Minule: $\mathbb{C}$, $f: \underset{\mathbb{R}^2}{\mathbb{C}} \to \underset{\mathbb{R}^2}{\mathbb{C}}$

DEF $f'(z_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$

$\boxed{\text{CR věta}}$ ex. $f'(z_0) \in \mathbb{C} \iff$ ex. $df(z_0)$ a v z_0 platí (CR) $\dfrac{\partial f_1}{\partial x} = \dfrac{\partial f_2}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = -\dfrac{\partial f_2}{\partial x}$, kde $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$

———— × ————

DEF Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f: G \to \mathbb{C}$. Potom říkáme, že f je na G <u>holomorfní</u>, pokud je f <u>$\mathbb{C}$-diferencovatelná</u> v každém $z_0 \in G$. Prostor všech holomorfních $f: G \to \mathbb{C}$ značíme $\mathcal{H}(G)$. Říkáme, že F je <u>celá</u> funkce, pokud $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Př. <u>Polynom</u> $p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$, $z \in \mathbb{C}$, kde $a_j \in \mathbb{C}$, je celá funkce.

Př. Nechť $R = P/Q$, kde P, Q jsou polynomy, které nemají společné kořeny a $Q \not\equiv 0$. Potom <u>racionální funkce</u> R je holomorfní na

$\mathbb{C} \setminus Q^{-1}(\{0\})$

↑ <u>konečná</u> množina kořenů Q

Elementární funkce v $\mathbb{C}$

Exponenciála

DEF. Položme $\exp(z) := e^x \cdot (\cos y + i \cdot \sin y)$,
$z = x + iy \in \mathbb{C}$.

Vlastnosti:

1. $\exp|_{\mathbb{R}}$ je reálná exponenciála
2. $\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$
3. $\exp'(z) = \exp z$, $z \in \mathbb{C}$

$\ulcorner$ $f(z) = \exp z$

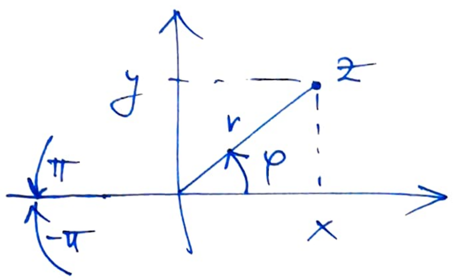
$f_1(x,y) = e^x \cdot \cos y$ $\qquad \frac{\partial f_1}{\partial x} = e^x \cdot \cos y = \frac{\partial f_1}{\partial y}$

$f_2(x,y) = e^x \cdot \sin y$ $\qquad \frac{\partial f_2}{\partial x} = e^x \cdot \sin y = -\frac{\partial f_1}{\partial y}$

zřejmě $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ a (CR) platí všude v $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$.
Z CR rovnic máme $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(z) + i \frac{\partial f_2}{\partial x} = \exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$ $\lrcorner$

4. $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$

Polární tvar komplex. čísla



$x = r\cdot\cos\varphi$
$y = r\cdot\sin\varphi$

$z = x + iy = r\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$
$= |z|\cdot e^{i\varphi}$, kde $r = |z|$ a
φ je <u>argument</u> z.

<u>Označení</u>: Nechť $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Potom položme

$$\arg z := \{\varphi \in \mathbb{R} \mid z = |z|e^{i\varphi}\}.$$

Máme $\arg z \cap (-\pi, \pi] = \{\varphi_0\}$ a

$$\arg z := \varphi_0$$

je tzv. <u>hlavní hodnota argumentu</u> z.

$\boxed{\text{POZOR}}$ Někdo užívá jiné označení, např. [Kopáček] $\arg z \leftrightarrow \arg z$, nebo místo $(-\pi, \pi]$ např. $[0, 2\pi)$.

Platí (i) $\arg z = \{\arg z + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$;

(ii) funkce $\arg : \mathbb{C}\setminus\{0\} \xrightarrow{na} (-\pi, \pi]$ je konstantní na polopřímkách vycházejících z 0, $\arg$ je spojitá na $\mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$, ale $\arg$ <u>není</u> spojitá v žádném $z \in (-\infty, 0]$.

