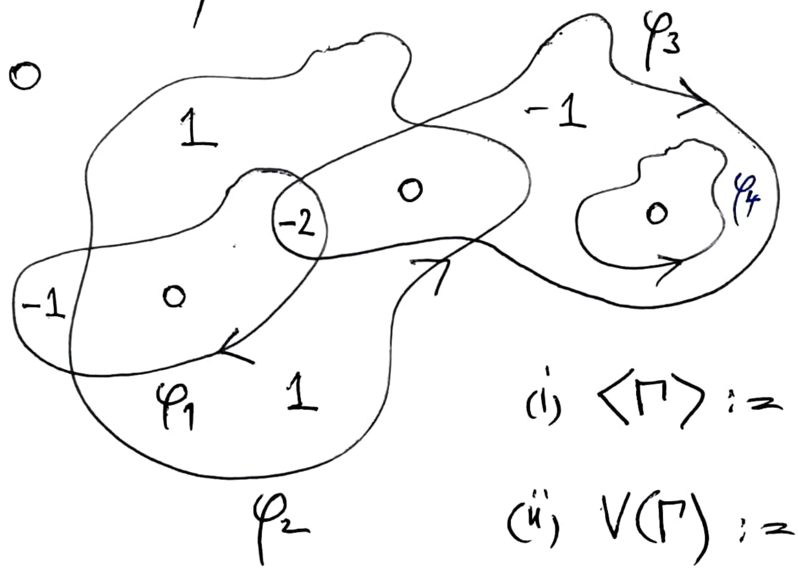
Obecná Cauchyho věta a reziduová věta pro cykly

DEF. Konečnou posloupnost $\Gamma := \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$, kde $m \in \mathbb{N}$ a $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ jsou uzavřené (regulární) křivky v $\mathbb{C}$, budeme nazývat cyklus.



Označení: Nechť $\Gamma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ je cyklus. Definujeme:

(i) $\langle \Gamma \rangle := \bigcup_{k=1}^{m} \langle \varphi_k \rangle$ ... graf Γ

(ii) $V(\Gamma) := \sum_{k=1}^{m} V(\varphi_k)$ ... délka Γ

(iii) $\int_\Gamma f := \sum_{k=1}^{m} \int_{\varphi_k} f$, je-li f spojitá na $\langle \Gamma \rangle$

(iii) $\operatorname{ind}_\Gamma z_0 := \sum_{k=1}^{m} \operatorname{ind}_{\varphi_k} z_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{z - z_0}$,

$z_0 \in \mathbb{C} \setminus \langle \Gamma \rangle$

(iv) $\operatorname{Int} \Gamma := \{ z_0 \in \mathbb{C} \setminus \langle \Gamma \rangle \mid \operatorname{ind}_\Gamma z_0 \neq 0 \}$ ... vnitřek Γ,

$\operatorname{Ext} \Gamma := \{$ —"— $= 0 \}$ ... vnějšek Γ.

Pozn: (i) Rozmyslete, že jako pro křivky je zobrazení

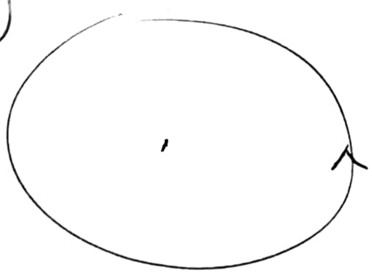
$$z \longmapsto \operatorname{ind}_\Gamma z \in \mathbb{Z}$$

konstantní na každé komponentě $\mathbb{C} \setminus \langle \Gamma \rangle$ a jediná neomezená komponenta $\mathbb{C} \setminus \langle \Gamma \rangle$ leží v $\operatorname{Ext} \Gamma$.

Dcv.

(ii) Zřejmě máme rozklad $\mathbb{C} = \operatorname{Int} \Gamma \cup \langle \Gamma \rangle \cup \operatorname{Ext} \Gamma$, kde $\operatorname{Int} \Gamma$, $\operatorname{Ext} \Gamma$ jsou otevřené a $\langle \Gamma \rangle$, $\operatorname{Int} \Gamma \cup \langle \Gamma \rangle$ jsou kompaktní.

Př.



$\varphi(t) := e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

$\varphi \dot{+} (\dot{-}\varphi)$

Je-li $\psi := \varphi \dot{-} \varphi$, potom

$\langle \psi \rangle = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$,

$\operatorname{Int} \psi = \emptyset$ a $\operatorname{Ext} \psi = \mathbb{C} \setminus \langle \psi \rangle$.

Pozn: Uzavřenou křivku φ chápeme jako cyklus $\Gamma := \{\varphi\}$.

