u>DEF.</u> Metrický prostor X je <u>souvislý</u>, pokud jediné <u>obojetné</u> množiny v X jsou právě $\emptyset, X$.

<u>Pozn:</u> X není souvislý, právě když ex. disjunktní otevřené $G_1, G_2 \subset X$, $G_1 \neq \emptyset$, $G_2 \neq \emptyset$ takové, že $X = G_1 \cup G_2$.

[$\Leftarrow$: $M := G_1$ je obojetná, $\emptyset \neq M \subsetneq X$; $\Rightarrow$: podobně] souv 3

Tvr $I \subset \mathbb{R}$ je souvislá $\Leftrightarrow$ I je interval (viz MA4)

jako podprostor

$\boxed{\text{Fakt}}$ Je-li $f: X \to Y$ <u>spojité</u> zobrazení mezi metric. prostory a X je <u>souvislý</u>, potom je $f(X)$ <u>souvislý</u>.

<u>Důkaz:</u> Nechť $\emptyset \neq M \subset f(X)$ je obojetná v $f(X)$. Potom $\emptyset \neq f_{-1}(M) \subset X$ je obojetná v X, tudíž $f_{-1}(M) = X$ a $M = f(X)$. ∎

Tvr Je-li $\varphi: [a,b] \to \mathbb{C}$ spojitá křivka, potom $\langle\varphi\rangle \subset \mathbb{C}$ je <u>souvislá</u>.

souv.

Tvr Je-li X souvislý a $f: X \to \mathbb{Z}$ je spojitá, potom je f konstantní. Zde $\mathbb{Z}$ chápeme jako podprostor v $\mathbb{R}$.

[Skutečně, $\emptyset \neq I \subset \mathbb{Z}$ je souvislá $\Leftrightarrow$ I je jednobodová.]

Fakt Nechť $G \subset \mathbb{C}$ ($\mathbb{R}^n$) je otevřená. NTJE:

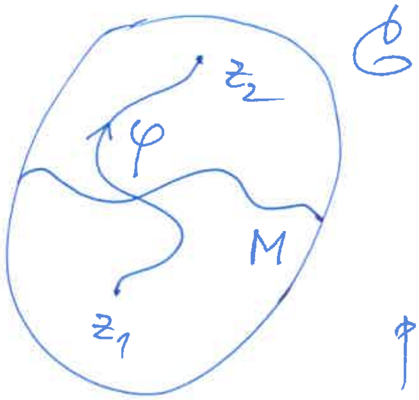
(1.) G je oblast;

(2.) G je <u>křivkově souvislá</u>, tzn. pro každé $z_1, z_2 \in G$ ex. spojitá $\varphi : [a,b] \to G$ taková, že $\varphi(a) = z_1$ a $\varphi(b) = z_2$;

(3.) G je souvislá.

<u>Důkaz:</u> (1.) $\Rightarrow$ (2.), (2.) $\Rightarrow$ (3.): Sporem.

2.: Nechť G není souvislá, tzn. ex. obojetná $\emptyset \neq M \subsetneq G$. Volme $z_1 \in M$ a $z_2 \in G \setminus M$. Podle



(2.) existuje v G spojitá křivka φ spojující z_1 a z_2. Potom $\langle \varphi \rangle$ je souvislý, ale pro $\tilde{M} := M \cap \langle \varphi \rangle$ platí, že $\emptyset \neq \tilde{M} \subsetneq \langle \varphi \rangle$ je obojetná v $\langle \varphi \rangle$, což je spor. ↯

(3.) $\Rightarrow$ (1.): Nechť $z_1 \in G$ a $M \subset G$ je množina všech $z_2 \in G$, které lze v G spojit se z_1 lomenou čarou. Potom $\emptyset \neq M$ je obojetná v G, tudíž $M = G$. Nechť totiž $z_2 \in G$ a okolí $U(z_2) \subset G$. Je-li $z_2 \in M$ (resp. $z_2 \notin M$), potom $U(z_2) \subset M$ (resp. $U(z_2) \cap M = \emptyset$), viz OBR. ∎