5. $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

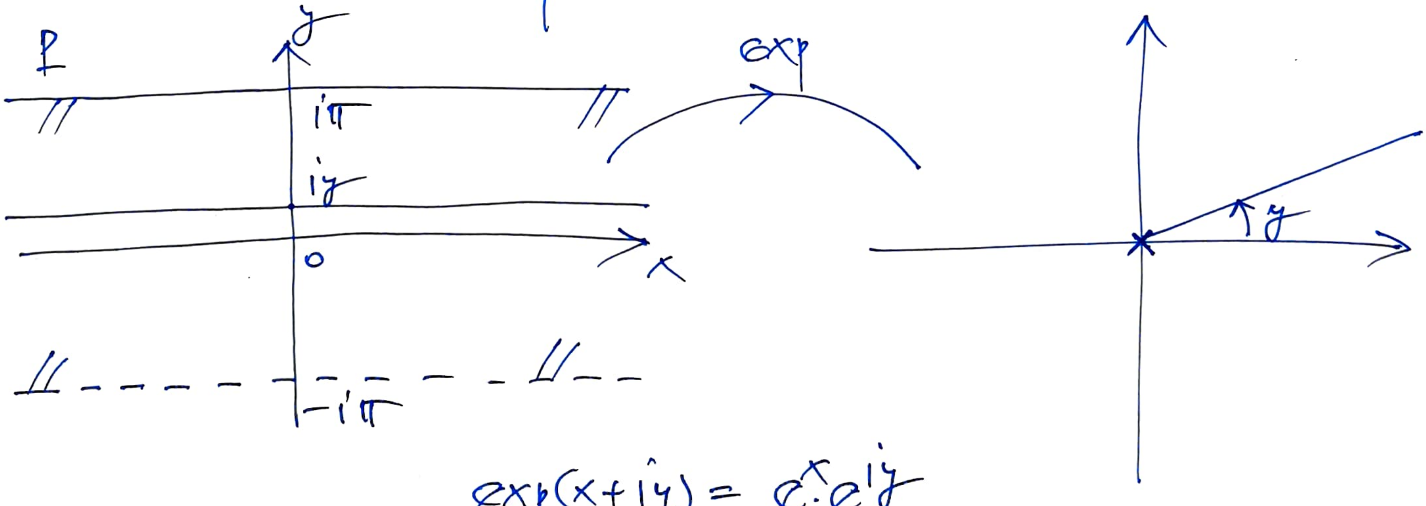
6. exp není prosté na $\mathbb{C}$, je $2\pi i$-periodická a platí dokonce:

$$\exp z = \exp w \iff \exists k \in \mathbb{Z}: w = z + 2k\pi i$$

7. Nechť $P := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \in (-\pi, \pi]\}$.

Potom $\exp|_P$ je prosté a $\exp(P) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

[Na cvičení. Plyne z OBR.



$$\exp(x+iy) = e^x \cdot e^{iy}$$

Logaritmus

Pro daná $z \in \mathbb{C}$ řešme $e^w = z$.

- Pro $z = 0$ nemá řešení.
- Pro $z \neq 0$ je $z = |z| e^{i \arg z} = e^{\log|z| + i \arg z} = e^w$

$\iff \exists k \in \mathbb{Z}: \; w = \log|z| + i \cdot \arg z + 2k\pi i$

DEF. Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Položme

(i) $\operatorname{Log} z := \{ w \in \mathbb{C} \mid e^w = z \}$ a

(ii) $\log z := \log|z| + i \cdot \arg z$ ... tzv. hlavní hodnota logaritmu z

Vlastnosti: Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(1.) $\operatorname{Log} z = \{ \log z + 2k\pi i \mid k \in \mathbb{Z} \}$ a

$\log z = \left(\exp|_{\mathbb{P}}\right)_{-1}$ (jasné)

(2.) $\log$ není spojitý v žádném $z \in (-\infty, 0]$,

ale $\log \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$ a

$$\log'(z) = \frac{1}{z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

(3.) $$\log(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1 \quad (\text{později})$$

$\boxed{\text{Pozor}}$ na počítání s logaritmem ! (cvičení) 14.5

- $\exp(\log z) = z$, $\underbrace{\log(\exp z)}_{2\pi i - \text{perioda}} \neq z$

- $\log(z \cdot w) \not\equiv \log z + \log w$,

  např. $0 = \log 1 = \log((-1)\cdot(-1)) \not\equiv 2 \cdot \log(-1) = 2\pi i$

———— × ————

Další elementární funkce na cvičení.