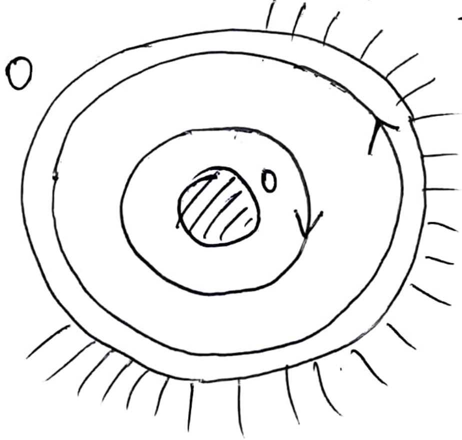
VĚTA (Obecná Cauchyho pro cykly)

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a Γ je cyklus v G, tzn. $\langle \Gamma \rangle \subset G$. Potom platí, že

$$\text{(CV)} \quad \int_\Gamma f = 0 \quad \forall f \in \mathcal{H}(G),$$

právě když $\operatorname{Int} \Gamma \subset G$.

Př. Nechť f je holomorfní funkce na mezikruží $P(z_0, r, R)$, kde $0 \le r < R \le +\infty$.



Nechť $r < r_1 < r_2 < R$ a

$$\varphi_j(t) := z_0 + r_j e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

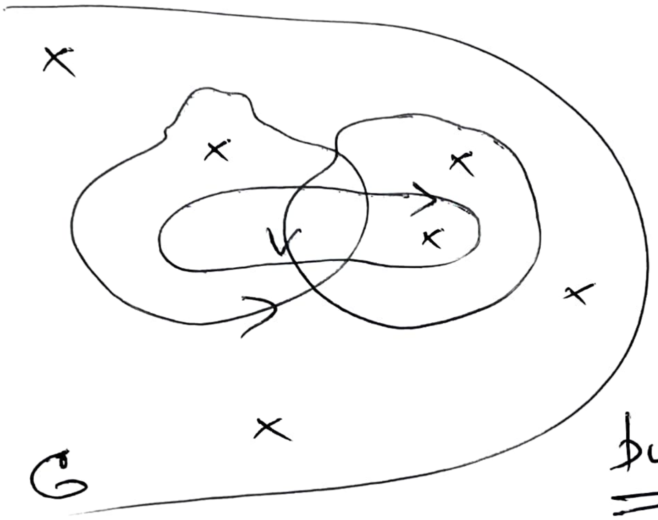
Potom víme, že $\int_{\varphi_1} f = \int_{\varphi_2} f$.

⌈Plyne to z předchozí VĚTY pro $\Gamma := \{\dot{-}\varphi_1, \varphi_2\}$. Protože $\operatorname{Int} \Gamma = P(z_0, r_1, r_2)$, máme

$$0 = \int_\Gamma f = \int_{\varphi_2} f - \int_{\varphi_1} f.$$ ⌋

VĚTA (REZIDUOVÁ PRO CYKLY)

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, Γ je cyklus v G a $\operatorname{Int}\Gamma \subset G$. Nechť $K \subset G \setminus \langle\Gamma\rangle$ je konečná a $f \in \mathcal{H}(G \setminus K)$.



Potom platí

$$(RV) \quad \int_\Gamma f = 2\pi i \cdot \sum_{s \in K} \operatorname{res}_s f \cdot \operatorname{ind}_\Gamma s.$$

DŮKAZ: Zcela analogický jako pro RV na hvězdovitých oblastech. ▨

Důkaz (obecné Cauchyho věty pro cykly)

$\Rightarrow$

(1.) Nechť platí (CV). Je-li $z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$, pak

$$f(z) := \frac{1}{z - z_0} \in \mathcal{H}(G)$$

a podle (CV) je $\operatorname{ind}_\Gamma z_0 = 0$, neboli $z_0 \in \operatorname{Ext} \Gamma$.

$\Leftarrow$

(2.) Nechť $\operatorname{Int} \Gamma \subset G$ a $f \in \mathcal{H}(G)$.