VĚTA (o holomorfní inverzi) 15.

Nechť f je prostá holomorfní funkce na otevřené $G \subset \mathbb{C}$. Potom $f' \neq 0$ na G, $\Theta := f(G)$ je otevřená v $\mathbb{C}$, f_{-1} je holomorfní ve Θ a
$$(f_{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f_{-1}(w))}, \quad w \in \Theta.$$

Pozn: Neplatí v $\mathbb{R}$! Např. pro $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ je $f'(0) = 0$ a $f_{-1}(x) := \sqrt[3]{x}$, $x \in \mathbb{R}$ není $\mathbb{R}$-dif. v 0.

Důkaz: Obecně v $\boxed{KA}$. Dokážeme slabou verzi za předpokladu, že $f' \neq 0$ na G a f' je ve G spojitá. Potom je f ve $G \subset \mathbb{R}^2$ (reálný) difeomorfismus, protože f je prostá, třídy C^1 a ve G platí, že
$$J_f := \det\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y}\end{pmatrix} \overset{(CR)}{=} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 =$$
jakobián
$$= \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 = |f'|^2 \neq 0.$$

Tedy $\Theta \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená, $f_{-1} \in C^1(\Theta)$ a
$$(df_{-1})(w_0) = (df(z_0))_{-1},$$
je-li $z_0 \in G$ a $f(z_0) = w_0$.

16.

Ponieważ $df(z_0)h = f'(z_0)h$, $h \in \mathbb{C}$, mamy, że $f'(z_0) \neq 0$ i $df_{-1}(w_0)h = \frac{1}{f'(z_0)}h$, $h \in \mathbb{C}$.

Tedy $f_{-1}'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$. ▨

<u>Pozn:</u> Ex.-li $f'(z_0) \in \mathbb{C}$, potom jakobián
$$J_f(z_0) = |f'(z_0)|^2.$$

Př: Na $P^0 = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \in (-\pi, \pi) \}$ je
$$f := \exp|_{P^0}$$
prostá, holomorfní, $f' = \exp \neq 0$ a f' je spojitá. Dle předchozí věty je $f_{-1} = \log$ na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ holomorfní a
$$\log' z = f_{-1}'(z) = \frac{1}{f'(w)} = \frac{1}{\exp(\log z)} = \frac{1}{z},$$
je-li $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ a $w = \log z$.

Komplexní funkce reálné proměnné

Pro $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, $f(x) = f_1(x) + i f_2(x) =$
$= (f_1(x), f_2(x))$

se vše definuje po složkách — derivace, integrál apod., např.

- $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{df_1}{dx} + i\,\dfrac{df_2}{dx}$,
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + i\int_a^b f_2(x)\,dx$,

mají-li pravé strany smysl. Zde $f_1 = \mathrm{Re} f$ a $f_2 = \mathrm{Im} f$.

$\boxed{\text{LEMMA}}$ Je-li $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ spojitá, potom

$$(*) \quad \left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|.$$

Důkaz: Nechť $c := \int_a^b f$. Potom

$$|c|^2 = \bar{c}c = \int_a^b \bar{c}f = \int_a^b \mathrm{Re}(\bar{c}f) \underset{\mathrm{Re}\,z \le |z|}{\le} \int_a^b |\bar{c}f| =$$

$$= |c| \cdot \int_a^b |f|.$$ Vydělením $|c|$ dostaneme $(*)$. ∎

Pozn: $(*)$ platí pro Riemann. nebo Lebesg. integrovat. funkce.