(i) Dokážeme, že $\forall \xi \in G \setminus \langle \Gamma \rangle$

$$(CV_2) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{z - \xi} = f(\xi) \cdot \operatorname{ind}_\Gamma \xi,$$ což je

ekvivalentní s

$$(*) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z) - f(\xi)}{z - \xi}\,dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{z - \xi} - f(\xi) \cdot \operatorname{ind}_\Gamma \xi$$

$$= 0.$$

Položme

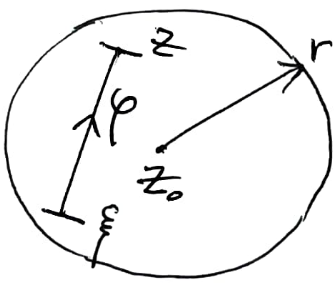
$$g(z, \xi) := \frac{f(z) - f(\xi)}{z - \xi}, \quad z \neq \xi, \ (z, \xi) \in G;$$

$$:= f'(z), \quad z = \xi, \quad \text{—''—}.$$

Potom (a) g je spojitá na $G \times G$: Jasné v bodech (z,ξ), $z \neq \xi$. Nechť $z_0 \in G$. Dokážeme, že g je spojitá v (z_0, z_0). Nechť $\varepsilon > 0$. Protože f' je spojitá v $z_0 \in G$, existuje $r>0$, že $U(z_0,r) \subset G$ a $\forall z \in U(z_0,r)$:

$$(\times) \quad |f'(z) - f'(z_0)| \leq \varepsilon$$

Je-li $z, \xi \in U(z_0,r)$ a $z \neq \xi$, potom pro úsečku



$$\varphi(t) := \xi + t(z - \xi), \quad t \in [0,1]$$

platí $f(z) - f(\xi) = \int_\varphi f' =$

$$= \int_0^1 f'(\varphi(t))\,dt \cdot (z - \xi),$$

tudíž $|g(z,\xi) - g(z_0,z_0)| = \left| \int_0^1 (f'(\varphi(t)) - f'(z_0))\,dt \right| \overset{(\times)}{\leq} \varepsilon.$

(b) $\forall z \in G$: $g(z,\cdot) \in \mathcal{H}(G)$: Jasné pro $\xi \neq z$. V $\xi = z$ je ale odstranitelná singularita.

Položme $h(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma g(z,\xi)\,dz$, $\xi \in G$.

Podle věty o derivování integrálu podle komplexního parametru je $h \in \mathcal{H}(G)$.
Je-li $\xi \in G \cap \operatorname{Ext}\Gamma$, potom z (*) máme

$$h(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-\xi}\,dz.$$

Položme ——— || ———, $\xi \in \operatorname{Ext}\Gamma \setminus G$
ot.

Potom h je holomorfní na G i na $\operatorname{Ext}\Gamma$, tedy i na celém $\mathbb{C} = G \cup \operatorname{Ext}\Gamma$.
Ukažme, že h je omezená. Potom z LIOUVILLE-ovy věty je h konstantní. Skutečně, máme

$$\lim_{\xi\to\infty} h(\xi) = 0.$$

Nechť $\langle\Gamma\rangle \subset U(0,R)$. Je-li $|\xi| > R$, potom $\xi \in \operatorname{Ext}\Gamma_a$

$$|h(\xi)| \le \frac{1}{2\pi} V(\Gamma) \cdot \max_{\langle\Gamma\rangle} |f| \cdot \frac{1}{|\xi| - R} \xrightarrow[\xi\to\infty]{} 0,$$

protože $|z-\xi| \ge |\xi| - R$.

Tedy $h = 0$ na $\mathbb{C}$, speciálně platí (CV$_z$).

(ii) Zvolme $\xi \in G \setminus \langle \Gamma \rangle$ a položme

$$f_1(z) := (z-\xi)\, f(z), \quad z \in G.$$

Podle (CV_z) je

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma \frac{f_1(z)\,dz}{(z-\xi)} \overset{(CV_z)}{=}$$

$$= 2\pi i \cdot \underbrace{f_1(\xi)}_{\overset{!}{=}\,0} \cdot \operatorname{ind}_\Gamma \xi = 0. \quad \blacksquare$$

V důkazu potřebujeme tuto větu o derivování integrálu podle komplexního parametru.

<u>VĚTA</u>: Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a Γ je cyklus. Nechť g je spojitá funkce na $\langle \Gamma \rangle \times G$ a $\forall z \in \langle \Gamma \rangle : g(z,\cdot) \in \mathcal{H}(G)$.

Potom je funkce

$$h(\xi) := \int_\Gamma g(z,\xi)\,dz, \quad \xi \in G$$

holomorfní.

DŮKAZ: Zřejmě je h spojitá na G.

Nechť Δ je trojúhelník v G. Potom

$$\int_{\partial\Delta} h = \int_{\partial\Delta}\left(\int_{\Gamma} g(z,\xi)\,dz\right)d\xi \overset{\text{FUBINI}}{=}$$

$$= \int_{\Gamma}\left(\underbrace{\int_{\partial\Delta} g(z,\xi)\,d\xi}_{\overset{\text{GOURSAT}}{=}\,0}\right)dz = 0.$$

Z MORERovy věty plyne, že $h \in \mathcal{H}(G)$. ▨

<u>VĚTA</u> (obecná Cauchyova pro cykly)

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a Γ je cyklus v G.
Potom platí

(CV) $\int_\Gamma f = 0 \quad \forall f \in \mathcal{H}(G)$,

právě když $\operatorname{Int} \Gamma \subset G$

<u>Pozn:</u> Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je <u>hvězdovitá oblast</u>.
Potom platí
(JS) $\operatorname{Int} \Gamma \subset G$ pro každý cyklus Γ v G.

[Plyne z předchozí věty a Cauchyovy věty pro hvězdovité oblasti.]

OTÁZKA Charakterizujte $G \subset \mathbb{C}$ otevřené, pro které platí (JS).

<u>VĚTA</u>: Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená. Potom platí (JS), právě když $S \setminus G$ je souvislá.

<u>DŮKAZ</u>: $\boxed{\Rightarrow}$ TĚŽŠÍ. BUDE v $\boxed{\text{KA1}}$.

[⇐] Nechť Γ je cyklus v G. Položme

$\operatorname{ind}_\Gamma \infty = 0$. Potom zřejmě $\operatorname{ind}_\Gamma : \mathbb{S} \setminus \langle \Gamma \rangle \to \mathbb{Z}$ je spojitá, tudíž konstantní na každé komponentě $\mathbb{S} \setminus \langle \Gamma \rangle$.

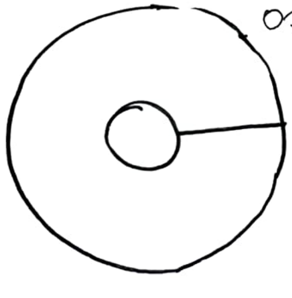
Speciálně, máme $\operatorname{ind}_\Gamma s = 0 \ \forall s \in \mathbb{S} \setminus G$. Tedy $\operatorname{Int} \Gamma \subset G$. ∎

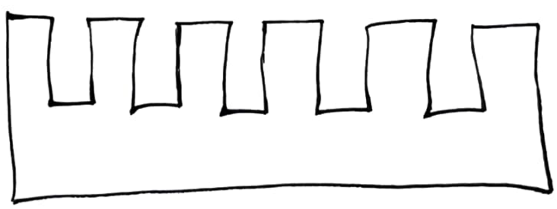
~~Poznámka: (i) Hvězdovitá~~

DEF. Oblast $G \subset \mathbb{C}$ se nazývá jednoduše souvislá (j.s.), pokud $\mathbb{S} \setminus G$ je souvislá.

Poznámka: (i) Hvězdovité oblasti $\subsetneq$ j.s. oblasti

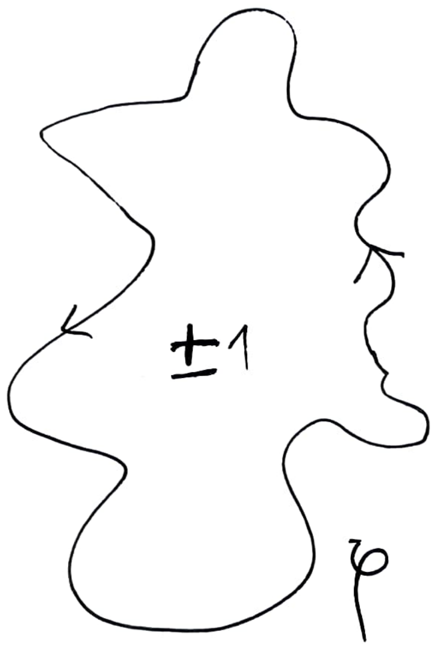
KONVEXNÍ OBLASTI $\subsetneq$





(ii) Je-li $G \subset \mathbb{C}$ j.s. oblast, potom v Cauchyově a reziduové větě je podmínka "$\operatorname{Int} \Gamma \subset G$" splněna automaticky, je-li Γ cyklus v G.

DEF. Řekneme, že uzavřená spojitá křivka $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je Jordanova, pokud $\varphi|_{[\alpha,\beta)}$ je prosté zobrazení.



Pozn: Pojem indexu, vnitřku a vnějšku lze zobecnit i pro spojité uzavřené křivky.

VĚTA (Jordanova) Nechť φ je Jordanova křivka v $\mathbb{C}$. Potom $\operatorname{Int}\varphi$ a $\operatorname{Ext}\varphi$ jsou oblasti a $\mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle = \operatorname{Int}\varphi \cup \operatorname{Ext}\varphi$.
Navíc buď $\operatorname{ind}_\varphi s = 1 \ \forall s \in \operatorname{Int}\varphi$,
anebo $= -1$ —〃—.

DŮKAZ: TĚŽKÝ, NEBUDE.

— CV 12 —